arXiv:2601.02672v1 [cond-mat.mes-hall] 6 Jan 2026

自发PT 对称性破缺产生脆弱拓扑的稳定边界模

Kang Yang，[1,2] Fei Song，[3] 以及 Piet W. Brouwer[1]*Dahlem* 复杂量子系统中心、物理系及哈雷-柏林-雷根斯堡 *CCE* 卓越集群，柏林自由大学，德国柏林 *14195*[2]物理系、理学院，西湖大学，中国杭州 *310030*[3]卡弗里理论科学研究所，中国科学院，中国北京 *100190*（日期：2026年1月）

由非局域对称性保护或具有脆弱拓扑的二维拓扑绝缘体，通常由于对称性与边界之间的不相容性而不具备稳健的带隙内边缘模。在此，我们表明，在具有宇称-时间（PT）对称性的系统中，非厄米耦合可以通过自发破缺本征态的 PT 对称性，稳定地产生稳健的带隙内拓扑边缘模。拓扑边缘模穿越一对脆弱拓扑能带之间的虚部谱隙，而该谱隙由非厄米微扰的存在打开。我们证明，所得带隙内模的净数目受到算符版本的反常抵消的保护，这一机制超越了厄米极限。结果表明，损耗与增益原则上可以将脆弱拓扑现象驱动为稳定拓扑现象。

引言。——反常带隙内边界模——无法通过局域微扰产生或消除的模——是诊断拓扑相的高效工具 [1–5]。这些模出现在拓扑系统的边界上，以及具有不同拓扑指标的系统之间的界面上。并非所有拓扑相都会出现鲁棒的带隙内边界模：它们仅出现于稳定拓扑相，并且通常要求保护该系统的对称性在边界上保持不变。这一条件意味着，许多依赖非局域对称性的拓扑态以及脆弱拓扑相可能无法通过边界特征加以识别 [6–12]。

最近，由宇称-时间（PT）对称性保护的拓扑受到了广泛关注 [13–15]。对空间反演（P）与时间反演（T）联合作用的不变性可赋予一对能带非平庸拓扑，并由欧拉数 [16–18]加以标记。已知扭转双层石墨烯中两个中心能带的非零欧拉数会对仅涉及这些能带的瓦尼尔基构成阻碍 [16, 19–21]。据报道，欧拉能带会在莫尔′材料中导致丰富的关联物理 [22–27]，且一对能带的欧拉数与能带接触点相互编织时的非阿贝尔现象密切相关 [17, 28, 29]。然而，欧拉拓扑具有脆弱性，即欧拉能带与平庸能带杂化会消除该拓扑 [18, 30, 31]。由于欧拉拓扑的脆弱性，不存在可直接测量的后果，例如鲁棒边界态 [32–37]。

非厄米 PT 对称系统中的情况截然不同。在非厄米 PT 对称系统中，PT 对称性可能在单个本征值和本征矢量的层面上自发破缺 [38–42]。在这种自发 PT 对称性破缺转变中，一对实能带会演变为一对具有复共轭本征值和本征态的能带，且不会与其他任何能带杂化，如图 1 示意所示。如果能带对的 PT 对称性破缺转变是完全的——这意味着形成的复能带之间存在一个

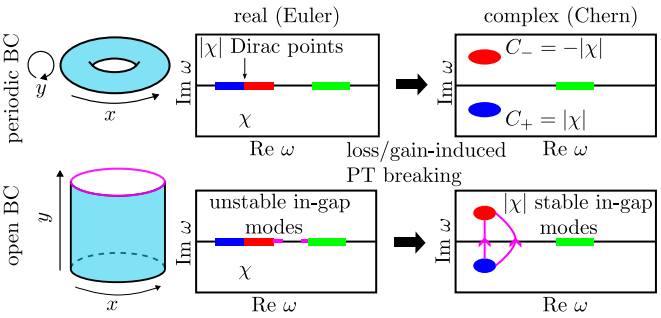

图 1。上：在自发 PT 对称性破缺转变中，一对实能带转变为一对复共轭能带，且不与任何其他能带杂化。具有 PT 对称性的实能带对的拓扑不变量是欧拉数 χ，其特征是 $|\chi|$ 该能带对之间存在无法消除的狄拉克点 [16]。由 PT 对称性自发破缺产生的复能带具有陈数 $C_\pm = \pm\chi$ [44]。下：在开放边界条件下，复能带通过带隙内边界模（洋红色）相连。在圆柱几何中（x 方向采用周期性边界条件，y 方向采用开放边界条件），边界模呈现谱流，使得按谱流方向加权后的边界模总数等于 $|C_\pm| = |\chi|$。

虚部谱隙——，那么每条复能带都承载着从实欧拉能带对的脆弱拓扑中继承而来的稳定陈拓扑，$C_\pm = \pm\chi$，这种现象被称为“陈-欧拉对偶原理” [43, 44]。通过这种实能带到复能带的转变，非厄米性提供了一条实现稳定 PT 对称拓扑相的途径，而且无需闭合与能谱中其他任何能带之间的谱隙。PT 对称性的自发破缺对于在光子与声学平台上实现的 PT 对称系统尤为重要 [45–51]，，因为不可避免的增益与损耗会自然引发有效的非厄米性 [52–56]。

在这项工作中，我们展示了如何利用非厄米性，使一对欧拉能带呈现出稳健且独特的边界特征：陈-欧拉对偶性转变会产生连接两条复能带的带隙内边界模。若在这对

满足周期性边界条件的脆弱拓扑能带之间打开虚部谱隙，那么在存在边界时，这对能带之间也会打开虚部谱隙。因此，每个带隙内边界模都可以赋予一个谱流方向，使得按谱流方向计数的边界模数量等于陈数 $C_{\pm}$，因此与 χ 通过陈-欧拉对偶相关。净谱流的存在意味着，与实欧拉能带中可能出现的边界模不同——后者是非拓扑的，总能通过恰当选择的局域微扰将其移除——[18], PT破缺情形下的带隙内边界模具有拓扑稳健性，因为无法通过作用于边界的局域微扰将其吸收到体区中。

案例研究：三能带模型中陈-欧拉对偶性转变的边界模——一个展现陈-欧拉对偶性转变的最小模型是定义在方格晶格上的无自旋模型，每个晶格位点具有三个轨道。基态记为 $|\mathbf{r}\ a\rangle$，其中轨道索引为 $a = 1,\ 2、3$。在傅里叶空间中，PT反演表示为$|\mathbf{k}\ a\rangle \to |\mathbf{k}\ a\rangle^*$，因此，PT对称系统的布洛赫哈密顿量 $H(\mathbf{k})$ 是一个实矩阵。我们允许存在增益与损耗过程，因此 3×3 矩阵 $H(\mathbf{k})$ 不必是对称矩阵。

为描述自发PT对称性破缺，我们考虑一族PT对称矩阵

$$H_\lambda(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) + \lambda H_1(\mathbf{k}), \tag{1}$$

其中，我们将实反对称矩阵 $H_1(\mathbf{k})$ 加到实对称矩阵 $H_0(\mathbf{k})$ 上，以诱导本征矢量中的对称性破缺。具体而言，我们选择一个由最近邻跃迁和次近邻跃迁定义的模型：

$$H_0(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} g_1(k_x,k_y) & f_1(k_x,k_y) & f_2(k_x) \\ f_1(k_x,k_y) & g_1(k_y,k_x) & f_2(k_y) \\ f_2(k_x) & f_2(k_y) & g_2(k_x,k_y) \end{pmatrix} + \delta|n(\mathbf{k})\rangle\langle n(\mathbf{k})|, \tag{2}$$

$$H_1(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & h(k_x,k_y) & \gamma+\sin k_y \\ -h(k_x,k_y) & 0 & -\sin k_x \\ -\gamma-\sin k_y & \sin k_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中

$g_1\ k_x\ k_y\ =\ \ \ k_y + 2\ \ \ ^2 k_x\ \ g_2\ \ \ \ = 2\ \ \ ^2 k_x + (\ ,\ )$ $2\ \ \ ^2 k_y - 0.6\ \ \ \ k_x + \ \ \ k_y\ \ f_1\ k_x\ k_y\ = 2\ \ \ \ k_x\ \ \ k_y$ cos sin , (k) sin sin (cos cos), (,) sin sin ,$f_2(k)\ = -0.6$ sin k + sin $2k$, 且 $h(k_x,k_y)\ = 1 - \cos\ k_x - \cos k_y$。 H_0 (k) 的（体区）能谱由两条低能实能带和一条高能能带组成，它们之间由谱隙隔开；见图2a。两条低能能带之间没有谱隙，它们共同具有欧拉数 $\chi = 2$。（对于三能带模型 [57], 欧拉数必定为偶数，因此模型 H_0(k) 是具有非平凡欧拉拓扑的最简模型。）相比之下，H_1(k) 的能谱纯虚，包含一条本征值为 $\omega = 0$ 的平带，以及两条由虚能隙隔开的复共轭能带。H_1 中的非互易耦合 $\gamma = 0.2$ 可以开启非厄米皮肤效应 [58]。从 $\lambda = 0$出发，H_0(k) 的两条低能能带发生转变——为两条复共轭能带，同时逐渐将 λ 调至非零值，并保持与第三条能带之间的谱隙。由于第三条能带不参与实-复转变，我们称其为“远端能带”。远端能带的谱隙大小还可通过 H_0 中的项 $\delta|n(\mathbf{k})\rangle\langle n(\mathbf{k})|$ 进一步调节，其中n (k) =(–sin k_x, –sin k_y, $h(k_x,k_y)$)，并固定 $\delta = 0.2$。

