arXiv:2601.02673v1 [math.DG] 6 Jan 2026

图上的加权 Forman 和 Lin-Lu-Yau 里奇流

Shuliang Bai、Shuang Liu、Xin Lai

2025年6月

摘要

本文提出了一种图上的里奇流，其中 Lin-Lu-Yau 曲率对应的概率分布随时间保持不变，并研究了相关的 Forman 曲率流。这两种曲率流在树上重合。我们首先证明了一般图上这两种曲率流的解的存在性与唯一性。随后，我们证明树上的归一化曲率流收敛到常曲率度量；在均匀测度下，还可根据收敛结果对树进行完整分类。

关键词：里奇流；Lin-Lu-Yau 曲率；Forman 曲率；图；树

1 引言

在微分几何中，里奇流是 Hamilton 提出的一种强大的几何演化工具 [10]，其最著名的成就是 Perelman 对庞加莱猜想的证明 [23]。在流形（M， $g(t)$）上，里奇流为

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij},$$

其中 g_{ij} 是度量张量， R_{ij} 是里奇曲率张量。里奇流通过以与流形里奇曲率成正比的速率演化度量，实现流形几何的均匀化。受此启发，自然可以建立相应的里奇流，以理解并引导图的演化。Ollivier [22] 提出了一种离散版本的里奇流，使图上的距离通过粗里奇曲率演化

$$\frac{d}{dt}d_{xy}(t) = \kappa^o_{xy}(t)d_{xy}(t), \tag{1}$$

其中， d_{xy}（t）和 κ^o_{xy}（t）分别表示图中两个不同顶点 x和 y 之间的距离和 Ollivier 曲率。离散里奇流公式是连续里奇流在离散图结构上的对应形式。它通过里奇曲率驱动距离的迭代演化，使网络形成更具几何结构的形态，从而揭示或增强其内在的社群（或模块）组织。在 [21], 中，通过离散化时间，采用了一种略有不同的里奇流来对复杂网络进行社群划分。此后，许多应用（例如 [5, 13, 14, 28, 30] ）利用离散 Ricci 曲率来探索图数据几何，并提升图数据分析的有效性。

为完善这一理论，Bai 等人 [3] 将 Lin-Lu-Yau 曲率 κ这一修正后的 Ollivier 曲率应用于（1），并将每条边的权重设为其两个端点之间的距离。他们证明了 Lin-Lu-Yau 曲率流的解存在且唯一

$$\frac{d}{dt}\omega_e(t) = -\kappa_e(t)\omega_e(t). \tag{2}$$

然而，当边权重在（2）的演化过程中不满足三角不等式时，演化过程就会触发删边操作。为避免这种情况，Ma 和 Yang [18]将边权重 ω 视为度量，并按以下方式计算边的端点之间的距离

$$d_e = \inf_{\gamma\in\Gamma_e}\sum_{h\in\gamma}\omega_h, \tag{3}$$

其中， Γ_e 是连接 e两个端点的所有路径的集合。他们考虑了以下修正方程

$$\frac{d}{dt}\omega_e(t) = -\kappa_e(t)d_e(t), \tag{4}$$

并建立了方程（4）解的存在性与唯一性。随后，大量研究考察了此类方程解的性质，并发展了许多应用。详见参考文献 [2, 19, 25, 29] 。

设 $G = (V, E, m_1, m_2)$ 为一个无向图，其中 m_1 是顶点集合上的正测度， V，而 m_2 是边集合上的非负测度 $E \subset V \times V$。边 $e = (x, y)$ 上的 Lin-Lu-Yau 曲率，本质上衡量了两个转移概率核 m_x^ϵ， m_y^ϵ 之间的 Wasserstein 距离与 G 上的距离 d 之间的差异，如下所示

$$\kappa(x, y) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon}\left(1 - \frac{W(m_x^\epsilon, m_y^\epsilon)}{d(x, y)}\right).$$

值得注意的是，方程（2）和（4）都涉及转移概率核 m_x^ϵ， m_y^ϵ 随时间的演化。在本文中，我们令转移概率核在时间上保持不变（稍后由顶点测度 m_1 和边测度 m_2 定义，见第2节），并通过为每条边赋予权重或度量 ω 来定义两个顶点之间的距离，如（3）所示。加权 Lin-Lu-Yau 曲率随时间的变化仅源于度量或权重的变化。本文类似于（2），考虑

$$\frac{d}{dt}\omega(t, e) = -\kappa_\omega(t, e)\omega(t, e), \tag{5}$$

其中 κ_ω 是与度量 ω相对应的加权 Lin-Lu-Yau 曲率，即转移概率核（即 m_x^ϵ， m_y^ϵ）在时间上保持不变，且距离定义为（3）。类似于（2），必须假设加权 Lin-Lu-Yau 曲率流（5）演化过程中的边度量必须恰好等于其端点之间的距离；否则，在演化过程中将引入删边操作。

定理 1.1 （见定理 3.1）。 对于所有 $t \in$ （0， ∞）以及任意边 $e \in E$，若其初始值 ω_0为正，则（5）存在唯一正解。

备注 1。 如果希望避免删边操作，可以考虑加权 *Lin- Lu-Yau* 曲率流的修改版本，其形式与 （4）相同，并且同样可以证明解的存在性与唯一性。证明方法与定理*3.1*基本相似。特别地，对于树，由于其无环结构，边权重总是等于其两个端点之间的距离。因此，在树上，两个方程 （2）和 （4）是相同的，并且在使用加权 *Lin-Lu-Yau* 曲率 κ_ω时，可以将其转化为线性系统 （18）。

除了 Ollivier 曲率和 Lin-Lu-Yau 曲率之外，由 Forman 曲率和 Bakry-´Emery 曲率定义的曲率流也得到了广泛研究，参见例如 [4, 11, 26, 27]。人们还开发了其他组合流，以探究离散曲率和度量的各个方面，参见例如 [6, 8, 9]。

众所周知，Ollivier 曲率是一个基于最优传输理论的极值问题。从计算角度来看，环，尤其是三角形，对 Ollivier 曲率有着至关重要的影响。除了树之外，由于缺少环结构，一般图上的 Ollivier 曲率没有闭式表达式，因此难以分析，且计算复杂度很高。相比之下，图上的 Forman 曲率可以通过计算上极其简单的公式求得，同时完全忽略环结构的影响（见第 2 节中的（10））。然而，忽略环结构会导致 Forman 曲率损失图的部分局部结构信息。因此，当受限于计算能力而无法计算其他曲率时，Forman 曲率只能充当一种替代方案。近期研究揭示，Forman 曲率与 Ollivier 曲率之间存在紧密联系，相关研究见 [12, 17, 24]。特别是， [12]建立了组合胞腔复形（包括一般加权图）上的 Ollivier 曲率与一种新形式的 Forman 曲率之间的等价关系。这些结果表明，除计算优势外，Forman 曲率还具有深刻的理论价值。我们准确地

利用 Forman 曲率与 Lin-Lu-Yau 曲率之间的等价关系，证明了（5）的解在定理 3.1 中存在且唯一。

为了使整个图的体积有限，通常考虑归一化权重

$$\bar{\omega}(t,e)=\frac{\omega(t,e)}{\sum_{h\in E}\omega(t,h)}.$$

本文还探讨了 Lin-Lu-Yau 和 Forman 流方程的解的收敛性，以及曲率本身的收敛性质。带有特定手术的离散时间 Ollivier 曲率流的解的收敛性已在 [15]中给出。最近， [1] 证明了树上（2）的解的部分收敛结果。

定理 1.2 (见定理3.3)。 对于树上的 (5)，加权 Lin-Lu-Yau 曲率在 $t\to\infty$ 时收敛到一个常数，对任意 $e\in E$ 均成立。此外，归一化度量 $\bar{\omega}(t,\ e)$ 收敛到常曲率度量。

注 2。 在固定转移概率与允许其随时间变化这两种情况下，其曲率流的演化存在根本差异。与 *[1],* 中的收敛结果相比，存在一些非毛毛虫树，其里奇流 (2) 不会收敛到常曲率度量。

此外，在 $m_1=m_2\equiv 1$ 的情形下，建立了树上里奇流收敛性的完整分类。

定理 1.3 (见定理 4.1)。 对于一棵树 $T=(V,E)$，若其有 n 条边，且假设 $m_1=m_2\equiv 1$。令 $\omega(t,e)$ 为里奇流 (5)的解，则：

1. 若 T 是一条路径，则对于任意 $e\in E$， $\omega(t,e)$ 收敛于 *0*，且里奇曲率 $\kappa_w(t)$ 收敛于一个正常数。*2.* 对于 K_1,*3*， $w(t,e)$ 对任意 $e\in E$ 收敛于一个非零实数，且里奇曲率$\kappa_w(t)$ 收敛于 *0*。*3.* 若 $max_{x\in V}\ d(x)\ \geq 3$，且 T 不是 K_1,*3*，则对于任意 $e\in E$， $\omega(t,e)$ 发散至无穷大，且里奇曲率 $\kappa_w(t)$ 收敛于一个负常数。

类似地，我们也可以考虑图上的 Forman 曲率流，即在（5）中使用 Forman 曲率。由于图上的 Forman 曲率不考虑环，因此 Forman 曲率流成为一个线性系统（见（ 18 ））。本文通过手术建立了一般图上 Forman 曲率流解的存在性、唯一性和收敛性，如定理3.2和定理 3.3所述。

本文结构如下：第 2 节介绍两种曲率的定义及其等价性质。第 3 节证明 Lin-Lu-Yau 曲率流方程和 Forman 曲率流方程的解的存在性、唯一性与收敛性。第 4 节使用两种特殊测度，考察并模拟若干特定图上曲率流解的收敛性。示例表明，在不同测度下，里奇流的收敛结果可能有所不同。

