半斯格明子晶格的光学准对称群

Guangfeng Wang [1†], Juan Feng[1†], Tong Zheng[1,2], Yijie Shen[3], Xianfeng Chen[1,4,5*], Bo Wang[1*]*1*光子学与通信国家重点实验室，上海交通大学物理与天文学学院；中国上海，*200240*。*2*上海交通大学致远学院，中国上海，*200240*。*3*南洋理工大学物理与数学科学学院颠覆性光子技术中心，新加坡*637371*。*4*上海量子科学研究中心；中国上海，*201315*。*5*山东师范大学光调控与应用协同创新中心；中国济南，*250358*。

†这些作者对本研究的贡献相同。*通讯作者：
xfchen@sjtu.edu.cn；wangbo89@sjtu.edu.cn

摘要： 我们在光学中引入准对称群，它源于镜面操作与光的自旋—轨道相互作用（SOI）之间的对易。与自由空间光学中的对称性继承原理相反，– 按照该原理，任何结构化场的对称性都严格受其源的对称性约束，– 我们表明，即使底层光学源违反名义上的旋转对称性，强自旋—轨道相互作用仍能促成准对称性保护的半斯格明子晶格形成。通过分析圆偏振基中电偶极辐射振幅的厄米性，我们推导出一个仅作用于部分C_3偏振偶极发射体的有效镜像算符，由此形成一个与自旋—轨道相互作用对易的准对称群。这种准对称性保证了精确的C_3 半斯格明子，并产生一个稳健偏振区域，在该区域内，连续变化的输入偏振会生成相同的拓扑纹理。我们的工作确立了准对称性这一光学物理领域的新基本原理，并为突破传统对称性约束、设计光的拓扑结构开辟了新途径。

引言。 斯格明子和半斯格明子等拓扑准粒子是具有非平庸斯格明子数（*1–5*）的非平庸矢量场。斯格明子最初在核物理中被提出（*6*），由于其在高密度磁信息存储（*7–9*）方面的潜力，以及会导致拓扑霍尔效应等非平庸输运效应的涌现奇异磁性（*10, 11*），近年来在磁性材料中得到了广泛研究。半斯格明子被视为具有半整数拓扑数的半个斯格明子。由于其能量呈对数发散，半斯格明子和反半斯格明子必须成对出现（*12*），才能稳定形成周期性结构的晶格，即半斯格明子晶格（*13*）。这些结构可以解释为多个手性自旋密度波的干涉图样，表现为三分量场矢量驻波图样（*14*）。与这些磁波类似，斯格明子的光学类比也已在多种系统中得到报道，包括表面等离激元（SPPs）（*15–18*）、光子晶体（*19, 20*）以及结构光的干涉（*21, 22*）；它们在超分辨成像（*23*）、光学计算（*24*）和纳米尺度计量（*25*）等方面展现出广阔的应用前景。

迄今为止，尽管人们已使用各种光学平台来展示拓扑晶格（*18*、*26*），但这些案例中没有一个能够违背光的对称性继承性质。光源的对称性继承——包括振幅、频率、动量和偏振等所有属性——在其自由空间传播过程中始终得到保持，这是贯穿所有线性光学领域乃至一般波系统的一项基本性质（*27–30*）。这一性质本质上决定了通过多个波的干涉或叠加构建拓扑晶格的方式（*15*、*31–35*）。例如，已有研究表明，只有具有四重或六重旋转对称性的光学源，才能形成具有相同对称性的斯格明子或半斯格明子晶格（*15*、*31*），而由更高阶旋转对称性系统产生的拓扑准晶同样表现出严格的旋转对称性继承（*35–37*）。

最近，准对称性 这一概念被提出，作为

描述能带简并的传统群论的扩展，使人们能够确定凝聚态物理中由降对称性微扰引起的能量劈裂效应（*38–40*）。不同于严格的晶体对称性，准对称性是一种近似对称性，在自旋轨道相互作用（SOI）存在时，它与低阶 ·哈密顿量对易，从而带来超越通常空间对称性约束的意外拓扑特性和新型材料分类。例如，当镜面操作作用于物体的一个子集时，会出现准对称性；这不同于均匀作用于整个物体的精确对称性（*39*）。尽管光的自旋-轨道相互作用，即光学自旋与轨道角动量之间的相互作用，已得到广泛研究（*41–43*），但在任何光学区域中，尚未有文献报道由对称性与自旋轨道相互作用之间的非平凡相互作用所产生的准对称群。

在这项工作中，我们首次展示了由强光的自旋轨道相互作用产生的自由空间准对称性保护的光学半斯格明子晶格。准对称性源于圆偏振基下电偶极场散射振幅的厄米共轭。从物理上说，这种厄米性使偶极子的偏振在一类C_3 偏振偶极子系统中发生特定的镜面操作。与以往对光学对称性继承的理解不同，我们的研究表明，明显违反C_3 对称性的准对称群– ，仍可凭借强光的自旋轨道相互作用产生完美的C_3 半斯格明子。此外，随着自旋轨道相互作用增强，能够产生半斯格明子的偏振态概率异常升高，最终形成一个稳健偏振区域；在该区域内，所有连续变化的偏振态都能在没有对称性约束的情况下产生C_3 半斯格明子。我们将这一概念推广到高阶旋转对称性C_{2N+1} 以及偶极辐射之外的一般自旋轨道相互作用，揭示了非傍轴光场中准对称性保护拓扑的普适性。

光学准对称群的定义及其对拓扑光学晶格的影响。本文的主要概念如图1所示。我们考虑一组

位于xy 平面等边三角形顶点处的 $= 3$ 线偏振单色偶极子$_i$ 。偶极子与原点之间的距离为，其方位角为$_i = 2(- 1) /$、 $=\{1, \dots , \}$。每个偶极子都具有面内偏振角 $\Phi_i = _i + _i$，其中$_i \in [0,]$ 表示偶极子的偏振方向与其方位向量之间的夹角$_i =(i、 i)$。这种记号使我们能够方便地将偶极子系统与C_3 对称系统进行比较。当$_i =$ 时，三个偶极子系统关于z轴具有三重旋转对称性，因为$R /\Psi = \Psi$。这里，$R_{2\pi/3}$ 是三重旋转算符，而 $\Psi = \sum(- i)i$ 表示三个偶极子系统在 $= 0$ 平面上的电场，如图1A所示。随着偶极子在自由空间中传播，在远处的xy 平面上会产生理想的斯托克斯子午子，其中斯托克斯参数（S_1, S_2, S_3）由xy 平面电场分量的叠加构成（图1C）。这是光学对称性继承的自然结果：具有N重旋转对称性的完美拓扑纹理，会在具有全局C_N 对称性的干涉源下产生（15、29、31、36、37）。关键在于，由于第三个斯托克斯参数$S_3(x, y)$具有奇宇称，只有当N为奇数时才能形成非零半斯格明子（详情见S2节）；因此，只有$N = 3$ 的情形能够生成周期性半斯格明子晶格。我们不再研究这一平凡情形，而是提出一个问题：当$_i$ 任意选择且满足$R_{2\pi/3}\Psi \neq \Psi$时，是否可能生成完美的C_3 半斯格明子。

要回答这一问题，我们必须考虑偶极场在自由空间传播过程中的固有自旋轨道相互作用（SOI）。对于偶极源 E_2 （图1B中的紫色箭头），其在动量空间中的场分布为 $() \cong _2 - (\cdot _2)$，其中 k 是由球坐标（，）定义的观测点单位矢量。这里，和 分别表示辐射波的极角和方位角（图1D）。()表现为 $_2$ 在具有固定偏转角的锥形 k 分布波上的旋转，如图1D左图所示。这种将入射偏振 $_2$ 球面投影到球面上的形式，即 $(_2)$，自然揭示了与 SOI 相关的 ·哈密顿量的类比（39）。为了更好地量化偶极辐射中的 SOI，我们将 $_2 - (\cdot _2)$改写为 $H ()^{C}_{2}$。这里，$^{C}_{2} = -i\Phi_1$， $i\Phi_1$ 是在圆偏振基中表述的 $_2$ ，而 H () 是在 xy 维度上约化的 SOI算子（详见补充材料第 S1 节）：

$$\widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} A & -Be^{-2i\varphi} \\ -Be^{2i\varphi} & A \end{pmatrix} \tag{1}$$

在公式（1）中， $= 1 + \cos^2$ 和 $= \sin^2$ 分别表示自旋保持分量和自旋翻转分量（*44*）。将公式（1）应用于偏振角为 $\Phi = +$ 的线偏振偶极源，其在圆偏振基中的辐射场为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) \propto \begin{pmatrix} Ae^{-i(\varphi+\xi)} - Be^{-i(\varphi-\xi)} \\ Ae^{+i(\varphi+\xi)} - Be^{+i(\varphi-\xi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}e^{-i\varphi} \\ \mathcal{S}^* e^{+i\varphi} \end{pmatrix} \tag{2}$$

这里，我们定义了 () $= {}^{-i\xi} -{}^{+i\xi}$ 。因此，偶极子的辐射场贡献可分解为位置起源部分“ $\pm i\varphi$ ”和偏振起源部分“”，其中，由源的偏振“”和自旋轨道相互作用的强度共同调控。我们注意到，参数 具有共轭性质：*() $= -(-)$，它连接了两种偏振态：$\Phi = +$ 和$\Phi = + -$。物理上，将偶极子的偏振从 $+$转换为 $+ -$，可通过引入面内镜算符 M $= -$ R $_z$R–φ来实现。该算符沿着垂直于 φ的轴作用于偶极子 $_2$ 的偏振。这里，$_z$是第三个泡利矩阵，表示线偏振基和圆偏振基之间的幺正变换（详见补充材料 S1），镜像轴是图1D右图中的虚线。因此，沿 $_\varphi$ 的辐射场 ()也发生镜像翻转（图1D右图），即 M H $(\varphi)_2 =$ H (φ)M $_2$ 。由此得到 M与 H (φ)之间的对易关系：

$$\left[\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{H}}\left(\mathbf{k}_\varphi\right)\right] = \widehat{\mathcal{M}}\widehat{\mathcal{H}}\left(\mathbf{k}_\varphi\right) - \widehat{\mathcal{H}}\left(\mathbf{k}_\varphi\right)\widehat{\mathcal{M}} = 0. \tag{3}$$

公式（3）是本研究的主要结果，它提出了与方向φ相关的镜像算符 M 的定义。这一对易关系类似于半金属中的情况：在自旋轨道相互作用（SOI）存在时，部分镜像操作也与低阶$k{\cdot}p$哈密顿量对易（*39*）。同样，公式（3）引出了超越通常空间对称性约束的新对称群分类。值得注意的是，随着增大，观察()可见辐射场的面内分量