为研究与自发实-复转变相关的边界态，我们在圆柱几何下考虑式（1）–（3）的模型，其尺寸有限 $1 \le y \le L$，并沿 x方向采用周期为 L_x 的周期性边界条件。图2展示了 $\lambda = 0$、0.5、1.0和1.38时的谱。体态以蓝色标示。在环面几何下的同一系统以灰色绘制，展现了趋肤效应的影响。隙内态以红色标示，分别局域在底部边界 $y = 1$ 或顶部边界 $y = L$上。在存在趋肤效应时，可通过双正交局域化[59] 对其进行直观呈现；双正交局域化本质上是态投影算符 $P_{\text{ingap}} = |\psi_{\text{ingap}}\rangle\langle\psi_{\text{ingap}}|$（$\langle\psi|$、$|\psi\rangle$ 分别为双正交左、右本征态）与 y坐标投影算符 $P(y)$ 之间的重叠，如图2e所示。位于相对边界的隙内态是简并的，引入厄米反演破缺项 [61]可以解除其简并。在圆柱和环面几何下，两个复能带在 $\lambda \approx 1.3$ 处均完全分离（事实上，尽管存在趋肤效应，两种边界条件下的虚部谱隙仍会同时打开，见附录A）。通过将文献44的方法推广到实空间能带投影算符（详见附录B），我们可以证明，由此得到的复能带分别携带陈数 $C_{\pm} = \pm\chi$。

为直观展示谱流，我们考察边界模能量对 k_x 的依赖关系，其取离散值 $(2\pi n + \varphi)/L_x$，其中 n 为整数；若沿 φ 施加阿哈罗诺夫-玻姆磁通 y，则缓慢增大 φ 达 2π 后，位于 $y = L$ 处顶部边界的边界模离散本征值将沿图 2d、e 中箭头所示方向移动一个间距。（位于 $y = 1$ 处底部边界的 PT 反演模的本征值则向相反方向移动。）局域在 $y = L$ 附近的边界模，其谱流从虚部为 Im $\omega < 0$、陈数为 $C_+ = 2$ 的体能带指向虚部为 Im $\omega > 0$、陈数为 $C_- = -2$ 的体能带。这些模在两条复能带之间承载的总谱流等于 $|C_{\pm}| = |\chi| = 2$。

我们表明，谱流能够抵抗边界扰动。相比之下，图2中的另外两个特征是偶然的，并非源于对偶陈-欧拉拓扑：(i) 在实-复转变之前就已存在的带隙内边界模，例如，对于 $\lambda = 0$，见图2a；(ii) 在实-复转变之后，复能带与远端实能带通过带隙内边界模形成的连接。

为展示这一点，我们加入一种 PT对称边界扰动 H_{bd}，它局部作用于顶部和底部边

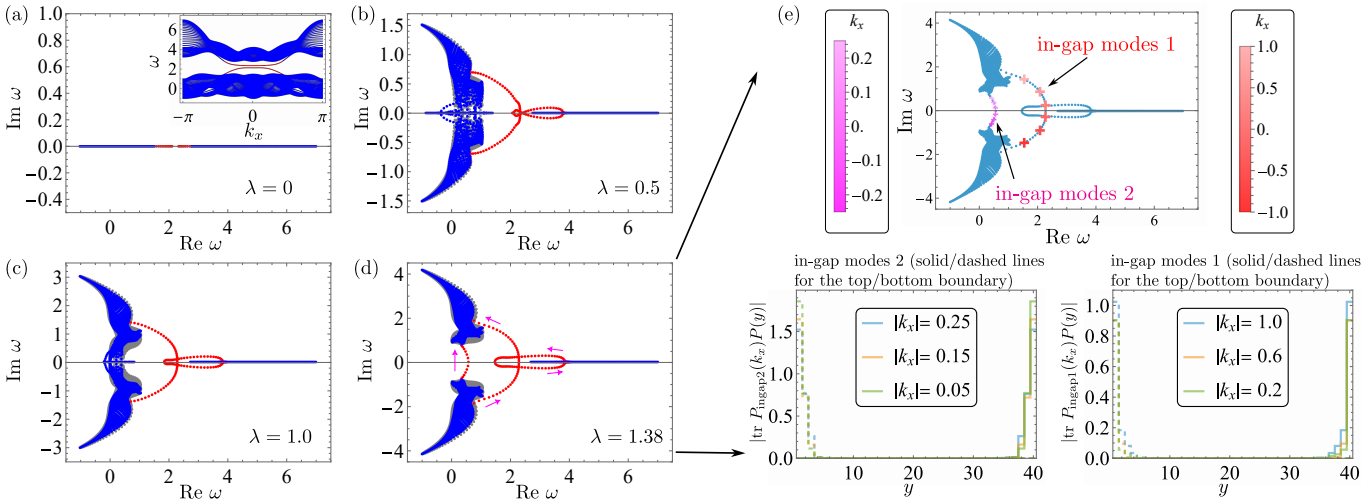

图2. 自发对称性破缺转变过程中带隙内边缘模（红色），计算于 $L = 40$。(a) 在欧拉带模型中，系统在每个边界都呈现平庸边缘模。(b)-(c) 加入反厄米项后，带隙内模被抬升至复平面。(d) 体模从轴线上移开后，出现连接两个体能谱的带隙内模。洋红色箭头标示了顶部边界带隙内模（$y = L$）的谱流。底部边界带隙内模（$y = 0$）与右边界模简并，且具有方向相反的谱流。(e) 上：顶部边界带隙内模的动量依赖性，对应于(d)中的谱流。下：顶部边界带隙内模（实线）的双正交局域化 $|\langle y|\psi_{\mathrm{ingap}}(k_x)\rangle\langle\bar{\psi}_{\mathrm{ingap}}(k_x)|y\rangle| = |\mathrm{tr}\ P_{\mathrm{ingap}}(k_x)P(y)|$，以及其 PT 伙伴态——底部边界模（虚线）的局域化。

界，

$$H_{\mathrm{bd}}(k_x) = -\zeta_1(k_x)|k_x, L, 1\rangle\langle k_x, L, 1| - \zeta_2(k_x)\,(|k_x, L, 2\rangle\langle k_x, L-1, 2| + |k_x, L-1, 2\rangle\langle k_x, L, 2|) + \text{PT partners}, \tag{4}$$

其中，$|k_x, y, a\rangle$ 是态 $|x, y, a\rangle$ 沿 x 方向的傅里叶变换，且 $\zeta_1(k_x) = 3 + 3\cos k_x$，$\zeta_2(k_x) = 2.8 + 4.2\cos k_x$。这一边界微扰将欧拉模型 H_0(k) 中的两个带隙内模推回体谱中，如图 3a 所示，证明了它们具有脆弱性。对于有限的 λ，当 H_λ(k) 为非厄米时，附着于复体能带的边界模不会被微扰 H_{bd} 移除。对于 $\lambda = 1.38$，当两条复能带被虚部谱隙充分分隔时，从复能带中出现的带隙内模如今完全脱离了远端能带。微扰模型的带隙内边界模数量多于未微扰模型（比较图 2d 和图 3b）。然而，这些额外的模不具有净谱流。这表明复能带之间的边界谱流受到拓扑保护。

非厄米区间中的体谱流。— 带隙内模的拓扑稳健性与复能带携带的陈数相关 $|C_\pm| = |\chi|$。在量子霍尔物理中，携带谱流的带隙内边缘模必然出现，这是由陈数所对应的等效体谱流所决定的，这一机制称为反常抵消机制 [5, 62]。现在，我们通过算符形式体系展示它在非厄米区间中的适用性 [63], ，从而证明带隙内模的净数目与体能带的陈数相关。

