arXiv:2601.02664v1 [math.NT] 6 Jan 2026

有限域上的强幂斐波那契多项式

Graeme Bates、Ryan Jesubalan、Seewoo Lee、Jane Lu 和 Hyewon Shim

摘要

Bugeaud、Mignotte 和 Siksek 证明，斐波那契数列中唯一的完全幂是 0、1、8 和 144。本文研究这一问题的多项式类比。特别地，我们完整刻画了有限域上哪些斐波那契多项式是完全幂或强幂；这类多项式有无穷多个。我们还对 Horadam 广义卢卡斯多项式数列中的一些数列给出了类似的刻画，其中包括斐波那契多项式、卢卡斯多项式、切比雪夫多项式和雅各布斯塔尔多项式。

1 引言

斐波那契数 F_n 和卢卡斯数 L_n 是数学中研究最广泛的对象之一。它们递归定义如下：

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2),$$
$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

许多作者研究了这些数列的各种算术性质。例如，Brillhart–Montgomery–Silverman [3]研究了小 n 下斐波那契数和卢卡斯数的因式分解。Dubner–Keller [7]研究了为素数的斐波那契数和卢卡斯数，而这类数是否有无穷多个仍是一个未解问题。也有一些研究致力于确定斐波那契数列和卢卡斯数列中的所有完全幂。例如，Cohn [6]给出了一个初等证明，表明 $F_0 = 0$、$F_1 = F_2 = 1$和 $F_{12} = 144$ 是仅有的平方数。Bugeaud、Mignotte 和 Siksek [4] 证明了 0、1、8和 144 是斐波那契数列中仅有的完全幂（见第 2.1节）。

这个问题的一个类似问题可以针对斐波那契多项式 $F_n(T) \in \mathbb{Z}[T]$（斐波那契数的多项式类比）来表述，其定义如下：

$$F_0(T) = 0, \quad F_1(T) = 1, \quad F_n(T) = TF_{n-1}(T) + F_{n-2}(T). \tag{1}$$

例如，已有多位作者研究斐波那契多项式的不可约性。Webb 和 Parberry 证明，$F_n(T)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，当且仅当 n 是素数 [20]。Bergum 和

Hoggatt 在[1]中探讨了卢卡斯多项式及其推广的类似问题。在 [11], 中，Kitayama 和 Shiomi 研究了有限域上的不可约性，并给出了这些多项式在 $\mathbb{F}_q$上不可约的充要条件。

本文研究有限域上为完全幂的斐波那契多项式，这与 Cohn [6] 和 Bugeaud–Mignotte–Siksek [4]的工作类似。特别地，我们给出了完全幂的完整刻画。

定理 1.1。设 $j > 1$。设 p 是与 $2j$互素的奇素数， q 是 p的幂，并令$a = \mathrm{ord}_{2j}(p)$表示 p 在 $(\mathbb{Z}/2j\mathbb{Z})^\times$中的阶。对于 $n > 0$， $F_n(T)$是 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的完全 j次幂，当且仅当 $n = p^{ak}$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$成立。

对于 $p = 2$，也有类似结果（定理 3.11）。此外，我们还刻画了强幂斐波那契多项式，即每个不可约因子的重数至少为二的多项式。[1]

定理 1.2。设 $p > 3$ 是素数， $\mathbb{F}_q$ 是特征为 p 的有限域。那么， $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是强幂，当且仅当 $p \mid n$。

类似的结果也适用于 $p = 2$ 以及 $p = 3$ （推论3.13 和 3.12）。

这些结果与原始斐波那契数列的情形形成对比。只有有限多个斐波那契数是完全幂或强幂；第二个断言在 ABC 猜想 [17, 22]成立的前提下成立。

事实上，我们证明了 Horadam 的某些广义卢卡斯多项式序列 [10], 也满足类似的刻画；这些序列同时推广了斐波那契多项式和卢卡斯多项式（见定义2.3）。这些刻画的证明基于比内公式的多项式类比，以及 Florez、Higuita 和 Ramirez 的判别式公式 [8], ，但某些较小特征的情形需要单独处理。我们还给出了某些 p下这些多项式的显式因式分解，相关代码可在 github.com/seewoo5/sage-function-field找到。

致谢

这项工作是在2025年伯克利数学本科生研究体验项目期间完成的，并得到了美国国家科学基金会RTG资助项目DMS-2342225、MPS Scholars以及戈登与贝蒂·摩尔基金会的支持。感谢Tony Feng组织此次本科生研究体验项目。

[1]尽管我们主要关注非恒定多项式，但常数多项式也被视为强幂多项式，因为它们没有非单位不可约素因子。

2 预备知识

2.1 斐波那契数的丢番图方程

涉及斐波那契数的丢番图方程已得到广泛研究。其中一个问题是找出斐波那契数列中的所有完全幂，即求方程的解

$$F_n = y^p \tag{2}$$

对于素数 p，Cohn [6] 证明了 $p = 2$ 的唯一解为 $F_0 = 0^2$，$F_1 = F_2 = 1^2$ 和$F_{12} = 12^2$，仅使用初等论证；并且人们采用类似的方法找出了卢卡斯数列 [5]中的所有平方数。后续论文研究了（2），其中 p更大时的情形，例如 $p = 3$ [13, 15]，$p = 5$[14], 以及 $p < 5$。$1 \cdot 10^{17}$ [16]。在 [4], Bugeaud、Mignotte 和 Siksek 最终利用模方法证明，这些就是所有此类数 [21, 19]，并运用了 Baker 线性形式定理 [18]。

定理 2.1 ([4, 定理 1，定理 2])。斐波那契数列中唯一的完全幂为$F_0 = 0$，$F_1 = 1$，$F_2 = 1$，$F_6 = 8$, 以及 $F_{12} = 144$。此外，卢卡斯数列中唯一的完全幂为 $L_1 = 1$ 和 $L_3 = 4$。

更一般地，可以要求刻画斐波那契数列中为强幂的斐波那契数，即每个素因子的重数至少为二。假设 ABC 猜想，已有结果表明，斐波那契数列中只有有限多个强幂数 [17, 22]。

2.2 斐波那契多项式

斐波那契多项式（定义在任意环上）是斐波那契数的多项式类比，其递归定义如（1）所示。前几个斐波那契多项式为:

$$F_0(T) = 0, \quad F_1(T) = 1, \quad F_2(T) = T, \quad F_3(T) = T^2 + 1, \quad F_4(T) = T^3 + 2T, \quad \dots$$

这些多项式满足以下比内公式的类比形式。

命题 2.2 ([11, 引理 3。1])。设 $\alpha(T)$，$\beta(T)$ 是 $X^2 - TX - 1$的根。那么

$$F_n(T) = \frac{\alpha(T)^n - \beta(T)^n}{\alpha(T) - \beta(T)}. \tag{3}$$

在特征为 $\neq 2$ 的环上，我们可以写成

$$\alpha(T) = \frac{T + \sqrt{T^2 + 4}}{2}, \quad \beta(T) = \frac{T - \sqrt{T^2 + 4}}{2}$$

and

$$F_n(T) = \frac{\left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\sqrt{T^2 + 4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\sqrt{T^2 + 4}\right)^n}{\sqrt{T^2 + 4}}. \tag{4}$$

已知斐波那契多项式可分解为 [12,第 478]

$$F_n(T) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(T - 2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \prod_{k=1}^{n-1}(T - i(\zeta_{2n}^k + \zeta_{2n}^{-k})) \tag{5}$$

对于 $n \geq 2$，因此 $F_n(T)$ 在 $\mathbb{C}$ 中的零点由下式给出

$$2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = i(\zeta_{2n}^k + \zeta_{2n}^{-k}), \quad 1 \leq k \leq n-1 \tag{6}$$

它们都是代数整数。

2.3 卢卡斯多项式序列

我们可以通过将（1）中的系数多项式和初始项替换为其他多项式和初始项，来考虑更一般的多项式族；Horadam [10] 对此进行了研究。

定义 2.3 ([10, Horadam])。设 $f(T)$ 和 $g(T)$ 是（某个环 R 上的）次数为 0 或 1 的单项式。定义以下递推关系：

$$\mathcal{W}_n(T) = f(T)\mathcal{W}_{n-1}(T) + g(T)\mathcal{W}_{n-2}(T) \text{ for } n > 1, \tag{7}$$