由$_2$ 和 M $_2$ 产生的辐射场会逐渐与其镜像轴对齐；在掠射角极限（ →/2）下，随着自旋轨道相互作用（SOI）达到最大值，这些分量最终完全重合，如图1E所示。这意味着，随着自旋轨道相互作用（SOI）增强，任意偏振偶极源及其镜像对应物产生的面内场变得无法区分，而偶极子的角位置则完全决定偏振，并且() ⊥ φ。请注意，当N个偶极子组成的系统具有$_i$ = 2(− 1) /时，偶极子的$_\varphi$方向是固定的。在这种情况下，将镜像算符 M 纳入C_N-偶极子系统，并对任意偶极子子集施加部分镜像操作—定义为 M $_{\text{eff}}$算符（图1B）—，我们发现相应的 $\Psi_q = M_{\text{eff}}\Psi$ 属于光学准对称性 C_N 群（q-C_N），该群能够在不受偏振约束的情况下产生完美拓扑晶格。

在图 1F 中，我们总结了在不同自旋轨道相互作用下，由辐射角 调控、生成完美C_3 半斯格明子的所有对称群。立方体是由相对偏振角 $_i$确定的偏振空间，其中 $_i$ ∈ [0,], 表示图 1A 所示三偶极子系统的所有可能线性偏振组合（为便于观察，图中展示了球体）。在弱自旋轨道相互作用下，半斯格明子的生成由对称性保证，共有四个对称群：一个是C_3 ，其余为反C_3 （将在下一节讨论）。随着自旋轨道相互作用增强，反C_3群被破坏，但C_3 群得以保留。在强自旋轨道相互作用下， q-C_3 以三个额外分支的形式出现，主导半斯格明子的生成。值得注意的是，C_3 和 q-C_3 将合并为一个宽广的偏振区域，其中偏振态连续变化，形成完美的C_3 半斯格明子；这表明强自旋轨道相互作用具有很强的偏振鲁棒性，能够诱导形成光的拓扑晶格。

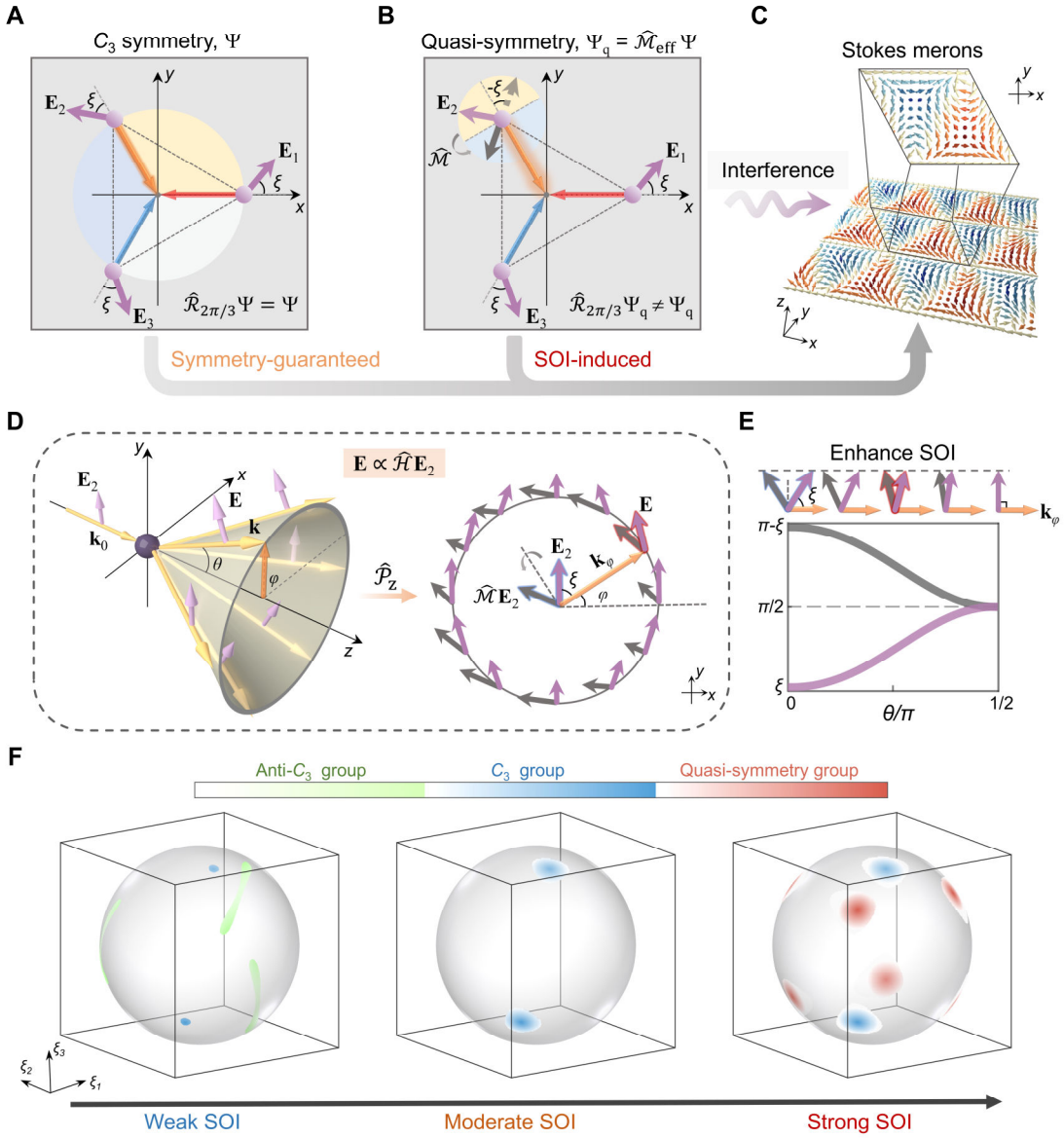


图1. 光学准对称群的概念。(A) z = 0 平面内具有 C_3 对称性的偶极子系统 Ψ。(B) 准对称 C_3 系统的定义。Ψ_q 由对 (A) 中的 Ψ 应用部分镜像算符 M_{eff} 形成，该算符对沿垂直于 r 的轴（虚线边界）的偶极子实施镜像算符 M。(C) 三个偶极子在远处观测平面 z 上干涉生成的斯托克斯 meron 晶格（插图显示一个晶胞）。该拓扑晶格要么由 C_3 系统的对称性所保证，要么由 q-C_3 系统中的 SOI 所诱导。3D 箭头表示斯托克斯矢量 S(x, y) = [S_1, S_2, S_3] 的取向分布，颜色表示 S_3 “向上”（红色）或“向下”（蓝色）。(D) 左图：偶极子的辐射场 E_2 产生圆锥形波矢分布（浅黄色曲面和箭头）以及相应的绝热旋转场 E(k)（紫色箭头）。右图：投影

固定偏转角 θ 下，源自 $\mathbf{E}_2$ 及其镜像 $\mathbf{ME}_2$的面内场分布 $\mathbf{E(k)}$。 $_z$ = diag (1, 1, 0)。（**E**）投影镜像偏振对与 $_\varphi$ （橙色箭头）方向之间相对角的演化，其中 θ 从 0 增加至 /2。初始偏振角为 $\in [0,]$ 。（**F**）偏振立方体（$_1$、$_2$、$_3$）中不同 SOI 下理想半子对应的典型偏振对称群。球面上对应不同对称群的状态分布：反C_3 （绿色）、C_3（蓝色）和 q-C_3 （红色）。颜色从深到浅的渐变表示偏离精确对称操作的程度，该程度由参数空间中的欧几里得距离量化。

无 SOI 时的 C_3 半斯格明子的偏振对称群。我们首先研究在不存在 SOI（ $\to 0$ ）的情况下，在傍轴近似下产生半斯格明子的偏振构型。图 2A 中的立方体包含所有标记为（$_1$、$_2$、$_3$）的线偏振态，其中每个彩色位置表示一种能够形成完美晶格的偏振态。通过将形成的斯托克斯晶格与标准C_3 半斯格明子进行比较，确定这些位置；所用指标为归一化重叠因子 ($_1$、$_2$、$_3$) $\to 1$（详情见第 S4 节）。图 2A展示了偏振立方体中的四个群，其中对角群是已知的C_3 群（I型），如图 2B 左图所示的一种偏振态。其余三个群标记为 II型至 IV型，与 I型所在方向平行，形成三条直线。我们发现，II型至 IV型仅因初始偏振差不同而属于同一个对称群。我们将其称为“反C_3”群，因为对于每种状态，偏振与偶极子位置遵循相反的旋转操作：$\mathrm{R}_{2\pi/3_i=i+1}$，以及在 $=1$、2、3（循环）时的 $\mathrm{R}^{-1}_{2\pi/3i=i+1}$ 。这一额外群表现出一种特殊的“反C_3”涡旋构型，其特征是相对于 $_i$具有反转的循环序列，不同于C_3 群的顺序排列。（详情见表 S1。）

对应 I 型和 II 型的归一化斯托克斯矢量 $\mathbf{s}(x,y) = [S_1, S_2, S_3]/S_0$ 如图2C所示，呈现出三角形半子纹理，其拓扑数为 $_{sk} = (1/4)\iint \cdot_x \times_y {}_A \simeq \pm 0.5$（$A$表示晶格的一个晶胞区域）。如图2D所示，半斯格明子映射到庞加莱球的上半球或下半球，其中边界（$S_3 = 0$）

对应于赤道（红色圆圈），而垂直方向为 $= \pm z$ 的三角晶格中心对应于圆点。值得注意的是，偏振态的C_3 群只产生涡旋度为 $= -1$ 的反型半子，而另一个反-C_3 群则能够形成多种拓扑纹理，其 $= +1$ 涵盖涅尔型、中间型（扭曲纹理）和布洛赫型（*18*），这是由于螺旋度 会随着 从 $-$ 连续变化至 （详见 S3节）。