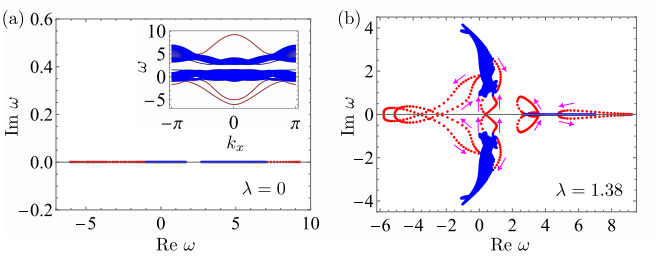

图 3. 边界扰动下系统的谱。(a) 边界微扰可以将欧拉能带的带隙内模推入体区。(b) 对称性破缺后，连接复能带的带隙内模依然存在，且净流保持不变。

我们首先讨论沿 x和 y施加周期性边界条件时的体谱流，此时仅存在体态，谱流也清晰可见。磁通插入会使动量 k_x 发生偏移，并在 y方向产生谱流，因此引入混合形式的 $3L \times 3L$ 哈密顿量$H_{t,\ s}(k_x)$（s，t 是实空间 y坐标，轨道指标略去不写）以及投影到其中一个陈能带上的算符$P_{t,\ s}(k_x)$较为方便。形式上，$P_{t,\ s}(k_x)$定义为 [60]

$$P_{t,s}(k_x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_\alpha} dz[z - H(k_x)]^{-1}{}_{t,s} \tag{5}$$

其中，$\mathcal{C}_\alpha$ 是复平面上包围陈能带能谱的闭合曲线。投影算符 P 是一个斜投影，$P \neq P^\dagger$。远离例外点时，P 也可以通过复能带 [60]的双正交本征态表示。对于周期性边界条件，

它与布洛赫态投影算符 3×3 通过傅里叶变换相关联：$P_{t,s}(k_x)=\int dk_y\tilde{P}(\mathbf{k})\exp[ik_y(t-s)]/(2\pi)$，其中 $\tilde{P}(\mathbf{k})=\oint_{C_\alpha}dz[z-H(\mathbf{k})]^{-1}/(2\pi i)=|\psi(\mathbf{k})\rangle\langle\bar{\psi}(\mathbf{k})|$。根据这一关系，可以证明能带投影算符具有平移不变性$P_{s,t}(k_x)=P_{s-t}(k_x)$，并且会随着 $|s-t|$ 的变化迅速衰减（衰减长度记为 R），这是由于它与其他能带之间存在谱隙 [64–69]。

与能带 α 相关的态数为 $N_\alpha(k_x)=\mathrm{tr}\ P(k_x)$，即投影算符的秩。我们将这个数划分为条带内和体区条带外的部分。为此，我们引入一个对角算符 Q，它在 $y_1\le y\le y_2$ 时取值 1，在其他情况下取值 0。该算符满足 $Q^2=Q$，并将任意态投影到其在 $y_1\le y\le y_2$上的分量。条带的宽度 $|y_2-y_1|$ 取为大于$P_{s,t}(k_x)$ R 衰减长度。能带内的态总数分解为 $\mathrm{tr}\ P=\mathrm{tr}\ PQ+\mathrm{tr}\ P(I-Q)=n_{\mathrm{in}}+n_{\mathrm{out}}$。由于 P是斜投影，n_{in} 和 n_{out}不一定为实数。

我们考察插入阿哈罗诺夫–玻姆磁通 $\varphi=2\pi$ 时有多少态穿过条带。这由下式给出

$$\int dk_x\delta n_{\mathrm{in}}(k_x)=\int dk_x\ \mathrm{tr}\,Q\dot{P}(k_x),\tag{6}$$

其中我们采用记号 $\dot{P}(k_x)\equiv dP(k_x)/dk_x$。对 $P^2=P$ 求导后，得到 $\dot{P}=-[[P,\dot{P}],P]$。因此，态流可表示为

$$-\delta n_{\mathrm{in}}=\mathrm{tr}\left([P,\dot{P}][P,Q]\right)\tag{7}$$

展开对易子 $[P,Q]_{t,s}=P_{t,s}[\theta(s-y_1)\theta(y_2-s)-\theta(t-y_1)\theta(y_2-t)]$，，其中 θ 是赫维赛德阶跃函数，可以看出，只有当 s、t 中一个位于条带内、另一个位于条带外时，$[P,Q]$ 才非零。结合 $P_{t,s}$ 在 $|t-s|$ 较大时的衰减性质，我们将式（7）化简为条带边界 $\delta n_{\mathrm{in}}\approx J_{y_2}-J_{y_1}$ 附近的贡献，其中

$$\begin{aligned}J_{y_j}&=\sum_{s,t\sim y_j}\mathrm{tr}\,[P,\dot{P}]_{s,t}P_{t,s}[\theta(s-y_j)-\theta(t-y_j)]\\&=\sum_{|r|<R}\mathrm{tr}\,[P,\dot{P}]_rP_{-r}\sum_{t\sim y_j}[\theta(t+r-y_j)-\theta(t-y_j)]\\&\approx\sum_{|r|<\infty}\mathrm{tr}\,[P,\dot{P}]_rP_{-r}r=\int\frac{dk_y}{2\pi i}\mathrm{tr}\,\tilde{P}[\partial_{k_x}\tilde{P},\partial_{k_y}\tilde{P}].\end{aligned}\tag{8}$$

第一行中，对 s,t 的求和仅限于 y_j 周围宽度为 R 的邻域。第二行中，我们将 s 重新标记为 $r+t$，并利用平移不变性，将$P_{t+r,t}$ 写作 P_r。由于 $|P_rP_{-r}|$ 快速衰减（这可由傅里叶变换 $P(\mathbf{k})$ 的解析性推出），第三行中对 r 的求和可扩展至无穷。J_{y_j} 在 k_x 上的积分等于陈数 C_α。

上述方程表明，在沿平行于 y 的方向插入一个磁通量子后，系统体区内沿 y 方向存在持续的态流。现在我们将证明对于沿 y 坐标具有开放边界条件的系统，也存在相同的谱流。在这种情况下，态流垂直于边界，因而必须转入另一条能带。由于复能带与其他能带之间由体能谱隙隔开，态流只能通过位于体模谱隙中的边界模转入其他能带。这意味着存在连接复能带的 $|C_\pm|=|\chi|$ 边界模。

我们将谱流计算推广到沿 y 方向采用开放边界条件的情况。投影 $P_{t,s}(k_x)$ 仍由方程（5）定义。在存在趋肤效应时，我们无法立即将其与传统的布洛赫态投影算符联系起来。但正如先前文献 [59, 70–75],所指出的，用于推导谱流的两个关键性质仍然成立：（a）能带投影算符 $P_{s,t}(k_x)$ 渐近地具有平移不变性，即对于坐标 s 和 t，只要它们充分远离边界，$P_{s,t}(k_x)\approx P_{s+t',t+t'}(k_x)$；（b）由于存在谱隙，$P_{s,t}(k_x)$ 随 $|s-t|$ 快速衰减。这两个性质可由非布洛赫能带理论 [76–79] 推导得出（详见附录A）。平移不变性和快速衰减性质使得在开放边界条件下，可以定义连续的傅里叶变换 $P(\mathbf{k})\equiv\sum_r P_{r,r_0}(k_x)\exp[-ik_y(r-r_0)]$（对于任意位于体区内部的参考点 r_0 $1\ll r_0\ll L$）。在非布洛赫能带理论中，[77–79], 动量k_y 有时需要加上虚部 $i\mu$，以获得收敛的 $P(\mathbf{k})$。然而，对于我们所考虑的 PT 对称系统，快速衰减$P_{r,r_0}(k_x)$意味着实数 k_y 已足够（见附录A）。此外，投影算符在实-复转变过程中的连续性保证了由实空间投影算符$P_{t,s}(k_x)$的傅里叶变换定义的 $P(\mathbf{k})$ 也具有 $C_\pm=\pm|\chi|$（见附录B）。此后构造谱流的其余步骤与沿 y 方向采用周期性边界条件时的计算完全相同。

讨论。上述论证可直接推广至任意 N 能带系统中欧拉指标任意的一对脆弱拓扑能带。因此，我们揭示了一种普适机制，可生成稳健的带隙内模，用以表征具有脆弱拓扑性质的宇称-时间对称系统和 C_2T 对称系统。在陈-欧拉对偶下，由非厄米耦合诱发的对称性破缺跃迁之后，必定会出现携带谱流的带隙内模。它们会在衰减能带与放大能带之间转移 $|\chi|$态，这一过程可通过边界泵浦方法 [80]检测。

由于带隙内模的数量由欧拉数决定，这表明损耗与增益有助于诊断光子与声学平台上的脆弱拓扑态。在实践中，最便于实现这一机制的是带宽较窄的脆弱能带，因为只需较小的非厄米耦合即可打开虚部谱隙。例如，通过莫尔图案堆叠狄拉克点所产生的能带结构，就可在光学晶格 [81] 和光子器件[82, 83]中实现。