令 $\mathcal{W}_0(T)$ 为 R 中的一个常数，且 $\mathcal{W}_1(T) \in R[T]$为次数为 0 或 1 的单项式。

设 $W_n(T)$ 和 $w_n(T)$ 是满足 $\mathcal{W}_n(T)$ 的递推关系和以下初始条件的多项式序列：

$$W_0(T) = 0, \quad W_1(T) = 1,$$
$$w_0(T) = 2, \quad w_1(T) = f(T).$$

这两族分别也称为 斐波那契型 和 卢卡斯型（在 [8] 中分别记作 $F_n(T)$ 和 $L_n(T)$）。在本节余下部分中，设 $f(T)$ 和 $g(T)$ 是所选 $\mathbb{Q}[T]$ 中次数为 0 或 1 的单项式（大多数情况下，它们属于 $\mathbb{Z}[T]$），并设序列 $W_n(T)$ 和 $w_n(T)$ 由 $f(T)$ 和 $g(T)$ 确定。

接下来，[10] 给出了以下比内形式：

$$W_n(T) = \frac{\alpha(T)^n - \beta(T)^n}{\Delta(T)} \tag{8}$$

$$w_n(T) = \alpha(T)^n + \beta(T)^n \tag{9}$$

其中

$$\alpha(T) := \frac{f(T) + \sqrt{f(T)^2 + 4g(T)}}{2} \tag{10}$$

$$\beta(T) := \frac{f(T) - \sqrt{f(T)^2 + 4g(T)}}{2} \tag{11}$$

$$\Delta(T) := \alpha(T) - \beta(T) = \sqrt{f(T)^2 + 4g(T)}. \tag{12}$$

当我们在特征 2 上进行研究时，方程（10）和（11）需要替换为 α（T）$=f$（T）和 β（T）$= 0$。

这一递推关系推广了许多已知的多项式序列。例如，当 $f(T) = 2T$ 且 $g(T) = -1$（分别为 $f(T) = 1$ 且 $g(T) = 2T$）时，多项式$W_n(T)$变为第二类切比雪夫多项式 $U_{n-1}(T)$（分别为雅各布斯塔尔多项式 $J_n(T)$ [9]）。当$f(T) = T$ 且 $g(T) = 1$时，多项式 $w_n(T)$变为卢卡斯多项式 $L_n(T)$，即：

$$L_0(T) = 2, \quad L_1(T) = T, \quad L_n(T) = TL_{n-1}(T) + L_{n-2}(T) \tag{13}$$

这是 t　卢卡斯数的多项式类比。更多示例请参见 [10, 表 1]。　s.

3 定理1.1的证明1.1

本节中，我们证明定理 1.1 和 3.11，从而完全刻画有限域上为完全幂的斐波那契多项式。在本文其余部分中，令 $\mathbb{F}_q$ 表示特征为 p的有限域。此外，我们将主要关注非恒定多项式。

3.1 有限域上的因式分解

我们首先求出 $F_n(T)$ 的因式分解。

引理 3.1. 在 $\mathbb{F}_q$ 上，我们有

$$F_{p^k}(T) = (T^2 + 4)^{\frac{p^k-1}{2}} \tag{14}$$

当 p 为奇数时，且

$$F_{2^k}(T) = T^{2^k-1} \tag{15}$$

当 $p = 2$。

证明. 当 $k = 0$ 时，这显然成立。设 $k \geq 1$。当 p 为奇数时，由（4）

$$F_{p^k}(T) = \frac{\alpha(T)^{p^k} - \beta(T)^{p^k}}{\alpha(T) - \beta(T)} = \frac{(\alpha(T) - \beta(T))^{p^k}}{\alpha(T) - \beta(T)} = (\alpha(T) - \beta(T))^{p^k-1} = (T^2 + 4)^{\frac{p^k-1}{2}}.$$

For $p = 2$，我们仍有 $(\alpha(T) - \beta(T))^2 = (\alpha(T) + \beta(T))^2 = T^2$ 和 $\alpha(T) - \beta(T) = T$，因此由（3）

$$F_{2^k}(T) = \frac{\alpha(T)^{2^k} - \beta(T)^{2^k}}{\alpha(T) - \beta(T)} = (\alpha(T) - \beta(T))^{2^k-1} = T^{2^k-1}.$$

Note 使得 w　我们在特征 p 下进行运算，因此对于任意 $k \geq 1$，$(\alpha - \beta)^{p^k} = \alpha^{p^k} - \beta^{p^k}$ 都成立。 □

引理 3.2. 设 $n = p^k m$，其中 m 与 p 互素。那么 $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上的因式分解为

$$F_{p^k m}(T) = F_{p^k}(T) F_m(T)^{p^k}. \tag{16}$$

证明。由（3），

$$\begin{aligned} F_n(T) &= \frac{\alpha(T)^{p^k m} - \beta(T)^{p^k m}}{\alpha(T) - \beta(T)} \\ &= \frac{(\alpha(T)^m - \beta(T)^m)^{p^k}}{\alpha(T) - \beta(T)} \\ &= \frac{(\alpha(T) - \beta(T))^{p^k}}{\alpha(T) - \beta(T)} \left(\frac{\alpha(T)^m - \beta(T)^m}{\alpha(T) - \beta(T)} \right)^{p^k} \\ &= F_{p^k}(T) F_m(T)^{p^k}. \end{aligned}$$

□

由引理3.1 和3.2，可得:

P命题 3.3。设 $n = p^k m$，其中 m 与 p 互素。那么 $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上分解为

$$F_{p^k m}(T) = (T^2 + 4)^{\frac{p^k - 1}{2}} F_m(T)^{p^k}. \tag{17}$$

当 $p = 2$ 时，上述因式分解变为

$$F_{2^k m}(T) = T^{2^k - 1} F_m(T)^{2^k}. \tag{18}$$

3.2 无平方因子分解

根据命题 3.3，只需了解 F_m（T）在 $p \nmid m$ 上的因式分解。对于奇数 p，下文将证明它们是无平方因子的。

命题 3.4。假设 p 为奇数且 $p \nmid m$。那么，$F_m(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$上是无平方因子多项式。

我们给出命题 3.4 的两种不同证明。第一种证明基于 Florez–Higuita–Ramirez 的判别式公式 [8]。

命题 3.4 的第一种证明。回顾一下，域上的多项式在代数闭包中没有重根，当且仅当其判别式非零。$F_m(T)$ 的判别式由下列 [8, 定理4]

$$\mathrm{Disc}(F_m) = (-1)^{\frac{(m-2)(m-1)}{2}} 2^{m-1} m^{m-3}$$

并且当 $2 \neq p \nmid m$ 时，它在 $\mathbb{F}_q$ 中非零，因此 $F_m(T)$ 是无平方因子的。 □

这　　条件证明直接表明零点（6）模 p 互不相同（即在 $\mathbb{F}_p$ 中互不相同）　　).