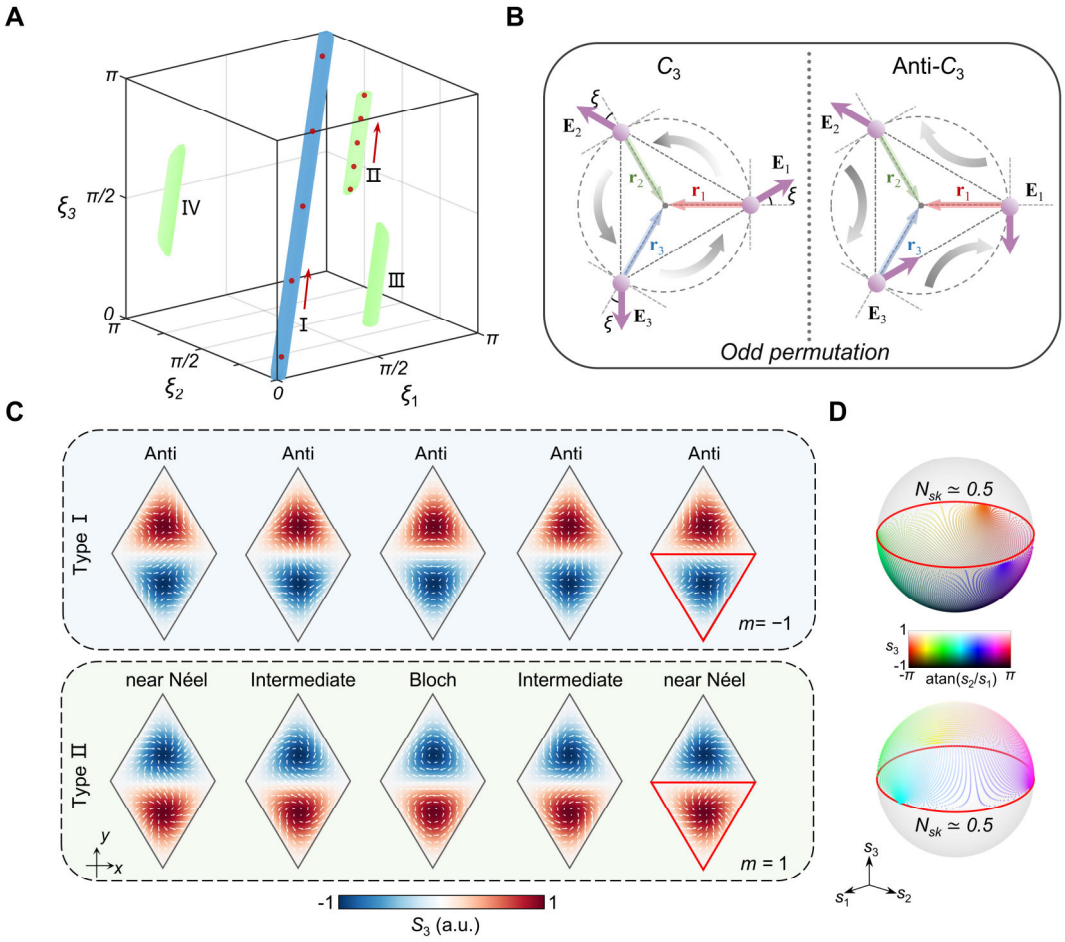


图2. 无自旋轨道相互作用（SOI）时，理想斯托克斯 meron 晶格的偏振对称构型。 **(A)** 在近轴区域（ $\rightarrow 0$）中，偏振立方体内形成C_3 半斯格明子的偏振态。I型（蓝色实线）对应C_3 偏振群，而II–IV型（绿色实线）代表反C_3 群。**(B)** C_3（左图）和反C_3 偏振态的示意图。对于C_3 态，$\mathrm{R}_{2\pi/3_i=i+1}$，且 $\mathrm{R}^{2\pi/3}{}_{i=i+1}$（左图，弯箭头）。对于反$C_3$ 态，$\mathrm{R}^{2\pi/3}{}_{i=i+1}$，且 $\mathrm{R}_{2\pi/3-1_i=i+1}$（右图，弯箭头）。$= 1,2,3$（循环顺序）

(C) 三角形晶胞上的斯托克斯矢量 **S**(*x,y*)，对应于（A）中选定的偏振态（红点）。这些半斯格明子对具有不同的涡旋度 m和 螺旋度 γ。白色箭头表示面内矢量（S_1, S_2），颜色表示 S_3 分量。（**D**）三角形晶胞中的归一化斯托克斯矢量（C）中的最后一组面板）以亮度（s_3）和颜色映射（atan(s_2/s_1）表示，并映射到拓扑数为 N_{sk} =±1/2 的庞加莱球上。半斯格明子边界对应于 $S_3 = 0$ （红色圆圈）。

偏振对称群的自旋轨道相互作用驱动的动力学。 随着自旋轨道相互作用的变化，在三维参数空间中可以观察到C_3 半斯格明子的偏振构型发生清晰演变。图3A至D展示了自旋轨道相互作用强度不同时的几种典型状态，强度由辐射角 量化。可以看到，当 从 0 增至 0.1（对应弱自旋轨道相互作用）时，近轴区域中的反C_3 群发生畸变，偏离了原有的空间区域（图3A）。这意味着反C_3 群容易受到自旋轨道相互作用的影响，因为它缺乏全局C_3 对称性（详情见 S8节）。与此同时，对应C_3 群的对角线保持不变，这是由全局对称性所保证的。在中等自旋轨道相互作用区域（ = 0.25），反C_3 群被完全消除，而C_3 区域则以其中心为基准略微扩展（图 3B）。当自旋轨道相互作用进一步增强时（图 3C 和 D），允许的偏振态数量大幅增加，最终形成一个庞大的星形区域，其中以四条对角分支为主，如图3D所示。在图3的底部面板中，我们选取了若干截面，以明确展示不同对称群随自旋轨道相互作用变化的动力学。这些截面清晰地显示，随着自旋轨道相互作用增强，C_3, 得以保留，反C_3, 被消除，而 q-C_3 群则不断增多。特别是在强自旋轨道相互作用下，由于 q-C_3 群的存在，观测到半斯格明子晶格的可能性显著增加。补充视频展示了完美晶格的偏振组合连续演变过程。

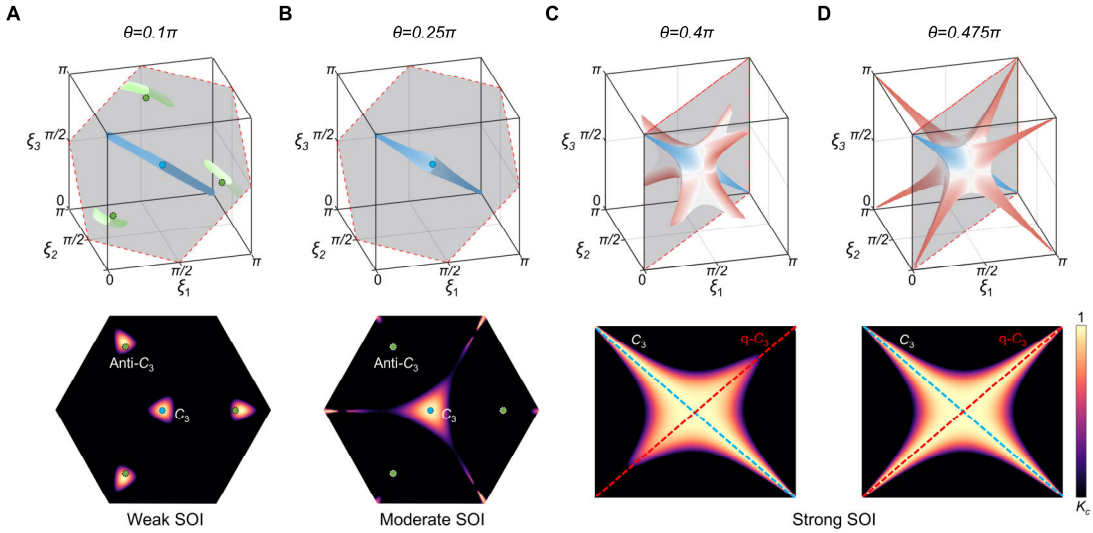


图3. 随自旋轨道相互作用变化的偏振对称群演化。(A)—(D)

立方体中的偏振态可形成完美的C_3半斯格明子，涵盖不同的自旋轨道相互作用区间：弱（ ＝0.1）、中等（ ＝0.25）和强（ ＝0.4 及 0.475）。偏振群以不同颜色表示，配色方案与图1F相同。为更好地表征对称群，我们绘制了六边形和矩形截面；本图底部面板展示了相应的解。阈值K_c设为 0.99。

强自旋轨道相互作用下准对称群的增殖。我们关注不同自旋轨道相互作用下 q-C_3群的演化。基于方程（2）的形式体系，我们给出与 q-C_3 偏振态（–、、）相关的 因子的表达式（详情见补充材料 S4）：

$$\mathcal{K}(-\xi,\xi,\xi)=\frac{\sum_{i\neq j}^{3}\left|\sin\left(\varphi_{ji}+\beta_{ij}\right)\right|}{\sqrt{3}\sqrt{\sum_{i\neq j}^{3}\left|\sin\left(\varphi_{ji}+\beta_{ij}\right)\right|^{2}}}$$

这里，$_{ji}=2(\ -)/3$，$_{ij}=\arg(_{ij}^{*})$表征任意两个偶极子之间辐射场的相位差。对于偏振相同的两个偶极子，$_{ij}=(,)\ =\arg(|()|^{2})=0$。因此，$C_3$ 偶极子系统自然具有 $(,,)=1$ ，从而产生完美子午线。在 q-C_3 系统中，$_{ij}=(-,;)$，相对于 $=/2$ 具有奇宇称，如 $(,)$ 空间中所示

（图 4A）。当 较小时，完美子午线仅在 = /2 附近产生。在这种情况下，q-C_3 与C_3 简并且无法区分。随着 增大，对于任意 ∈ [0,)，(–, ;) 会迅速趋近于 0，进而使 因子趋近于 1（图 4B）。如图 4D 所示，我们从同一 (–, ,) 偶极子系统中选取了若干斯托克斯矢量**S**(*x,y*)，但令 取值不同。随着自旋轨道相互作用增强，这些晶格呈现出半斯格明子从对称性破缺逐步转变为“完美”的C_3 对称性的过程。此外，我们还计算了产生半斯格明子的偏振态密度 (> $_c$)。这里，(> $_c$) 表示在所有 q-C_3 构型中，满足判据 > $_c$、能够产生完美子午线的偏振态所占百分比。如图 4C 所示，当 进入强自旋轨道相互作用区域时，(> $_c$) 迅速增大，并在 = /2 处达到峰值，这对应于临界自旋轨道相互作用条件： =。数学上，这一临界自旋轨道相互作用条件由偶极子的辐射振幅 () = *(–) 的厄米共轭所保证，这与方程 (3) 的对易关系一致。临界自旋轨道相互作用条件出现在掠射极限（ →/2）的事实，也源于电偶极子的辐射特性。对于一般的多极散射系统，例如电四极子、磁偶极子等，A 和B 甚至可以是复数，临界自旋轨道相互作用条件将移至 < /2。一般而言，从准对称群获得最大 (> $_c$) 所需的临界自旋轨道相互作用条件为：

$$\begin{cases} |A| = |B| \neq 0 \\ \phi_{BA} = \arg(B) - \arg(A) = m\pi, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \exists\, \theta \in (0, \pi/2]$$