带隙内边缘模的产生不受趋肤效应

的影响。与其他边界条件及高阶趋肤效应的相互作用 [84, 85] 将是未来研究的有趣方向。

致谢。— 作者感谢 Ken Shiozaki、Wojciech Jankowski、Tom´aˇs Bzduˇsek、Sachin Vaidya 和 Zhong Wang 的讨论。我们还感谢 Zhi Li、Peng Xue 和 Emil Bergholtz 在前期工作中的合作。P.W.B. 获得德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助——项目编号 277101999——CRC-TR 183（项目 A02 和 A03）。F.S. 感谢国家自然科学基金委员会（NSFC）项目 No. 12404189 以及中国博士后科学基金会博士后资助计划项目 No. GZB20240732 的支持。

[1] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane, 《专题综述：拓扑绝缘体》, Rev. Mod. Phys. 82, 3045 (2010)。[2] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang, 《拓扑绝缘体与超导体》, Rev. Mod. Phys. 83, 1057 (2011)。[3] L. Lu、J. D. Joannopoulos 和 M. Soljaˇci´c, 《拓扑光子学》, Nature photonics 8, 821 (2014)。[4] Y. Ando 和 L. Fu, 《拓扑晶体绝缘体与拓扑超导体：从概念到材料》, Annual Review of Condensed Matter Physics 6, 361 (2015)。[5] T. H. Hansson、M. Hermanns、S. H. Simon 和 S. F. Viefers, 《量子霍尔物理：层级结构与共形场论技术》, Rev. Mod. Phys. 89, 025005 (2017)。[6] A. M. Turner、Y. Zhang 和 A. Vishwanath, 《拓扑绝缘体中的纠缠与反演对称性》, 《物理评论B辑》82, 241102 2010( )。[7] L. Fu, 《拓扑晶体绝缘体》, 《物理评论快报》106, 106802 2011( )。[8] T. L. Hughes、E. Prodan 和 B. A. Bernevig, 《反演对称拓扑绝缘体》, 《物理评论B辑》83, 245132 (2011)。[9] T. H. Hsieh、H. Lin、J. Liu、W. Duan、A. Bansil 和 L. Fu, 《SnTe 材料类别中的拓扑晶体绝缘体》, Nature communications 3, 982 (2012)。[10] W. A. Benalcazar、B. A. Bernevig 和 T. L. Hughes, 《量子化电多极绝缘体》, Science 357, 61 (2017)。[11] Z. Song、Z. Fang 和 C. Fang, 《旋转对称性保护拓扑态的（$d-2$）维边缘态》, 《物理评论快报》119, 246402 (2017)。[12] S. Liu、A. Vishwanath 和 E. Khalaf, 《位移绝缘体：旋转对称性保护的二维拓扑晶体绝缘体》, Phys. Rev. X 9, 031003 (2019)。[13] Y. X. Zhao、A. P. Schnyder 和 Z. D. Wang, 《pt 和 cp 不变量拓扑金属与节点超导体的统一理论》, 《物理评论快报》116, 156402 (2016)。[14] Y. X. Zhao 和 Y. Lu, 《PT对称实狄拉克费米子与半金属》, 《物理评论快报》118, 056401 (2017)。[15] K. Shiozaki、M. Sato 和 K. Gomi, 《拓扑晶体材料：一般表述、模结构与壁纸群》, 《物理评论B辑》95, 235425 (2017)。[16] J. Ahn、S. Park 和 B.-J. Yang, 《Nielsen-Ninomiya 定理失效与二维时空反演对称系统中的脆弱拓扑：在魔角扭转双层石墨烯中的应用》, Phys. Rev. X 9, 021013 (2019)。[17] A. Bouhon、Q. Wu、R.-J. Slager、H. Weng、O. V. Yazyev 和 T. Bzduˇsek, 《外尔点的非阿贝尔倒空间编织及其在 ZrTe 中的表现》, Nature Physics 16, 1137 (2020)。[18] K. Wang、J.-X. Dai、L. B. Shao、S. A. Yang 和 Y. X. Zhao, 《$\mathcal{PT}$不变量拓扑的边界临界性与二阶节点线半金属》, 《物理评论快报》125, 126403 (2020)。[19] L. Zou、H. C. Po、A. Vishwanath 和 T. Senthil, 《扭转双层石墨烯的能带结构：涌现对称性、相称近似与 Wannier 阻碍》, 《物理评论B辑》98, 085435 2018( )。[20] H. C. Po、L. Zou、T. Senthil 和 A. Vishwanath, 《魔角双层石墨烯的忠实紧束缚模型与脆弱拓扑》, 《物理评论B辑》99, 195455 (2019)。[21] Z. Song、Z. Wang、W. Shi、G. Li、C. Fang 和 B. A. Bernevig, 《扭转双层石墨烯中的所有魔角均具有拓扑性》, 《物理评论快报》123, 036401 (2019)。[22] H. C. Po、L. Zou、A. Vishwanath 和 T. Senthil, 《扭转双层石墨烯中莫特绝缘行为与超导性的起源》, Phys. Rev. X 8, 031089 (2018)。[23] G. Tarnopolsky、A. J. Kruchkov 和 A. Vishwanath, 《扭转双层石墨烯中魔角的起源》, 《物理评论快报》122, 106405 2019( )。[24] Z.-D. Song 和 B. A. Bernevig, 《作为拓扑重费米子问题的魔角扭转双层石墨烯》, 《物理评论快报》129, 047601 (2022年)。[25] H. Shi 和 X. Dai, 《扭转双层石墨烯系统的重费米子表象》, 《物理评论B辑》106, 245129 (2022年)。[26] P. J. Ledwith、J. Dong、A. Vishwanath 和 E. Khalaf, 《扭转双层石墨烯陈能带中的非局域矩》, arXiv 预印本 arXiv:2408.16761 (2024)。[27] K. Kol´aˇr、K. Yang、F. von Oppen 和 C. Mora, 《莫尔系统中实空间拓扑的鲁棒性》, arXiv 预印本 arXiv:2507.00130 (2025)。[28] Q. Wu、A. A. Soluyanov 和 T. Bzduˇsek, 《非相互作用金属中的非阿贝尔能带拓扑》, Science 365, 1273 (2019)。[29] F. N. ¨Unal、A. Bouhon 和 R.-J. Slager, 《作为动力学可观测量的光学晶格拓扑欧拉类》, 《物理评论快报》125, 053601 (2020)。[30] H. C. Po、H. Watanabe 和 A. Vishwanath, 《脆弱拓扑与 Wannier 阻碍》, 《物理评论快报》121, 126402 (2018)。[31] P. W. Brouwer 和 V. Dwivedi, 《能带结构的同伦分类：稳定、脆弱、精细以及稳定表示保护拓扑》, 《物理评论B辑》108, 155137 (2023)。[32] Y. Hwang、J. Ahn 和 B.-J. Yang, 《反演对称性保护的脆弱拓扑：诊断、体区-边界对应与威尔逊环》, 《物理评论B辑》100, 205126 (2019)。[33] Z.-D. Song、L. Elcoro 和 B. A. Bernevig, 《脆弱拓扑的扭曲体区-边界对应》, Science 367, 794 (2020)。[34] O. Breach、R.-J. Slager 和 F. N. ¨Unal, 《非阿贝尔能带奇点与欧拉类拓扑的干涉测量》, 《物理评论快报》133, 093404 (2024)。[35] W. J. Jankowski 和 R.-J. Slager, 《多能隙拓扑相中的量子化积分位移效应》, 《物理评论快报》133, 186601 2024( )。[36] Y. Wu、Z.-K. Lin、Y. Yang、Z. Song、F. Li 和 J.-H. Jiang, 《利用位错探测脆弱拓扑》, 《科学通报》69, 3657 2024( )。[37] W. J. Jankowski、A. S. Morris、A. Bouhon、F. N. ¨Unal 和 R.-J. Slager, 《拓扑欧拉类的光学表现与界限》, 《物理评论B辑》111, L081103 (2025)。[38] C. M. Bender, 《理解非厄米哈密顿量》, 《物理学进展报告》70, 947 (2007)。[39] A. Guo、G. J. Salamo、D. Duchesne、R. Morandotti、M. Volatier-Ravat

