基于奇异应力函数的弹性碰撞新方法

Toyohiko Aiki 数学、物理与计算机科学系，理学院，日本女子大学，日本东京文京区目白台 2-8-1，邮编 112-8681，aikit@fc.jwu.ac.jp

Chiharu Kosugi 科学与技术创新研究生院，山口大学，日本山口县山口市吉田 1677-1，邮编 753-8511，ckosgi@yamaguchi-u.ac.jp

arXiv:2601.02639v1 [math.AP] 6 Jan 2026

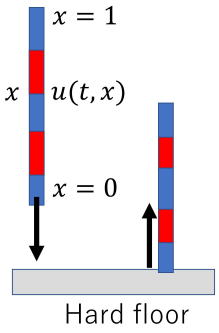
摘要。橡胶杆与坚硬地面的碰撞可视为弹性材料障碍问题的一个简单实例。本文提出了一种描述碰撞现象的新数学模型，该模型应用了我们近期研究的带奇异应力函数的梁方程。正如相关研究所述，我们建立了一种处理奇异应力函数的数学方法。本文通过观察数值结果，展示了所建模型的有效性。此外，我们还给出了该模型作为初边值问题时的存在性与唯一性结果。

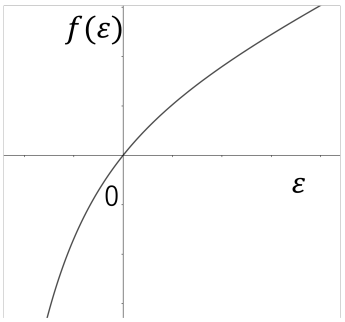
1 建模

我们考虑在时刻 0 将一根橡胶杆竖直落到坚硬地面上。显然，杆会与地面碰撞并多次从地面弹起。本文旨在提出一种新的碰撞数学模型，并从数学上求解该模型。如图1所示，我们假设弹性杆是一维材料，其自然长度为 1。此外，对于自然状态下的原始位置 $x \in [0,1]$，$u = u(t,\ x)$ 表示 x 在时刻 $t \in [0,T]\ 0 < T < \infty$的高度，其中地面表面的高度为 0。通常，弹性材料动力学用形变来描述；然而，在这里我们强调，我们采用高度（即位置）作为处理动力学的主要变量。

最近，我们通过应用具有奇异性的应力函数，研究了弹性材料动力学；其示例见图 2。该方法在[3]中提出，用于分析橡胶形状的数学模型。在此，我们利用奇异函数 f 和 σ_b（见图 3），提出了一个初始边界值问题，其未知函数为高度 u： $Q(T) \to \mathbb{R}$ 满足

$$u_{tt} + \gamma u_{xxxx} - f(\varepsilon)_x - \mu u_{txx} = g \text{ in } Q(T), \tag{1.1}$$
$$\gamma u_{xxx} - f(\varepsilon) - \mu u_{tx} = 0, u_{xx} = 0 \text{ at } x = 1 \text{ on } (0,T), \tag{1.2}$$
$$\gamma u_{xxx} - f(\varepsilon) - \mu u_{tx} + \sigma_b(u(t)) = 0, u_{xx} = 0 \text{ at } x = 0 \text{ on } (0,T), \tag{1.3}$$
$$u(0) = u_0,\ \ u_t(0) = v_0 \text{在 } (0,\ \ 1), \tag{1.4}$$





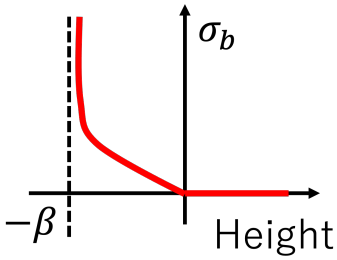


图1：橡胶杆的碰撞　图2：应力函数 f　　图3：　σ_b

其中 $Q(T) = (0,T) \times (0,1)$，应变 ε 由 $\varepsilon = |u_x| - 1$给出， κ 为杆的弹性常数， γ 为正常数， μ 为黏性常数， g 为重力， $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$和 $\sigma_b : (-\beta,\infty) \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$f(\varepsilon) = \frac{\kappa}{2}(\varepsilon + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\varepsilon)^3}), \tag{1.5}$$

$$\sigma_b(h) = \begin{cases} \kappa_b \left(\dfrac{\beta^3}{(h+\beta)^3} - 1 \right) & \text{for } h \le 0, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.6}$$

β 和 κ_b 是正常数， u_0 和 v_0 分别表示初始高度和速度。

我们的主要数学结果是证明系统 P $=$P$(\mu,\ u_0,\ v_0,\ f,\ \sigma_b) := \{$(1.1) $\sim$(1.4)$\}$的解的存在唯一性，具体内容将在下一节详述。系统 P 的推导基于两个思路：将含奇异应力函数的梁方程用于建模，以及对 Signorini条件进行近似。本节余下部分将推导该系统，并介绍有关弹性碰撞的已有结果。

梁方程是描述弹性材料动力学的著名数学模型，已得到广泛研究，例如 Brokate-Sprekels [4], Racke-Zhang [17]和 Takeda-Yoshikawa [19, 20]的研究。此外，关于平面上弹性曲线的收缩与伸展运动 $\mathbb{R}^2$ ，我们列出近期关于含应力函数 $f \in C((-1,\infty))$的梁方程的研究成果 [1, 13, 12, 10, 11] ；该函数具有如下奇异性： $f(\varepsilon) \to -\infty$ 当 $\varepsilon \downarrow -1$时。Ogden[16], 、Simo-Miehe [18] 和 Holzapfel [5]已将此类应力函数用于受压固体力学。在我们的研究中，我们证明，采用奇异应力函数能够有效处理大变形，并得到应变的下界。我们注意到，出于数学和实际应用的考虑，微分方程 (1.1) 中包含黏性项 μu_{txx} 。具体而言，如定理 2.1 (1) 和 (2) 所示，当 $\mu > 0$ 时，我们证明了强解和弱解的存在唯一性。然而，在不含黏性项的情形（$\mu = 0$），我们只能证明弱解的存在唯一性，如定理 2.1 (3) 所述。

接下来，我们讨论边界条件 (1.2) 和 (1.3)。在 $x = 1$ 处，由于杆是自由的，我们施加齐次 Neumann边界条件。另一方面，在 $x = 0$ 处，

杆的边缘与坚硬地面发生碰撞（见图1），这种碰撞被视为一种障碍问题。障碍问题通常用 Signorini条件表示,

$$u(t,0) \geq 0, u_x(t,0) \geq 0, u(t,0) \cdot u_x(t,0) = 0 \text{ for } t \in [0,T]. \tag{1.7}$$