通过定制的米氏散射和聚焦光束系统，我们验证了这一条件，以获得优化的 和不同的 H ()（详情见 S6 节）。

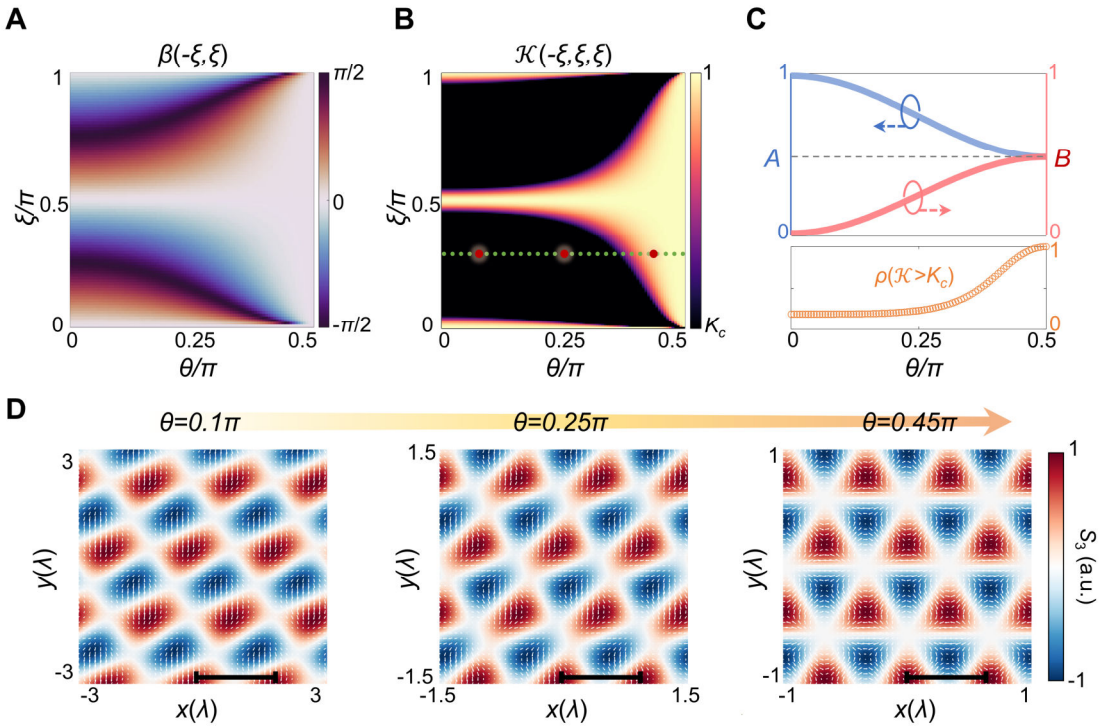


图4. q-C_3 对称群的增殖细节。计算得到的（**A**）和（**B**）因子与不同衍射角的关系。（**C**）计算得到的自旋轨道相互作用系数A（自旋保持部分，蓝色曲线）和B（自旋翻转部分，红色曲线）随的变化，以及归一化态密度($>_c$)的演化。（**D**）由q-C_3 偶极子系统构造的斯托克斯矢量（–、、），该系统穿过（B）中标记的不同。此处，$_c$ = 0.99和 = /3（B）中的绿色虚线）。比例尺：2λ/(3sinθ)。

讨论

总之，我们在由 C_N 个光学偶极子源组成的系统中发现了光学准对称群。这种准对称性由系统某个子集上的一个或多个镜像操作定义，其源自方程 (3) 中的对易关系。此外，我们进一步将这一概念推广到任意椭圆偏振偶极子系统（详情见 S5 节）。由于自由空间中光的自旋-轨道相互作用很强，准对称群能够产生完美的半斯格明子晶格，从而加深了我们对以往由对称性保证生成光的拓扑晶格的条件的理解。

由于形成斯托克斯非平凡纹理需要奇数N，因此，对于偶数N，其他晶体对称群中不存在这种准对称性（详情见S2节）。因此，我们将偶极子系统扩展至$N = 5$、7和9，形成不同的准晶体斯托克斯纹理。类似于C_3，中的操作，我们向这些具有高度旋转对称性的C_N 偶极源引入类似的 算符$\mathrm{M}_{\mathrm{eff}}$ ，以构建q-C_N 群，并展示强自旋轨道相互作用下的C_N 斯托克斯纹理，如图5A所示。由于引入了准对称性 镜面操作，生成了严格具有N重旋转对称性的理想准晶体强度和自旋纹理，证明了我们的准对称性机制具有普适性（图5B-C）。特别是，准周期纹理的形成揭示了前所未有的光的拓扑结构（图5D）；这些结构不仅存在于表面等离激元极化激元系统中（*35–37*），也存在于自由空间中的非傍轴光中。

由于自旋轨道相互作用无处不在，准对称性可能存在于各种非平凡矢量场中，包括自旋角动量(*16*)、能流（*45*、[illegible]量空门中的赝自旋（*19*），甚至时空场（*23*）。此外，在其他波系统中也可能发现近似对称性的类似现象，例如水波（*32*、*33*）、声波（*47*）等，其中也可以类似地构建有效自旋-轨道相互作用。我们的工作拓展了光学对称群，有助于观察和操控光的拓扑结构，并可能应用于奇异光-物质相互作用（*48*），例如构建拓扑光学晶格以操控原子（*49*）和纳米颗粒（*50*），或产生高次谐波（*51*、*52*）。

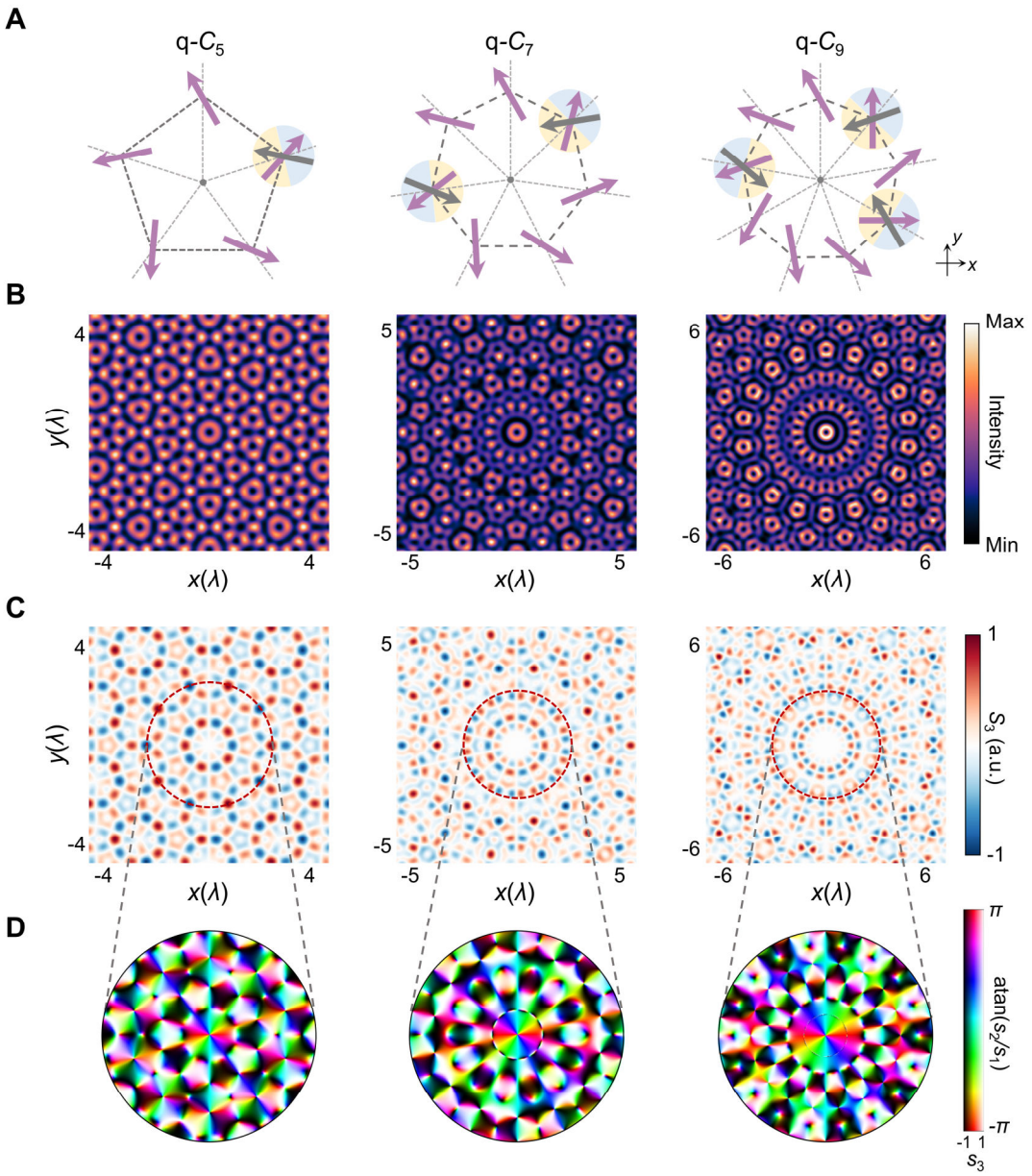


Fig.5. 准对称性偏振群中的类准晶拓扑纹理在强自旋轨道相互作用下的偏振。 **(A)** 具有 N = 5、7 和 9 个偶极源的 N 重旋转示意图。随机的部分镜像操作（灰色箭头）嵌入这些 C_N 光源（紫色箭头）中，其中镜轴严格垂直于该偶极子的相应 $_i$ 。这些偶极子的初始角设为 = /6。**(B)** 具有强自旋轨道相互作用的观测平面上的类准晶 C_N 光强，以及 **(C)** S_3 分布，= 0.45。**(D)** (C) 中红圈标出的部分斯托克斯矢量纹理，呈现出包括涡旋、斯格明子和半子对在内的混合拓扑准粒子。