以及 D. N. Christodoulides，《复杂光学势中 $\mathcal{PT}$对称性破缺的观测》，《物理评论快报》103，093902（2009）。[40] C. E. R¨uter、K. G. Makris、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides、M. Segev 和 D. Kip，《光学中的宇称–时间对称性观测》，《自然·物理》6，192（2010）。[41] Y. D. Chong、L. Ge 和 A. D. Stone，《光学散射系统中的 $\mathcal{PT}$对称性破缺与激光-吸收器模式》，《物理评论快报》106，093902（2011）。[42] X. Zhu、H. Ramezani、C. Shi、J. Zhu 和 X. Zhang，《 $\mathcal{PT}$对称声学》，《物理评论X》4，031042（2014）。[43] K. Yang、Z. Li、J. L. K¨onig、L. Rødland、M. St˚alhammar 和 E. J. Bergholtz，《同伦、对称性与非厄米能带拓扑》，《物理学进展报告》87，078002（2024）。[44] K. Yang、Z. Li、P. Xue、E. J. Bergholtz 和 P. W. Brouwer，《自发陈-欧拉对偶跃迁》，arXiv 预印本 arXiv:2503.21861（2025）。[45] B. Jiang、A. Bouhon、Z.-K. Lin、X. Zhou、B. Hou、F. Li、R.-J. Slager 和 J.-H. Jiang，《非阿贝尔拓扑声学半金属及其相变的实验观测》，《自然·物理》17，1239（2021）。[46] D. Wang、Y. Wu、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan，《光子介质中的非阿贝尔框架荷流》，《物理评论X》13，021024（2023）。[47] H. Xue、Z. Chen、Z. Cheng、J. Dai、Y. Long、Y. Zhao 和 B. Zhang，《三维声学节线晶体中的斯蒂费尔-惠特尼拓扑荷》，《自然·通讯》14，4563（2023）。[48] S. Vaidya、A. Ghorashi、T. Christensen、M. C. Rechtsman 和 W. A. Benalcazar，《晶体对称性下光子晶体的拓扑相》，《物理评论B辑》108，085116（2023）。[49] Y. Yang、B. Yang、G. Ma、J. Li、S. Zhang 和 C. T. Chan，《光与声中的非阿贝尔物理》，《科学》383，eadf9621（2024）。[50] B. Jiang、A. Bouhon、S.-Q. Wu、Z.-L. Kong、Z.-K. Lin、R.-J. Slager 和 J.-H. Jiang，《以磁子波实现声学拓扑欧拉绝缘体的观测》，Sci. Bull. 69，1653（2024）。[51] X. Xiang、Y.-G. Peng、F. Gao、X. Wu、P. Wu、Z. Chen、X. Ni 和 X.-F. Zhu，《声学高阶拓扑斯蒂费尔-惠特尼半金属的演示》，《物理评论快报》132，197202（2024）。[52] L. Feng、R. El-Ganainy 和 L. Ge，《基于宇称–时间对称性的非厄米光子学》，《自然·光子学》11，752（2017）。[53] S. Longhi，《宇称-时间对称性与光子学相遇：非厄米光学的新变化》，《欧洲物理快报》120，64001（2018）。[54] R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan、Z. H. Muslimani、S. Rotter 和 D. N. Christodoulides，《非厄米物理与PT对称性》，《自然·物理》14，11（2018）。[55] S.. K. ¨Ozdemir、S. Rotter、F. Nori 和 L. Yang，《光子学中的宇称–时间对称性与例外点》，《自然·材料》18，783（2019）。[56] T. Ozawa、H. M. Price、A. Amo、N. Goldman、M. Hafezi、L. Lu、M. C. Rechtsman、D. Schuster、J. Simon、O. Zilberberg 和 I. Carusotto，《拓扑光子学》，《现代物理评论》91，015006（2019）。[57] A. Bouhon、T. c. v. Bzdu˘sek 和 R.-J. Slager，《超越对称性指标研究脆弱拓扑的几何方法》，《物理评论B辑》102，115135（2020）。[58] 位于 $\gamma = 0$ 的模型也分别具有P和T对称性；空间反演对称性的存在使非厄米皮肤效应不会出现，更多细节见 [61]。[59] F. K. Kunst、E. Edvardsson、J. C. Budich 和 E. J. Bergholtz，《非厄米系统中的双正交体边对应》，《物理评论快报》121，026808（2018）。[60] T. Kato，《线性算子的扰动理论》，第132卷（Springer Science & Business Media，2013年）。[61] 关于趋肤效应的影响、态流的详细计算以及投影算符的更多信息，请参阅补充材料。[62] M. Stone，量子霍尔效应中的边缘波，《物理年鉴》207，38（1991）。[63] A. Kitaev，精确求解模型及其拓展中的任意子，《物理年鉴》321，2（2006）。[64] W. Kohn，布洛赫波和万尼尔函数的解析性质，《物理评论》115，809（1959）。[65] S. Ismail-Beigi 和 T. A. Arias，金属、半导体和绝缘体中密度矩阵的局域性，《物理评论快报》82，2127（1999）。[66] S. Goedecker，线性标度电子结构方法，《现代物理评论》71，1085（1999）。[67] L. He 和 D. Vanderbilt，万尼尔函数及相关量的指数衰减性质，《物理评论快报》86，5341（2001）。[68] T. Thonhauser 和 D. Vanderbilt，Haldane模型中的绝缘体／陈绝缘体相变，《物理评论B辑》74，235111（2006）。[69] S. Demko、W. F. Moss 和 P. W. Smith，带状矩阵逆矩阵的衰减率，《计算数学》43，491（1984）。[70] S. Yao 和 Z. Wang，非厄米系统的边缘态与拓扑不变量，《物理评论快报》121，086803（2018）。[71] T. E. Lee，非厄米晶格中的反常边缘态，《物理评论快报》116，133903（2016）。[72] S. Yao、F. Song 和 Z. Wang，非厄米陈能带，《物理评论快报》121，136802（2018）。[73] F. Song、S. Yao 和 Z. Wang，实空间中的非厄米拓扑不变量，《物理评论快报》123，246801（2019）。[74] K. Yang、S. C. Morampudi 和 E. J. Bergholtz，与环境耦合产生的例外自旋液体，《物理评论快报》126，077201（2021）。[75] W. Wang、X. Wang 和 G. Ma，拓扑模的非厄米变形，《自然》608，50（2022）。[76] A. Boettcher 和 S. Grudsky，《带状托普利茨矩阵的谱性质》，应用数学其他著作（工业与应用数学学会，2005）。[77] K. Yokomizo 和 S. Murakami，非厄米系统的非布洛赫能带理论，《物理评论快报》123，066404（2019）。[78] Z. Yang、K. Zhang、C. Fang 和 J. Hu，非厄米体区—边界对应关系及辅助广义布里渊区理论，《物理评论快报》125，226402（2020）。[79] H.-Y. Wang、F. Song 和 Z. Wang，任意维度下非布洛赫能带理论的阿米巴表述，《物理评论X》14，021011（2024）。[80] O. Zilberberg、S. Huang、J. Guglielmon、M. Wang、K. P. Chen、Y. E. Kraus 和 M. C. Rechtsman，光子拓扑边界泵浦：探测四维量子霍尔物理的手段，《自然》（2018）553，59。[81] J. P. Esparza 和 V. Juriˇci´c，非厄米扭转双层石墨烯中的例外魔角，《物理评论快报》134，226602（2025）。[82] P. Wang、Y. Zheng、X. Chen、C. Huang、Y. V. Kartashov、L. Torner、V. V. Konotop 和 F. Ye，光在光子莫尔´晶格中的局域化与离域化，《自然》577，42（2020）。[83] D. X. Nguyen、X. Letartre、E. Drouard、P. Viktorovitch、H. C. Nguyen 和 H. S. Nguyen，双层光子晶体莫尔´超晶格中的魔构型：近乎完美的平带与非常规局域化

(2022年). [84] C. H. Lee、L. Li 和 J. Gong，《非互易系统中的混合高阶趋肤-拓扑模》，《物理评论快报》123，016805（2019）。[85] K. Kawabata、M. Sato 和 K. Shiozaki，《高阶非厄米趋肤效应》，《物理评论B辑》102，205118（2020）。[86] W.-T. Xue、M.-R. Li、Y.-M. Hu、F. Song 和 Z. Wang，《非布洛赫能带理论中方向性放大的简明公式》，《物理评论B辑》103，L241408（2021）。[87] W. Rudin，《实分析与复分析》，高等数学系列（麦格劳-希尔教育，1987）。[88] C.-P. Sun，《非厄米量子系统的高阶绝热近似与贝里相位的复化》，《物理学文摘》48，393（1993）。[89] H. Shen、B. Zhen 和 L. Fu，《非厄米哈密顿量的拓扑能带理论》，《物理评论快报》120，146402（2018）。[90] M. Passare 和 H. Rullg˚ard，《阿米巴、Monge-Amp`ère 测度与牛顿多面体的三角剖分》，《杜克数学期刊》121，481（2004）。