2 图上的加权里奇曲率

设 $G=(V,\ E)$ 为一个有限无向图，其中 V 是顶点集合， $E\subset V\times V$ 是边集合。当 $(x,\ y)\in E$ 时，我们记作 $x\sim y$ 。若对于任意 $x,\ y\in V$，都存在一条路径$x=x_0\sim x_1\sim\cdots\sim x_k=y$，则称图为连通图。本文始终假设 G 是连通的。可以为图赋予两种测度： $V\to\mathbb{R}_+$ 是顶点测度， $E\to\mathbb{R}_+$ 是边测度。我们假设边测度是对称的，即对于任意 $(x,\ y)\in E$， $m_2(x,\ y)=m_2(y,\ x)$。在现有文献中，测度有两种典型的选取方式：

1. **均匀测度：**每个顶点和边的测度均为 1，即 $m_1\equiv 1$ 和 $m_2\equiv 1$;
2. **归一化测度：**每个顶点的测度等于其关联边的总测度，即$m_1(x)=\sum_{y\sim x}m_2(x,\ y)$。

我们记

$$\mathrm{Deg}(x) := \frac{\sum_{y\sim x} m_2(x,y)}{m_1(x)}.$$

我们用 $C(V)$ 表示定义在 V 上的函数空间。令 $\omega\colon E\to(0,\infty)$ 为 E 上的度量或权重，路径距离 $d_\omega\colon V\times V\to[0,\infty]$ 由 ω 通过以下方式生成:

$$d_\omega(u,v) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\omega(v_k,v_{k-1}) : u=v_0\sim\cdots v_n=v\right\},$$

其中下确界取遍 u 与 v. 之间的所有路径。令 $d(x)$ 表示 $x\in V$ 处的度，记为

$$d(x) := \#\{y\in V : y\sim x\}.$$

令 $C(V)$ 表示定义在 V 上的实值函数空间，令 $\ell^\infty(V)$ 表示定义在 V 上的有界函数空间，并赋予标准范数 $\|\cdot\|_\infty$。

2.1 图上的加权 Lin-Lu-Yau 曲率

对于充分小的 $\epsilon>0$，我们引入一种在文献 [20]，中提出的有限支撑转移概率核，如下所示:

$$m_x^\epsilon(y) := \begin{cases} 1-\epsilon\,\mathrm{Deg}(x), & y=x,\\ \dfrac{\epsilon m_2(x,y)}{m_1(x)}, & y\sim x,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{6}$$

注 3. 与常用的概率测度 μ_x^α （例如参见 *[3, 16]*）相比，测度 m_x^ϵ 提供了包含惰性在内的更一般的表述。特别地， m_x^ϵ 与 μ_x^α 在以下两个关键方面有所不同:

- 惰性系数 取决于点，由 $1-\epsilon\mathrm{Deg}(x)$ 给出，而不是固定的常数 α;
- 顶点测度 m_1 和边测度 m_2 不一定相互关联，可以独立选取。

在$\mathrm{Deg}(x)\equiv 1$ 且 $\epsilon=1-\alpha$的特殊情形下，这两个概念一致。

设 $x\neq y\in V$， m_x^ϵ 和 m_y^ϵ 是由式（6）定义的两个概率分布。Wasserstein 距离 $W(m_x^\epsilon, m_y^\epsilon)$ 定义为

$$W(m_x^\epsilon,m_y^\epsilon) := \inf_{A\in\Pi(m_x^\epsilon,m_y^\epsilon)}\sum_{u,v\in V} d_\omega(u,v)A(u,v),$$

其中，将 m_x^ϵ 运送到 m_y^ϵ 的运输计划 A 是一个映射 $A\colon V\times V\to[0,1]$，满足

$$\begin{cases}\sum_{v\in V}A(u,v)=m_x^\epsilon(u), & u\in V,\\ \sum_{u\in V}A(u,v)=m_y^\epsilon(v), & v\in V,\\ A(u,v)\geq 0.\end{cases}$$

最小值取遍从 m_x^ϵ 到 m_y^ϵ 的所有运输计划。根据里奇曲率的标准定义，关于 ω 的加权 Lin-Lu-Yau 里奇曲率，对于 $x\neq y$，定义为

$$\kappa_\omega(x,y) := \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\left(1-\frac{W(m_x^\epsilon,m_y^\epsilon)}{d_\omega(x,y)}\right). \tag{7}$$

M¨unch 等人[20], 提出了 Lin-Lu-Yau 曲率的一种等价形式，该形式无需取极限。记

$$\nabla_{xy}f := \frac{f(x)-f(y)}{d_\omega(x,y)}$$

为 f 的梯度，并记

$$\mathrm{Lip}(K) := \{f \in C(V) : \|\nabla f\|_\infty \le K\}$$

关于加权图度量 d_ω，在 V 上所有 K-Lipschitz 函数（$K > 0$）的集合。于是，加权 Lin-Lu-Yau 曲率可表示为

$$\kappa_\omega(x, y) = \inf_{f \in \mathcal{F}_\omega} \nabla_{xy} \Delta f,$$

其中 $\mathcal{F}_\omega := \{f \in \mathrm{Lip}(1)\ \nabla_{xy} f = 1\}$，拉普拉斯算子记作

$$\Delta f(x) = \frac{1}{m_1(x)} \sum_{y \sim x} m_2(x, y)(f(y) - f(x)), \quad \forall x \in V.$$

2.2 胞腔复形上的加权 Forman 曲率

我们回顾组合胞腔复形的定义，该定义由 [7, 12] 提出。设 $X = \cup_{k \ge 0} X_k$（X_k 表示 k 维胞腔的集合）为有限集，$C(X)$ 为函数空间 $\mathbb{R}^X$。设 $m: X \to (0, \infty)$ 为正函数，并将其解释为胞腔上的测度。胞腔复形是元组 $K = (X, \delta, m)$，其中 $\delta: C(X_k) \to C(X_{k+1})$ 为余边界算子。为简便起见，记 $x = \mathbf{1}_x \in C(X)$ 为 $x \in X$。对于所有 v、$z \in X$ 和所有 $k \in N_0$，余边界算子的作用满足

$$\delta v(z) = \{-1, 0, 1\}.$$

此外，若 $\dim(z) - \dim(v)$，则 $\delta v(z) = 0$；当且仅当 $z \succ v$ 时，$\delta v(z) \ne 0$，这表示 x 是 z 的面。此外，胞腔复形需要满足以下相容条件。对于所有 $v, z, z' \in X$,

- $|\{w \in X_0 : \delta w(x) = 1\}| = |\{w \in X_0 : \delta w(x) = -1\}| = 1$ for all $x \in X_1$.

  若 $\dim(z) - \dim(v)$，且 $\{x : v \prec x \prec z\} \ne \emptyset$，则 $\bullet = 2$

  $$|\{x : v \prec x \prec z\}| = 2$$

  and

  $$\{-1, 1\} \subset \{\delta v(x) \delta x(z) : x \in X\}.$$

  对于所有 $x, y \prec z,$，存在一个序列 $(x = x_0, \cdots, x_n = y)$，使得对于所有 $k = 1, \cdots, n$，$\delta v_k(v_{k-1}) + \delta v_{k-1}(v_k) \ne 0$。

  若 $\{x : x \prec z\} = \{x : x \prec z'\}$ 且 $\dim(z) \ge 1$，则 $\bullet \quad z = z'.$

X 通过测度 m 配备标量积

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in X} f(x) g(x) m(x), \forall f, g \in C(X).$$

据此，定义伴随算子 $\delta^* : C(X_{k+1}) \to C(X_k)$ 为

$$\delta^* z(x) = \frac{1}{m(x)} \langle \delta^* z, x \rangle = \frac{1}{m(x)} \langle z, \delta x \rangle = \frac{m(z)}{m(x)} \delta x(z), \forall x, z \in X.$$

通过线性延拓，

$$\delta^* f(x) = \sum_z f(z) \delta^* z(x).$$

Hodge 拉普拉斯算子 $H: C(X_k) \to C(X_k)$ 定义为

$$H = \delta \delta^* + \delta^* \delta.$$

对于每个 $x \in X_1$，都存在唯一的一对 (u, v)，使得 $\delta u(x) = -1$ 且 $\delta v(x) = 1$。采用记号$x = (u, v) = (v, u)$，于是施加条件 $m(u, v) = m(v, u) = m(x)$；若不存在 $x \succ u$、v或 $u = v$，则 $m(u, v) = 0$。事实证明，一维胞腔复形 $(X_0 \cup X_1, \delta, m)$ 与简单

加权图 $(V,\ E,\ m_1,\ m_2)$ 是一致的。下文中，我们用 m_i 表示 X_i的测度。此外，对于任意 $u \in X_0$，$C(X_0)$ 上的 H是通常的图拉普拉斯算子，

$$Hf(u) = \frac{1}{m_1(u)} \sum_{v \sim v} m_2(u,v)(f(v) - f(u)), f \in C(X_0).$$

更多细节可参见 [12]。

不同于 Forman 最初通过将 Hodge 拉普拉斯算子 H 分解为一个最小对角占优算子（作为 Bochner 拉普拉斯算子）和一个对角算子[7], 来定义曲率，J. Jost 等人 [12] 通过 Hodge 拉普拉斯算子 H的对角占优部分重新定义了它，从而自然地推广到加权情形，如下所示。

定义 1. 对于任意 $x \in X$，加权 *Forman* 曲率为

$$F_\omega(x) = Hx(x) - \sum_{y \neq x} \frac{\omega(y)}{\omega(x)} |Hy(x)|.$$

对于任意 $e \in X_1$，e 的加权 Forman 曲率为

$$F_\omega(e) = \sum_{u \prec e} \frac{m_2(e)}{m_1(u)} + \sum_{f \succ e} \frac{m_3(f)}{m_2(e)} - \sum_{e' \neq e} \frac{\omega(e')}{\omega(e)} \left| \sum_{u \prec e, e'} \frac{m_2(e')}{m_1(u)} - \sum_{f \succ e, e'} \frac{m_3(f)}{m_2(e)} \right|. \tag{8}$$