引理 3.5. 设 p 为奇素数，且 $n > 1$ 和 $p \nmid n$。对于满足 $0 < |k| < n$的 $k \in \mathbb{Z}$　　，

$$\zeta_{2n}^{k} \not\equiv 1 \pmod{p},$$

即， $\zeta_{2n}^{k} - 1$ 在 $\mathbb{F}_p$中非零。

证明。令:

$$f(T) := \prod_{\substack{-n<k\leq n \\ k\neq 0,\ k\in\mathbb{Z}}} (T - \zeta_{2n}^{k}).$$

当 $k = n$时，我们有 $\zeta_{2n}^{n} = -1 \not\equiv 1$ (模 p)。设对于某个满足$0 < |k| < n$的 k，有 $\zeta_{2n}^{k} \equiv 1$ (模 p)，则 $f(1) \equiv 0$ (模 p)。注意，由于:

$$T^{2n} - 1 = \prod_{\substack{-n<k\leq n \\ k\in\mathbb{Z}}} (T - \zeta_{2n}^{k}) = (T-1)f(T),$$

我们有:

$$f(T) = \frac{T^{2n}-1}{T-1} = \underbrace{T^{2n-1} + T^{2n-2} + \cdots + T + 1}_{2n \text{ terms}}.$$

由此得到 $f(1) = 2n$ 和 $f(1) \equiv 0$ (模 p)，这与 $p \nmid n$ 矛盾。 □

命题 3.4 的第二个证明。若 $m = 1$，则根据定义， $F_1(T) = 1$ 是无平方因子的。假设 $m > 1$。设 $F_m(T)$ 不是无平方因子的，因此它在 $\mathbb{F}_p$ 中有一个重零点。由 (6) 可知，存在互不相同的 k、 $l \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$，使得 $\zeta_{2m}^{k} + \zeta_{2m}^{-k} = \zeta_{2m}^{l} + \zeta_{2m}^{-l}$ 在 $\mathbb{F}_p$ 中成立。于是 $(\zeta_{2m}^{k} - \zeta_{2m}^{l})(\zeta_{2m}^{k+l} - 1) = 0$，因此 $\zeta_{2m}^{k} = \zeta_{2m}^{l}$ 或 $\zeta_{2m}^{k} = \zeta_{2m}^{-l}$。由引理 3.5， $k \equiv l$ (模 $2m$) 或 $k \equiv -l$ (模 $2m$)，而这两者都不可能。 □

接下来，我们证明 $F_m(T)$ 对于 $p \nmid m$ 始终与 $T^2 + 4$互素，因此 $(T^2+4)^{\frac{p^k-1}{2}}$ 和$F_m(T)^{p^k}$在（17）中不具有公因子。鉴于斐波那契多项式的递推关系是 斐波那契型，我们可以应用以下引理。

引理 3.6 ([8, 引理 19])。 对于 $n \geq 0$，有

$$W_n \pmod{f^2 + 4g} = \begin{cases} n(-g)^{(n-1)/2} & 2 \nmid n \\ (-1)^{(n+2)/2}(n f g^{(n-2)/2})/2 & 2 \mid n \end{cases}, \tag{19}$$

其中 f和 g 是（7）中的系数多项式。

推论 3.7。 设 p 为奇素数。我们有

$$F_n(T) \pmod{T^2+4} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n & 2 \nmid n \\ (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{nT}{2} & 2 \mid n \end{cases} \tag{20}$$

在特征为 p 的域上。

证明。 这是引理 3.6 在 $f(T) = T$ 且 $g(T) = 1$ 时的一个特殊情形。注意，在奇特征的域中，2 是可逆的。□

推论 3.8。 假设 $p \nmid m$。那么， T^2+4 和 $F_m(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中互素。

证明。假设 p 是奇素数。设 T^2+4 和 $F_m(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中有一个公共因子。那么，该多项式必定存在某个公共零点，我们记为 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$。于是 $\alpha^2+4=0$ 和 $F_m(\alpha) = 0$。然而，根据推论 3.7，这样的 α 不可能存在；如果 m 是偶数，那么 $F_m(\alpha) = (-1)^{\frac{m}{2}+1}\frac{m}{2}\alpha$，且由于 $m \neq 0$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中，它不为零；m 为奇数的情形类似可得。

对于 $p=2, F_n(0) = F_{n-2}(0)$ 对所有 $n \geq 2$ 均成立，因此对于所有奇数 m， $F_m(0) = F_1(0) = 1$。所以，对于奇数 m， $T^2+4 = T^2$ 和 $F_m(T)$ 互素。□

命题 3.9. 设 $p=2$。对于 $n>0$， $F_n(T)$ 是 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的平方，当且仅当 n 是奇数。

证明。 这可直接由 [11, 引理 3.5]得出；我们有 $F_{2k}(T) = TF_k(T)^2$ 以及 $F_{2k+1}(T) = (F_{k+1}(T)+F_k(T))^2$, 可由（3）证明。□

最后，在继续讨论主定理之前，我们指出以下结果。

定理 3.10. 设 p 为奇素数。若 $j>1$ 且 $p \mid j$，则不存在 n 使得 $F_n(T)$ 是 $\mathbb{F}_q[T]$中的完美 j 次幂。

证明。设 $j>1$ 和 $p \mid j$。假设存在某个 $n = p^k m$，满足 $k \geq 0$，且 $p \nmid m$，使得 $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是一个完全 j 次幂。若 $k=0$，则根据命题 3.4， $p \nmid m$ 和 $F_n(T) = F_m(T)$ 是无平方因子的，这不可能是 $j>1$ 的完全 j 次幂，因此 $k \geq 1$。由引理 3.2 可得 $F_{p^k m}(T) = (T^2+4)^{\frac{p^k-1}{2}} F_m(T)^{p^k}$，其中根据推论 3.8, $F_m(T)$ 与 T^2+4 互素。因此， j 应整除指数 $\frac{p^k-1}{2}$，这与 $p \mid j$ 矛盾。□

3.3 主定理的证明

现在我们可以证明定理1.1。

定理 1.1的证明。($\Leftarrow$) 任取 $k \in \mathbb{N}$。由引理 3.1， $F_{p^{ak}}(T) = (T^2+4)^{\frac{p^{ak}-1}{2}}$，并根据我们的假设，$p^a \equiv 1 \pmod{2j}$ 因此 $\frac{p^{ak}-1}{2} \equiv 0 \pmod{j}$。因此， $F_n(T)$ 其中 $n = p^{ak}$ 是一个完全 j 次幂。

($\Rightarrow$) 假设 $F_n(T)$ 是 j 次方（在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中），并设 $n = p^{ak+b}m$，其中 p 和 m 互素（因此 $p \nmid m$），且 $k \geq 0$，并且 $0 \leq b < a$。由命题3.3，可得

$$F_{p^{ak+b}m}(T) = (T^2+4)^{\frac{p^{ak+b}-1}{2}} (F_m(T))^{p^{ak+b}}.$$

假设 $b > 0$。那么， $p^{ak+b} = p^{ak}p^b \equiv p^b \pmod{2j}$，而根据 $0 < b < a$ 这一假设， $p^b \not\equiv 1 \pmod{2j}$。这意味着 $\frac{p^{ak+b}-1}{2} \not\equiv 0 \pmod{j}$，因此 $(T^2+4)^{\frac{p^{ak+b}-1}{2}}$ 不是一个 j 次幂。由于根据推论 3.8， T^2+4 与 $F_m(T)$ 互素，故产生矛盾，因此应有$b = 0$。我们可以将 $F_n(T)$ 改写为

$$F_{p^{ak}m}(T) = (T^2+4)^{\frac{p^{ak}-1}{2}} (F_m(T))^{p^{ak}},$$

其中 $(T^2+4)^{\frac{p^{ak}-1}{2}}$是一个 j 次幂，并且根据命题 3.4， $F_m(T)$ 无平方因子。若 $m \neq 1$，则$F_m(T) \neq 1$，且根据推论 3.8，指数 p^{ak} 必须是 $j > 1$ 的倍数，这与 $\gcd(p, 2j) = 1$ 相矛盾。这意味着 $m = 1$，并且有 $n = p^{ak}$。□

当 $p = 2$ 时，我们已经证明，对于 $n > 0$， $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是平方，当且仅当 n 是奇数。我们还可以进一步确定 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的更高次幂。

定理 3.11. 设 $j > 2$ 是奇数，且 $a = \mathrm{ord}_j(2)$ 是 2 在 $(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z})^\times$ 中的阶。设 q 是 2 的幂。那么， $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是一个完全 j 次幂，当且仅当对于某个 $k \in \mathbb{N}$， $n = 2^{ak}$。