附录A：能带投影算符的性质

我们考虑一个能带 α （或一组能带），其与其他能带之间存在充分明确的谱隙$\Delta_{\alpha,\beta} = \min_{i\in\alpha, j\in\beta}|\omega_i - \omega_j| > 0$与其他能带之间 $\beta \neq \alpha$，也就是说，对于周期性边界条件（PBCs）和开放边界条件（OBCs），这些谱隙都存在。由于开放边界谱位于周期性边界谱之内 [76, 79], ，因此这一假设可以简化为仅要求 PBCs 下存在谱隙。我们基于两个原因作出这一假设。首先，这是现实中关于无歧义谱隙的一个实际假设，因为系统边界之间指数微小的耦合 $\sim \exp(-L)$ 可以将体谱切换为 PBC 的结果 [76]。实际的体谱可能介于 PBC 谱和 OBC 谱之间。其次，正如我们将在本附录末尾所展示的，能带对之间的虚部谱隙会在 PBC 和 OBC 情况下同时打开。因此，在 PT 对称性破缺转变中，这一假设是成立的。我们将证明，这样的能带投影算符 $P_{t,s}(k_x)$ 具有平移不变性，并且在实空间中快速衰减。在本附录中，符号$P_{t,s}(k_x)$ 可以指代任意能带（组），并不限于正文中的陈能带。

在不存在趋肤效应时，能带投影算符的性质可以从布洛赫理论中得到：

$$P_{t,s}(k_x) \approx \int \frac{dk_y}{2\pi} u_{k_x}(k_y) e^{ik_y(t-s)}, \tag{9}$$

其中，$\approx$表示边界附近存在修正项，而$u_{k_x}(k_y)$实际上是此情形下的布洛赫态投影算符。平移不变性显而易见。当 $u_{k_x}(k_y)$是 k_y中的一个 C^n函数时，我们可以通过分部积分

$$\begin{aligned} |P_{t,s}(k_x)| &\approx \left| \left(\frac{i}{t-s}\right)^n \int \frac{dk_y}{2\pi} \frac{d^n u_{k_x}(k_y)}{d^n k_y} e^{ik_y(t-s)} \right| \\ &\leq \frac{1}{|t-s|^n} \int \frac{dk_y}{2\pi} \left| \frac{d^n u_{k_x}(k_y)}{d^n k_y} \right|. \end{aligned} \tag{10}$$

对于解析的 $u_{k_x}(k_y)$，$P_{t,s}$ 比任何幂律都衰减得更快。

一类典型的趋肤效应来源于对实空间基底 S 施加的非幺正变换：$|s\rangle \to e^{\mu s}|s\rangle$。该变换对左特征向量的作用则相反。在非幺正变换下，能带投影算符的形式为：

$$\begin{aligned} P_{t,s}(k_x) &\approx \int \frac{dk_y}{2\pi} u_{k_x}(k_y) e^{(ik_y-\mu)(t-s)} \\ &= \int \frac{dk_y}{2\pi} u_{k_x}(k_y - i\mu) e^{ik_y(t-s)}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中，在第二行中我们将积分平移了 $i\mu$。如果 $u_{k_x}(z)$ 在实轴周围宽度为 $|\mu|$ 的条带内是解析的，那么之前的技巧仍然适用。$u_{k_x}(z)$ 在复平面上的奇点与其到其他能带的谱隙 [65–67] 有关（对于 Hatano-Nelson模型，u 是一个常数）。因此，$P_{t,s}(k_x)$ 仍可快速衰减，只要非互易性（趋肤效应）相对于谱隙较小。

事实上，该判据可以扩展到更复杂的趋肤效应：如果用与周期性边界条件相对应的谱隙替换原有谱隙，那么这些效应可以通过非布洛赫理论加以描述。对于这些系统，我们利用格林函数求出能带投影。由于我们只需要考虑一个方向上的衰减行为，因此省略对 k_x 的依赖，将问题化为一维问题。与之前一样，我们用记号 μ 表示将晶体动量平移到复平面中。

在开放边界条件下投影到一组能带，可通过对频率积分格林函数得到 [86]

$$P_{t,s} = \oint_{c_\omega} d\omega \oint_{|\beta(\omega)|=e^{\mu(\omega)}} \frac{d\beta}{2\pi i\beta} \beta^{(t-s)} [\omega - h(\beta)]^{-1}, \tag{12}$$

其中，表达式 $h(\beta)$ 表示将 $H(k_y)$ 中的布洛赫动量 e^{ik_y} 替换为 β。对 ω 的积分沿复平面上的闭合曲线 c_ω 进行，该闭合曲线包围这些能带；而沿 $|\beta(\omega)| = e^{\mu(\omega)}$ 的积分可理解为对广义布洛赫动量进行积分。该广义布洛赫矢量选取在多项式 $\det[\omega - h(\beta)]$ 的第 n 个根与第 $n+1$ 个根之间：$|\beta_n(\omega)| < e^{\mu(\omega)} < |\beta_{n+1}(\omega)|$，其中 n 对应多项式 $\det[\omega - h(\beta)]$ [60, 86] 中 β 的最大负次幂。

根据我们关于 PBC 和 OBC 均存在谱隙的假设，我们可以先固定以下闭合曲线 c_ω，使其位于式（12）的周期边界谱隙内。对于任意这样的能量点 ω，它位于周期边界谱之外，因此很容易看出，相对于 ω 的绕数

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi i} \partial_k \ln \det[\omega - h(k)] \\ &= \oint_{|\beta|=1} \frac{d\beta}{2\pi i} \partial_\beta \ln \det[\omega - h(\beta)] \end{aligned} \tag{13}$$

显然为零，即 $W(\omega) = 0$。此外，辩值原理表明 $W(\omega) = Z - n$，其中 Z 统计常规布里渊区内被 $|\beta| = 1$ 圈住的多项式 $\det[\omega - h(\beta)]$ 的根的数量。因此，

$W(\omega) = 0$ 意味着 $\det[\omega - h(\beta)] = 0$ 的根必须满足 $|\beta_n(\omega)| < 1 < |\beta_{n+1}(\omega)|$。这一性质确保在计算式（12）中的积分时，我们可以找到一个正数 δ，使得 $|\beta(\omega)| < 1-\delta$, $\forall\omega$ 适用于情形 $t-s>0$，且 $|\beta(\omega)| > 1/(1-\delta)$ $\forall\omega$ 适用于情形 $t-s<0$。最终，我们可以将式（12）界定为

$$|P_{t,s}| < Z(1-\delta)^{|t-s|}, \tag{14}$$

其中 Z 是一个常数。这表明了 $P_{t,\ s}$ 在 $|t-s|$中的衰减行为。式（12）显然具有平移不变性。

根据上述结果，我们认为，在PT对称性破缺过程中，周期性边界条件和开放边界条件下能带对之间的虚部谱隙必定会同时打开。投影算符 P_{sum} 作用于这两条能带的整体，在整个实-复转变过程中呈指数衰减，因为远端能带的谱隙实部非零，并假设在转变过程中始终不闭合。在开放边界条件下虚部谱隙打开后，我们可以将总投影算符分解为对两条各自复能带的投影算符 $P_{\text{sum}} = P_+ + P_-$。这里，$P_\pm$ 投影到复平面上半部/下半部的能带。如果能带对之间的虚部谱隙仅在开放边界条件下打开，而在周期性边界条件下仍闭合，那么根据上述格林函数，对每条复能带的投影算符将在一个方向上增长（例如 $t-s>0$），同时在相反方向上衰减（例如 $t-s<0$）。由于PT对称性，P_+ 和P_- 朝相反方向增长。因此，它们的和 P_{sum} 不可能仍呈指数衰减，这就导致了矛盾。

附录B：傅里叶变换与开放边界陈-欧拉对偶

我们将更详细地介绍开放边界条件下的投影算符和陈-欧拉对偶原理。如附录 A 所示，能带投影算符在体区内快速衰减且平移不变，系统尺寸为 L 时，仅存在指数级小的修正。正文中我们以圆柱几何为例。投影算符的傅里叶变换形式化地定义为

$$\tilde{P}(k_x,k_y) = \sum_r P_{r,r_0}(k_x)e^{-ik_y r} \tag{15}$$

$$\approx \sum_{r,s}\frac{1}{L}P_{s+r,s}(k_x)e^{-ik_y r}, \tag{16}$$

其中 $1 \ll r_0 \ll L$ 是位于体区深处的参考位置。若 k_y 满足 $\sum_r |P_{r,r_0}|$ 收敛（l^1可积），则傅里叶变换在 [87] 上定义良好且连续。第一行与第二行之间的差异来自两方面。在体区内，修正是指数级小的。在边界处，每个 $P_{s+r,s}$ 的修正并不小，但其贡献会被$1/L$因子抑制。因此，在 $L\to\infty$极限下，两行一致。特别是，在 $L\to\infty$ 极限下，带隙内边界模的影响~被消除，使得 P能够从实空间投影中得到明确无歧义的定义。对于平移不变且~快速衰减的$P_{t,s}$（k_x），其傅里叶变换 $P(\mathbf{k})$同样是投影算符 $\tilde{P}^2(\mathbf{k}) = \tilde{P}(\mathbf{k})$ [61]。