考虑一个对应于图的一维胞腔复形。特别地，X_0 表示顶点集 V，X_1 表示边集 E，且不存在二维胞腔复形。令 $e = (u,\ v)$，我们将 $e_u \sim u$ 记作 iff $e_u \succ u$。图上的加权 Forman 曲率表示为

$$F_\omega(e) = \frac{m_2(e)}{m_1(u)} + \frac{m_2(e)}{m_1(v)} - \sum_{e_u \sim u, e_u \neq e} \frac{m_2(e_u)}{m_1(u)} \frac{\omega(e_u)}{\omega(e)} - \sum_{e_v \sim v, e_v \neq e} \frac{m_2(e_v)}{m_1(v)} \frac{\omega(e_v)}{\omega(e)}. \tag{9}$$

若集合 $\{e_u \in E :\ e_u \sim u,\ e_u \neq e\}$ 为空，则相应的求和为零。取

$$m_i = \frac{1}{w_i}, i = 1, 2, \text{ and } \omega = \sqrt{w_2},$$

(9) 可以表示为以下形式

$$F_w(e) = \frac{w_1(u)}{w_2(e)} + \frac{w_1(v)}{w_2(e)} - \sum_{e_u \sim u, e_u \neq e} \frac{w_1(u)}{\sqrt{w_2(e_u) w_2(e)}} - \sum_{e_v \sim v, e_v \neq e} \frac{w_1(v)}{\sqrt{w_2(e_v) w_2(e)}}, \tag{10}$$

这等于原始 Forman 曲率（见 [7]）除以 $w_2(e)$。令 $w_1 = w_2 \equiv 1$ 在 (10) 中，此式可化简为非加权 Forman 曲率

$$F(e) = 4 - d(u) - d(v),$$

其中，$d(u)$ 是 u 的邻居数量。

2.3 Lin-Lu-Yau 曲率与 Forman 曲率的关系

关于 ω 的 Lin-Lu-Yau 曲率 κ_ω，可改写为

$$\kappa_\omega(x) = \frac{1}{\omega(x)} \inf_{\delta f(x) = \omega(x), |\delta f| \leq \omega} \delta\delta^* \delta f(x).$$

如果 $e \in X_1$，那么 $\kappa_\omega(e)$ 是边 e 关于 ω 的通常 Lin-Lu-Yau 曲率，见 (7)。

设 $(X,\ \delta,\ m)$ 是一个一维胞腔复形。圈是由顶点$v_i \in X_0$ 构成的单射路径 $(v_0,\ \cdots,\ v_{n-1})$，满足 $v_0 \sim v_{n-1}$ 且满足 $n \geq 3$。若存在某个 $k \in N$，使得 $w_i = v_{k \pm i}$ 模 n，则两个圈 $(v_i)_{i=0}^{n-1}$ 和 $(w_i)_{i=0}^{n-1}$ 视为相同。令 Y_2 为圈的集合，非负函数 m 为 Y_2 的测度。

令 $X_2 := \{y \in Y_2 : m(y) > 0\}$ 为 2-胞腔的集合。对于 $x = (u, v) \in X_1$ 和 $v = (v_0, \cdots, v_{n-1}) \in X_2$，，令

$$\delta x(v) = \begin{cases} 1, & v = v_k, w = v_{k+1} \\ -1, & v = v_k, w = v_{k-1} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，$(X \cup X_2, \delta, m)$ 是一个二维胞腔复形，同时也是一个正则加权 CW 复形。通过扩展 1-骨架并优化 2-胞腔的测度，可以使 Lin-Lu-Yau 曲率与 Forman 曲率达到一致，如下所示。

定理 2.1 (参见 [12])。设 $G = (X, \delta, m)$ 是一个一维胞腔复形，且 $\omega : X \to (0, \infty)$非退化。那么对任意 $e \in X_1$,

$$\kappa_\omega(e) = \max_K F_{K,\omega}(e),$$

其中，最大值取遍所有以 G 为 *1*-骨架且包含 K 的二维胞腔复形。

注 4. 设 $G = (V, E, m_1, m_2)$ 是一棵树。由于树中没有环，*Lin-Lu-Yau* 曲率与 *Forman* 曲率相同。也就是说，对任意 $e \in E$,

$$\kappa_\omega(e) = F_\omega(e).$$

事实上，树上 $e = (u, v)$ 的加权 *Lin-Lu-Yau* 曲率可通过 (7) 计算为

$$\kappa_\omega(e) = \frac{m_2(e)}{m_1(u)} + \frac{m_2(e)}{m_1(v)} - \sum_{e_u \sim u, e_u \neq e} \frac{m_2(e_u)}{m_1(u)} \frac{\omega(e_u)}{\omega(e)} - \sum_{e_v \sim v, e_v \neq e} \frac{m_2(e_v)}{m_1(v)} \frac{\omega(e_v)}{\omega(e)}. \tag{11}$$

如果集合 $\{e_u \in E : e_u \sim u, e_u \neq e\}$ 为空，则相应的求和为零。这种形式与一般图上的加权 *Forman* 曲率(9) 完全一致。

3 图上的加权里奇流

本节中，对于任意 $e \in E$，我们研究如下加权里奇流,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\omega(t, e) = -R_\omega(t, e)\omega(t, e), & t > 0, \\ \omega(0, e) = \omega_0(e) \end{cases} \tag{12}$$

其初始值为 $\omega_0(e) > 0$ ，对任意 $e \in E$，其中加权里奇曲率 R_ω 可以是加权 Lin-Lu-Yau 曲率 κ_ω (见 (7))，也可以是无面的加权 Forman 曲率 F_ω(见 (9))。定义归一化权重

$$\bar{\omega}(t, e) = \frac{\omega(t, e)}{\sum_{e \in E} \omega(t, e)}.$$

注意到，对权重进行统一缩放（放大或缩小）不会改变这两种曲率类型。与 [3], 类似，归一化权重对任意 $e \in E$ 满足,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\bar{\omega}(t, e) = -R_\omega(t, e)\bar{\omega}(t, e) + \bar{\omega}(t, e) \displaystyle\sum_{h \in E} R_\omega(t, h)\bar{\omega}(t, h), & t > 0, \\ \bar{\omega}(0, e) = \bar{\omega}_0(e). \end{cases} \tag{13}$$

在曲率流的演化过程中，我们假设 ω 始终保持非退化，即每条边 $e = (x, y) \in E$ 都是其两个顶点之间唯一的最短路径；否则，将触发边删除操作。也就是说，在时刻 t，满足以下条件的边

$$\omega_e \geq d_\omega(x, y)$$

在继续后续演化之前将其移除。

3.1 加权 Lin-Lu-Yau Ricci 流

本节通过将 R_ω 在（12）中设为 κ_ω （见（7）），研究加权 Lin-Lu-Yau 流的解的存在性与唯一性。我们通过考察 Lin-Lu-Yau 曲率与 Forman 曲率之间的关系（见（2.1））， 并利用 Forman 曲率的表达式（8）， 为图上的加权 Lin-Lu-Yau 流的解的存在性与唯一性给出一种新的证明。

定理 3.1. 设 $G=(V,E,m_1,m_2)$ 是一个图。对于加权 *Lin-Lu-Yau* 流，

$$\frac{d}{dt}\omega(t,e)=-\kappa_\omega(t,e)\omega(t,e), \tag{14}$$

存在 对于任意 $t>0$ 和 $e\in E$， 只要初始值 ω 为正，就存在唯一的正解 $_0$.

证明. 在记号中，我们不区分定义在胞腔上的测度，统一使用 m。设 $G=(X_0\cup X_1,\delta,m)$ 是一个一维胞腔复形。令 $X_2:=\{f$是一个圈：$m(f)>0\}$ 为 2-胞腔的集合。固定一个 $Y\subset X_2$，设 $K=(X_0\cup X_1\cup Y,\delta,m)$ 是一个二维胞腔复形，其 1-骨架为 G。图中的边可根据其与给定边 $e\in X_1$ 的关系分为三类：与 e 同属一个公共圈的边（记为 I_e）；与 e 共用一个顶点但不同属一个公共圈的边（记为 II_e）；以及与 e 不相交的边（这些边不会出现在 $F_{K,\omega}(e)$ 的计算中）。注意，对于任意 $e'\in\mathrm{II}_e$,

$$\left|\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)}-\sum_{f\succ e,e'}\frac{m(f)}{m(e)}\right|=\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)}.$$

并且，对于任意 $e'\in\mathrm{I}_e$，当任意 $f\in Y$充分大时，我们有 $m(f)$,

$$\left|\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)}-\sum_{f\succ e,e'}\frac{m(f)}{m(e)}\right|=\sum_{f\succ e,e'}\frac{m(f)}{m(e)}-\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)},$$

由此可得，对于任意 $e=(u,\ v)$,

$$\begin{aligned}F_{K,\omega}(e)&=\sum_{u\prec e}\frac{m(e)}{m(u)}-\sum_{e'\in\mathrm{II}_e}\frac{\omega(e')}{\omega(e)}\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)}+\frac{\sum_{f\succ e}m(f)}{m(e)}-\sum_{e'\in\mathrm{I}_e}\frac{\omega(e')}{\omega(e)}\left(\sum_{f\succ e,e'}\frac{m(f)}{m(e)}-\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)}\right)\\&=A+\frac{1}{m(e)\omega(e)}\left(\sum_{f\succ e}\omega(e)m(f)-\sum_{e'\in\mathrm{I}_e}\omega(e')\sum_{f\succ e,e'}m(f)\right)\\&=A+\frac{1}{m(e)\omega(e)}\sum_{i=1}^{k}\left(\omega(e)-\sum_{e'\in\mathrm{I}_e,f_i\succ e,e'}w(e')\right)m(f_i),\end{aligned}$$