参考文献

1. N. Nagaosa, Y. Tokura，磁斯格明子的拓扑性质与动力学。*Nature Nanotech* **8**, 899–911 (2013). 2. N. Gao, S.-G. Je, M.-Y. Im, J. W. Choi, M. Yang, Q. Li, T. Y. Wang, S. Lee, H.-S. Han, K.-S. Lee, W. Chao, C. Hwang, J. Li, Z. Q. Qiu，面内磁化薄膜中拓扑磁子对的生成与湮灭。*Nature Communications* **10**, 5603 (2019). 3. B. Göbel, I. Mertig, O. A. Tretiakov，超越斯格明子：替代磁性准粒子的综述与展望。*Physics Reports* **895**, 1–28 (2021). 4. A. Fert, N. Reyren, V. Cros，磁斯格明子：物理学进展与潜在应用。*Nat Rev Mater* **2**, 17031 (2017). 5. A. N. Bogdanov, C. Panagopoulos，磁斯格明子的物理基础与基本性质。*Nat Rev Phys* **2**, 492–498 (2020). 6. 介子与重子的统一场论。*Nuclear Physics* **31**, 556–569 (1962). 7. N. Romming, C. Hanneken, M. Menzel, J. E. Bickel, B. Wolter, K. von Bergmann, A. Kubetzka, R. Wiesendanger，写入和删除单个磁斯格明子。*Science* **341**, 636–639 (2013). 8. S. Chen, J. Lourembam, P. Ho, A. K. J. Toh, J. Huang, X. Chen, H. K. Tan, S. L. K. Yap, R. J. J. Lim, H. R. Tan, T. S. Suraj, M. I. Sim, Y. T. Toh, I. Lim, N. C. B. Lim, J. Zhou, H. J. Chung, S. T. Lim, A. Soumyanarayanan，全电控斯格明子磁性隧道结。*Nature* **627**, 522–527 (2024). 9. L. Han, C. Addiego, S. Prokhorenko, M. Wang, H. Fu, Y. Nahas, X. Yan, S. Cai, T. Wei, Y. Fang, H. Liu, D. Ji, W. Guo, Z. Gu, Y. Yang, P. Wang, L. Bellaiche, Y. Chen, D. Wu, Y. Nie, X. Pan，集成于硅上的高密度可切换类斯格明子极性纳米畴。*Nature* **603**, 63–67 (2022). 10. A. Neubauer, C. Pfleiderer, B. Binz, A. Rosch, R. Ritz, P. G. Niklowitz, P. Böni，MnSi 的 A 相中的拓扑霍尔效应。*Physical Review Letters* **102**, 186602 (2009). 11. M. T. Birch, I. Belopolski, Y. Fujishiro, M. Kawamura, A. Kikkawa, Y. Taguchi, M. Hirschberger, N. Nagaosa, Y. Tokura，电流驱动斯格明子的动态转变与伽利略相对论。*Nature* **633**, 554–559 (2024). 12. S. Wintz, C. Bunce, A. Neudert, M. Körner, T. Strache, M. Buhl, A. Erbe, S. Gemming, J. Raabe, C. Quitmann, J. Fassbender，铁磁多层元件中有效自旋磁子对的拓扑与起源。*Physical Review Letters***110**, 177201 (2013).

13. X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, Y. Tokura，二维斯格明子晶体的实空间观测。*Nature***465**, 901–904 (2010). 14. S. Hayami, T. Okubo, Y. Motome，斯格明子晶体中的相位移。*Nature Communications***12**, 6927 (2021). 15. S. Tsesses, E. Ostrovsky, K. Cohen, B. Gjonaj, N. H. Lindner, G. Bartal，倏逝电磁场中的光学斯格明子晶格。*Science* **361**, 993–996 (2018). 16. L. Du, A. Yang, A. V. Zayats, X. Yuan, 携带轨道角动量的受限电磁场中光子斯格明子的深亚波长特征。*Nature Physics* **15**, 650–654 (2019). 17. T. J. Davis, D. Janoschka, P. Dreher, B. Frank, F.-J. Meyer zu Heringdorf, H. Giessen，以深亚波长分辨率对等离激元斯格明子动力学进行超快矢量成像。*Science* **368**, eaba6415 (2020). 18. Y. Shen, Q. Zhang, P. Shi, L. Du, X. Yuan, A. V. Zayats，光学斯格明子及其他光的拓扑准粒子。*Nature Photonics* **18**, 15–25 (2024). 19. C. Guo，动量空间中的半子自旋纹理。*Physical Review Letters* **124** (2020). 20. L. Rao, J. Wang, X. Wang, S. Wu, X. Zhao, W. Liu, R. Xie, Y. Shen, L. Shi, J. Zi，由连续谱中的束缚态衍生的动量空间半子自旋纹理。*Physical Review Letters* **135**, 026203 (2025). 21. A. Zdagkas, C. McDonnell, J. Deng, Y. Shen, G. Li, T. Ellenbogen, N. Papasimakis, N. I. Zheludev，环面光脉冲的观测。*Nature Photonics***16**, 523–528 (2022). 22. T. He, Y. Meng, L. Wang, H. Zhong, N. Mata-Cervera, D. Li, P. Yan, Q. Liu, Y. Shen, Q. Xiao，具有亚波长特征的超构光纤产生的光学斯格明子。*Nature Communications* **15**, 10141 (2024). 23. Y. Dai, Z. Zhou, A. Ghosh, R. S. K. Mong, A. Kubo, C.-B. Huang, H. Petek, 纳米尺度与飞秒尺度上的等离激元拓扑准粒子。*Nature* **588**, 616–619 (2020). 24. A. A. Wang, Y. Ma, Y. Zhang, Z. Zhao, Y. Cai, X. Qiu, B. Dong, C. He，利用光学斯格明子实现抗扰动整数运算。*Nature Photonics*, 1– 9 (2025). 25. A. Yang, X. Lei, P. Shi, F. Meng, M. Lin, L. Du, X. Yuan，自旋操控光子斯格明子对用于皮米级位移传感。*AdvancedScience* **10**, 2205249 (2023).

26. C. He、Y. Shen、A. Forbes，迈向高维结构光。*Light SciAppl* **11**，205（2022）。27. Y. Shen、H. Wang、S. Fan，自由空间拓扑光学纹理：教程。*Adv.Opt. Photon., AOP* **17**，295–374（2025）。28. D. Marco、I. Herrera、S. Brasselet、M. A. Alonso，通过保角制图投影实现周期性斯格明子纹理。*APL Photonics* **9**，110803（2024）。29. D. Marco、I. Herrera、S. Brasselet、M. A. Alonso，传播不变光学半子晶格。*ACS Photonics* **11**，2397–2405（2024）。30. H. Wu、W. Zhou、Z. Zhu、Y. Shen，在自由空间模式中加速的光学斯格明子晶格。*APL Photonics* **10**，050804（2025）。31. X. Lei，光子自旋晶格：斯格明子和半子拓扑的对称性约束。*Phys. Rev. Lett.* **127**（2021）。32. D. A. Smirnova、F. Nori、K. Y. Bliokh，水波涡旋和斯格明子。*Phys.Rev. Lett.* **132**，054003（2024）。33. B. Wang、Z. Che、C. Cheng、C. Tong、L. Shi、Y. Shen、K. Y. Bliokh、J. Zi，操控粒子的拓扑水波结构。*Nature* **638**，394–400（2025）。34. J. Schwab、A. Neuhaus、P. Dreher、S. Tsesses、K. Cohen、F. Mangold、A. Mantha、B. Frank、G. Bartal、F.J. Meyer zu Heringdorf、T. J. Davis、H. Giessen，等离激元莫尔超晶格中的光的斯格明子袋。*Nat. Phys.* **21**，988–994（2025）。35. S. Tsesses、P. Dreher、D. Janoschka、A. Neuhaus、K. Cohen、T. C. Meiler、T. Bucher、S. Sapir、B. Frank、T. J. Davis、F. Meyer zu Heringdorf、H. Giessen、G. Bartal，等离激元准晶体中的四维守恒拓扑荷矢量。*Science* **387**，644–648（2025）。36. M. Lin、X. Gou、Z. Xie、A. Yang、L. Du、X. Yuan，自旋角动量的光子准晶体。*Science Advances* **11**，eadv3938（2025）。37. H. J. Putley、B. Davies、F. J. Rodríguez-Fortuño、A. Y. Bykov、A. V. Zayats，在倏逝光场的拓扑准晶体中混合斯格明子和半斯格明子。*Optica, OPTICA* **12**，614–619（2025）。38. J. Ren，准对称群与多体疤痕动力学。*Phys. Rev. Lett.***126**（2021）。39. C. Guo、L. Hu、C. Putzke、J. Diaz、X. Huang、K. Manna、F.-R. Fan、C. Shekhar、Y. Sun、C. Felser、C. Liu、B. A. Bernevig、P. J. W. Moll，半金属中的准对称性保护拓扑。*Nat. Phys.* **18**，813–818（2022）。

40. J. Li，关于准对称性和受保护的近简并的群论。*Phys. Rev.Lett.* **133**（2024）。41. M. Onoda，光的霍尔效应。*Phys. Rev. Lett.* **93**（2004）。42. N. Shitrit、I. Yulevich、E. Maguid、D. Ozeri、D. Veksler、V. Kleiner、E. Hasman，自旋光学超材料通往自旋调控光子学的途径。*Science* **340**，724–726（2013）。43. K. Y. Bliokh、F. J. Rodríguez-Fortuño、F. Nori、A. V. Zayats，光的自旋—轨道相互作用。*Nature Photon* **9**，796–808（2015）。44. K. Y. Bliokh、E. A. Ostrovskaya、M. A. Alonso、O. G. Rodríguez-Herrera、D. Lara、C. Dainty，聚焦、散射和成像系统中的自旋到轨道角动量转换。*Opt. Express, OE* **19**，26132–26149（2011）。45. S. Wang，能流的拓扑结构：坡印廷矢量斯格明子。*Phys. Rev. Lett.* **133**（2024）。46. P. Chen、K. X. Lee、T. C. Meiler、Y. Shen，米氏散射场中的拓扑动量斯格明子。*Nanophotonics* **14**，2211–2217（2025）。47. H. Ge、X.Y. Xu、L. Liu、R. Xu、Z.-K. Lin、S.-Y. Yu、M. Bao、J.H. Jiang、M.H. Lu、Y.-F. Chen，声学斯格明子的观测。*Phys. Rev. Lett.* **127**，144502（2021）。48. H. Wang、S. Fan，光子香卡尔斯格明子。*Phys. Rev. Lett.* **135**，233803（2025）。49. S. Nascimbene、J. Dalibard，暗光学晶格中朗道能级结构的出现。*Phys. Rev. Lett.* **135**，153402（2025）。50. Z. Li、W. Liu、Y. Zhang、H. Cheng、S. Zhang、S. Chen，利用各向异性纳米结构进行光学偏振操控。*PhotoniX* **5**，30（2024）。51. X. Ye、G. Wang、X. Duan、Z. Wang、Z. Li、T. Jia、T. Li、L. Yuan、B. Wang、X. Chen，超胞布洛赫模式的近场涡旋动力学。*Phys. Rev. Lett.* **134**，243801（2025）。52. A. A. Gunyaga、M. V. Durnev、S. A. Tarasenko，由辐射光束的空间结构引起的二次谐波产生。*Phys. Rev. Lett.* **134**，156901（2025）。

致谢
经费支持： 本研究获得国家自然科学基金委员会（12274296 和 12192252）及上海交通大学 2030计划的资助。B.W. 获阳阳发展基金资助。

作者贡献： B.W 提出了研究构想。B.W 和 X.C 负责指导本研究。G.W 系统地发展了理论并进行了分析。J. F 完成了早期模拟。B.W 和 G.W 撰写了论文并准备了补充材料。Y.S 和 T.Z 协助修改论文。所有作者均参与讨论了研究结果。G.W 和 J. F 对本研究贡献相同。

利益冲突： 作者声明不存在利益冲突 .