Signorini条件不仅应用于弹性材料的接触问题，也应用于多孔介质中非稳态饱和水流的数学描述 Hornung[6]。正如 [6], 所述，许多作者研究了与抛物型微分方程相伴的Signorini条件，因为我们可以通过应用单调算子理论证明问题的适定性。然而，关于波动方程的研究成果并不多。例如，Lebeau-Schatzman [14] 证明了半空间中的存在唯一性，Kim [8] 证明了一般区域中弱解的存在，并尝试了多种方法。最近，Kashiwabara 和 Itou [7] 证明了具有动态型Signorini条件和边界上的Tresca摩擦条件的线弹性问题存在唯一解。粗略地说，将(1.7)改写为与他们的方法一致，可得

$$u(t,0) + \delta u_t(t,0) \geq 0, u_x(t,0) \geq 0, (u(t,0) + \delta u_t(t,0)) \cdot (u_x(t,0) = 0 \text{ for } t \in [0,T],$$

其中 δ 为正常数。如上所述，接触问题仍未得到解决。本文的主要目的是提出一种解决接触问题的新方法。该方法的核心思想基于如下假设：法向力源于坚硬地面的弹性。在此假设下，我们施加边界条件(1.3)，其中 σ_b 表示地面弯曲产生的应力， β 表示弯曲极限。因此，我们得到系统P。我们注意到， σ_b 在 $\mathbb{R}$ 上利普希茨连续的类似问题曾在 [3] 中作为橡胶泡沫的数学模型进行研究。

在本节末尾，我们给出图4和图5，分别表示 $\mu = 0$ 和 $\mu > 0$的 P 的数值解。在这些结果中，我们将区间划分为 N个小段，划分方式为$N = 5$ 和 $\gamma = 0$，每条曲线表示各划分点的高度。从图中显然可以看出，对于 $\mu = 0$，呈现周期行为；而对于$\mu > 0$，则呈现衰减。由此我们推断， $\mu = 0$ 和 $\mu > 0$ 分别对应于恢复系数等于 1 和小于 1 的情况。这里需要指出的是，我们未来的研究课题是为黏性项找到更恰当的数学描述，以表示碰撞现象中的能量衰减。

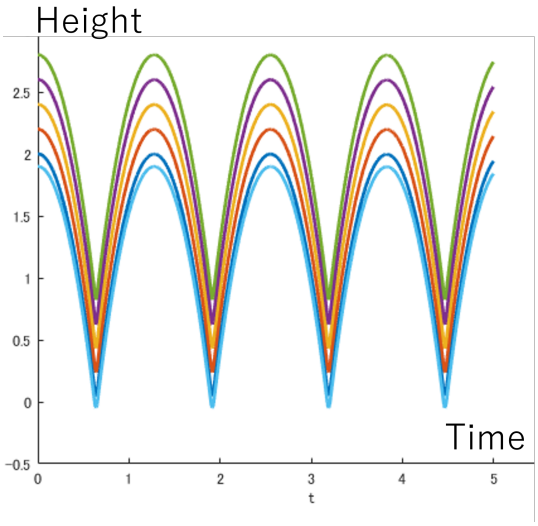


图4： $\mu = 0$。

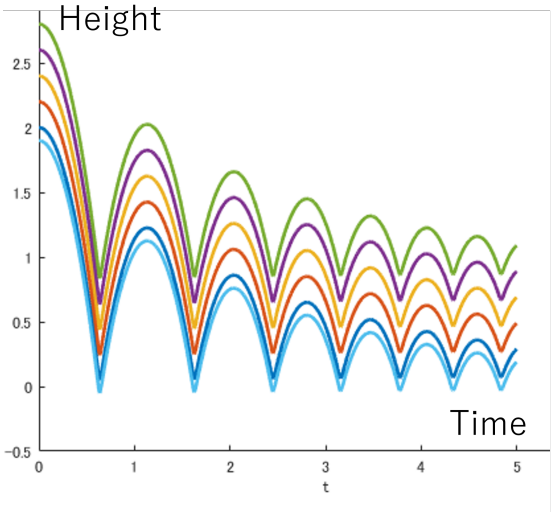


图5： $\mu = 100$。

2 主要结果

在定义 P(μ, u_0, v_0, f, σ_b) 在 $[0,T]$ 上、针对 $T>0$ 和 $\mu \geq 0$的强解与弱解之前，我们先给出关于 f 和 σ_b 的如下假设:

(A1) $f \in C^1((-1, \infty))$ 和 $\sigma_b \in C^1((-\beta, \infty))$，其中 $\sigma_b = 0$ 在 $[0,\infty)$ 上，且 $\sigma_b \geq 0$ 在 $(-\beta, 0]$ 上，其中 β是正常数。此外，存在正常数 N^*，使得对于 $\varepsilon \geq N^*$， $f(\varepsilon) \geq 0$ˆ ˆ。此外， f和 ˆσ_b分别是 f和 σ_b的原函数，且满足 $f(0) =$ ˆ$\sigma_b(0) = 0$:

$$\hat{f}(\varepsilon) \geq -C_f + \frac{c_f}{(1+\varepsilon)^2} \text{ for } \varepsilon > -1,$$

其中 C_f 和 c_f 是正常数。此外，对于任意 $N > 0$，存在正常数 δ_N，使得 ˆ$\sigma_b(r) \leq N$蕴含 $r \geq -\beta + \delta_N$。

显然，对于分别由 (1.5) 和 (1.6) 给出的 f 和 σ_b，(A1) 成立。

定义2.1. 设 $T>0$、 $\mu>0$ 和 u 是 $Q(T)$上的函数。若以下条件(S1)-(S3)成立，则称函数 u 是P($\mu, u_0, v_0, f, \sigma_b$)在 $[0,T]$上的一个（强）解：(S1) $u \in W^{2,\infty}(0,T; L^2(0,1)) \cap W^{2,2}(0,T; H^1(0,1)) \cap W^{1,\infty}(0,T; H^2(0,1)) \cap L^\infty(0,T; H^4(0,1)) =: S(T)$。(S2) $u_x > 0$在$Q(T)$上，且 $u(t,0) > -\beta$对~~$t \in$~~$[0,T]$成立。(S3) (1.1) - (1.4)按通常意义成立。

定义 2.2. 设 $T>0$、 $\mu>0$ 和 u 是定义在 $Q(T)$ 上的函数。若函数 u 是 P($\mu, u_0, v_0, f, \sigma_b$) 在 $[0,T]$ 上的弱解，则称其满足以下条件 (W1)–(W3)：(W1) $u \in C^1([0,T]; L^2(0,1)) \cap W^{1,2}(0,T; H^1(0,1)) \cap C([0,T]; H^2(0,1)) =: W(T)$。(W2) 在 $Q(T)$ 上有 $u_x > 0$， $u(t,0) > -\beta$ 对于 $t \in [0,T]$，并且 $u(0) = u_0$ 在 (0, 1) 上。