其中，k 是包含 e 的 2-胞腔数量，并且

$$A:=\sum_{u\prec e}\frac{m(e)}{m(u)}+\sum_{e'\in\mathrm{I}_e}\frac{\omega(e')}{\omega(e)}\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)}-\sum_{e'\in\mathrm{II}_e}\frac{\omega(e')}{\omega(e)}\sum_{u\prec e,e'}\frac{m(e')}{m(u)}$$

对于任意 i，它与 f_i 无关。结合手术下的下述三角不等式，对于任意f_i,

$$\omega(e)\le\sum_{e'\in\mathrm{I}_e,f_i\succ e,e'}w(e'),$$

我们有 $F_{K,\ \omega}(e)$ 关于 $m(f_i)$ 是非递增的，当

$$m(f_i)>\max_{\{e_i'\in\mathrm{I}_e:e_i'\sim e;e_i',e\prec f_i\}}\frac{m(e_i')m(e)}{\min\{m(u),m(v)\}}.$$

设 $M = \max_{e' \in X_1} \frac{m}{(e')m(e)\min\{m(u)\ m(v)\}}$ 以及 K_M 为 K，满足对于任意 $f \in Y$， $m(f) \le M$。我们有

$$\max_K F_{K,\omega}(e) = \max_{Y \subset X_2} \max_{f \in Y} F_{K,\omega}(e) = \max_{Y \subset X_2} \max_{f \in Y, m(f) \le M} F_{K,\omega}(e) = \max_{K_M} F_{K_M,\omega}(e).$$

对于固定的 K_M，由（8），我们可以将 $F_{K_M,\ \omega}(e)$ 简化为

$$F_{K_M,w}(e) = C_1(e) - \sum_{e' \ne e} C_2(e') \frac{\omega(e')}{\omega(e)},$$

其中 $C_1(e) = \sum_{u \prec e} \frac{m}{m}(e)\ (u) + \sum_{f \succ e} \frac{m}{m}(f)\ (e)$，且 $C_2(e') = \left| \sum_{u \prec e,\ e'} \frac{m}{}(e')\ m(u) - \sum_{f \succ e,\ e'} \frac{m}{}(f)\ m(e) \right|$ 都是与 ω 无关的非负常数。令 $\min_{u \in V} m(u) = c_1$， $\max_{e \in E} m(e) = c_2$，以及 $\min_{e \in E} m(e) = c_3$。注意，$C_1(e)$ $C_2(e)$ 有一致的上界

$$C := \frac{c_2}{c_1}|X_0| + \frac{M}{c_3}|X_2|,$$

其中 $|X_i|$ 表示 K 上 i 维胞腔的数量。

令 $T > 0$。首先，我们断言，对于任意 $t > 0$， $\omega_e(t)$ 在 $[0,T]$ 上有界，且其下界大于零，如下所示:

$$\omega_e(0)e^{-CT} \le \omega_e(t) \le \left(\sum_{h \in E} \omega_h(0) \right) e^{C|X_1|T} \tag{15}$$

为证明这一点，对所有的 $e \in E$,

$$-\frac{C \sum_{e' \in \mathrm{I}_e \cup \mathrm{II}_e} \omega_{e'}(t)}{\omega_e(t)} \le \kappa_e(t) \le C$$

由 $F_{K_M,\ \omega}(e)$ 的界以及这两种曲率之间的等价性可得。Thu s

$$-C\omega_e(t) \le -\kappa_e(t)\omega_e(t) \le C \sum_{e \in E} \omega_e(t).$$

一方面，对以下不等式积分

$$\omega_e'(t) = -\kappa_e(t)\omega_e(t) \ge -C\omega_e(t),$$

从而得到 $\omega_e(t) \ge \omega_e(0)e^{-CT}$在 $[0,T]$ 上。另一方面，对于任意 $t \in [0,T]$,

$$\partial_t \sum_{e \in E} \omega_e(t) \le C|X_1| \sum_{e \in E} \omega_e(t),$$

这意味着

$$\omega_e(t) \le \sum_{h \in E} \omega_h(t) \le \left(\sum_{h \in E} \omega_h(0) \right) e^{C|X_1|T}.$$

至此，该断言得证。

接下来，我们证明 κ_ω（e）是一个 L-Lipschitz 函数，相对于 ω 在 $[0,T]$上而言。由（15），不妨设存在 $\delta > 1$ 使得对于任意 $e \in X_1$ 以及所有 $i = 1,\ 2$,

$$\delta^{-1} \le w_i(e) \le \delta.$$

并令

$$\|\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2\|_\infty = \sup_{e \in X_1} |\omega_1(e) - \omega_2(e)|.$$

那么，

$$\begin{aligned}|F_{K_M,\omega_1}(e)-F_{K_M,\omega_2}(e)| &\le \sum_{e'\neq e} C_2(e')\left|\frac{\omega_1(e')}{\omega_1(e)}-\frac{\omega_2(e')}{\omega_2(e)}\right| \\ &= \sum_{e'\neq e} C_2(e')\frac{|\omega_1(e')\omega_2(e)-\omega_2(e')\omega_1(e)|}{\omega_1(e)\omega_2(e)} \\ &\le \sum_{e'\neq e} C_2(e')\frac{\omega_1(e')|\omega_2(e)-\omega_1(e)|+\omega_1(e)|\omega_1(e')-\omega_2(e')|}{\omega_1(e)\omega_2(e)} \\ &\le L\|\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\|_\infty\end{aligned}$$

其中 $L=2\delta^3(|X_1|-1)C$，由此完成了证明。由此可知，$\kappa_\omega(e)$ 是关于 ω 的 L-Lipschitz 函数

$$|\kappa_{\omega_1}(e)-\kappa_{\omega_2}(e)|=\left|\max_{K_M}F_{K_M,\omega_1}(e)-\max_{K_M}F_{K_M,\omega_2}(e)\right|\le\max_{K_M}|F_{K_M,\omega_1}(e)-F_{K_M,\omega_2}(e)|\le L\|\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\|_\infty.$$

此外，

$$|\kappa_\omega(e)|=|\max_K F_{K,\omega}(e)|\le C+\delta^2 C.$$

根据定理 2.1，我们得到

$$|\kappa_{\omega_1}(e)\omega_1(e)-\kappa_{\omega_2}(e)\omega_2(e)|\le|\kappa_{\omega_1}(e)||\omega_1-\omega_2|+\omega_2|\kappa_{\omega_1}(e)-\kappa_{\omega_2}(e)|\le(C(1+\delta^2)+L)\|\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2\|_\infty$$

因此，$\kappa_\omega\omega$ 关于 ω 在 $[0,T]$上局部Lipschitz。根据定理中的 Picard-Lindel¨，存在方程 (14) 在 $[0,T]$内的唯一解。

最后，我们证明 ω 的长时间存在性。定义

$$T^*=\text{上确界}\{T\text{：方程（14）在 }[0,T]\}.\text{上有唯一解}$$

记 $\phi(t)=\min\{\omega_{e_1}(t)\ \omega_{e_2}(t)\ \cdots,\ \omega_{e_n}(t)\}$ 以及 $\Phi(t)=\max\{\omega_{e_1}(t)\ \omega_{e_2}(t)\ \cdots,\ \omega_{e_n}(t)\}$。假设 $T^*<+\infty$，则有以下两种情况之一：

$$\liminf_{t\to T^*}\phi(t)=0 \tag{16}$$

or

$$\limsup_{t\to T^*}\Phi(t)=+\infty. \tag{17}$$

由 15 的界 ω 在 $[0,T]$上，得到

$$\phi(t)\ge\phi(0)e^{-CT^*}$$

在 $t\in[0,T^*$ 上），这与（16）矛盾。并且

$$\Phi(t)\le\sum_{e\in E}\omega_e(t)\le\left(\sum_{e\in E}\omega_e(0)\right)e^{CnT^*},$$

这与（17）矛盾。因此 $T^*=+\infty$，证明完成。 □

3.2 图上的加权 Forman-Ricci流

本节中，我们通过设定12为 G，并令 R_ω 为加权 Forman 曲率 F_ω（见（9））， 研究加权 Forman-Ricci 流（ $e\in E$）解的存在性、唯一性和收敛性。$t>0$

$$\frac{d}{dt}\omega(t,e)=-\left(\frac{m_2(e)}{m_1(u)}+\frac{m_2(e)}{m_1(v)}\right)\omega(t,e)+\sum_{e_u\sim u,e_u\neq e}\frac{m_2(e_u)}{m_1(u)}\omega(t,e_u)+\sum_{e_v\sim v,e_v\neq e}\frac{m_2(e_v)}{m_1(v)}\omega(t,e_v). \tag{18}$$

根据注4，本节中的所有讨论和结论均适用于树上的 Lin-Lu-Yau Ricci 流（14）。

为简化记号，后续分析中我们引入 Forman-Ricci流的矩阵形式。令 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和

$$\mathbb{R}_+^n=\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n),\omega_i>0,i=1,2,\cdots,n\}.$$

权重向量为 $\boldsymbol{\omega}:(0,\ \infty)\times E\to\mathbb{R}_+^n$. 加权 Forman-Ricci 流的矩阵形式可写为 (18)

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{F}\boldsymbol{\omega},\quad t>0\\ \boldsymbol{\omega}(0)=\boldsymbol{\omega}_0.\end{cases}\tag{19}$$

设 $e_i=(u_i,\ v_i)$，矩阵 $\mathbf{F}$ 满足：对于任意 i,

$$\mathbf{F}_{ii}=-\left(\frac{m_2(e_i)}{m_1(u_i)}+\frac{m_2(e_i)}{m_1(v_i)}\right),$$