现在我们可以证明，在自发 PT 破缺过程中从实能带中分裂出的复能带，在开放边界条件下携带 $|C_\pm| = |\chi|$。我们考虑可能存在多个远端能带的一般情形。我们所需的关键要素（ [44]中的方法和补充材料 S4）是：在自发 PT 破缺过程中，投影到这两条能带上的总投影~算符 $P_{\text{sum}}(\mathbf{k})$ 始终连续变化，并且在虚部谱隙 $P_{\text{sum}} = P_+ + P_-$打开后，可分解为两个连续的共轭复~ ~ ~投影算符之和。自发 PT 破缺后，可以选取与~实轴对称的预解式积分闭合曲线，从而完成式（5）中的分解。由与远端能带之间的谱隙~ ~以及P_{sum}、$_t$、$_s$ [61]的局域性，可以推出 $P_{\text{sum}}(\mathbf{k})$ 在 $(\mathbf{k}\ \lambda)$ 中的连续性。P_+、P_- 的连续性也可类似地得到。更明确地说，我们可以利用~$P(\mathbf{k})$的像来定义一组布洛赫态 $|\psi(\mathbf{k})\rangle$。这些态使我们能够在没有~布洛赫理论的情况下研究本征态的拓扑。特别是，$P(\mathbf{k})$的连续性导致由 $|\psi(\mathbf{k})\rangle$张成的向量空间具有连续性。如果我们将参考文献44中的布洛赫态替换为 $|\psi(\mathbf{k})\rangle$（即~$P(\mathbf{k})$的像），陈-欧拉对偶规则便可不作任何改变地延伸至圆柱几何。这表明，在自发 PT 破缺后产生的这两条复能带应当携带 $C_\pm = \pm|\chi|$。

$|\psi(\mathbf{k})\rangle$ 的陈数可通过由~ ~斜投影算符 $P(\mathbf{k})$ [所决定的协变（双正交）贝里曲率 [43, 44, 88] 提取。当 $P(\mathbf{k})$的秩为一时，陈数也可以由厄米（右-右本征态）贝里曲率 [43, 89]]给出。经直接计算，$|\psi(\mathbf{k})\rangle$ 的协变贝里曲率等于 [72]

$$B(\mathbf{k}) = \text{tr}\,\tilde{P}(\mathbf{k})[\partial_{k_x}\tilde{P}(\mathbf{k}), \partial_{k_y}\tilde{P}(\mathbf{k})]. \tag{17}$$

观察到，式（17）的积分只有在~发生变化时 P（$\mathbf{k}$）出现不连续时才会改变。可积函数的傅里叶变换始终连续。因此，只有当体区中的实空间能带投影算符变为长程时，陈数才会改变。

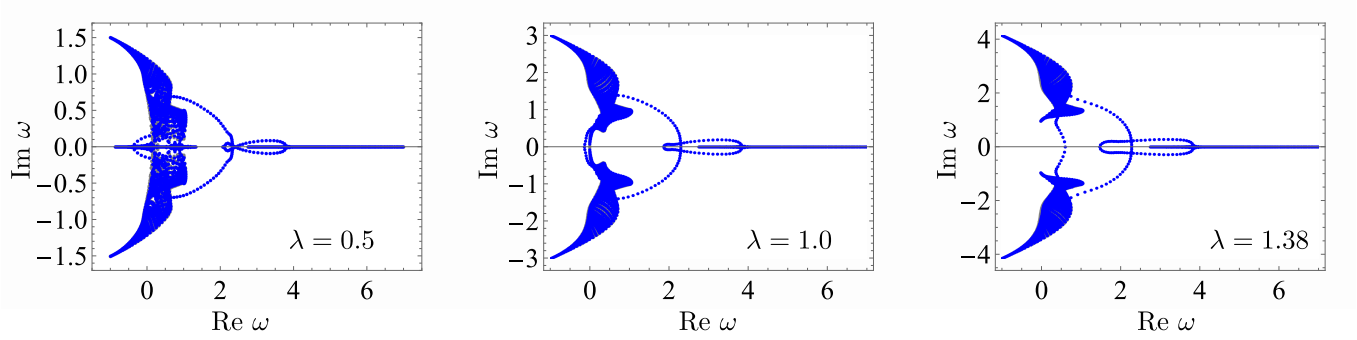

图 S1. 方程（1）–（3）所示模型在 $\gamma = 0$ 下的能谱，该模型分别具有 P 对称性和 T 对称性。开放边界条件和周期性边界条件下的能谱分别以蓝色和灰色表示。在整个实-复转变过程中，开放边界下的体谱与周期性边界下的体谱重合。

补充材料

趋肤效应不存在的情形

我们给出式（1）–（3）所描述模型的数值计算结果，其中 H_1 中的非互易耦合设为零，$\gamma = 0$。在这种情况下，系统分别具有P对称性和T对称性，其中 P 的定义为：轨道1和2在空间反演下为偶，轨道3为奇，即 $H(\mathbf{k}) = I_P H(-\mathbf{k}) I_P$，其中 $I_P = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$。

结果如图 S1 所示。 $\lambda = 0$ 处的情况与正文相同。开放边界条件（圆柱几何）下计算得到的能谱以蓝色表示，而同一系统在周期性边界条件（环面几何）下计算得到的能谱以灰色表示。从图 S1）可以清楚地看到，在非厄米PT对称耦合诱导的自发PT破缺转变过程中，开放边界条件下的体能谱与周期性边界条件下的体能谱重合，这表明当 P 和 T 对称性彼此独立时，不存在趋肤效应。

趋肤效应的减弱可以用阿米巴表述来解释。广义布里渊区和开放边界条件（OBC）下的能谱由 Ronkin函数的全局最小值确定，其定义为

$$R(E, \boldsymbol{\mu}) = \int_{T^2} \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{(2\pi)^2} \log \left|\det[E - H(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\mu})]\right|, \tag{S1}$$

其中， E 是一个复数， $\boldsymbol{\theta}$、$\boldsymbol{\mu}$ 是实二维变量。系统的开放边界条件谱分两步求得 [79]：首先，在每个 E 下，求出 $\boldsymbol{\mu}$ 中 $R(E, \boldsymbol{\mu})$ 的全局最小值，记为 $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{m}}(E)$。然后， E 处的本征态密度由二阶导数 $\rho(E) = \Delta R(E, \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{m}}(E))$ 给出，其中 $\Delta = \partial^2/\partial(\mathrm{Re}E)^2 + \partial^2/\partial(\mathrm{Im}E)^2$。请注意，在方程（S1）中，变量 $\boldsymbol{\mu}$ 的作用是为 k 引入虚部，因此可以直观地将 $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{m}}(E)$ 理解为把传统布洛赫矢量推广到复矢量。如果全局最小值 $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{m}}$ 始终在 $\boldsymbol{\mu} = 0$处取得，那么广义布里渊区就与传统布里渊区重合，开放边界条件谱也与周期边界能谱重叠。

Ronkin 函数在 $\boldsymbol{\mu}$ [79, 90] 中是凸函数。如果一个系统在反演对称性下保持不变，那么布洛赫哈密顿量满足 $H(-\mathbf{k}) = UH(\mathbf{k})U^{-1}$，其中 U 是一个幺正矩阵。对于关于 k 解析的哈密顿量 $H(\mathbf{k})$，当 k 为复数时，这一关系也成立。因此，反演对称性给出 $R(E, \boldsymbol{\mu}) = R(E, -\boldsymbol{\mu})$，因为行列式在幺正变换下保持不变，并且 $\boldsymbol{\theta}$ 积分在 $\boldsymbol{\theta} \to -\boldsymbol{\theta}$ 下不变。这表明，对于任意 $\boldsymbol{\mu} \neq 0$，都有 $R(E, \boldsymbol{\mu}) \geq R(E, 0)$；否则，连接 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $-\boldsymbol{\mu}$ 的线段将位于 $R(E, 0)$ 下方，从而违反凸 $R(E, \boldsymbol{\mu})$ 的条件。因此， $\boldsymbol{\mu} = 0$ 是 $R(E, \boldsymbol{\mu})$ 的全局最小值。因此，开放边界条件下的体谱与周期性边界条件下的布洛赫能谱重叠。

解除边界带隙内模的简并

在轨道 1、3 之间加入一个厄米的反演对称性破缺耦合$\sum_{\mathbf{r}} \gamma'(|\mathbf{r}\ 1\rangle\langle\mathbf{r}\ 3| + |\mathbf{r}\ 3\rangle\langle\mathbf{r}\ 1|)\,(\gamma \in \mathbb{R})$，即可解除顶部和底部边界带隙内模之间的简并。由于该项的系数为实数，它仍保持 PT对称性。我们计算了 $\gamma' = 0.2$， $\gamma = 0$的结果。结果如图 S2所示。