证明. 若 $n = 2^{ak}$，则 $2^a \equiv 1 \pmod{j}$，由 (15) 可知， $F_n(T) = T^{2^{ak}-1} = (T^{\frac{2^{ak}-1}{j}})^j$ 是一个完全 j 次幂。反过来，假设对于 $s \geq 0$ 和奇数 m， $n = 2^s \cdot m$。由 (1) 可容易验证，对于所有奇数 m， $F_m(0) = 1$。特别地，$\gcd(T, F_m(T)) = 1$。若 $m > 1$，则由 (18)， $F_n(T)$ 不可能是一个完全 j 次幂。因此， $m = 1$ 且 $F_n(T) = F_{2^s}(T) = T^{2^s-1}$，它是一个完全 j 次幂，当且仅当 $2^s \equiv 1 \pmod{j}$ $\Leftrightarrow s \equiv 0 \pmod{a}$。□

同样，我们也可以证明定理 1.2。

定理 1.2的证明。($\Rightarrow$) 若 $p \nmid n$，则 $F_n(T)$ 无平方因子，因此不是幂整多项式。

($\Leftarrow$) 若 $n = p^k m$ 满足 $k \geq 1$，则 $F_n(T)$ 由（17）可知是强幂的。此处我们使用 $p > 3$ 以保证 $\frac{p^k-1}{2} > 1$。□

对于 $p = 3$，我们需要格外小心，因为当 $k = 1$ 时，可能出现 $\frac{p^k-1}{2} = 1$。

推论 3.12. 对于 $p = 3$，当且仅当 $9 \mid n$ 时， $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上是强幂的。

证明。Thepr 与定理 1.2的证明类似，只是我们需要 $k \geq 2$ 满足 $\binom{3^k-1}{2} > 1$。 —— □

对于 $p = 2$，也有类似的刻画。

推论 3.13. </style}对于 $p = 2$， $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上是强幂的，当且仅当 $n \geq 3$ 是奇数或 4 的倍数 .

证明。 由（18）以及 [11, 引理 3.5], 当 $n = 2^k m$ 且 为奇数时 m，我们有

$$F_n(T) = T^{2^k-1} F_m(T)^{2^k} = T^{2^k-1}(F_{(m+1)/2}(T) + F_{(m-1)/2}(T))^{2^{k+1}}.$$

若 $k = 0$ 和 $n = m \geq 3$ 为奇数，则 $F_n(T) = (F_{(m+1)/2}(T) + F_{(m-1)/2}(T))^2$ 是一个非常数多项式的平方，因此是强幂的。类似地，当 $k \geq 2$ 时， $F_n(T)$ 是强幂的。然而，若 $k = 1$，则 $F_n(T) = TF_m(T)^2$ 不是强幂的，因为 T 与 $F_m(T)$ 互素，且 $F_n(T)$ 仅被 T 整除一次。□

表1 展示了 $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上的 $p = 2$、3、5 和 $1 \leq n \leq 20$的因式分解，这与上述刻画一致。

4 广义化

本节将斐波那契多项式的结果推广到$W_n(T)$，其中次数 $\deg f(T) = 1$且次数 $g(T) = 0$，其中包括第二类切比雪夫多项式（例4.13）。我们还找到了卢卡斯型数列中所有为完全幂的多项式 $w_n(T)$。

首先，我们需要以下因式分解引理，它们类似于引理3.1 和3.2。由于证明过程类似，我们略去细节。

引理 4.1。 设 p 为素数，且 $n = p^k$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$成立。则$W_n(T) = \Delta(T)^{n-1}$ 且 $w_n(T) = f(T)^n$属于 $\mathbb{F}_q[T]$。

引理 4.2。 设 $n = p^k m$满足某个 $k \in \mathbb{N}$。则， $W_n(T) = W_{p^k}(T) W_m(T)^{p^k} = \Delta(T)^{p^k-1} W_m(T)^{p^k}$且$w_n(T) = w_m(T)^{p^k}$ 属于 $\mathbb{F}_q[T]$。特别地， $w_n(T)$是完全幂当且仅当它是强幂。

我们还有如下与推论 3.8 类似的互素性结论。

命题 4.3。 假设 p 是奇素数，且 $p \nmid m \cdot \mathrm{lc}(f) \cdot g$。那么， $f(T)^2 + 4g(T)$与$W_m(T)$在 $\mathbb{F}_q[T]$中互素。

证明。假设 $f(T)^2 + 4g(T)$ 和 $W_m(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中有一个公共因子。那么，该多项式必定存在某个公共零点，我们将其记为 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$。于是， $f(\alpha)^2 + 4g(\alpha) = 0$ 且$W_m(\alpha) = 0$。然而，根据引理 3.6，这样的 α 不可能存在。□

现在我们将次数 $f = 1$ 和次数 $g = 0$ 在 $W_n(T)$ 和 $w_n(T)$（参见定义2.3）设为递归定义中的次数。利用 [8], 中的判别式公式，我们可以得出以下与斐波那契多项式情形类似的结果。

命题 4.4. 假设 p 是奇数，且 $p \nmid m \cdot \mathrm{lc}(f) \cdot g$，其中 $\mathrm{lc}(f)$ 是 $f(T)$ 的首项系数。那么，$W_m(T)$ 和 $w_m(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上无平方因子。

证明. 由 W_m 和 w_m [8, 的判别式公式以及定理 4、定理 5]可得:

$$\mathrm{Disc}(W_m) = (-g)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} 2^{m-1} m^{m-3} \mathrm{lc}(f)^{(m-1)(m-2)},$$
$$\mathrm{Disc}(w_m) = (-g)^{\frac{m(m-1)}{2}} 2^{m-1} m^{m} \mathrm{lc}(f)^{m(m-1)}.$$

特别地，当 $p \nmid m \cdot \mathrm{lc}(f) \cdot g$ 时，判别式非零，因此 W_m 和 w_m 在 $\mathbb{F}_q$ 上均无平方因子。□

定理 4.5. 设 p 为奇素数，并假设 $p \nmid \mathrm{lc}(f) \cdot g$。若 $j > 1$ 且 $p \mid j$，则不存在 n 使得 $W_n(T)$ 是 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的一个完全 j 次幂。

证明. 可仿照定理 3.10 的证明进行。假设对于某个 $k \geq 0$，$W_{p^k m}(T)$ 是完全 j 次幂，且 m 不能被 p 整除。若 $k = 0$，则由命题 4.4，$W_{p^k m}(T) = W_m(T)$ 无平方因子，这不可能是完全 j 次幂，其中 $j > 1$。因此 $k \geq 1$，而引理 4.2 给出 $W_{p^k m}(T) = (f(T)^2 + 4g(T))^{\frac{p^k-1}{2}} W_m(T)^{p^k}$；$f^2 + 4g$ 与 W_m 的互素性（命题 4.3）意味着指数 $\frac{p^k-1}{2}$ 必为 j 的倍数。这与 $p \mid j$ 矛盾。

□

定理 4.6. 设 $j > 1$。设 p 是与 $2j$ 互素的奇素数，并令 $a = \mathrm{ord}_{2j}(p)$ 表示 p 在 $(\mathbb{Z}/2j\mathbb{Z})^\times$ 中的阶。假设 $p \nmid \mathrm{lc}(f) \cdot g$。对于 $n > 0$，$W_n(T)$ 是 $\mathbb{F}_q[T]$ 中的完全 j 次幂，当且仅当存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得 $n = p^{ak}$。

证明。（⇐）任取 $k \in \mathbb{N}$。根据引理 4.1，$W_{p^{ak}}(T) = \Delta(T)^{p^{ak}-1} = \left(f(T)^2 + 4g(T)\right)^{\frac{p^{ak}-1}{2}}$。由于 $p^a \equiv 1 \pmod{2j}$，因此 $\frac{p^{ak}-1}{2} \equiv 0 \bmod j$，$W_{p^{ak}}(T)$ 是完全 j 次幂。

（⇒）假设 $W_n(T)$ 是 j 次幂，其中 $\mathbb{F}_q[T]$ 并且记 $n = p^{ak+b}m$，其中 p 和 m 互素（因此 $p \nmid m$），$k \geq 0$，且 $0 \leq b < a$。根据引理 4.2，可将其写成 $W_n(T)$ 如下形式:

$$W_{p^{ak+b}m}(T) = W_{p^{ak+b}}(T)\,(W_m(T))^{p^{ak+b}} = \left(f(T)^2 + 4g(T)\right)^{\frac{p^{ak+b}-1}{2}} (W_m(T))^{p^{ak+b}}$$