且对于 $i\neq j$,

$$\mathbf{F}_{ij}=\begin{cases}\dfrac{m_2(e_j)}{m_1(u_i)},\quad e_j\sim u_i\sim e_i,\\ \dfrac{m_2(e_j)}{m_1(v_i)},\quad e_j\sim v_i\sim e_i,\\ 0,\qquad\qquad \text{otherwise.}\end{cases}$$

引理3.1（线性时不变系统的存在唯一性）。考虑线性时不变系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,$$

其中$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个常矩阵。对于任意给定的初值向量 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，该系统存在一个对所有时间 $t\in(-\infty,\infty)$均有定义的唯一解。此外，此唯一解可由矩阵指数给出：

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_0:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\boldsymbol{A})^k}{k!}\boldsymbol{x}_0.$$

定理3.2. 一般图上的加权*Forman-Ricci*流(19) 存在唯一的正解$\boldsymbol{\omega}(t)=e^{t\boldsymbol{F}}\boldsymbol{\omega}_0$，对所有 $t\in(0,\infty)$ 均成立，且初值 $\boldsymbol{w}_0>\mathbf{0}$为正。

证明。由引理3.1可知，加权Forman-Ricci流（19）对所有 $t\in(0,\infty)$均存在唯一解，其中 $\boldsymbol{\omega}(t)=e^{t\mathbf{F}}\boldsymbol{\omega}_0$，对于给定的 $\boldsymbol{w}_0>\mathbf{0}$。

接下来，我们研究任意 $t>0$时 $\boldsymbol{\omega}(t)$的正性。由于$\mathbf{F}$ 的非对角元素非负，因此我们可以取 $\alpha>\max_i|\mathbf{F}_{ii}|$ 来构造非负矩阵

$$\mathbf{B}=\mathbf{F}+\alpha\boldsymbol{I}$$

其中 $\mathbf{B}_{ii}=\mathbf{F}_{ii}+\alpha>0$，且对于任意 $i\neq j$，$\mathbf{B}$ 的非对角元素为 $\mathbf{F}_{ij}\geq 0$。因此，

$$e^{t\mathbf{F}}=e^{t(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{I})}=e^{-\alpha t}e^{t\mathbf{B}}$$

由于级数中的每一项 $\frac{(t\mathbf{B})^k}{k!}$ 均为非负，并且对于任意 i，$\left(\frac{(t\mathbf{B})^k}{k!}\right)_{ii}>0$，因此对于任意 i，$e^{t\mathbf{B}}\geq\mathbf{0}$ 以及 $\overline{(e^{t\mathbf{B}})}_{ii}>0$。因此，当 $\boldsymbol{w}_0>\mathbf{0}$ 时，

$$\boldsymbol{\omega}(t)=e^{t\mathbf{F}}\boldsymbol{\omega}_0=e^{-\alpha t}e^{t\mathbf{B}}\boldsymbol{\omega}_0>\mathbf{0}.$$

□

注意到，系数矩阵 $\mathbf{F}$ 当且仅当 $m_2(e)$ 关于 $e\in E$为常数时，才是对称的。为克服一般测度 $\mathbf{F}$ 下系统（19）中 m_2的非对称性，我们令

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)=\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}(t),\quad t\in[0,\infty),\tag{20}$$

并令 $\mathbf{M}:=\operatorname{diag}(\sqrt{m_2(e_1)}\ \sqrt{m_2(e_2)}\ \cdots,\ \sqrt{m_2(e_n)})$。重写 Forman 曲率流（19），得到

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)=\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t), & t>0\\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0)=\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0,\end{cases}\tag{21}$$

其中 $\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{MFM}^{-1}$. $\tilde{\mathbf{F}}$ 主对角线上的值与$\mathbf{F}$中的值保持不变，不过，令 $e_i=(u_i,\ v_i)$，对于 $i\neq j$,

$$\tilde{\mathbf{F}}(e_i,e_j)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{m_2(e_i)m_2(e_j)}}{m_1(u_i)}, & e_j\sim u_i\sim e_i,\\ \dfrac{\sqrt{m_2(e_i)m_2(e_j)}}{m_1(v_i)}, & e_j\sim v_i\sim e_i,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意到 $\tilde{\mathbf{F}}$ 是实对称的，因此可以将 $\tilde{\mathbf{F}}$ 对角化为$\mathbf{PDP}^T$，其中 $\mathbf{D}$ 是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$，其特征值为

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n,$$

且 $\mathbf{P}=(\mathbf{p_1}\,\mathbf{p_2}\ \cdots\mathbf{p_n})$，其中$\mathbf{p_i}$是对应于 λ_i的特征向量。按照边所对应特征值的大小对边进行排序，即

$$E=\{e_1,\ldots,e_n\}\text{ such that }\lambda_{e_i}\leq\lambda_{e_j},\ \forall\, i<j.$$

令 $p_{il}=\mathbf{p_i}(e_l)$。(21)的解可以改写为

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)=e^{t\tilde{\mathbf{F}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0=\mathbf{P}\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_n t}\right)\mathbf{P}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0.$$

由 (20)可知

$$\boldsymbol{\omega}(t)=(\mathbf{M^{-1}P})\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_n t}\right)(\mathbf{M^{-1}P})^{-1}\boldsymbol{\omega}_0.$$

因此，对于任意 $e_l\in E$，该解可分解为

$$\omega(t,e_l)=\sum_{i=1}^{n}c_i(e_l)\exp\{\lambda_i t\},\tag{22}$$

其中 $c_i(e_l):=\frac{1}{\sqrt{m_2(e_l)}p_{il}}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\omega_{oj}\sqrt{m_2(e_j)}$。

由 $\omega(t,e)$ 对任意 $e\in E$ 及任意 $t>0$ 均为正（见定理 3.2），归一化权重可表示为

$$\bar{\omega}(t,e_l)=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i(e_l)\exp\{\lambda_i t\}}{\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i\exp\{\lambda_i t\}},$$

其中 $\bar{c}_i:=\sum_{e\in E}c_i(e)$。

引理 3.2 (佩龙-弗罗贝尼乌斯定理)。设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 非负且不可约的矩阵。那么，谱半径 $\rho(\boldsymbol{A}):=\max\{|\lambda|:\ \lambda$ 是 $\boldsymbol{A}\}$ 的特征值，且为单特征值，并且 $\rho(\boldsymbol{A})>0$。此外，$\rho(\boldsymbol{A})$ 对应的右特征向量$\mathbf{v}$ 满足$\mathbf{v}>0$。

备注5。矩阵不可约等价于其关联有向图强连通。设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，其关联有向图 $G_{\boldsymbol{A}}$ 满足：

- 顶点集为 $\{1,2,\ldots,n\}$,
- 对于所有 $i\neq j$，当且仅当 $\boldsymbol{A}_{ij}\neq 0.$ 时，存在一条有向边 $j\to i$

命题 3.1. $\boldsymbol{F}$ 的最大特征值代数重数为一，对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_n$ 为正。

˜ ˜证明。 首先，我们断言 $\mathbf{F}$ 是不可约的。事实上，由于 $\mathbf{F}$ 是对称的，因此若 $j \to i$ 则 $i \to j$ 在其关联的有向图 $G_{\tilde{\mathbf{K}}}$上成立，而该图可视为无向图。由此，˜**F 的关联无向图恰好是** G的线图，由于 G的连通性，该线图是连通的。˜根据注 5，我们得到 $\mathbf{F}$的不可约性。

˜接下来，我们从$\mathbf{F}$构造一个非负矩阵。令 $\beta = \max_i |\boldsymbol{F}_{ii}|$，我们构造

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{F}} + \beta \boldsymbol{I}.$$

˜与定理3.2的证明类似，我们得到$\mathbf{B}$ 是非负的，且

$$\tilde{\mathbf{B}}_{ii} = \boldsymbol{F}_{ii} + \max_i |\boldsymbol{F}_{ii}| \geq 0 \text{ and } \tilde{\mathbf{B}}_{ij} = \tilde{\mathbf{F}}_{ij} \geq 0 \text{ for any } i \neq j.$$

˜ ˜ ˜ ˜此外，由于$\mathbf{F}$ 和$\mathbf{B}^{ij}$ =$\mathbf{F}^{ij}$ 对任意 $i \neq j$均不可约，我们得到$\mathbf{B}$ 不可约。根据˜佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，$\mathbf{B}$ 的最大特征值为正且代数重数为一，记作˜**(B)**，并且

$$\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{F}}) = \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{B}}) - \beta.$$

˜ ˜注意到$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{F}$ 具有相同的特征向量。因此，与 $\lambda_{\max}$**(B)**相对应、进而与 $\lambda_{\max}$**(F)**相对应的右特征向量$\mathbf{p}^n$ 为正。 □

回顾一般图上的 Forman 曲率（9）或树上的 Lin-Lu-Yau 曲率（11）的表达式，自然会考虑逆问题；也就是说，给定曲率向量（$\kappa_1 \cdots$， κ_n）^{T}，称为目标曲率向量，求权重向量（$\omega_1 \cdots$， ω_n）^{T}。类似地，我们将方程（9）转换为矩阵形式，然后在其左侧乘以 $\boldsymbol{M}$，得到

$$(\tilde{\mathbf{F}} + \operatorname{diag}(\kappa_1 \cdots, \kappa_n))\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}. \tag{23}$$

˜根据 $\mathbf{F}$ 的性质，我们可以得到线性系统（23）存在正解的充要条件。

命题3.2。 线性系统 （23）存在正解，当且仅当矩阵 ˜ $\boldsymbol{K}$：$= \boldsymbol{F} + \operatorname{diag}(\kappa_1 \cdots,$ $\kappa_n)$ 的最大特征值为*0*。

证明。 假设 $\boldsymbol{\omega} > \mathbf{0}$ 满足 $\mathbf{K}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$。对于任意一行 i:

$$\mathbf{K}_{ii}\omega_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{K}_{ij}\omega_j = 0.$$