厄米反演对称性破缺项使能谱不再关于 $k_x = 0$对称，如图S2第一幅图中的插图所示。PT破缺后，顶部边界模和底部边界模发生分裂。每个边界都承载两个带隙内模，且相对边界上的模通过复共轭变换（PT反演）相关联。

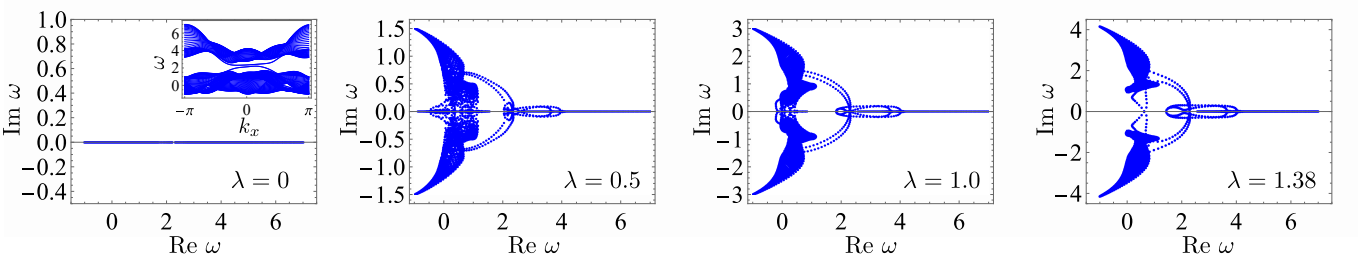

图 S2. 厄米反演对称性破缺耦合（仍保持 PT对称性）可以解除底部边界模与顶部边界模之间的简并。结果是在不同的 λ 下针对 $\gamma = 0$, $\gamma' = 0.2$计算得到的。

态流计算

我们展开 δn_{in}的表达式。利用对易子可得

$$-\delta n_{in} = \sum_{t,s} \text{tr}\left([P,\dot{P}]_{s,t}[P,Q]_{t,s}\right) = \sum_{t,s} \text{tr}\,[P,\dot{P}]_{s,t}P_{t,s}[\theta(s-y_1)\theta(y_2-s) - \theta(t-y_1)\theta(y_2-t)]. \tag{S2}$$

赫维赛德函数乘积之差在以下情况下非零：(i) $y_1 < s < y_2, t < y_1$ 或 $t > y_2$。(ii)$y_1 < t < y_2, s < y_1$ 或 $s > y_2$。假设$P_{s,t}P_{t,s}($ $t-s)|$ 的衰减长度尺度为 R，我们发现当 $|s-y_j| > R$或 $|t-y_j| > R$全部 j时，式 (S2) 也为零。因此，我们可以将式 (S2) 中的求和限制在 $s,t \in [y_1 - R, y_1 + R]$ 和$s,t \in [y_2 - R.y_2 + R]$。这里假设 $|y_1 - y_2| \gg R$。对于 $s,t \in [y_1 - R, y_1 + R]$，式 (S2) 变为：

$$\sum_{t,s\in[y_1-R,y_1+R]} \text{tr}\,[P,\dot{P}]_{s,t}P_{t,s}[\theta(s-y_1) - \theta(t-y_1)]. \tag{S3}$$

这是 J_{y_1} 的表达式。通过类似的方法，将 $\theta(x)$ 替换为 $= 1 - \theta(-x-\epsilon)$，即可得到 J_{y_2} 的表达式，其中 ϵ 是一个无穷小的正数。

平移不变局域投影的傅里叶变换也是一个投影

˜假设 $P_{t,s}$ 是一个平移不变投影，并且随 $|t-s|$ 快速衰减。我们用 $P(k)$ 表示其傅里叶变换：

$$\tilde{P}(k) = \sum_r P_{r,r_0}e^{-ikr}, \tag{S4}$$

˜ ˜与正文中一样，我们省略轨道指标；与 $P_{t,s}$ 相比，$P(k)$ 是一个较小的矩阵。 $P(k)$ 的平方为

$$\tilde{P}^2(k) = \sum_{r,r'} P_{r,r'}e^{-ikr}P_{r',r_0}e^{-ikr'} = \sum_{r,r'} P_{r+r',r'}P_{r',r_0}e^{-ik(r+r')} = \sum_{\bar{r}=r+r'} P_{\bar{r},r_0}e^{-ik\bar{r}} = \tilde{P}(k). \tag{S5}$$

在第二步中，我们利用了 $P_{t,s}$ 的平移不变性。除了边界带来的修正外，这一替换均成立；在 $L \to \infty$ 的极限下，这些修正很小。在最后一步中，我们将 $r + r'$ 记作 $\bar{r}$，并使用投影条件 $\sum'_r P_{\bar{r},r'}P_{r',r_0} = P_{\bar{r},r_0}$。当 $P_{t,s}$ 随 $|t-s|$ 快速衰减时，这些方程成立。这验证了 $\tilde{P}(k)$ 也是一个投影。

实空间投影算符的傅里叶变换的连续性

在本部分中，我们考虑一个在参数集合 λ上连续的实空间局域哈密顿量 $H_{t,\ s}(\lambda)$。我们证明，实空间能带投影 $P_{t,\ s}(\lambda)$ 的傅里叶变换 $P(k,\ \lambda)$ 在 $(k,\ \lambda)$ 上连续。通过替换 $k \to k_y$,~$\lambda \to (k_x,\ \lambda)$，即可证明正文中 $P(\mathbf{k})$ 在实-复转变期间的连续性。

我们假设 $P_{t,\ s}(\lambda)$ 的 l^1-和具有上界 $\sup_\lambda \sum_r |P_{r,\ r_0}(\lambda)| = S < \infty$，且 l^1-收敛在半径 $R(\delta)$ 内达到，使得对于任意 δ，均有 $\sup_\lambda \sum_{|r-r_0|>R(\delta)} |P_{r,\ r_0}(\lambda)| < \delta$。这些假设源于我们所研究能带与其他能带之间的谱隙。我们估计傅里叶变换之间的变化

$$\begin{aligned}|\tilde{P}(k',\lambda') - \tilde{P}(k,\lambda)| &= |\tilde{P}(k',\lambda') - \tilde{P}(k',\lambda) + \tilde{P}(k',\lambda) - \tilde{P}(k,\lambda)| \\ &\leq \left|\sum_r [P_{r,r_0}(\lambda') - P_{r,r_0}(\lambda)] e^{ik'r}\right| + \left|\sum_r P_{r,r_0}(\lambda)(e^{-ikr} - e^{-ik'r})\right| \\ &\leq \sum_r |P_{r,r_0}(\lambda') - P_{r,r_0}(\lambda)| + \sum_r \left|P_{r,r_0}(\lambda)(e^{-ikr} - e^{-ik'r})\right|. \end{aligned} \tag{S6}$$

由于 $\sum_r |P_{r,\ r_0}(\lambda') - P_{r,\ r_0}(\lambda)| \leq \|P(\lambda') - P(\lambda)\|$ [$P(\lambda)$ 作为实空间坐标下的矩阵]，我们将式（S6）中的第一项界定为

$$\begin{aligned}\|P(\lambda') - P(\lambda)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_\alpha} dz [z - H(\lambda')]^{-1} [H(\lambda') - H(\lambda)] [z - H(\lambda)]^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_\alpha} |dz| \left\|[z - H(\lambda')]^{-1}\right\| \left\|[z - H(\lambda)]^{-1}\right\| \|H(\lambda') - H(\lambda)\|. \end{aligned} \tag{S7}$$

由于存在谱隙，$\left\|[z - H(\lambda')]^{-1}\right\|$ 和 $\left\|[z - H(\lambda)]^{-1}\right\|$ 都有上界。当 $(k',\ \lambda') \to (k,\ \lambda)$ 时，由于 $H(\lambda)$ 的连续性和局域性，上式趋于零。对于式（S6）中的第二项，我们将其分为

$$\begin{aligned}\sum_r \left|P_{r,r_0}(\lambda)(e^{-ikr} - e^{-ik'r})\right| &= \sum_{|r-r_0|\leq R(\delta)} \left|P_{r,r_0}(\lambda)(e^{-ikr} - e^{-ik'r})\right| + \sum_{|r-r_0|>R(\delta)} \left|P_{r,r_0}(\lambda)(e^{-ikr} - e^{-ik'r})\right| \\ &\leq SR(\delta)|k - k'| + 2\delta. \end{aligned} \tag{S8}$$

通过选择 $\delta = \epsilon/3$ 和 $|k - k'| < \epsilon/SR(\epsilon/3)$，上式可以小于任意给定的 ϵ。因此，~式（S6）中的第二项也会在 $(k',\ \lambda') \to (k,\ \lambda)$ 时趋于零。由此完成了对 $P(k,\ \lambda)$ 连续性的证明。