假设 $b > 0$。那么，根据假设 $b < a$，$p^{ak+b} \not\equiv 1 \pmod{2j}$，因此 $\frac{p^{ak+b}-1}{2} \not\equiv 0 \bmod j$。所以 $W_{p^{ak+b}}(T)$ 不是一个完全的 j 次幂。由于根据命题 4.3，$W_{p^{ak+b}}(T)$ 与 $W_m(T)$ 互素，因此 $W_{p^{ak+b}m}(T)$ 不是一个完全的 j 次幂。于是令 $b = 0$，并将 $W_n(T)$ 改写如下:

$$W_{p^{ak}m}(T) = W_{p^{ak}}(T)\,(W_m(T))^{p^{ak}},$$

其中 $W_{p^{ak}}(T)$ 是一个完全的 j 次幂，而根据命题 4.4，$W_m(T)$ 无平方因子。然后，若$m \neq 1$，则$W_m(T) \neq 1$，并且根据命题 4.3 $j > 1$，必须整除 p^{ak}，这与 $\gcd(p, 2j) = 1$ 矛盾。因此我们有 $m = 1$ 和 $n = p^{ak}$。□

定理 4.7。设 $p > 3$，并假设 $p \nmid \mathrm{lc}(f) \cdot g$。那么，当且仅当 n 是 p 的倍数时，$W_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是幂整多项式。

证明。 ($\Longrightarrow$) 若 $p \nmid n$，则$W_n(T)$ 无平方因子，因此不是幂整多项式。

($\Longleftarrow$) 若 $n = p^k m$ 满足 $k \geq 1$，则 $W_n(T)$ 由引理 4.2 可知是幂整多项式。 □

当 $p = 2$ 时，我们有以下结果，它们推广了定理 3.11 和推论 3.13。

引理 4.8。对每个 n，都存在整数 $\{c_{n,\ k}\}^{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}}$，使得__

$$W_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{n,k} f^{n-1-2k} g^k \tag{21}$$

其中 $c_{n,\ (n-1)/2} = 1$，当 n 为奇数时。在偶数 n 时，特别有 $f \mid W_n$。当 n 为奇数且 g 为非零常数时，$\gcd(W_n,\ f) = 1$。

证明。 方程（21）显然可由关于 n 的归纳法得到，以下结论也随之立即成立。 □

引理 4.9。设 q 是 2 的幂，且 $g \in \mathbb{Z}$。在 $\mathbb{F}_q$上，有

1. $W_{2n}(T) = f(T) W_n(T)^2$
2. $W_{2n+1}(T) = (W_{n+1}(T) + g W_n(T))^2$.

证明。 [11, 中的引理 3.5] 关于 $F_n(T)$ 的证明可以推广。第一个结论由 Binet 形式（8）和 $\Delta = f$ 得出。对于第二个结论，我们有 $f(T) W_{2n+1}(T) = W_{2n+2}(T) - g W_{2n}(T) = f(T)(W_{n+1}(T) + g W_n(T))^2$（此处我们使用了 $g^2 \equiv g \equiv -g$（模 2）），结论得证。□

定理 4.10。设 $p = 2$ 和 q 是 2 的幂。设 $j > 2$ 为奇数，且 $a = \mathrm{ord}_j(2)$ 是 2 在 $(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z})^\times$ 中的阶。那么，$W_n(T)$ 是 j 次完全幂，当且仅当存在某个$k \geq 1$使得 $n = 2^{ak}$。

证明。 可类似于定理 3.11 证明。对于 $n = 2^k m$ 其中 m 为奇数，注意到 $W_n(T) = f(T)^{2^k - 1} W_m(T)^{2^k}$ 由引理 4.2 和 4.8 得到。 □

定理 4.11. 令 $p = 2$ 和 q 为 2 的幂。若且唯若 $n \geq 3$ 为奇数或 4 的倍数，$W_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上是强幂。

证明. 证明与推论3.13类似，其中我们使用引理 4.2 和 4.9 代替 d. □

定理 4.12. 设 $p = 3$ 和 q 是 3 的幂。当且仅当 $9 \mid n$时，$W_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上是强幂。

证明。 证明与推论3.12类似。 □

例 4.13. 当 $f(T) = 2T$ 且 $g(T) = -1$时，有 $W_n(T) = U_{n-1}(T)$，即第二类切比雪夫多项式。根据定理 4.6 和 4.7，当 p 为奇数时，$U_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是完全幂（分别是强幂），当且仅当对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 有 $n = p^{\mathrm{ord}_2(p)}(p)^k - 1$ （分别对于 $p > 3$，有 $n \equiv -1 \pmod{p}$）。表 2 展示了当 $1 \le n \le 20$ 时，$U_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$ 上的因式分解。注意，对所有 $m \ge 0$，$U_{2m}(T) \equiv 1 \pmod 2$，且 $U_{2m+1}(T) \equiv 0 \pmod 2$。

类似地，我们可以刻画 $w_n(T)$ 何时为完全幂。

推论 4.14. 设 p 为奇素数，并假设 $p \nmid \mathrm{lc}(f) \cdot g$。那么对于 $n > 0$，$w_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中为完全幂，当且仅当 n 是 p的倍数。

Proof. 若 $n = p^k m$ 对于某个正整数 k 且 m, $w_n(T)$ 由引理 4 可知是完全幂。 2.

设 n 不能被 p整除。由命题 4.4，$w_n(T)$ 无平方因子，因此 $w_n(T)$ 不是完全幂。 □

例 4.15. 当 $f(T) = T$ 且 $g(T) = 1$时，$w_n(T)$ 还原为卢卡斯多项式 $L_n(T)$。因此，$L_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中为完全幂，当且仅当 $p \mid n$。表 3 展示了 $1 \le n \le 20$ 对应的 $L_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_2$、$\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$ 上的因式分解。

例 4.16。当 $f(T) = 2T$ 且 $g(T) = -1$时，我们有 $w_n(T) = 2T_n(T)$，其中 $T_n(T)$ 是第一类切比雪夫多项式。因此，$T_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是完全幂，当且仅当 $p \mid n$。表 4 展示了 $T_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$ 上的因式分解，其中 $1 \le n \le 20$。请注意，Bhargava 和 Zieve 也研究了狄克逊多项式 $D_n(T, a)$ 在有限域 [2], 上的因式分解；这也涵盖了切比雪夫多项式，因为它可写作 $D_n(2T, 1) = 2T_n(T)$。

当 $f(T) = 1$ 且 $g(T) = 2T$时，我们有 $W_n(T) = J_n(T)$，即雅各布斯塔尔多项式 [9]。遗憾的是，定理 4.6 和定理 4.7 不适用于这些多项式，因为 Florez–Higuita–Ramirez 的判别式公式 [8, 定理 4] 未涵盖 $\deg f = 0$ 和 $\deg g = 1$的情形。然而，我们仍可运用命题 3.4 的第二个证明中的思路，确定 $J_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$中何时是完全幂或强幂。由于对所有 n，$J_n(T) \equiv 1 \pmod 2$，我们将假设 p 为奇数。

由比内公式（8），可得

$$J_n(T) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{1+8T}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{1+8T}}{2}\right)^n}{\sqrt{1+8T}}, \quad \alpha(T) = \frac{1+\sqrt{1+8T}}{2}, \quad \beta(T) = \frac{1-\sqrt{1+8T}}{2}.$$

我们有 $\deg J_n = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$，上述公式表明，$J_n$ 的零点 x 满足 $\alpha(x)^n = \beta(x)^n \Leftrightarrow (\alpha(x)/\beta(x))^n = 1$，其中 $\alpha(x) \neq \beta(x)$。因此，x 具有如下形式：

$$\frac{1+\sqrt{1+8x}}{1-\sqrt{1+8x}} = \zeta_n^k \Leftrightarrow x = x_k = -\frac{\zeta_n^k}{2(1+\zeta_n^k)^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1.$$