由于 $\omega_j > 0$ 且对于 $j \neq i$有$\mathbf{K}_{ij} \geq 0$，$\mathbf{K}_{ij}\omega_j > 0$ 与 G的连通性相关。因此$\mathbf{K}_{ii} < 0$，因为 $\omega_i > 0$。令 $k = \max_i\{-\mathbf{K}_{ii}\} > 0$。那么 $k\mathbf{I} + \mathbf{K}$ 是非负、对称且不可约的。并且，

$$\lambda_{\max}(k\mathbf{I} + \mathbf{K}) = k + \lambda_{\max}(\mathbf{K}).$$

此外，$\mathbf{K}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ 意味着（$k\mathbf{I} + \mathbf{K}$）$\boldsymbol{\omega} = k\boldsymbol{\omega}$。由于 $\boldsymbol{\omega} > \mathbf{0}$，对于 $k\mathbf{I}$ +$\mathbf{K}$，佩龙-弗罗贝尼乌斯定理说明，除 $\lambda_{\max}$（$k\mathbf{I}$ +$\mathbf{K}$）外，不存在对应于其他特征值的正特征向量，即 $k = \lambda_{\max}$（$k\mathbf{I}$ +$\mathbf{K}$）。因此， $\lambda_{\max}$（$\mathbf{K}$） $= 0$。

另一方面，设 $l > \max_i\{-\mathbf{K}_{ii}\}$。那么 $l\mathbf{I} + \mathbf{K}$ 也非负、对称且不可约。根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，对应于 $\lambda_{\max}$**(***l***I** + **K)** 的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 为正，即 $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$。因此

$$\mathbf{K}\boldsymbol{x} = \lambda_{\max}(\mathbf{K})\boldsymbol{x}.$$

假设 $\lambda_{\max}$**(K)** $= 0$。因此， $\boldsymbol{x}$ 就是我们所需的正解。

□

此外，归一化权重和曲率的收敛可由$\mathbf{F}$的 ˜ 性质推得。

命题 3.3。 对于任意 $e \in E$ 以及正的初始值 $w_0(e)$，解 $w(t,\ e)$ 对于一般的 *Forman-Ricci* 流 (19) 收敛当且仅当

$$\lambda_{\max}(\tilde{\boldsymbol{F}}) \leq 0.$$

此外，还具有以下收敛与发散性质：

- 若 $\lambda_{\max}(\tilde{\boldsymbol{F}}) < 0$，则 $\lim_{t\to\infty} w(t,\ e) = 0$。
- 若 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{F}) = 0$，则$\lim_{t\to\infty} w(t,\ e) = c_n(e) > 0$。
- 若 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{F}) > 0$，则$\lim_{t\to\infty} w(t,\ e) = +\infty$.

证明。对任意 $e \in E$，由命题3.1可得

$$c_n(e_l) := \frac{1}{\sqrt{m_2(e_l)}} p_{nl} \sum_{j=1}^{n} p_{nj}\omega_{oj}\sqrt{m_2(e_j)} > 0.$$

（ $w(t,\ e)$ 的收敛结论可直接由表达式（22）以及 $c_n(e)$ 的正性推出。

□

定理 3.3。对任意 $e \in E$，一般图上的 *Forman* 曲率 $F_w(t,e)$ 或树上的 *Lin-Lu-Yau* 曲率 $\kappa_\omega(t,e)$ 均收敛到常数 $-\lambda_{\max}(\boldsymbol{F})$，当 $t \to \infty$ 时。此外，归一化权重的极限存在，即

$$\lim_{t\to\infty} \bar{\omega}(t,e) = \frac{c_n(e)}{\sum_{e\in E} c_n(e)}.$$

证明。对任意 $e \in E$,

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}(t,e) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i(e)\exp\{\lambda_i t\}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \exp\{\lambda_{(i)} t\}} \\
&= \frac{c_n(e) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(e) e^{(\lambda_i - \lambda_{i_0})t}}{\bar{c}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{c}_i e^{(\lambda_i - \lambda_{i_0})t}} \\
&\to \frac{c_n(e)}{\bar{c}_n}, \quad t \to \infty.
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
F_\omega(t,e) &= -\frac{\frac{d}{dt}\omega(t,e)}{\omega(t,e)} \\
&= -\frac{c_n(e)\lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(e)\lambda_i e^{(\lambda_i-\lambda_n)t}}{c_n(e) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(e) e^{(\lambda_i-\lambda_n)t}} \\
&\to -\lambda_n, \quad t \to \infty.
\end{aligned}$$

□

令 $F_\omega(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_\omega(t,\ e)$，我们得到 $F_\omega(\infty)$ 的以下界。

推论 3.1. 对于任意 $e \in E$,

$$\max_{e\in E}\left(\frac{m_2(e)}{m_1(u)} + \frac{m_2(e)}{m_1(v)} - \sum_{e'\sim x\sim e} \frac{\sqrt{m_2(e)m_2(e')}}{m_1(x)}\right) \le F_\omega(\infty) \le \min_{e\in E}\left(\frac{m_2(e)}{m_1(u)} + \frac{m_2(e)}{m_1(v)}\right).$$

证明。 对于任意 $e,\ e' \in E$,

$$\frac{\omega(t,e')}{\omega(t,e)} \to \frac{c_n(e')}{c_n(e)} \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

因此，对于任意 $e \in E$,

$$F_\omega(t,e) \to \frac{m_2(e)}{m_1(u)} + \frac{m_2(e)}{m_1(v)} - \sum_{e_u\sim u, e_u\neq e} \frac{m_2(e_u)}{m_1(u)}\frac{c_n(e_u)}{c_n(e)} - \sum_{e_v\sim v, e_v\neq e} \frac{m_2(e_v)}{m_1(v)}\frac{c_n(e_v)}{c_n(e)},$$

作为 $t \to \infty$。由定理3.3，对于任意 $e \in E$,

$$F_\omega(\infty) = \frac{m_2(e)}{m_1(u)} + \frac{m_2(e)}{m_1(v)} - \sum_{e_u\sim u, e_u\neq e} \frac{m_2(e_u)}{m_1(u)}\frac{c_n(e_u)}{c_n(e)} - \sum_{e_v\sim v, e_v\neq e} \frac{m_2(e_v)}{m_1(v)}\frac{c_n(e_v)}{c_n(e)},$$

由于 c_n 为正，我们得到 $F_\omega(\infty)$的上界。

另一方面，我们应用格什戈林圆盘定理，得到$\mathbf{F}$的所有特征值都位于圆盘的并集中 $\cup_{i=1}^n D_i$，其中

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{R} : |z - \tilde{\mathbf{F}}_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |\tilde{\mathbf{F}}_{ij}| \right\}.$$

因此，对于任意 $e \in E$，我们有

$$\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{F}}) \leq -\frac{m_2(e)}{m_1(u)} - \frac{m_2(e)}{m_1(v)} + \sum_{e' \sim x \sim e} \frac{\sqrt{m_2(e)m_2(e')}}{m_1(x)}.$$

由定理3.3，我们得到 $F_\omega(\infty)$的下界。 □

4 示例与模拟

本节中，我们研究特殊测度下或特殊树上的树的 Lin-Lu-Yau Ricci 流（14）解的收敛性。

4.1 $m_1 = m_2 \equiv 1$的情形

设 $T = (V, E)$ 是一棵树。在这种情况下，$\mathbf{F}$ 有如下简化形式:

$$\mathbf{F} = -2\mathbf{I} + \mathbf{B}, \tag{24}$$

其中 $\mathbf{B}$ 是该树的边集 E 对应的邻接矩阵，即

$$\mathbf{B}(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & e_j \sim e_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，$\mathbf{B}$ 也是线图 $L(T)$ 的顶点集对应的邻接矩阵 .

接下来的结果给出了均匀测度下树上的里奇流收敛性的完整分类。

定理 4.1. 设树 $T = (V, E)$ 有 n 条边，并假设 $m_1 = m_2 \equiv 1$。令 $\omega(t, e)$ 为里奇流 (14)的解。那么:

1. 若 T 是一条路径，则对任意 $e \in E$， $\omega(t, e)$ 收敛于 *0*，且里奇曲率 $\kappa_w(t)$ 收敛于正常数。 *2.* 对于 K_1,*3*， $w(t, e)$ 对任意 $e \in E$ 收敛于非零实数，且里奇曲率$\kappa_w(t)$ 收敛于 *0*。 *3.* 若 $max_{x \in V}\, d(x) \geq 3$，且 T 不为 K_1,*3*，则对任意 $e \in E$， $\omega(t, e)$ 发散至无穷大，且里奇曲率 $\kappa_w(t)$ 收敛于负常数。

证明。 条件 $m_2 \equiv 1$ 确保 $\mathbf{F}$ 是对称的，根据（24），我们有

$$\lambda_{\max}(\mathbf{F}) = -2 + \lambda_{\max}(\mathbf{B}).$$

对于一条含有 n 条边的路径，其线图 P_n 也是一条含有 n 个顶点的路径。因此，根据谱图论，我们有

$$\lambda_{\max}(\mathbf{B}_{P_n}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

由命题3.3。

$$\kappa_\omega(t, e) \to 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) > 0,$$

且对于任意 $e \in E$， $\omega(t, e) \to 0$ 与 $t \to \infty$ 相同。

对于 $K_{1,n}$，我们有

$$\mathbf{F}_{K_{1,n}} = -3\mathbf{I} + \mathbf{J},$$

其中$\mathbf{J}$ 是所有元素均为 1 的矩阵。因此，

$$\lambda_{\max}(\mathbf{F}_{K_{1,n}}) = n - 3.$$

其对应的特征向量是所有分量均为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的向量。若 $n = 3$，则$\lambda_{\max}(\mathbf{F}) = 0$，由此可知，对于任意 $e \in E$，$\kappa_\omega(t, e) \to 0$ 且 $\omega(t, e) \to \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\omega_{oj}$，当 $t \to \infty$ 时。