(W3) 有

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q(T)} u_t\eta_t dxdt+\gamma\int_{Q(T)} u_{xx}\eta_{xx}dxdt+\int_{Q(T)} f(u_x-1)\eta_x dxdt+\mu\int_{Q(T)} u_{tx}\eta_x dxdt\\
&=\int_0^1 v_0\eta(0)dx+\int_{Q(T)} g\eta\ dxdt-\int_0^T \sigma_b(u(\cdot,0))\eta(\cdot,0)dt
\end{aligned}
$$

对于任意 $\eta\in\mathcal{T}_0(T):=\{\zeta\in W^{1,2}(0,T;\ L^2(0,1))\cap L^2(0,T;\ H^2(0,1)):\ \zeta(T)=0\}$。

这里，我们注意到，由 $W(T)\subset C(\overline{Q(T)})$，(W2) 对弱解是良定义的。接下来，我们给出弱解的刻画。

注 2.1。令 u 为定义在 $Q(T)$上的函数。u 是 $[0,T]$ 上 $P(\mu,u_0,v_0,f,\sigma_b)$ 的弱解，当且仅当 *(W1)* 和 *(W2)* 成立，且 u 满足

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q(T)} u_t\eta_t dxdt+\int_0^1 u_t(T)\eta(T)dx+\gamma\int_{Q(T)} u_{xx}\eta_{xx}dxdt+\int_{Q(T)} f(u_x-1)\eta_x dxdt\\
&+\mu\int_{Q(T)} u_{tx}\eta_x dxdt\\
&=\int_0^1 v_0\eta(0)dx+\int_{Q(T)} g\eta\ dxdt-\int_0^T \sigma_b(u(\cdot,0))\eta(\cdot,0)dt
\end{aligned}
$$

对于任意 $\eta\in\mathcal{T}(T):=W^{1,2}(0,T;\ L^2(0,1))\cap L^2(0,T;\ H^2(0,1))$。

由于 $u_t\in C([0,T];\ L^2(0,\ 1))$，我们可以立即证明这一备注。

此外，我们定义 $P(\mu,\ u_0,\ v_0,\ f,\ \sigma_b)$ 的一个弱解，且满足 $\mu=0$。

定义2.3。如果下列条件 (W0-1)-(W0-3) 成立，我们称定义在 $Q(T)$ 上的函数 u 是 $P(0,\ u_0,\ v_0,\ f,\ \sigma_b)$ 在 $[0,T]$ 上关于 $T>0$ 的弱解：

(W0-1) $u\in W^{1,\infty}(0,\ T;\ L^2(0,\ 1))\cap L^\infty(0,\ T;\ H^2(0,\ 1)):=W_0(T)$。

(W0-2) 对某个 $\delta>0$，$u_x\geq\delta$ 在 $Q(T)$ 上几乎处处成立，并且 $u(0)=u_0$ 在 $(0,\ 1)$ 上。(W0-3) 有：

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q(T)} u_t\eta_t dxdt+\gamma\int_{Q(T)} u_{xx}\eta_{xx}dxdt+\int_{Q(T)} f(\varepsilon)\eta_x dxdt\\
&=\int_0^1 v_0\eta(0)dx+\int_{Q(T)} g\eta\ dxdt-\int_0^T \sigma_b(u(\cdot,0))\eta(\cdot,0)dt\ \text{for any}\ \eta\in\mathcal{T}_0(T).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

定理 2.1. 令 $\gamma>0,\ g\in\mathbb{R}$，并假设 *(A1)*。

(1) 设 $\mu>0$ 并假设 *(AS)*：

$$
(AS)\begin{cases}
u_0\in H^4(0,1), v_0\in H^2(0,1), u_{0x}>0\ on\ [0,1], u_0(0)>-\beta, u_{0xx}(0)=u_{0xx}(1)=0,\\
\gamma u_{0xxx}(0)-\mu v_{0x}(0)+\sigma_b(u_0(0))=f(u_{0x}(0)-1),\\
\gamma u_{0xxx}(1)-\mu v_{0x}(1)=f(u_{0x}(1)-1).
\end{cases}
$$

则问题 $P(\mu, u_0, v_0, f, \sigma_b)$ 在 $[0,T]$ 上有强解。

(2) 设 $\mu > 0$。若满足以下条件 *(AW)*，则问题 $P(\mu, u_0, v_0, f, \sigma_b)$在 $[0,T]$ 上存在唯一弱解。

(AW) $u_0 \in H^2(0,\ 1)\ v_0 \in L^2(0,\ 1)\ u_0(0) > -\beta$ 且 $u_{0x} > 0$ 在 $[0,1].$ 上

(3) 若满足 *(AW)*，则问题 $P(0, u_0, v_0, f, \sigma_b)$ 在 $[0,T]$ 上存在唯一弱解。

由定义 2.1 和 2.2 可知，$\mathrm{P}(\mu, u_0, v_0, f, \sigma_b)$ 的强解是弱解。也就是说，根据定理 2.1 (2)，强解的唯一性成立。

本文结构安排如下：下一节将证明对于 $\mu > 0$，问题 $\mathrm{P}(\mu, u_0, v_0, f, \sigma_b)$ 的强解和弱解的存在性与唯一性。此外，定理 2.1 (3) 的证明将在最后一节给出。

本文中，为简便起见，我们记 $H = L^2(0,1)$，其范数为 $|\cdot|_H$。此外，我们在此列出证明中会用到的一些不等式：

引理 2.1。（参见 *[3,* 引理 *3.2]*）设 $z \in H^1(0,1)$，且 r_1, r_2 为正常数。*I* f

$$\int_0^1 \frac{1}{|z|^2} dx \le r_1, \quad |z|_{H^1(0,1)} \le r_2,$$

则有

$$|z| \ge \frac{r_2}{\sqrt{2}} \exp(-r_1 r_2^2) \quad on\ [0,1].$$

由此引理，我们可以处理奇异应力函数 f。下一个引理涉及 Sobolev 空间的嵌入。

引理 2.2。存在正常数 C_0，使得

$$|z| \le C_0(|z_x|_H^{1/2}|z|_H^{1/2} + |z|_H)\ on\ [0,1]\ for\ any\ z \in H^1(0,1),$$
$$|z_x|_H \le C_0(|z_{xx}|_H + |z|_H)\ for\ any\ z \in H^2(0,1).$$