可以验证，对于所有 k，$2x_k$ 都是代数整数。特别地，我们可以将 x_k 模 p约化，得到元素 $x_k \in \mathbb{F}_p$。利用引理 3.5 以及 $x/(1+x)^2 = y/(1+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) = 0$，可以证明，当 $p \nmid n$时，$k = 1$、2、……、$\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ 对应的所有零点 x_k 在 $\mathbb{F}_p$ 中互不相同。因此，

P命题 4.17。设 p 是奇素数，且 $p \nmid m$。则 $J_m(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$中无平方因子。

现在，利用引理4.1、引理4.2以及 $J_1 = J_2 = 1$，我们可以刻画 $J_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q$上的完全幂和强多项式。由于论证与定理 4.6和4.7类似，我们省略细节。

定理 4.18。设 p 为奇素数，q 为 p的幂。设 $j > 1$，且 $a = \mathrm{ord}_{2^j}(p)$ 为 p 在 $(\mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z})^\times$ 中的阶。那么对于 $n > 2$，$J_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是一个完全 j 次幂，当且仅当 $n = p^{ak}$或对于某个 $k \geq 1$有 $n = 2p^{ak}$。此外，当 $p > 3$时，$J_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_q[T]$ 中是强幂，当且仅当 $p \mid n$；或者当 $p = 3$时，当且仅当 $9 \mid n$。

表 5 展示了 $J_n(T)$在 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$ 中，当 $1 \leq n \leq 27$时的因式分解。将定理 4.18 推广到其他斐波那契型多项式$W_n(T)$，其中 的 次数为 $f = 0$ 且 的次数为 $g = 1$，将会很有趣。

n	$F_n(T)$ 除以 $\mathbb{F}_2$	$F_n(T)$ 除以 $\mathbb{F}_3$	$F_n(T)$ 除以 $\mathbb{F}_5$
1	1	1	1
2	T	T	T
3	$(T+1)^2$	(T^2+1)	$(T+2)(T+3)$
4	T^3	$T(T+1)(T+2)$	$T(T^2+2)$
5	$(T^2+T+1)^2$	$(T^2+T+2)(T^2+2T+2)$	$(T+1)^2(T+4)^2$
6	$T(T+1)^4$	$T^3(T^2+1)$	$T(T+2)(T+3)(T^2+3)$
7	$(T^3+T^2+1)^2$	(T^6+2T^4+1)	$(T^3+2T^2+2T+2)(T^3+3T^2+2T+3)$
8	T^7	$T(T+1)(T+2)(T^4+T^2+2)$	$T(T^2+2)(T^4+4T^2+2)$
9	$(T+1)^2(T^3+T+1)^2$	$(T^2+1)^4$	$(T+2)(T+3)(T^3+3T+2)(T^3+3T+3)$
10	$T(T^2+T+1)^4$	$T(T^2+T+2)(T^2+2T+2)(T^4+2T^2+2)$	$(T+1)^2(T+4)^2T^5$
11	$(T^5+T^4+T^2+T+1)^2$	$(T^{10}+T^6+2T^4+1)$	$(T^5+2T^4+4T^3+T^2+3T+2)(T^5+3T^4+4T^3+4T^2+3T+3)$
12	$T^3(T+1)^8$	$T^3(T+1)^3(T+2)^3(T^2+1)$	$T(T+2)(T+3)(T^2+2)(T^2+3)(T^2+2T+4)(T^2+3T+4)$
13	$(T^6+T^5+T^4+T+1)^2$	$(T^6+2T^2+1)(T^6+2T^4+T^2+1)$	$(T^2+T+1)(T^2+T+2)(T^2+2T+3)(T^2+3T+3)(T^2+4T+1)(T^2+4T+2)$
14	$T(T^3+T^2+1)^4$	$T(T^6+T^4+2T^2+1)(T^6+2T^4+1)$	$T(T^3+2T^2+2T+2)(T^3+3T^2+2T+3)(T^6+2T^4+4T^2+2)$
15	$(T+1)^2(T^2+T+1)^2(T^4+T^3+1)^2$	$(T^2+1)(T^2+T+2)^3(T^2+2T+2)^3$	$(T+1)^2(T+4)^2(T+2)^5(T+3)^5$
16	T^{15}	$T(T+1)(T+2)(T^4+T^2+2)(T^8+2T^6+2T^4+T^2+2)$	$T(T^2+2)(T^4+4T^2+2)(T^8+3T^6+T^2+2)$
17	$(T^4+T+1)^2(T^4+T^3+T^2+T+1)^2$	$(T^8+T^7+2T^6+T^5+T^4+2T^2+T+1)(T^8+2T^7+2T^6+2T^5+T^4+2T^2+2T+1)$	$(T^8+2T^7+2T^6+2T^5+3T+1)(T^8+3T^7+2T^6+3T^5+2T+1)$
18	$T(T+1)^4(T^3+T+1)^4$	$T^9(T^2+1)^4$	$T(T+2)(T+3)(T^2+3)(T^3+3T+2)(T^3+3T+3)(T^6+T^4+4T^2+3)$
19	$(T^9+T^8+T^6+T^5+T^4+T+1)^2$	$(T^{18}+2T^{16}+2T^{12}+2T^{10}+1)$	$(T^9+2T^8+3T^7+4T^6+T^5+2)(T^9+3T^8+3T^7+T^6+T^5+3)$
20	$T^3(T^2+T+1)^8$	$T(T+1)(T+2)(T^2+T+2)(T^2+2T+2)(T^4+2T^2+2)(T^4+T^3+2)(T^4+2T^3+2)$	$(T+1)^2(T+4)^2T^5(T^2+2)^5$

表*1*： $F_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_2$、 $\mathbb{F}_3$和 $\mathbb{F}_5$上的因式分解

n	$U_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 上	$U_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_5$ 上
1	$2T$	$2T$
2	$(T+1)(T+2)$	$4(T+2)(T+3)$
3	$2T(T^2+1)$	$3T(T^2+2)$
4	$(T^2+T+2)(T^2+2T+2)$	$(T+1)^2(T+4)^2$
5	$2(T+1)(T+2)T^3$	$2T(T+2)(T+3)(T^2+3)$
6	$(T^3+T^2+T+2)(T^3+2T^2+T+1)$	$4(T^3+2T^2+2T+2)(T^3+3T^2+2T+3)$
7	$2T(T^2+1)(T^4+2T^2+2)$	$3T(T^2+2)(T^4+4T^2+2)$
8	$(T+1)^4(T+2)^4$	$(T+2)(T+3)(T^3+3T+2)(T^3+3T+3)$
9	$2T(T^2+T+2)(T^2+2T+2)(T^4+T^2+2)$	$2(T+1)^2(T+4)^2T^5$
10	$(T^5+T^4+2T^3+1)(T^5+2T^4+2T^3+2)$	$4(T^5+2T^4+4T^3+T^2+3T+2)(T^5+3T^4+4T^3+4T^2+3T+3)$
11	$2(T+1)(T+2)T^3(T^2+1)^3$	$3T(T+2)(T+3)(T^2+2)(T^2+3)(T^2+2T+4)(T^2+3T+4)$
12	$(T^3+2T+1)(T^3+2T+2)(T^3+T^2+2T+1)(T^3+2T^2+2T+2)$	$(T^2+T+1)(T^2+T+2)(T^2+2T+3)(T^2+3T+3)(T^2+4T+1)(T^2+4T+2)$
13	$2T(T^3+T^2+2)(T^3+T^2+T+2)(T^3+2T^2+1)(T^3+2T^2+T+1)$	$2T(T^3+2T^2+2T+2)(T^3+3T^2+2T+3)(T^6+2T^4+4T^2+2)$
14	$(T+1)(T+2)(T^2+T+2)^3(T^2+2T+2)^3$	$4(T+1)^2(T+4)^2(T+2)^5(T+3)^5$
15	$2T(T^2+1)(T^4+2T^2+2)(T^8+T^6+2T^4+2T^2+2)$	$3T(T^2+2)(T^4+4T^2+2)(T^8+3T^6+T^2+2)$
16	$(T^8+T^7+2T^6+T^3+2T^2+2T+1)(T^8+2T^7+2T^6+2T^3+2T^2+T+1)$	$(T^8+2T^7+2T^6+2T^5+3T+1)(T^8+3T^7+2T^6+3T^5+2T+1)$
17	$2(T+1)^4(T+2)^4T^9$	$2T(T+2)(T+3)(T^2+3)(T^3+3T+2)(T^3+3T+3)(T^6+T^4+4T^2+3)$
18	$(T^9+T^8+T^7+2T^6+T^3+2T^2+2T+1)(T^9+2T^8+T^7+T^6+T^3+T^2+2T+2)$	$4(T^9+2T^8+3T^7+4T^6+T^5+2)(T^9+3T^8+3T^7+T^6+T^5+3)$
19	$2T(T^2+1)(T^2+T+2)(T^2+2T+2)(T^4+T^2+2)(T^4+T^3+T^2+2T+2)(T^4+2T^3+T^2+T+2)$	$3(T+1)^2(T+4)^2T^5(T^2+2)^5$
20	$(T+1)(T+2)(T^3+T^2+T+2)^3(T^3+2T^2+T+1)^3$	$(T+2)(T+3)(T^3+T+1)(T^3+T+4)(T^3+2T^2+1)(T^3+2T^2+2T+2)(T^3+3T^2+4)(T^3+3T^2+2T+3)$