为得出最后一个结论，我们首先断言

$$\lambda_{\max}(\mathbf{B}) \geq \max_{x \in V} d(x) - 1,$$

最后，我们在这棵树中考虑一个度为 $d := \max_{x\in V} d(x)$ 的最大度顶点 v，其邻居为u_1，u_2、.....、u_d。在线图 $L(T)$ 中，所有边 $e_i = \{v, u_i\}$ 都共享顶点 v。因此，集合$\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ 诱导出一个完全子图 K_d。邻接矩阵 K_d的最大特征值为 $d - 1$。由于 K_d 是 $L(T)$ 的诱导子图，其邻接矩阵$\mathbf{A}$ 是$\mathbf{B}$ 的主子矩阵（ $L(T)$ 的邻接矩阵）。设 S 为 K_d的顶点集。令 $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0$ 属于 S，且 $x \neq 0$ 属于 $S^c\}$。瑞利商满足：对任意 $x \in X$，

$$\frac{x^T\mathbf{B}x}{x^Tx} = \frac{y^T\mathbf{A}y}{y^Ty},$$

其中 $y = x|_S$ （ x 对 S的限制）。因此，

$$\lambda_{\max}(\mathbf{B}) = \max_{0\neq z\in\mathbb{R}^n} \frac{z^T\mathbf{B}z}{z^Tz} \geq \max_{0\neq x\in X} \frac{x^T\mathbf{B}x}{x^Tx} = \max_{y\neq 0} \frac{y^T\mathbf{A}y}{y^Ty} = \lambda_{\max}(\mathbf{A}) = d - 1.$$

这就完成了该断言。因此，若 $\max_{x\in V} d(x) > 3$，则有

$$\lambda_{\max}(\mathbf{F}) > 0.$$

接下来，我们考虑最大度为 3 且包含$K_{1,3}$ 作为子图的极小图 H （不含$K_{1,3}$）。其线图是爪图，即 K_3 附加一条悬挂边，且邻接矩阵的最大特征值大于 2.17。采用与证明该断言时类似的方法，可以证明，对于任何包含 H 作为子图的树，其线图的邻接矩阵的最大特征值都大于 2.17。因此，对于最大度至少为 3 但不含$K_{1,3}$的树，$\kappa_\omega(t, e) \to -\lambda_{\max}(\mathbf{F})(< 0)$ 且 $\omega(t, e) \to \infty$ 对任意 $e \in E$均成立。

□

4.2 情形 $\mathrm{Deg}(x) \equiv 1$

在归一化测度下的收敛会困难得多。按照前面的分析，~考虑 $\mathbf{F}$ 比考虑 $\mathbf{F}$更方便。在下面的例子中，我们要求对任意 $x \in V$.，$\mathrm{Deg}(x) \equiv 1$

例 1. 我们考虑一条路径 $p = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\}$，其具有 $v_i \sim v_{i+1}(i = 1,$~ $\cdots$ n $e_i =,)$。设 (v_i, v_{i+1}) $i = 1, \cdots, n$。令 $m_2(e_i) = a_i$。由 $\mathrm{Deg}(x) = 1$，系数矩阵 $\mathbf{F}$ 可改写为

$$\tilde{\mathbf{F}}(e_i, e_i) = \begin{cases} -\left(\dfrac{a_i}{a_{i-1} + a_i} + \dfrac{a_i}{a_i + a_{i+1}}\right), & i = 2, \cdots, n-1, \\ -1 - \dfrac{a_1}{a_1 + a_2}, & i = 1, \\ -1 - \dfrac{a_n}{a_n + a_{n-1}}, & i = n. \end{cases}$$

and

$$\tilde{\mathbf{F}}(e_i, e_{i+1}) = \frac{\sqrt{a_i a_{i+1}}}{a_i + a_{i+1}}.$$

否则，$\tilde{\mathbf{F}}(e_i, e_j) = 0$。对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，我们得到

$$\boldsymbol{x}^T \tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{x} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i + a_{i+1}} (\sqrt{a_i} x_i - \sqrt{a_{i+1}} x_{i+1})^2 - x_1^2 - x_n^2 \leq 0,$$

此外，

$$\boldsymbol{x}^T \tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{x} = 0,$$

当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。这表明，路径上的里奇流 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 的解 (14) 收敛到 $\mathbf{0}$，当 $t \to \infty$时，*Lin-Lu-Yau* 曲率收敛到一个正常数。

例 2。对于星图 $s = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$，以及 $e_i = (v_0, v_i)$ 对于 $i = 1, \cdots, n$. 令 $m_2(e_i) = a_i$，我们有 $m_1(v_i) = a_i (i = 1, \ldots, n)$ 以及 $m_1(v_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i$。设 $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$。因此，系数矩阵 $\tilde{\mathbf{F}}$ 可改写为

$$\tilde{\mathbf{F}}(e_i, e_i) = -1 - \frac{a_i}{a},$$

对于任意 $i \neq j$,

$$\tilde{\mathbf{F}}(e_i, e_j) = \frac{\sqrt{a_i a_j}}{a}.$$

然后我们将 $\mathbf{F}$ 分解为

$$\tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{I} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\mathbf{v}^T - 2\mathbf{D}),$$

其中 $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 且 $\boldsymbol{v} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \cdots, \sqrt{a_n})$。我们声称

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T - 2\mathbf{D}) < a. \tag{25}$$

由此可得，$\mathbf{F}$ 是负定的，这表明 $\boldsymbol{\omega}$（t）在星图上的里奇流（14）的解收敛于$\mathbf{0}$ 当 $t \to \infty$。为了证明（25），令

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T - 2\mathbf{D})\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$。应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$(\mathbf{v}^T \boldsymbol{x})^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 = a\|\boldsymbol{x}\|^2,$$

且当且仅当存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{v}$时等号成立。在此情况下，

$$f(\boldsymbol{x}) = -2c^2 \boldsymbol{v}^T \mathbf{D} \boldsymbol{v} = -2c^2 a^2 < 0.$$

否则，

$$f(\boldsymbol{x}) < -2\boldsymbol{x}^T \mathbf{D} \boldsymbol{x} \leq 0.$$

综上，我们完成了该断言的证明。因此，对于任意 e，ω（t、e）$\to \infty$

$$\kappa_\omega(t, e) \to -\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{F}}) > 0, \quad t \to \infty.$$

4.3 模拟

我们展示了若干里奇流收敛结果的模拟。图 1 展示了在均匀测度和归一化测度下，$K_{1,3}$ 与 $K_{1,6}$ 上的林—卢—姚里奇流（14），揭示了不同的收敛行为。对于 $K_{1,3}$，在均匀测度下，边权重收敛到一个正常数，而里奇曲率收敛到零；相比之下，在归一化测度下，边权重趋于零，而曲率收敛到一个正常数。$K_{1,6}$ 则表现出截然不同的行为。在均匀测度下，边权重趋于正无穷大，同时曲率收敛到一个负常数；而在归一化测度下，边权重收敛到零，曲率则稳定在一个正常数。这些结果表明，里奇流的收敛行为从根本上受到底层图结构和测度选择的支配。

第二项实验模拟了最大度为 4 的树上的归一化 Lin-Lu-Yau 曲率流（13），见图 2。实验观察到显著的收敛性质：（1）所有边的曲率都收敛到一个负的极限值，反映了树的类双曲特性；（2）尽管

初始权重不同，结构对称的边仍会收敛到相同的平衡态；具体而言， $\omega(e_{15})$ 和 $\omega(e_{25})$ 收敛到相同的值， $\omega(e_{67})$ 和 $\omega(e_{68})$ 也如此，这表明该流能够识别结构对称性；（3）不同边的极限权重体现了它们在树中的不同局部几何，例如， e_{56} 收敛到最大的权重，因为它连接了彼此差异最大的分支。