数据和材料可用性：评估论文结论所需的所有数据均已包含在论文和/或补充材料中。

补充材料

半斯格明子晶格的光学准对称群

Guangfeng Wang 等人

通讯作者：Xianfeng Chen，xfchen@sjtu.edu.cn；

Bo Wang，wangbo89@sjtu.edu.cn

此 PDF 文件包含：

补充文本 图 S1 至 S18

表 S1 参考文献

S1 节：偶极散射中 SOI 算子的矩阵表示

为描述自旋轨道相互作用介导的偶极场行为，我们推导了圆偏振基下自旋轨道相互作用算子的变换矩阵。由于光学系统具有方位对称性，我们采用相对于z轴的圆偏振基。考虑全局笛卡尔坐标系中、在线偏振基（x、y、z）下的电场复振幅 $_{\mathrm{L}}=(x、y、z)^{T}$ ，圆偏振基下的基矢和电场振幅可写为：

$$\mathbf{e}_{\pm}=\frac{\mathbf{e}_{x}\pm i\mathbf{e}_{y}}{\sqrt{2}},E_{\pm}=\frac{E_{x}\mp iE_{y}}{\sqrt{2}} \tag{S1}$$

因此，$_{\mathrm{C}}=(+,-,z)^{T}$ 在基底 $(+,-,z)$ 中，其中变换通过酉矩阵 实现，即：

$$\mathbf{E}_{\mathrm{L}}=\hat{V}\mathbf{E}_{\mathrm{C}},\hat{V}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ i & -i & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{S2}$$

以下所有分析均采用圆偏振基 $(+,-,z)$，为简洁起见省略下标 C。我们进一步考虑偶极子的远场近似，并将辐射动量表示为球坐标 $\propto(\sin\cos,\sin\sin,\cos)$。这里，$\in(0,/2]$ 是极角，$\in[0,2)$是相对于z轴的方位角。动量空间中的散射场形式为 $()\propto-\times(\times_{0})$，其中双重叉积算符可改写为一系列纯三维旋转，这些旋转作用于坐标系，并伴随着局域偏振态的旋转（确保正交性 $\cdot=0$），即 $-\times(\times\cdots)\propto \mathrm{R}_{z}(-)\mathrm{R}_{y}(-)_{z}\mathrm{R}_{y}()\mathrm{R}_{z}()$。这里，$\mathrm{R}_{a}()$表示坐标系绕$a$轴旋转角度的旋转算符。$(_{z}=\mathrm{diag}(1,1,0)$是

投影到*xy*平面的投影算符）。在圆偏振基中，变换矩阵可表示为（*1*）：

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) \propto \begin{pmatrix} A & -Be^{-2i\varphi} & -Ce^{-i\varphi} \\ -Be^{2i\varphi} & A & -Ce^{i\varphi} \\ -Ce^{i\varphi} & -Ce^{-i\varphi} & 2B \end{pmatrix} \mathbf{E}_0 \tag{S3}$$

其中， $= 1 + \cos^2$、 $= \sin^2$以及 $= \sqrt{2}\sin(2)/2$（图 S1D）。非对角元素包含方位角相关相位项，体现了自旋到轨道角动量转换，这与全局坐标系的非对易三维旋转所诱导的几何相位有关。在圆偏振波照射下，该过程可表示为 $|\pm\rangle \rightarrow |\pm\rangle \; e^{2i\sigma\varphi}|\mp\rangle$（螺旋度 $= \pm 1$）（*2*，*3*）。忽略沿*z*轴的纵向场分量后，方程 (S3) 中左上角的分块矩阵可视为作用于面内场分量的降维算符 H ()，即：

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} A & -Be^{-2i\varphi} \\ -Be^{2i\varphi} & A \end{pmatrix} \tag{S4}$$

现在考虑一个线性偶极子 $_0 = (e^{-i\Phi}, e^{i\Phi}, 0)^T = (e^{-i(\varphi+\xi)}, e^{i(\varphi+\xi)}, 0)^T$，它位于*xy* 平面内偏离原点的位置 $= (\cos, \sin, 0)$，如图 S1A 所示，其偏振角为 $\in [0,)$，相对于径向**r**轴定义。在观测点 (0,0,) 处的散射场可表示为：

$$\mathbf{E} \propto \begin{pmatrix} Ae^{-i\Phi} - Be^{-2i(\varphi+\pi)+i\Phi} \\ Ae^{+i\Phi} - Be^{2i(\varphi+\pi)-i\Phi} \\ -Ce^{i(\varphi+\pi)}e^{-i\Phi} - Ce^{-i(\varphi+\pi)}e^{i\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}e^{-i\varphi} \\ \mathcal{S}^* e^{i\varphi} \\ 2C\cos\xi \end{pmatrix} \tag{S5}$$

此处，() $= e^{-i\xi} - e^{+i\xi}$ 作为所生成面内分量的散射振幅，用于量化光源的相对偏振方向以及自旋轨道相互作用的强度。值得注意的是，相对于呈现厄米共轭关系，即() $= ^*(-)$。当 $\rightarrow 0$, $\| = \text{const}$ 且 $\arg\{\} \propto$ 时，表明

传播波的偏振完全由源决定，即呈现对称性继承。随着增大， || 和 arg {}的分布逐渐受到自旋轨道相互作用的扭曲。当趋近于/2（掠入射极限）时，|| ∝ sin且 arg{} =/2（图S1B-C）。这意味着散射场的偏振变得与源无关（仅调制振幅），因此在强自旋轨道相互作用区间表现出鲁棒性。相比之下，所生成的纵向分量$_z$ ∝ ()在传播过程中始终独立于源取向（“$\pm i\varphi$”）（图S1E）。

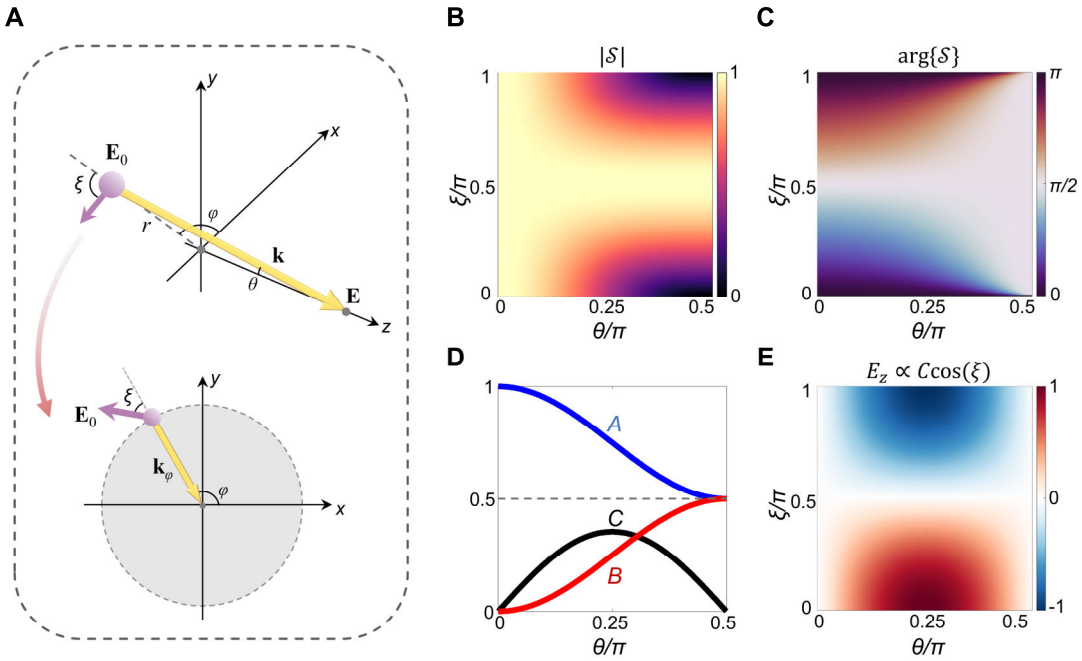


图 S1. 圆偏振基下线偏振偶极子的散射场。(A) 线性偶极子位于原点之外，其面内偏振为 （紫色箭头），方位角依赖的动量为 φ （黄色箭头）的示意图。**(B)** 幅值 || 和**(C)** 相位 arg{} 随 和 的变化。**(D)** 、 和 的系数随 的变化。**(E)** 生成的纵向场 $_z$ 随 (,) 的变化。此处偏转角 = atan(/)。

S2节：由C_N偶极子干涉形成的光学晶格及其对称性分析

本节将在圆偏振基下推导C_N（ ≥ 3）偶极子的干涉场，并构造相应的斯托克斯参数。我们还将分析N.取奇数和偶数时所生成光学晶格的对称性。

C_N偶极子干涉系统的构型如图 S2A 和 2B 所示。线性单色偶极子$_i$ 位于 z = 0 平面内，位置为$_i$ =(cos$_i$, sin$_i$, 0)，其方位角为$_i$ = 2(− 1) / ， ={1, … , }；面内偏振角为 $\Phi_i = _i + _i$ ，其中$_i \in [0,)$定义为相对于径向矢量$_i$的夹角。该系统关于z轴具有C_N对称性。我们考虑平面$z = f$上的干涉场$\mathbf{E}(x,y)$。若观测区域远小于径向距离，则观测平面上来自每个源的面内辐射动量可近似表示为$_i(,) \approx _i$ ，其中$_i = -k_0\sin(\cos_i, \sin_i) \propto _i$。因此，观测平面上的干涉场可表示为：

$$\mathbf{E}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}_i)\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\xi_i)e^{-i\varphi_i} \\ \mathcal{S}^*(\xi_i)e^{i\varphi_i} \end{pmatrix} e^{-ik_0\sin\theta(\cos\varphi_i x + \sin\varphi_i y)} \tag{S6}$$

我们计算了观测区域内各种光场（例如强度和 S_3）的空间分布。基于方程（S6）（图 S2D）的结果与并矢格林函数（*4*、*5*）（图 S2C）显示出极好的一致性，证实了近似 $_i(,) \approx _i$ 的有效性。此外，在圆偏振基下，斯托克斯参数可表示为：

$$\begin{cases} S_0 = |E_R|^2 + |E_L|^2 \\ S_1 = 2\Re\{E_R E_L^*\} \\ S_2 = -2\Im\{E_R E_L^*\} \\ S_3 = |E_R|^2 - |E_L|^2 \end{cases} \tag{S7}$$