3 黏性问题

为了证明 $\mathrm{P}(\mu, u_0, v_0, f, \sigma_b)$ 的解存在性，对于 $\mu > 0$，我们引入如下线性问题（LP）(μ, u_0, v_0, g, F, q)：

$$u_{tt} + \gamma u_{xxxx} - \mu u_{txx} = g + F_x \text{ in } Q(T), \tag{3.1}$$
$$\gamma u_{xxx} - \mu u_{tx} = F, u_{xx} = 0 \text{ at } x = 1 \text{ on } (0,T), \tag{3.2}$$
$$\gamma u_{xxx} - \mu u_{tx} + q = F, u_{xx} = 0 \text{ at } x = 0 \text{ on } (0,T), \tag{3.3}$$
$$u(0) = u_0, u_t(0) = v_0 \text{ on } (0,1), \tag{3.4}$$

其中，g 是一个数，u_0 和 v_0 是定义在 $[0,1],$ 上的初始函数，而 F 和 q 分别是在 $Q(T)$ 和 $[0,T]$ 上定义的给定函数。

本节旨在证明，对于 $\mu > 0$，$\mathrm{P}(\mu,\ u_0,\ v_0,\ f,\ \sigma_b)$ 的解存在唯一性。作为证明的第一步，我们给出以下引理，以保证 $\mathrm{(LP)}(\mu,\ u_0,\ v_0,\ g,\ F,\ q)$ 在 $[0,T]$ 上的弱解和强解存在唯一性。

引理 3.1。令 $\gamma > 0$ 和 $g \in \mathbb{R}$。

(1) 设 $\mu > 0$。若 $u_0 \in H^2(0,1)$, $v_0 \in H$, $F \in L^2(0,T;H)$ 且 $q \in L^2(0,T)$，则问题 *(LP)*(μ, u_0, v_0, g, F, q) 在 $[0,T]$ 上存在唯一的弱解 $u \in W(T)$。也就是说，$u \in W(T)$, $u(0) = u_0$ 以及

$$\begin{aligned} &-\int_{Q(T)} u_t\eta_t dxdt + \gamma\int_{Q(T)} u_{xx}\eta_{xx}dxdt + \mu\int_{Q(T)} u_{tx}\eta_x dxdt - \int_{Q(T)} F\eta_x dxdt \\ &= \int_0^1 v_0\eta(0)dx + \int_{Q(T)} g\eta\, dxdt - \int_0^T q\eta(\cdot,0)dt \quad \text{for } \eta \in \mathcal{T}_0(T). \end{aligned}$$

此外，有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|_H^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}|_H^2 + \mu|u_{tx}|_H^2 \\ &= \int_0^1 gu_t dx - \int_0^1 Fu_{tx}dx + qu_t(\cdot,0) \quad \text{a.e. on } [0,T]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

(2) 设 $\mu > 0$, $u_0 \in H^4(0,1)$, $v_0 \in H^2(0,1)$, $u_{0xx}(0) = u_{0xx}(1) = 0$, $F \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;H^1(0,1))$ 且 $q \in W^{1,2}(0,T)$。若 $\gamma u_{0xxx}(0) - \mu v_{0x}(0) + q(0) = F(0,0)$ 且 $\gamma u_{0xxx}(1) - \mu v_{0x}(1) = F(0,1)$，则问题 *(LP)*$(\mu, u_0, v_0, g, F, q)$ 在 $[0,T]$ 上存在唯一的强解 $u \in S(T)$。

我们注意到，问题 (LP)$(\mu,\ u_0,\ v_0,\ g,\ F,\ q)$ 是线性的，因此很容易得到 (3.5) 和 (3.5)。因此，引理 3.1 可以通过标准方法证明，例如时间离散化方法（参见 [4]和 [9]）。故省略其证明。

为了通过应用巴拿赫不动点定理证明定理 2.1 的 (1) 和 (2)，对于 $N > 0$ 以及在 $Q(T)$ 上给定的函数 $\tilde{u}$，记 (AP)$(\mu,\ u_0,\ v_0,\ \tilde{u},\ f_N,\ \sigma_{bN})$ 为 (LP)$(\mu,\ u_0,\ v_0,\ g,\ f_N(\tilde{u}_x - 1)$ $\sigma_{bN}(\tilde{u}(\cdot,\ 0)))$，其中 f_N 和 σ_{bN} 分别是 f 和 σ_b 的截断函数，即，

$$f_N(r) = \begin{cases} f(N) & \text{for } r \geq N, \\ f(r) & \text{for } -1 < r < N, \end{cases} \quad \sigma_{bN}(r) = \begin{cases} \sigma_b(N) & \text{for } r \geq N, \\ \sigma_b(r) & \text{for } -\beta < r < N, \end{cases} \quad \text{for } r \in \mathbb{R}.$$

这里，我们引入一类函数 $\tilde{u}$，使得问题 (AP)$(\mu,\ u_0,\ v_0,\ \tilde{u},\ f_N,\ \sigma_{bN})$ 有如下弱解：对于 $T > 0$ 和 $\delta_0 > 0$，我们令

$$K(\delta_0, T) = \{\tilde{v} \in X(T) : \tilde{v}_x \geq \delta_0 \text{ a.e. on } Q(T) \text{ and } \tilde{v}(t,0) \geq -\beta + \delta_0 \text{ for a.e. } t \in [0,T]\},$$

其中 $X(T) = L^2(0,T;\ H^2(0,1)) \cap W^{1,2}(0,T;\ H)$。显然，引理 3.1 (1) 意味着，对于 $\tilde{u} \in K(\delta_0, T)$ 和 $\delta_0 > 0$，(AP)$(\mu, u_0, v_0, \tilde{u}, f_N, \sigma_{bN})$ 在 $[0,T]$ 上存在唯一的弱解 u，因为 f_N 和 σ_{bN} 分别在 $[\delta_0 - 1, N]$ 和 $[\delta_0 - \beta, N]$ 上利普希茨连续。下面给出一些关于 (AP)$(\mu, u_0, v_0, \tilde{u}, f_N, \sigma_{bN})$ 的解的一致估计引理。为简单起见，令 Γ_N 为 (AP)$(\mu, u_0, v_0, \tilde{u}, f_N, \sigma_{bN})$ 的解算子，即，对于 $\tilde{u} \in K(\delta_0, T)$，有 $\Gamma_N(\tilde{u}) = u$。