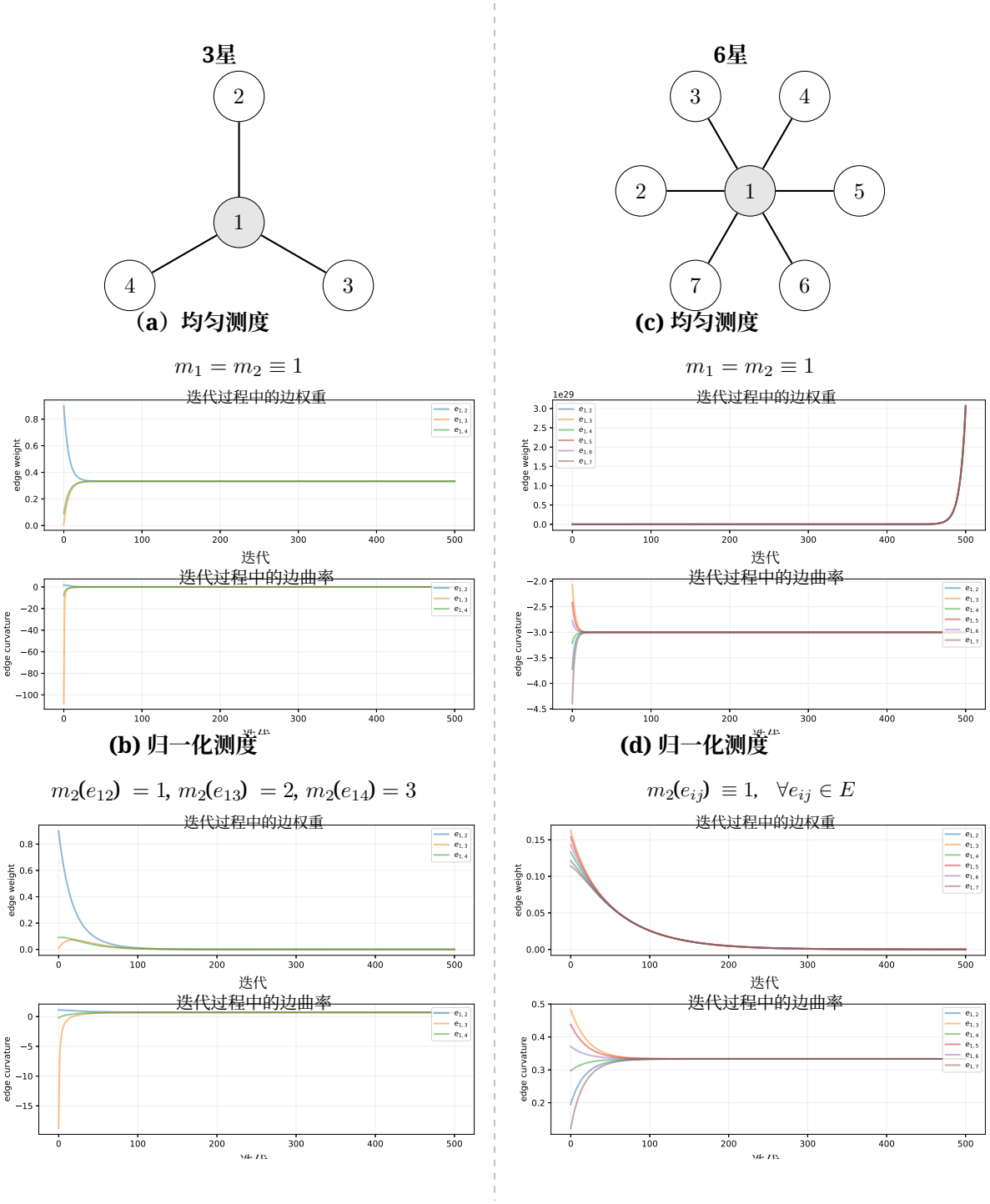

图1：比较$K_{1,\ 3}$ 和$K_{1,\ 6}$阶图上两种不同测度下里奇流的收敛情况。

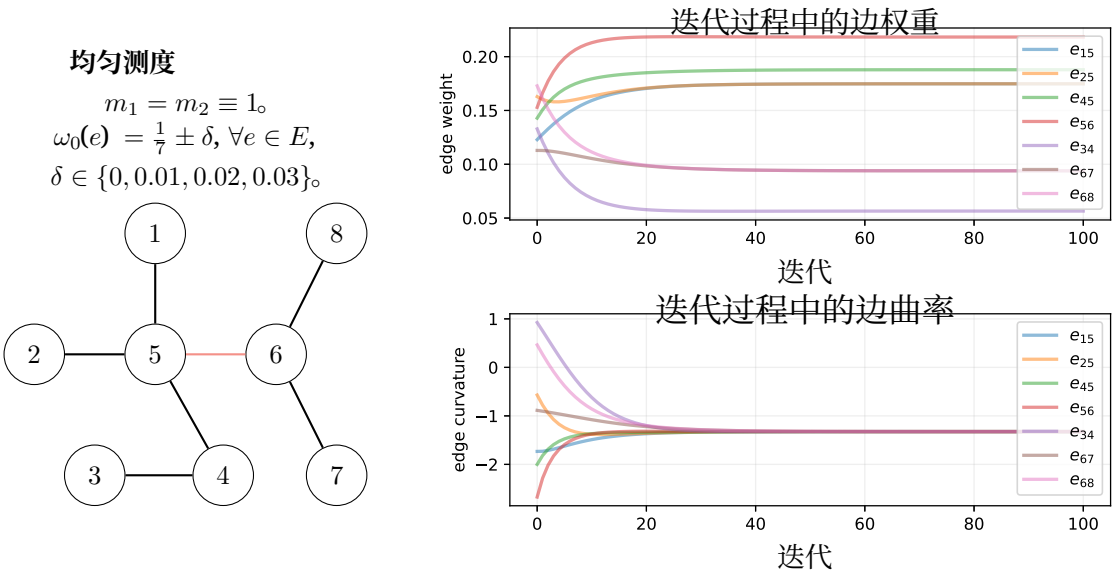

图2：最大度为4的树的演化。

致谢： S. Bai 受到国家自然科学基金（项目编号：12301434）的资助。S. Liu 受到国家自然科学基金（项目编号：12001536、12371102）的资助。Xin Lai 受到北京应用数学研究院（BIMSA）启动研究基金的资助。

参考文献

[1] Shuliang Bai、Bobo Hua、Yong Lin 和 Shuang Liu. 关于树上的里奇流. *arXiv:2509.22140*, 2025.[2] Shuliang Bai、Rui Li、Shuang Liu 和 Xin Lai. 带平衡因子的加权有向图上的里奇流. *arXiv, 2509.19989*, 2025.[3] Shuliang Bai、Yong Lin、Linyuan Lu、Zhiyu Wang 和 Shing-Tung Yau. 加权图上的奥利维耶里奇流. 《美国数学杂志》, 146(4), 2024.[4] David Cushing、Supanat Kamtue、Shiping Liu、Florentin M¨unch、Norbert Peyerimhoff 和 Ben´ Snodgrass. 有限加权图中的巴克里-埃梅里曲率锐性与曲率流：理论. 《数学手稿》, 176(11), 2025.[5] Hamza Farooq、Yongxin Chen、Tryphon T. Georgiou、Allen Tannenbaum 和 Christophe Lenglet. 网络曲率作为脑结构连接的标志. 2017.[6] Ke Feng、Huabin Ge 和 Bobo Hua. 组合里奇流与一类紧致三维流形的双曲化. *Geometry* & 《拓扑学》, 26(3):1349–1384, 2022.[7] Forman. 胞腔复形的博赫纳方法与组合里奇曲率. *Discrete* &*Computational Geometry*, 29(3):323–374, 2003.[8] Huabin Ge. 曲面上的组合卡拉比流. *Transactions of the American MathematicalSociety*, 370(2):1377–1391, 2018.[9] David Glickenstein. 三维组合 Yamabe 流. 《拓扑学》, 44(4):791–808, 2005.[10] Richard S. Hamilton. 具有正里奇曲率的三维流形. 《微分几何杂志》, 17(2):255 – 306, 1982.[11] Bobo Hua、Yong Lin 和 Tao Wang. 有限图上的一种巴克里-´埃梅里里奇流.*arXiv*, arXiv:2402.07475, 2024.

[12] J¨urgen Jost 和 Florentin M¨unch. Forman 曲率的刻画. arXiv.2110.04554，2021.[13] Xin Lai、Shuliang Bai 和 Yong Lin. 用于社区检测的归一化离散里奇流. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications，597:127251，2022.[14] Xin Lai、Yang Liu、Rui Qian、Yong Lin 和 Qiwei Ye. 在图 Transformer 中利用离散里奇曲率更深入地挖掘图结构信息. Entropy，25(6)，2023.[15] Ruowei Li 和 Florentin M¨unch. 离散时间非线性马尔可夫链的收敛性与唯一性. arXiv:2407.00314，2024.[16] Yong Lin、Linyuan Lu 和 Shing Tung Yau. 图的 Ricci 曲率. Tohoku Mathematical Journal，63(4):605–627，2011.[17] Benoˆıt Loisel 和 Pascal Romon. 通过最优传输研究多面体曲面上的 Ricci 曲率. Axioms，3(1):119–139，2014.[18] Jicheng Ma 和 Yunyan Yang. 任意加权图上的修正 Ricci 流. The Journal of Geometric Analysis，35(332)，2024.[19]Jicheng Ma 和 Yunyan Yang. 加权图上的分段线性 Ricci 曲率流. arXiv:2505.15395，2025.[20] Florentin M¨unch 和 Rados-law K. Wojciechowski. 一般图拉普拉斯算子的 Ollivier Ricci 曲率：热方程、拉普拉斯比较、非爆炸性与直径界. Advances in Mathematics，356:106759，2019.[21] Chien-Chun Ni、Yu-Yao Lin、Feng Luo 和 Jie Gao. 利用里奇流进行网络社区检测. Scientific Reports，2019.[22] Yann Ollivier. 度量空间上马尔可夫链的 Ricci 曲率. Journal of Functional Analysis，256:810–864，02 2009.[23]G. Perelman. 里奇流的熵公式及其几何应用. arXiv:math/0211159.，2002.[24] Philip Tee 和 C. A. Trugenberger. 增强型 Forman 曲率及其与 Ollivier 曲率的关系. Europhysics Letters，133(6):60006，2024.[25] Yulu Tian、Jicheng Ma、Yunyan Yang 和 Liang Zhao. 通过里奇流检测无向超图的社区. Physical Review E，112:044311，2025.[26] Melanie Weber、J¨urgen Jost 和 Emil Saucan. 用于大型动态数据集变化检测的 Forman-Ricci 流. Axioms，5(4)，2016.[27] Melanie Weber、Emil Saucan 和 J¨urgen Jost. 利用 Forman-Ricci 曲率及相关几何流表征复杂网络. Journal of Complex Networks，5(4):527–550，01 2017.[28] Yasharth Yadav、Pavithra Elumalai、Nitin Williams、J¨urgen Jost 和 Areejit Samal. 离散 Ricci 曲率揭示了人脑功能连接网络中的年龄相关变化. Frontiers in Aging Neuroscience，第15卷 - 2023，2023.[29] Juan Zhao、Jicheng Ma、Yunyan Yang 和 Liang Zhao. 通过离散里奇曲率流寻找有向图的核心子图. arXiv.2512.07899，2025.[30] Xiangxiang Zheng、Zhongrong Zhang、Xiaona Zhang、Nengzhi Jin 和 Yunyun Zhang. Ricci-GraphDTA：一种整合离散 Ricci 曲率、用于药物–靶标亲和力预测的图神经网络. Journal of Molecular Graphics and Modelling，142:109170，2026.