表 *2*： $U_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$上的因式分解

n	$L_n(T)$在 $\mathbb{F}_2$上	$L_n(T)$在 $\mathbb{F}_3$上	$L_n(T)$在 $\mathbb{F}_5$上
1	T	T	T
2	T^2	$(T+1)(T+2)$	(T^2+2)
3	$T(T+1)^2$	T^3	$T(T^2+3)$
4	T^4	(T^4+T^2+2)	(T^4+4T^2+2)
5	$T(T^2+T+1)^2$	$T(T^4+2T^2+2)$	T^5
6	$T^2(T+1)^4$	$(T+1)^3(T+2)^3$	$(T^2+2)(T^2+2T+4)(T^2+3T+4)$
7	$T(T^3+T^2+1)^2$	$T(T^6+T^4+2T^2+1)$	$T(T^6+2T^4+4T^2+2)$
8	T^8	$(T^8+2T^6+2T^4+T^2+2)$	$(T^8+3T^6+T^2+2)$
9	$T(T+1)^2(T^3+T+1)^2$	T^9	$T(T^2+3)(T^6+T^4+4T^2+3)$
10	$T^2(T^2+T+1)^4$	$(T+1)(T+2)(T^4+T^3+2)(T^4+2T^3+2)$	$(T^2+2)^5$
11	$T(T^5+T^4+T^2+T+1)^2$	$T(T^5+T^4+T+2)(T^5+2T^4+T+1)$	$T(T^5+2T^4+T^2+4T+3)(T^5+3T^4+4T^2+4T+2)$
12	$T^4(T+1)^8$	$(T^4+T^2+2)^3$	$(T^4+2)(T^4+3T^2+3)(T^4+4T^2+2)$
13	$T(T^6+T^5+T^4+T+1)^2$	$T(T^3+T^2+T+2)(T^3+T^2+2T+1)(T^3+2T^2+T+1)(T^3+2T^2+2T+2)$	$T(T^4+3)(T^4+T^2+2)(T^4+2T^2+3)$
14	$T^2(T^3+T^2+1)^4$	$(T+1)(T+2)(T^3+2T+1)(T^3+2T+2)(T^3+T^2+2)(T^3+2T^2+1)$	$(T^2+2)(T^6+T^5+4T^4+3T^3+4T^2+3T+1)(T^6+4T^5+4T^4+2T^3+4T^2+2T+1)$
15	$T(T+1)^2(T^2+T+1)^2(T^4+T^3+1)^2$	$T^3(T^4+2T^2+2)^3$	$T^5(T^2+3)^5$
16	T^{16}	$(T^{16}+T^{14}+2T^{12}+T^{10}+T^2+2)$	$（T^{16}+T^{14}+4T^{12}+2T^{10}+2T^6+T^4+4T^2+2）$
17	$T（T^4+T+1）^2（T^4+T^3+T^2+T+1）^2$	$T（T^{16}+2T^{14}+2T^{12}+T^{10}+2T^8+2)$	$T（T^{16}+2T^{14}+4T^{12}+2T^{10}+2T^6+4T^4+4T^2+2)$
18	$T^2(T+1)^4(T^3+T+1)^4$	$(T+1)^9(T+2)^9$	$(T^2+2)(T^2+2T+4)(T^2+3T+4)(T^6+T^4+2T^3+4T^2+T+4)(T^6+T^4+3T^3+4T^2+4T+4)$
19	$T(T^9+T^8+T^6+T^5+T^4+T+1)^2$	$T(T^{18}+T^{16}+2T^{14}+2T^{12}+T^{10}+2T^8+1)$	$T(T^9+T^8+T^5+2T^4+2T^3+2T^2+T+4)(T^9+4T^8+T^5+3T^4+2T^3+3T^2+T+1)$
20	$T^4(T^2+T+1)^8$	$(T^4+T+2)(T^4+2T+2)(T^4+T^2+2)(T^4+T^3+T^2+T+1)(T^4+2T^3+T^2+2T+1)$	$(T^4+4T^2+2)^5$

表 3： $L_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_2$、 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$ 上的因式分解

n	$T_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 上	$T_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_5$ 上
1	T	T
2	$2(T^2+1)$	$2(T^2+2)$
3	T^3	$4T(T^2+3)$
4	$2(T^4+2T^2+2)$	$3(T^4+4T^2+2)$
5	$T(T^4+T^2+2)$	T^5
6	$2(T^2+1)^3$	$2(T^2+2)(T^2+2T+4)(T^2+3T+4)$
7	$T(T^3+T^2+2)(T^3+2T^2+1)$	$4T(T^6+2T^4+4T^2+2)$
8	$2(T^8+T^6+2T^4+2T^2+2)$	$3(T^8+3T^6+T^2+2)$
9	T^9	$T(T^2+3)(T^6+T^4+4T^2+3)$
10	$2(T^2+1)(T^4+T^3+T^2+2T+2)(T^4+2T^3+T^2+T+2)$	$2(T^2+2)^5$
11	$T(T^{10}+T^8+2T^6+T^4+T^2+1)$	$4T(T^5+2T^4+T^2+4T+3)(T^5+3T^4+4T^2+4T+2)$
12	$2(T^4+2T^2+2)^3$	$3(T^4+2)(T^4+3T^2+3)(T^4+4T^2+2)$
13	$T(T^6+2T^2+1)(T^6+2T^4+1)$	$T(T^4+3)(T^4+T^2+2)(T^4+2T^2+3)$
14	$2(T^2+1)(T^6+T^4+2T^2+1)(T^6+2T^4+T^2+1)$	$2(T^2+2)(T^6+T^5+4T^4+3T^3+4T^2+3T+1)(T^6+4T^5+4T^4+2T^3+4T^2+2T+1)$
15	$T^3(T^4+T^2+2)^3$	$4T^5(T^2+3)^5$
16	$2(T^{16}+2T^{14}+2T^{12}+2T^{10}+2T^2+2)$	$3(T^{16}+T^{14}+4T^{12}+2T^{10}+2T^6+T^4+4T^2+2)$
17	$T(T^{16}+T^{14}+2T^{12}+2T^{10}+2T^8+2)$	$T(T^{16}+2T^{14}+4T^{12}+2T^{10}+2T^6+4T^4+4T^2+2)$
18	$2(T^2+1)^9$	$2(T^2+2)(T^2+2T+4)(T^2+3T+4)(T^6+T^4+2T^3+4T^2+T+4)(T^6+T^4+3T^3+4T^2+4T+4)$
19	$T(T^9+T^8+T^6+2T^5+T^4+2T^3+T^2+2T+2)(T^9+2T^8+2T^6+2T^5+2T^4+2T^3+2T^2+2T+1)$	$4T(T^9+T^8+T^5+2T^4+2T^3+2T^2+T+4)(T^9+4T^8+T^5+3T^4+2T^3+3T^2+T+1)$
20	$2(T^4+2T^2+2)(T^4+T^3+2T+1)(T^4+T^3+2T^2+2T+2)(T^4+2T^3+T+1)(T^4+2T^3+2T^2+T+2)$	$3(T^4+4T^2+2)^5$