引理 3.2. 令 $\gamma > 0$, $\mu > 0$, $g \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$ 和 $N > 0$，并假设 ***(A1)***。则，$\Gamma_N(\tilde{u}) \in X(T)$ 对于任意 $\tilde{u} \in K(\delta_0, T)$均成立。此外，存在一个正常数 C_1，使得

$$\begin{aligned}&|u_t(t)|_H^2 + |u_{xx}(t)|_H^2 + \int_0^t |u_{x\tau}|_H^2 d\tau \\ \leq& C_1(|v_0|_H^2 + |u_{0xx}|_H^2) + C_1 \int_0^t (|f_N(\tilde{u}_x(\tau) - 1)|_H^2 + |\sigma_{bN}(\tilde{u}(\tau, 0))|^2 + 1) d\tau \end{aligned} \tag{3.6}$$

对于 $0 \leq t \leq T$和 $\tilde{u} \in K(\delta_0、 T)$，其中 $u = \Gamma_N(\tilde{u})$。

证明。根据引理 3.1 (1)，对于任意 $\tilde{u} \in K(\delta_0, T)$，有 $\Gamma_N(\tilde{u}) \in X(T)$。此外，将格朗沃尔不等式应用于 (3.5)，即可容易地证明该引理。 □

这里，利用巴拿赫不动点定理对 Γ_N，我们将证明 $\mathrm{P}_\mu^N(u_0, v_0) := \mathrm{P}(\mu, u_0, v_0, f_N, \sigma_{bN})$ 关于 $\mu > 0$和 $N > 0$的弱解局部存在性，如下述引理所示。

引理 3.3。设 $\gamma > 0$、 $\mu > 0$、 $g \in \mathbb{R}$ 和 $N > 0$，并假设 ***(A1)***。如果条件 ***(AW)*** 成立，则在 $[0, T']$ 上存在唯一的弱解 u，其满足 $P_\mu^N(u_0、 v_0)$，其中某个 $0 < T' \leq T$。此外， T'仅取决于$|u_0|_{H^2(0,\ 1)}$、 $|v_0|_H$、 $\min^{x\in[0,1]} u_{0x}(x)$ 和 $u_0(0)$。

证明。首先，由于 (AW)，我们可以取 $\delta > 0$ 使得在 $[0, 1]$ 上有 $u_{0x} \geq 2\delta$，且 $u_0(0) \geq -\beta + 2\delta$，并令

$$K_1(\delta, T_1, M) = \{\tilde{u} \in K(\delta, T) : |\tilde{u}_{xx}|_H \leq M \text{ and } |\tilde{u}_t|_H \leq M \text{ a.e. on } [0, T_1]\}$$

对于 $M > 0$ 和 $0 < T_1 \leq T$，它们稍后将选为适当的正常数。显然，对于 $\mu > 0$ 和 $N > 0$， $K_1(\delta, T_1, M)$ 在 $X(T_1)$ 中是闭集。

由于存在一个依赖于 M 的正常数 $R_1(M)$，使得

$$|\tilde{u}|, |\tilde{u}_x| \leq R_1(M) \quad \text{a.e. on } Q(T_1) \text{ for } \tilde{u} \in K_1(\delta, T_1, M),$$

(3.6) 意味着存在某个满足以下条件的正常数 $R_2(M)$

$$\begin{aligned}&|\Gamma_N(\tilde{u})_t(t)|_H^2 + |\Gamma_N(\tilde{u})_{xx}(t)|_H^2 + \int_0^t |\Gamma_N(\tilde{u})_{x\tau}|_H^2 d\tau \\ \leq& C_1(|v_0|_H^2 + |u_{0xx}|_H^2) + R_2(M)t \quad \text{for } 0 \leq t \leq T_1 \text{ and } \tilde{u} \in K_1(\delta, T_1, M).\end{aligned}$$

因此，存在正常数 $M > 0$ 和 $T_1 \in (0, T]$ 使得 t

$$|\Gamma_N(\tilde{u})_t(t)|_H^2 + |\Gamma_N(\tilde{u})_{xx}(t)|_H^2 + \int_0^t |\Gamma_N(\tilde{u})_{x\tau}|_H^2 d\tau \leq M^2 \text{ for } 0 \leq t \leq T_1 \text{ and } \tilde{u} \in K_1(\delta, T_1, M). \tag{3.7}$$

在这里，得益于 2.2，很容易看出

$$\begin{aligned}\Gamma_N(\tilde{u})(t, 0) &\geq u_0(0) - \int_0^t |\Gamma_N(\tilde{u})_\tau(\tau, 0)| d\tau \\ &\geq -\beta + 2\delta - 2C_0 \int_0^t (|\Gamma_N(\tilde{u})_{\tau x}|_H + |\Gamma_N(\tilde{u})_\tau(\tau)|_H) d\tau \\ &\geq -\beta + 2\delta - 2C_0(tM + t^{1/2}M) \quad \text{for } 0 \leq t \leq T \text{ and } \tilde{u} \in K(\delta, T, M).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
&\Gamma_N(\tilde{u})_x(t,x)\\
&\geq u_{0x}(x) - |\Gamma_N(\tilde{u})_x(t,x) - u_{0x}(x)|\\
&\geq 2\delta - C_0(|\Gamma_N(\tilde{u})_x(t) - u_{0x}|_H^{1/2}|\Gamma_N(\tilde{u})_{xx}(t) - u_{0xx}|_H^{1/2} + |\Gamma_N(\tilde{u})_x(t) - u_{0x}|_H)\\
&\geq 2\delta - C_0(|\int_0^t (|\Gamma_N(\tilde{u})_{x\tau}|_H d\tau|^{1/2}|\Gamma_N(\tilde{u})_{xx}(t) - u_{0xx}|_H^{1/2} + |\int_0^t (|\Gamma_N(\tilde{u})_{x\tau}|_H d\tau|)\\
&\geq 2\delta - C_0(t^{1/4}M^{1/2}(M^{1/2} + |u_{0xx}|_H^{1/2}) + t^{1/2}M^{1/4}) \text{ for } (t,x) \in Q(T_1) \text{ and } \tilde{u} \in K_1(\delta, T_1, M).
\end{aligned}$$

因此，由 (3.7) 可知，对于任意 $\tilde{u} \in K_1(\delta, T_2, M)$，我们可以取 $T_2 \in (0, T_1]$，使得 $\Gamma_N(\tilde{u}) \in K_1(\delta, T_2, M)$，即 $\Gamma_N\colon K_1(\delta, T_2, M) \to K_1(\delta, T_2, M)$。