其中，$_{R}/_{L}$ 是电场的右旋和左旋圆偏振（右旋圆偏振和左旋圆偏振）分量。

将方程（S6）代入方程（S7），得到：

$$I_R(\mathbf{r}) = |E_R|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\mathcal{S}_i|^2 + \sum_{i\neq j}^{N} \Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\cos(\varphi_{ji} + \mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}) - \sum_{i\neq j}^{N} \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\sin(\varphi_{ji} + \mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}) \quad \text{(S8)}$$

$$I_L(\mathbf{r}) = |E_L|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\mathcal{S}_i|^2 + \sum_{i\neq j}^{N} \Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\cos(\varphi_{ij} + \mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}) + \sum_{i\neq j}^{N} \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\sin(\varphi_{ij} + \mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}) \quad \text{(S9)}$$

$$S_0(\mathbf{r}) = 2\sum_{i=1}^{N} |\mathcal{S}_i|^2 + 2\sum_{i\neq j}^{N} \left\{\Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\cos(\varphi_{ij}) + \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\sin(\varphi_{ij})\right\}\cos\left(\mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}\right) \quad \text{(S10)}$$

$$S_1(\mathbf{r}) = 2\sum_{i,j}^{N} \left\{\Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\cos\left(\varphi_i + \varphi_j\right) + \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\sin\left(\varphi_i + \varphi_j\right)\right\}\cos\left(\mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}\right) + 2\sum_{i,j}^{N} \left\{\Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\sin\left(\varphi_i + \varphi_j\right) - \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\cos\left(\varphi_i + \varphi_j\right)\right\}\sin\left(\mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}\right) \quad \text{(S11)}$$

$$S_2(\mathbf{r}) = 2\sum_{i,j}^{N} \left\{\Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\sin\left(\varphi_i + \varphi_j\right) - \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\cos\left(\varphi_i + \varphi_j\right)\right\}\cos\left(\mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}\right) - 2\sum_{i,j}^{N} \left\{\Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\cos\left(\varphi_i + \varphi_j\right) + \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j\}\sin\left(\varphi_i + \varphi_j\right)\right\}\sin\left(\mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}\right) \quad \text{(S12)}$$

$$S_3(\mathbf{r}) = 2\sum_{i\neq j}^{N} \left\{\Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\sin(\varphi_{ij}) - \Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\cos(\varphi_{ij})\right\}\sin\left(\mathbf{k}_{ji}\cdot\mathbf{r}\right) \quad \text{(S13)}$$

这里，$_{ji} = 2(-)/$。值得注意的是，辐射动量差集合 $_{ji} =_j -_i$、、 $= \{1, \dots , \}$，$\neq$ 具有N重旋转对称性（即 $\mathrm{R}^{2\pi/N}{}_i = i+1$、 $= \{1, \dots , \}$），可作为干涉系统中的倒格矢。在二维中，仅当N = 3,4,6时，才允许存在周期性布拉菲晶格，分别对应三角形/六角形（N = 3 或 6）和正方形（N = 4）晶格（*6*）；而其他情形（例如N = 5,7,8,9.....），甚至更高阶的旋转对称性，由于 {ji} 集合的非公度性，只能形成准晶纹理，如图 S3 和 S4 所示。我们进一步通过施加 $_i =$，构造C_N 偶极源。相应光场的表达式可简化为：

$$\begin{cases} I_R(\mathbf{r}) \propto \sum_{i\neq j}^{N} \cos\left(\varphi_{ji} + \mathbf{k}_{ji} \cdot \mathbf{r}\right) \\ I_L(\mathbf{r}) \propto \sum_{i\neq j}^{N} \cos\left(\varphi_{ij} + \mathbf{k}_{ji} \cdot \mathbf{r}\right) \\ I_T(\mathbf{r}) \propto \sum_{i\neq j}^{N} \cos\left(\varphi_{ji}\right) \cos\left(\mathbf{k}_{ji} \cdot \mathbf{r}\right) \\ S_3(\mathbf{r}) \propto \sum_{i\neq j}^{N} \sin\left(\varphi_{ji}\right) \sin\left(\mathbf{k}_{ji} \cdot \mathbf{r}\right) \end{cases} \tag{S14}$$

显然，上述光场的空间分布也呈现N重对称性（例如 $\mathrm{R}_{2\pi/N}{}_R() = {}_R\mathrm{R}^{-1}_{2\pi/N} = {}_R()$）。此外，总强度和纵向自旋分量分别呈现偶宇称和奇宇称，即：

$$\begin{cases} \hat{P} I_T(\mathbf{r}) = I_T(-\mathbf{r}) = I_T(\mathbf{r}) \\ \hat{P} S_3(\mathbf{r}) = S_3(-\mathbf{r}) = -S_3(\mathbf{r}) \end{cases} \tag{S15}$$

结合N重对称性，当N为偶数时，$_3() \equiv 0$ 。这意味着构造出的斯托克斯矢量场只能形成面内涡旋结构（图 S4 第五幅图），而非三维拓扑纹理。因此，我们将重点关注N为奇数的情况。特别是，N = 3 是形成非零周期性斯托克斯纹理的唯一情形，其晶格常数为 $= 4/(\sqrt{3}i) = 2/(3\sin), \neq$ 。

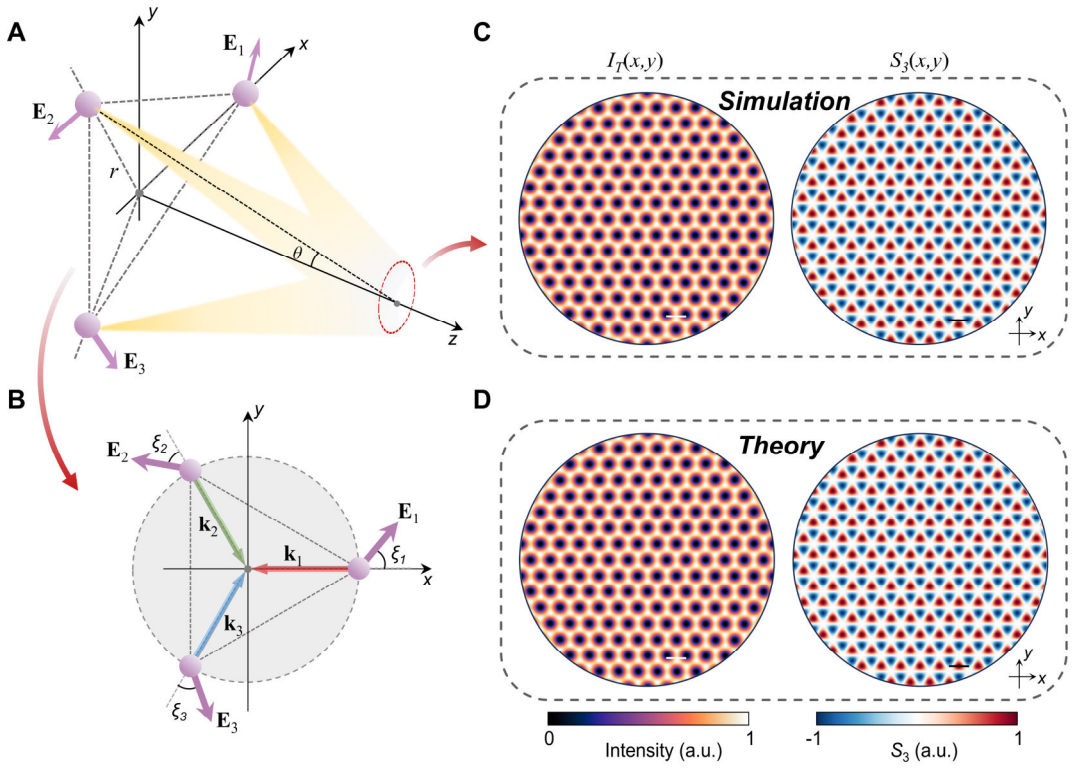


图 S2. 多偶极干涉系统示意图。(A) 干涉过程的三维视图。**(B)** $z = 0$ 平面中偶极子的空间排列和偏振构型。观测平面$z = f$上的干涉强度和自旋分布，分别由基于公式（S6）的**(C)**严格计算和**(D)**理论得出。比例尺为晶格常数 $= 2/(3\sin)$（为自由空间波长）。N设为 3，且 $= 0.1$。距离 $= 100$。

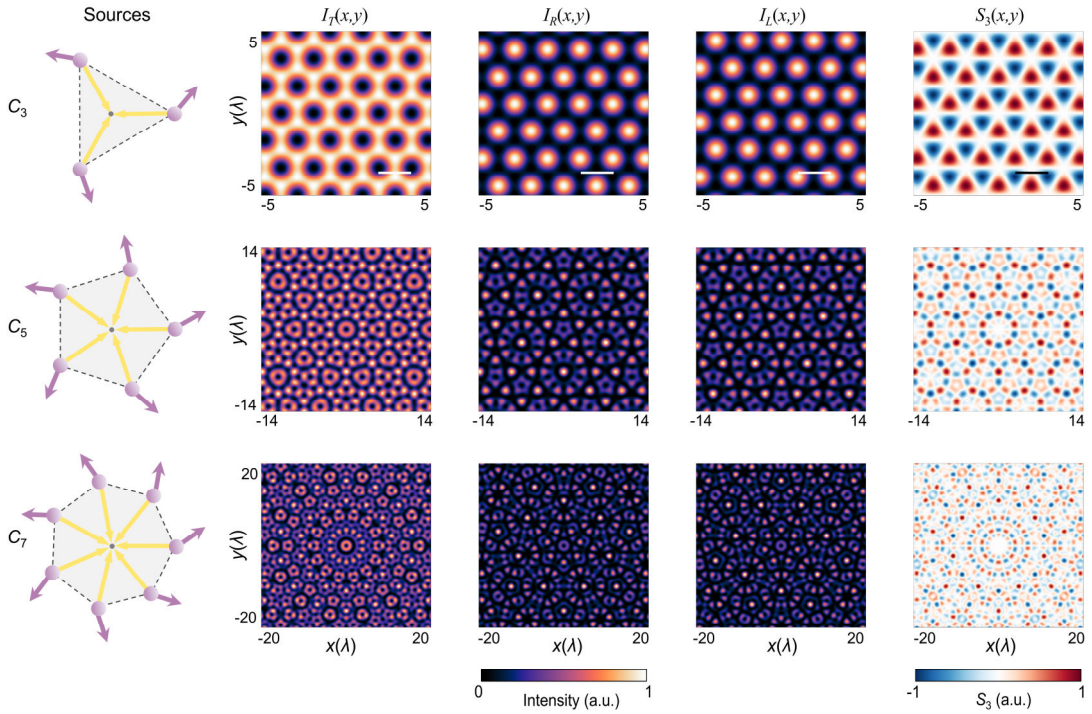


Fig. S3. 由奇数C_N 偶极源生成的光学晶格N = 3,5,7. 面板 s

从左至右：具有N重面内旋转动量的多偶极子（黄色箭头）和偏振矢量（紫色箭头）、总强度 $_T$ 、右旋圆偏振/左旋圆偏振分量的强度 $_R$ 和 $_L$，以及斯托克斯S_3。