表 4：$T_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$ 上的因式分解

n	$J_n(T)$在 $\mathbb{F}_3$上	$J_n(T)$在 $\mathbb{F}_5$上
1	1	1
2	1	1
3	$2(T+2)$	$2(T+3)$
4	$(T+1)$	$4(T+4)$
5	(T^2+1)	$4(T+2)^2$
6	$2(T+2)$	$2(T+1)(T+3)$
7	$2(T^3+2T+2)$	$3(T^3+3T^2+2)$
8	$2(T+1)(T^2+T+2)$	$2(T+4)(T^2+T+2)$
9	$(T+2)^4$	$(T+3)(T^3+2T^2+4T+2)$
10	$2(T^2+1)(T^2+2T+2)$	$4(T+2)^2$
11	$2(T^5+2T^3+2T^2+2)$	$2(T^5+T^2+4T+3)$
12	$2(T+2)(T+1)^3$	$2(T+1)(T+3)(T+4)(T^2+2T+4)$
13	$(T^3+T^2+2)(T^3+2T^2+2T+2)$	$4(T^2+T+1)(T^2+3T+4)(T^2+4T+1)$
14	$(T^3+2T+2)(T^3+T^2+T+2)$	$3(T^3+T^2+4T+1)(T^3+3T^2+2)$
15	$2(T+2)(T^2+1)^3$	$3(T+2)^2(T+3)^5$
16	$(T+1)(T^2+T+2)(T^4+T^3+T^2+2T+2)$	$4(T+4)(T^2+T+2)(T^4+4T^3+3T+3)$
17	$(T^8+2T^3+T^2+1)$	$(T^8+3T^7+4T^5+3T^3+4T^2+1)$
18	$(T+2)^4$	$4(T+1)(T+3)(T^3+2T^2+4T+2)(T^3+4T^2+3T+4)$
19	$2(T^9+T^4+2T^3+2T+2)$	$2(T^9+3T^6+2T^5+3T^4+2T+3)$
20	$2(T+1)(T^2+1)(T^2+2T+2)(T^4+T^2+T+1)$	$(T+2)^2(T+4)^5$
21	$(T+2)(T^3+2T+2)^3$	$4(T+3)(T^3+2T^2+T+3)(T^3+2T^2+2T+3)(T^3+3T^2+2)$
22	$2(T^5+2T^3+2T^2+2)(T^5+T^4+T^3+2T^2+T+1)$	$4(T^5+T^2+4T+3)(T^5+3T^3+3T^2+T+3)$
23	$2(T^{11}+T^9+2T^6+2T^5+2T^2+2)$	$3(T^{11}+3T^{10}+T^8+4T^6+2T^5+4T^3+4T+2)$
24	$(T+2)(T+1)^3(T^2+T+2)^3$	$(T+1)(T+3)(T+4)(T^2+2)(T^2+T+2)(T^2+2T+4)(T^2+3T+3)$
25	$(T^2+1)(T^{10}+T^8+2T^7+2T^6+2T^5+T^4+T^3+2T^2+T+1)$	$(T+2)^{12}$
26	$(T^3+2T+1)(T^3+T^2+2)(T^3+2T^2+1)(T^3+2T^2+2T+2)$	$3(T^2+3)(T^2+T+1)(T^2+2T+3)(T^2+3T+4)(T^2+4T+1)(T^2+4T+2)$
27	$2(T+2)^{13}$	$2(T+3)(T^3+2T^2+4T+2)(T^9+3T^8+2T^6+2T^5+T^4+4T^3+3T+3)$

表 5: $J_n(T)$ 在 $\mathbb{F}_3$ 和 $\mathbb{F}_5$ 上的因式分解

参考文献

[1] Bergum, G. E., 和 Hoggatt Jr, V. E. 卢卡斯多项式与广义卢卡斯多项式的不可约性。《斐波那契季刊》*12*, 1 (1974), 95–100.[2] Bhargava, M., 和 Zieve, M. E. 有限域上狄克逊多项式的因式分解。《有限域及其应用》*5*, 2 (1999), 103–111.[3] Brillhart, J., Montgomery, P. L., 和 Silverman, R. D. 斐波那契数与卢卡斯数因式分解表。《计算数学》*50*, 181 (1988), 251–260.[4] Bugeaud, Y., Mignotte, M., 和 Siksek, S. 求解指数丢番图方程的经典方法与模方法 I：斐波那契数与卢卡斯数的完全幂。《数学年刊》(2006), 969–1018.[5] Cohn, J. 卢卡斯数、斐波那契数及若干丢番图方程。《格拉斯哥数学杂志》*7*, 1 (1965), 24–28.[6] Cohn, J. H. E. 关于斐波那契平方数。《伦敦数学学会杂志》 *39* (1964), 537–540.[7] Dubner, H., 和 Keller, W. 新的斐波那契素数与卢卡斯素数。《计算数学》*68*, 225 (1999), 417–427.[8] Flórez, R., Higuita, R. A., 和 Ramırez, A. 广义斐波那契多项式的结式、判别式与导数。《整数数列杂志》*22*, 2 (2019), 3.[9] Horadam, A. 雅各布斯塔尔表示多项式。《斐波那契季刊》*35*, 2 (1997), 137–148.[10] Horadam, A. F. 《某些多项式序列的综合》。Springer Netherlands, 多德雷赫特, 1996, pp. 215–229.[11] Kitayama, H., 和 Shiomi, D. 关于有限域上斐波那契多项式与卢卡斯多项式的不可约性。《有限域及其应用》*48* (2017), 420–429.[12] Koshy, T. 《斐波那契数与卢卡斯数及其应用》。John Wiley & Sons, 2001.[13] London, H., 和 Finkelstein, R. 关于为完全幂的斐波那契数与卢卡斯数。《斐波那契季刊》*7*, 5 (1969), 476–481.[14] Pethö, A. 二阶递推数列中的完全幂。《古典数论专题》*2* (1981), 1217–1227.[15] Pethö, A. 斐波那契数列中的完全立方数。 *PUBLICATIONES MATHEMATICAE-DEBRECEN30*, 1-2 (1983), 117–127.

[16] Pethö, A. 线性递归数列的丢番图性质 II。Acta Math. Acad. Paed. Nyiregyháziensis 17 (2001), 81–96.[17] Ribenboim, P., 和 Walsh, G. ABC 猜想与二元递推数列项的强幂部分。《数论杂志》74, 1 (1999), 134–147.[18] Shorey, T. N., 和 Tijdeman, R.《指数丢番图方程》，第 87 卷。剑桥大学出版社，1986.[19] Taylor, R., 和 Wiles, A. 某些海克代数的环论性质。《数学年刊》141, 3 (1995), 553–572.[20] Webb, W., 和 Parberry, E. 斐波那契多项式的整除性质。《斐波那契季刊》7, 5 (1969), 457–463.[21] Wiles, A. 模椭圆曲线与费马大定理。《数学年刊》141, 3 (1995), 443–551.[22] Yabuta, M. ABC 猜想与卢卡斯数列中的强幂数。《斐波那契季刊》45, 4 (2007), 362–365. 数学系，加州大学伯克利分校，美国加利福尼亚州伯克利，邮编 94720 Graeme Bates graemebates@berkeley.edu Ryan Jesubalan rpj@berkeley.edu Seewoo Lee seewoo5@berkeley.edu Jane Lu zijun@berkeley.edu Hyewon Shim shmhywn@berkeley.edu