为完成弱解存在性的证明，我们证明对于某个 $T_3 \in (0, T_2]$，映射 Γ_N 在 $K_1(\delta, T_3, M)$ 上关于 $X(T_3)$ 的范数是压缩映射。设 $\tilde{u}_i \in K_1(\delta, T_2, M)$，且当 $i = 1$ 时，$u_i = \Gamma_N(\tilde{u}_i)$，2。为简便起见，令 $\tilde{u} = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ 和 $u = u_1 - u_2$。于是，u 是定义在 $[0,T]$ 上的 (LP)$(\mu, 0, 0, 0, F_*, q_*)$ 的弱解，其中 $F_* = f_N(\tilde{u}_{1x} - 1) - f_N(\tilde{u}_{2x} - 1)$，并且在 $[0,T]$ 上 $q_* = \sigma_{bN}(\tilde{u}_1(\cdot, 0)) - \sigma_{bN}(\tilde{u}_2(\cdot, 0))$。因此，由 (3.5) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|_H^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}|_H^2 + \mu|u_{tx}|_H^2 = -\int_0^1 F_* u_{tx} dx + q_* u_t(\cdot, 0) \quad \text{a.e. on } [0,T].$$

由于 (A1) 以及 $K_1(\delta, T_2, M)$ 的定义，存在正常数 C_3，使得在 $Q(T)$ 上几乎处处有 $|F_*| \leq C_3|\tilde{u}_x|$，且对于 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in K_1(\delta, T_2, M)$，在 $(0,T)$ 上几乎处处有 $|q_*| \leq C_3|\tilde{u}(\cdot, 0)|$。借助引理 2.2，利用上述论证，我们推得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|_H^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}|_H^2 + \frac{\mu}{2}|u_{tx}|_H^2 &\leq C_4(|\tilde{u}_x|_H^2 + |\tilde{u}(\cdot, 0)|^2 + |u_t|_H^2)\\
&\leq C_5(|\tilde{u}_{xx}|_H^2 + |\tilde{u}|_H^2 + |u_t|_H^2) \quad \text{a.e. on } [0,T], \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

其中 C_4 和 C_5 是适当的正常数。将格朗沃尔不等式应用于 (3.8)，容易看出，存在某些正常数 C_6 和 C_7，使得以下不等式成立：

$$\begin{aligned}
&|u_t(t)|_H^2 + |u_{xx}(t)|_H^2 + \int_0^t |u_{\tau x}|_H^2 d\tau \leq C_6 M^2 t \quad \text{for } 0 \leq t \leq T_2,\\
&|u|_{X(T_3)} \leq C_7 T_3 |\tilde{u}|_{X(T_3)} \quad \text{for } 0 \leq T_3 \leq T_2,
\end{aligned}$$

其中 $|u|_{X(T_3)} = |u|_{L^2(0,T_3;H^2(0,1))} + |u_t|_{L^2(0,T_3;H)}$。取一个足够小的 $T_3 \in (0, T_2]$，即可对 Γ_N 应用巴拿赫不动点定理。因此，对于 $N > 0$ 和 $\mu > 0$，P_μ^N 的弱解在 $[0, T_3]$ 上存在且唯一。由此，我们证明了该引理。 □

下面我们将证明 P_μ for $\mu > 0$ 的弱解的存在唯一性。

Pro 定理 *2.1*（*2*）的设 $\mu > 0$ 和 $N \geq N^*$。首先，由 (A1) 可知 th at

$$\hat{f}_N(\varepsilon) \geq -C_f + \frac{c_f}{(1+\varepsilon)^2} \text{ for } \varepsilon > -1, \hat{\sigma}_{bN}(r) \leq 0 \text{ for } r > -\beta, \qquad (3.9)$$

ˆ ˆ 其中 f_N和 ˆσ_{bN}分别是 f_N和 σ_{bN}的原函数，且 $f_N(0) =$ˆ$\sigma_{bN}(0) = 0$。

根据引理 3.3，对于某个 $T' \in (0, T]$ $\mathrm{P}_\mu^N(u_0, v_0)$，存在一个弱解 u on $[0, T']$。显然，由引理 3.1 (1) 中的 (3.5)，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t(t)|_H^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}(t)|_H^2 + \mu|u_{tx}(t)|_H^2 \\
=&\int_0^1 g u_t(t)dx - \int_0^1 f_N(u_x(t)-1)u_{tx}(t)dx + \sigma_{bN}(u(t,0))u_t(t,0) \\
=&\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 g u(t)dx - \int_0^1 \hat{f}_N(u_x(t)-1)dx + \hat{\sigma}_{bN}(u(t,0))\Big) \quad \text{for a.e. } t \in [0,T']. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

对 (3.10) 积分后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|u_t(t)|_H^2 + \frac{\gamma}{2}|u_{xx}(t)|_H^2 + \mu\int_0^t |u_{\tau x}|_H^2 d\tau + \int_0^1 \hat{f}_N(u_x(t)-1)dx - \hat{\sigma}_{bN}(u(t,0)) \\
=&\frac{1}{2}|v_0|_H^2 + \frac{\gamma}{2}|u_{0xx}|_H^2 + \int_0^1 \hat{f}_N(u_{0x}-1)dx - \hat{\sigma}_{bN}(u_0(0)) + g\int_0^1 (u(t)-u_0)dx \text{ for } 0 \le t \le T'.
\end{aligned}$$

此外，显然有

$$\int_0^1 u(t)dx \le |u_0|_H + \int_0^t |u_\tau|_H d\tau \text{ for } 0 \le t \le T'.$$

鉴于 (AW)，我们可以取 N_1 使得 $|u_{0x}| \le N_1$ on $[0,1]$ and $u_0(0) \le N_1$。因此，对于 $N \ge N_1$，有 $f_N(u_{0x}-1) = f(u_{0x}-1)$，且 ˆ$\sigma_{bN}(u_0(0)) =$ˆ$\sigma_b(u_0(0))$。这里，令

$$C(u_0, v_0) = \frac{1}{2}|v_0|_H^2 + \frac{\gamma}{2}|u_{0xx}|_H^2 + \int_0^1 \hat{f}(u_{0x}-1)dx - \hat{\sigma}_b(u_0(0)) + g(|u_0|_H - \int_0^1 u_0 dx),$$

(3.9) 保证了

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|u_t(t)|_H^2 + \frac{\gamma}{2}|u_{xx}(t)|_H^2 + \mu\int_0^t |u_{\tau x}|_H^2 d\tau + c_f\int_0^1 \frac{1}{|u_x(t)|^2}dx - \hat{\sigma}_{bN}(u(t,0)) \\
\le& C(u_0,v_0) + C_f + g\int_0^t |u_\tau|_H d\tau \text{ for } 0 \le t \le T' \text{ and } N \ge N_2 := \max\{N^*, N_1\}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

因此，根据格朗沃尔不等式，存在一个与 $N \ge N_2$ 无关的正常数 C_7，使得

$$|u_t(t)|_H^2 + |u_{xx}(t)|_H^2 + \mu\int_0^t |u_{\tau x}|_H^2 d\tau + \int_0^1 \frac{1}{|u_x(t)|^2}dx - \hat{\sigma}_{bN}(u(t,0)) \le C_7 \quad \text{for } 0 \le t \le T'. \qquad (3.12)$$

我们注意到 C_7取决于 T，但与 T'无关。此外，由引理 2.1可知，存在正常数 δ_1，使得 $u_x \ge \delta_1$ 在 $Q(T')$上成立。此外，由 (A1) 和–ˆ$\sigma_{bN}(u(t,0)) \le C_7$可知，对于 $t \in [0,T']$，存在正常数 δ_2，使得

$u(t,0) \geq -\beta + \delta_2$ 对 $t \in [0,T']$成立。事实上，我们可以假设 $u(t,0) < 0$。显然，由于 (A1)，$\hat{\sigma}_{bN}(u(t,0)) = \hat{\sigma}_b(u(t,0))$，从而得到所需的 δ_2。由这些估计可知，$\{u(T')\ u_t(T')\}$ 这一对满足 (AW)。因此，由引理 3.3可得 $\mathrm{P}_\mu^N(u(T')\ v(T'))$ 在 $[T', T'+\hat{T}]$ 上的一个弱解，其中 $\hat{T} \in (0,T]$。根据注 2.1，$\mathrm{P}_\mu^N(u_0,v_0)$ 在 $[0,T'+\hat{T}]$上有一个弱解 u。由于估计 (3.12) 对 $t = T'+\hat{T}$成立，我们可以如引理 3.3 中所述，将该弱解延拓至 $[0,T+2T]$。因此，重复这一论证有限次后，即可得到 $\mathrm{P}_\mu^N(u_0,v_0)$ 在 $[0,T]$上的一个弱解。此外，由 (3.12) 可取正常数 N_3，使得 $u_x \leq N_3$ 在 $Q(T)$上成立，且$u(\cdot,0) \leq N_3$在 $[0,T']$上成立。因此，对于 $N \geq N_3$，有 $f_N(u_x-1) = f(u_x-1)$ 在 $Q(T)$上成立，且$\sigma_{bN}(u(\cdot,0)) = \sigma_b(u(\cdot,0))$ 在 $[0,T]$ 上成立。也就是说，已证明 $\mathrm{P}(\mu,u_0,v_0)$ 在 $[0,T]$上存在弱解。

弱解的唯一性可由引理 3.1 中的 (3.5) 得出。事实上，设u_1和 u_2是 $\mathrm{P}(\mu,u_0,v_0)$ 在 $[0,T]$ 上的弱解，并令 $u = u_1 - u_2$。显然，u是 $\mathrm{LP}(\mu,0,0,0,F,q)$ 在 $[0,T]$上的弱解，其中 $F = f(u_{1x}-1) - f(u_{2x}-1)$ 在 $Q(T)$ 中，且$q = \sigma_b(u_1(\cdot,0)) - \sigma_b(u_2(\cdot,0))$ 在 $[0,T]$上。根据定义 2.2，我们可以选取 $\delta > 0$和 $M > 0$，使得

$$-1+\delta \leq u_{ix} - 1 \leq M \text{ on } \overline{Q(T)} \text{ and } -\beta+\delta \leq u_i(\cdot,0) \leq M \text{ on } [0,T] \text{ for } i = 1,2.$$

因此，由于我们可以认为 f和 σ_b是利普希茨连续的，定理 2.1(2) 可直接由引理 3.1 中的 (3.5) 和格朗沃尔不等式得出。 □

接下来，我们证明强解的存在性。

定理 2.1 (1) 的证明。假设 (A1) 和 (AS)，并令 $\mu > 0$。根据定理 2.1 (2)，$\mathrm{P}(\mu,u_0,v_0)$ 在 $[0,T]$ 上有唯一的弱解 u。由于 $u \in W(T)$，显然$f(u_x-1) \in W^{1,2}(0,T;\ H) \cap L^\infty(0,T;\ H^1(0,1))$ 且 $\sigma_b(u(\cdot,0)) \in W^{1,2}(0,T)$。根据引理 3.1(2)，$\mathrm{(LP)}(\mu,u_0,v_0,g,f(u_x-1)\ \sigma_b(u(\cdot,0)))$ 有唯一的强解 $\hat{u} \in S(T)$。另一方面，u是 $\mathrm{(LP)}(\mu,u_0,v_0,g,f(u_x-1)\ \sigma_b(u(\cdot,0)))$ 的弱解。因此，由弱解的唯一性可知 $u = \hat{u}$。这证明了定理 2.1 (1) 的结论。

□

4 无黏性问题

本节旨在证明定理 2.1 (3)。为此，我们仿照上一节，针对 $\mu = 0$ 的情形，为一个线性问题给出一个引理。为此，线性问题 $\mathrm{(LP)}(0,\ u_0,\ v_0,\ g,\ F,\ q)$ 表示满足 $\mu = 0$ 的系统 (3.1) ∼(3.4)。

引理 4.1. 设 $\gamma > 0$和 $g \in \mathbb{R}$。若 $u_0 \in H^2(0,\ 1),\ v_0 \in H,\ F \in L^2(0,\ T;\ H)$ 且 $q \in L^2(0,\ T)$，则问题 ***(LP)***$(0,\ u_0,\ v_0,\ g,\ F,\ q)$ 在 $[0,T]$ 上有唯一的弱解 u。

也就是说， $u \in W_0(T)$， $u(0) = u_0$ 以及

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q(T)} u_t \eta_t dxdt + \gamma \int_{Q(T)} u_{xx}\eta_{xx} dxdt - \int_{Q(T)} F\eta_x dxdt \\
&= \int_0^1 v_0 \eta(0) dx + \int_{Q(T)} g\eta \; dxdt - \int_0^T q\eta(\cdot, 0) dt \quad \textit{for } \eta \in \mathcal{T}_0(T).
\end{aligned}
$$

此外，有

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|_H^2 + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}|_H^2 \le \int_0^1 g u_t dx - \int_0^1 F u_{tx} dx + q u_t(\cdot, 0) \quad \textit{a.e. on } [0,T]. \tag{4.1}
$$

证明。 由引理 3.1 可知，(LP)(μ， u_0， v_0， g， F， q) 存在弱解 u_μ on $[0,T]$ for$\mu > 0$。显然，由于 (3.5)， $\{u_\mu\}$ 在 L^∞(0， T; H^2(0， 1)) 中有界，并且 $W^{1,\,2}$(0， T; H)。因此，取 $\{u_\mu\}$ 的一个子列，可以证明 (LP)(0， u_0， v_0， g， F， q) 在 on. $[0,T]$ 上存在弱解。唯一性可按照与 [2] 中类似的方式，通过对偶方程方法加以证明。此外，(4.1) 可由 (3.5) 得到。 □

定理 *2.1 (3)* 的证明。 根据定理 2.1 (2) 和 (3.11)，P(μ， u_0， v_0) 对任意 $\mu > 0$ 存在弱解 $u_\mu \in W(T)$，并且有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|u_{\mu t}(t)|_H^2 + \frac{\gamma}{2}|u_{\mu xx}(t)|_H^2 + \mu \int_0^t |u_{\mu\tau x}|_H^2 d\tau + c_f \int_0^1 \frac{1}{|u_{\mu x}(t)|^2} dx - \hat{\sigma}_b(u_\mu(t,0)) \\
\le & C(u_0, v_0) + C_f + g\int_0^t |u_{\mu\tau}|_H d\tau \quad \text{for } 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$

根据格朗沃尔论证和引理 2.1，我们看到集合 $\{u_\mu\}$ 在 $L^\infty(0,T;\, H^2(0,1))$ 中有界，并且 $W^{1,\infty}(0,T;\, H)$、 $u_{\mu x} \ge \delta_0$ 在 $Q(T)$ 上几乎处处成立，以及 $u_\mu(t,0) \ge -\beta + \delta_0$ 对几乎处处的 $t \in [0,T]$ 成立，其中 δ_0 是一个与 μ 无关的正常数。此外， $\{\sqrt{\mu} u_{\mu\tau x}\}$ 在 $L^2(0,T;\, H)$ 中有界。由这些估计，奥宾紧性定理 [15] 保证可以选取一个子序列 $\{\mu_j\}$ 和 $u \in L^\infty(0,T;\, H^2(0,1)) \cap W^{1,\infty}(0,T;\, H)$，使得 u_j (:= u_{μ_j}) $\to u$ 在 $L^\infty(0,T;\, H^2(0,1))$ 中弱*收敛， $W^{1,\infty}(0,T;\, H)$，并且在 $L^2(0,T;\, H^1(0,1))$ 中强收敛，当 $j \to \infty$ 时成立。此外，根据这些收敛性，我们有 $u \ge \delta_0$ 在 $Q(T)$ 上几乎处处成立，以及 $u(t,0) \ge -\beta + \delta_0$ 对几乎处处的 $t \in [0,T]$ 成立。在此，我们注意到

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q(T)} u_{jt}\eta_t dxdt + \gamma \int_{Q(T)} u_{jxx}\eta_{xx} dxdt + \int_{Q(T)} f(u_{jx} - 1)\eta_x dxdt + \mu_j \int_{Q(T)} u_{jtx}\eta_x dxdt \\
&= \int_0^1 v_0 \eta(0) dx + \int_{Q(T)} g\eta \; dxdt - \int_0^T \sigma_b(u_j(t,0))\eta(t,0) dt \quad \text{for } \eta \in \mathcal{T}_0(T) \text{ and } j.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

因此，根据收敛性、 $\sqrt{\mu} u_{\mu\tau x}$ 的估计以及式 (4.2)，我们可以很容易地证明弱解的存在性。

唯一性的证明与定理 2.1 (1) 的证明非常相似。 □

注 4.1. 上述定理 2.1（3）的证明与 [11]的证明十分相似。

参考文献

[1] T. Aiki, C. Kosugi，描述弹性材料收缩与伸展运动的常微分方程数值格式，《应用数学科学进展》，29（2020），459–494。[2] T. Aiki, C. Kosugi，描述弹性材料曲线运动模型的弱解的存在唯一性，《伊尔库茨克国立大学学报（数学辑）》，36（2021），44–56。[3] T. Aiki, N. H. Kroger, A. Muntean，橡胶泡沫中吸收诱导膨胀的宏微观弹性-扩散系统建模——强可解性的证明。《应用数学季刊》，79-3（2021），545–579。[4] M. Brokate and J. Sprekels，《滞后与相变》，Springer，《应用数学科学》，121，1996。[5] G. A. Holzapfel，《非线性固体力学：工程领域的连续体方法》，John Wiley & Sons Ltd，2000。[6] U. Hornung，抛物-椭圆变分不等式。《数学手稿》39（1982），155–172。[7] T. Kashiwabara, H. Itou，线性化弹性动力学体中具有 Signorini 型和 Tresca 摩擦条件的裂纹问题的唯一可解性。《皇家学会哲学汇刊 A 辑》，380（2022），20220225，16页。[8] J. U. Kim，波动方程的边界薄障碍问题。《偏微分方程通讯》14（1989），1011–1026。[9] C. Kosugi，平面上弹性曲线运动数学模型的可解性。博士论文252，日本女子大学，2022。 https://doi.org/10.57483/0002000022.[10] C. Kosugi，具有奇异性的非线性应力函数可压缩弹性曲线偏微分方程模型的可解性。《应用数学科学进展》，32（2023），155–177。[11] C. Kosugi，能量守恒系统中可压缩弹性曲线弱解的存在唯一性。《应用数学科学进展》，32（2023），447–454。[12] C. Kosugi, T. Aiki，可压缩弹性曲线偏微分方程模型解的大时间行为。《离散与连续动力系统系列 S》16（2023），3733–3745。[13] C. Kosugi, T. Aiki, M. Anthonissen, M. Okumura，描述弹性材料运动的常微分方程和偏微分方程的数值结果。《应用数学科学进展》，30（2021），387–414。

[14] G. Lebeau、M. Schatzman，具有边界单边约束的半空间波动问题。微分方程杂志，53（1984），309–361。[15] J. L. Lions，非线性边值问题的若干解法，Dunod，巴黎，1969。[16] R. W. Ogden，大变形各向同性弹性：关于可压缩类橡胶固体理论与实验相关性的研究，伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学与物理科学，328（1972），567-583。[17] R. Racke 和 C. Shang，非线性梁方程的全局吸引子。爱丁堡皇家学会会刊 A 辑，142（2012），1087-1107。[18] J. C. Simo 和 C. Miehe，有限应变下的关联耦合热塑性：公式化、数值分析与实现，应用力学与工程计算方法，98（1992），41-104。[19] H. Takeda 和 S. Yoshikawa，具有弱阻尼的半线性梁方程初值问题 II；渐近剖面。微分方程杂志，253（2012），3061-3080。[20] H. Takeda 和 S. Yoshikawa，具有弱阻尼的半线性梁方程初值问题 I；平滑效应。数学分析与应用杂志，401（2013），244-258。