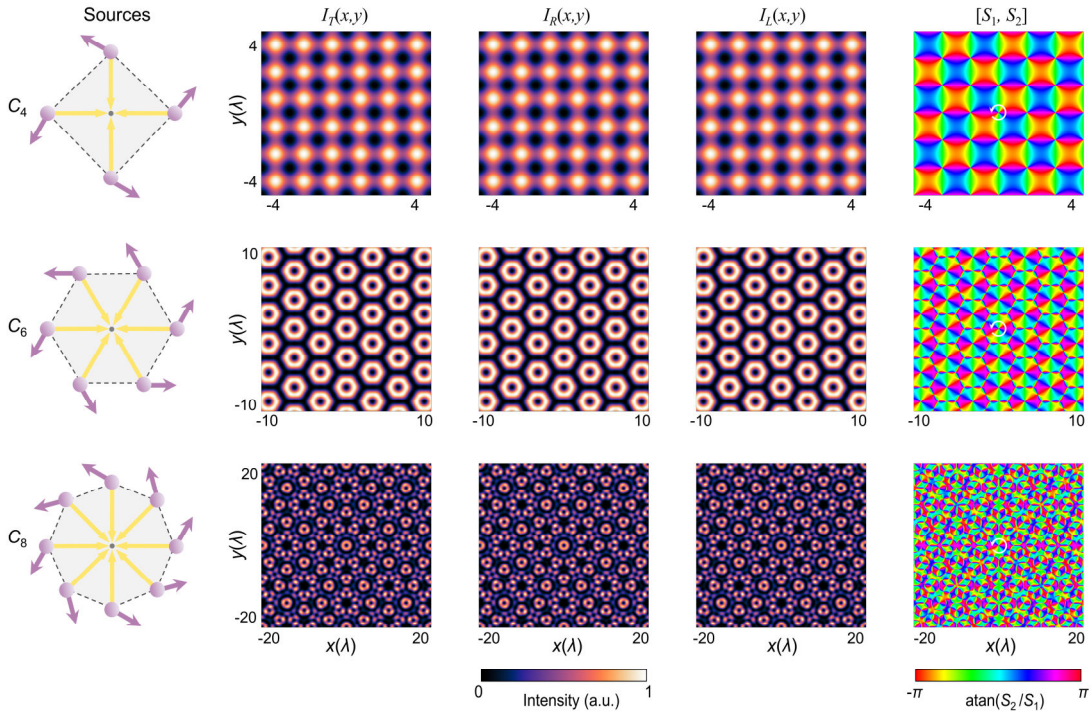


图 S4. 偶数 N = 4,6,8. 面板的最后一列显示了非零斯托克斯S_1 和S_2的相位分布。

S3节：斯托克斯 C_3 半斯格明子的拓扑性质

本节详细计算了图2A中基本解所对应的理想斯托克斯C_3 半斯格明子晶格的拓扑性质，包括随输入偏振配置变化的斯格明子数（N_{sk}）、涡旋度（m）和螺旋度（）等。笛卡尔坐标中的一般归一化斯托克斯矢量场 (,) = [1、2、3] 可映射到庞加莱球上，其斯格明子数为 $_{sk} = (1/4)\iint (,)\ _A$ （A表示晶格的一个晶胞区域），而 (,)表示斯格明子密度，即:

$$\rho(x,y) = \mathbf{s}(x,y) \cdot [\partial_x \mathbf{s}(x,y) \times \partial_y \mathbf{s}(x,y)] \tag{S16}$$

此处，(,) 的符号表示矢量场缠绕单位球的方向。我们计算了理想的 C_3 半斯格明子晶格中 (,) 的分布，如图 S5A 所示，其呈现出交替排列的等边三角形分布，与 3(,) 相似。值得注意的是，随着光强趋近于零，三角形单元边缘处的斯格明子密度逐渐发散。由于斯格明子数无法唯一确定非平庸的矢量纹理，我们将 (,) = (cos, sin) =(sin cos , sin sin , cos) 映射到单位球面上，其中 r 和 分别是 xy 平面内矢量场的径向坐标和方位角坐标。因此，$_{sk}$ 可写为:

$$\begin{aligned} N_{sk} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{r_0} dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\beta(r)}{dr}\frac{d\alpha(\phi)}{d\phi}\sin\beta(r) \\ &= \frac{1}{4\pi}[\cos\beta(r)]_{r=0}^{r=r_0}[\alpha(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \end{aligned} \tag{S17}$$

涡旋度 和螺旋度 的数量可定义为（7）：

$$m = \frac{1}{2\pi}\oint_C d\phi = \frac{1}{2\pi}[\alpha(\phi)]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \tag{S18}$$

$$\gamma = \alpha(\phi) - m\phi \tag{S19}$$

根据上述指标，二维拓扑准粒子可分为几种基本构型，如图 S6 所示。对于涡旋度为 = 1 的情况， = 0 和

0 是以刺猬状分布为特征的奈尔型纹理，而 = ±/2 是具有面内涡旋分布的布洛赫型（图 S6 上排）。当 = −1 时，这类构型被定义为具有鞍形纹理（反涡旋）的反型结构，它们属于与布洛赫型和奈尔型斯格明子纹理不同的拓扑保护群（*8*）。（图 S6 下排）。

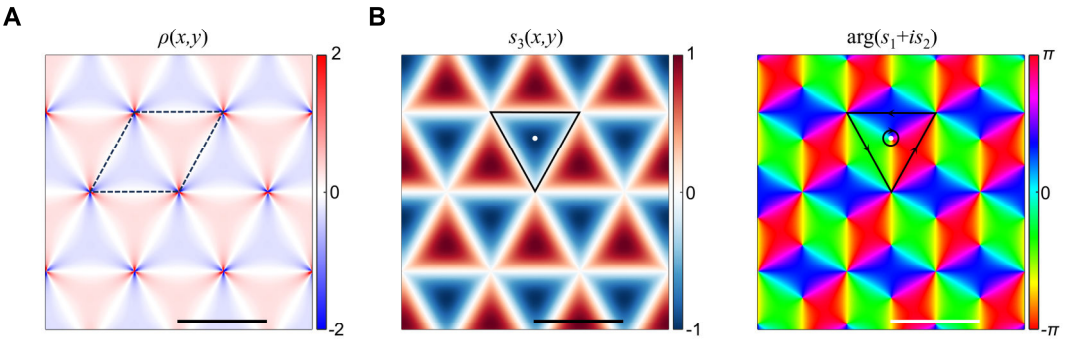


图 S5. 理想 C_3 半斯格明子斯格明子数计算的详细信息。（A）

理想C_3 半斯格明子晶格的斯格明子密度分布。黑色虚线标出了纹理的一个晶胞，其中包含一对半斯格明子。（**B**）归一化斯托克斯s_3 及 arg（$_1 + _2$）的分布。两个手性相反的黑色闭环分别围住奇点（白点）和单个半斯格明子的边界。

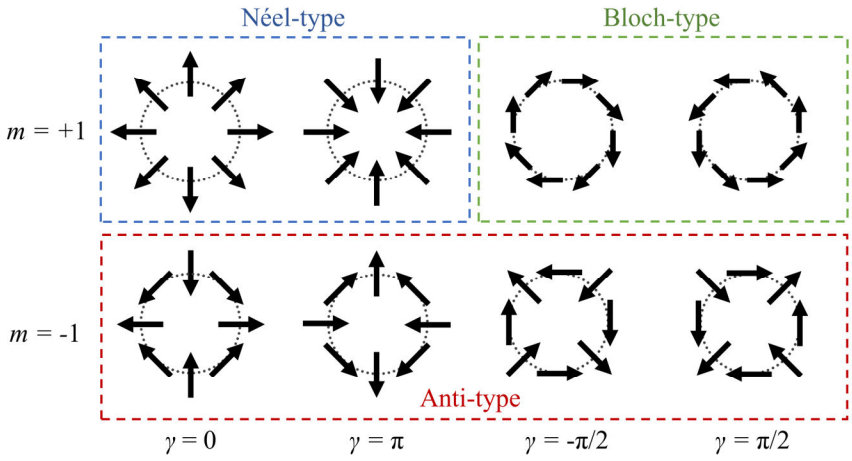


图 S6. 具有不同 m 和 γ 值的二维拓扑准粒子的典型横向矢量构型。

为精确计算有限区域内的斯格明子数$_{sk}$，我们采用文献（*9*）提出的几何方法，而非曲面积分法，即:

$$N_{sk} = \sum_j \frac{1}{4\pi} \oint_{\beta_j} s_z \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{l} - \frac{1}{4\pi} \oint_{\alpha} s_z \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{l} \qquad \text{(S20)}$$

其中 $_z = _3$ 和 $\Phi = \arg(_1 + _2)$。方程 S20 将斯格明子数重新表述为两条闭合线积分之和：一条是沿所选区域边界的逆时针（）环路，另一条是围绕 Φ 的每个奇点的顺时针环路（$_j$），如图S5B所示。使用方程(S20)计算得到的 N_{sk} 的数值误差约为1%。

在没有 SOI 的情况下，我们进一步系统地计算了图2A所示四种基本解的 $_{sk}$、和 。四种解的详细信息及其对应的对称群总结于表 S1中。如图S7A所示，斯格明子数 $_{sk} \approx \pm 0.49$ 保持稳定，证明了通过偶极干涉形成的斯托克斯半子具有拓扑鲁棒性。此外，属于 C_3 群的 I型解只产生反型半子（ $=-1$ ）。另一方面，II-IV型构型（反-C_3 群）产生具有正涡旋度的半斯格明子（ $= 1$），其螺旋度由初始偏振态连续调制，即 $\propto$，从而导致半斯格明子从布洛赫型、中间型（扭曲纹理）到奈尔型的演化（图S7B-E）。

表 S1. 无自旋轨道相互作用时与精确对称操作对应的偏振群汇总。

Type	偏振态的参数方程	对称群
I	$\in [0,); _1 = ; _2 = ; _3 = ;$	C_3
II	$\in [0,/3]; _1 = + /3; _2 = ; _3 = + 2/3;$	反C_3
III	$\in [0,/3]; _1 = + 2/3; _2 = + /3; _3 = ;$	反-C_3
IV	$\in [0,/3]; _1 = ; _2 = + 2/3; _3 = + /3;$	反-C_3

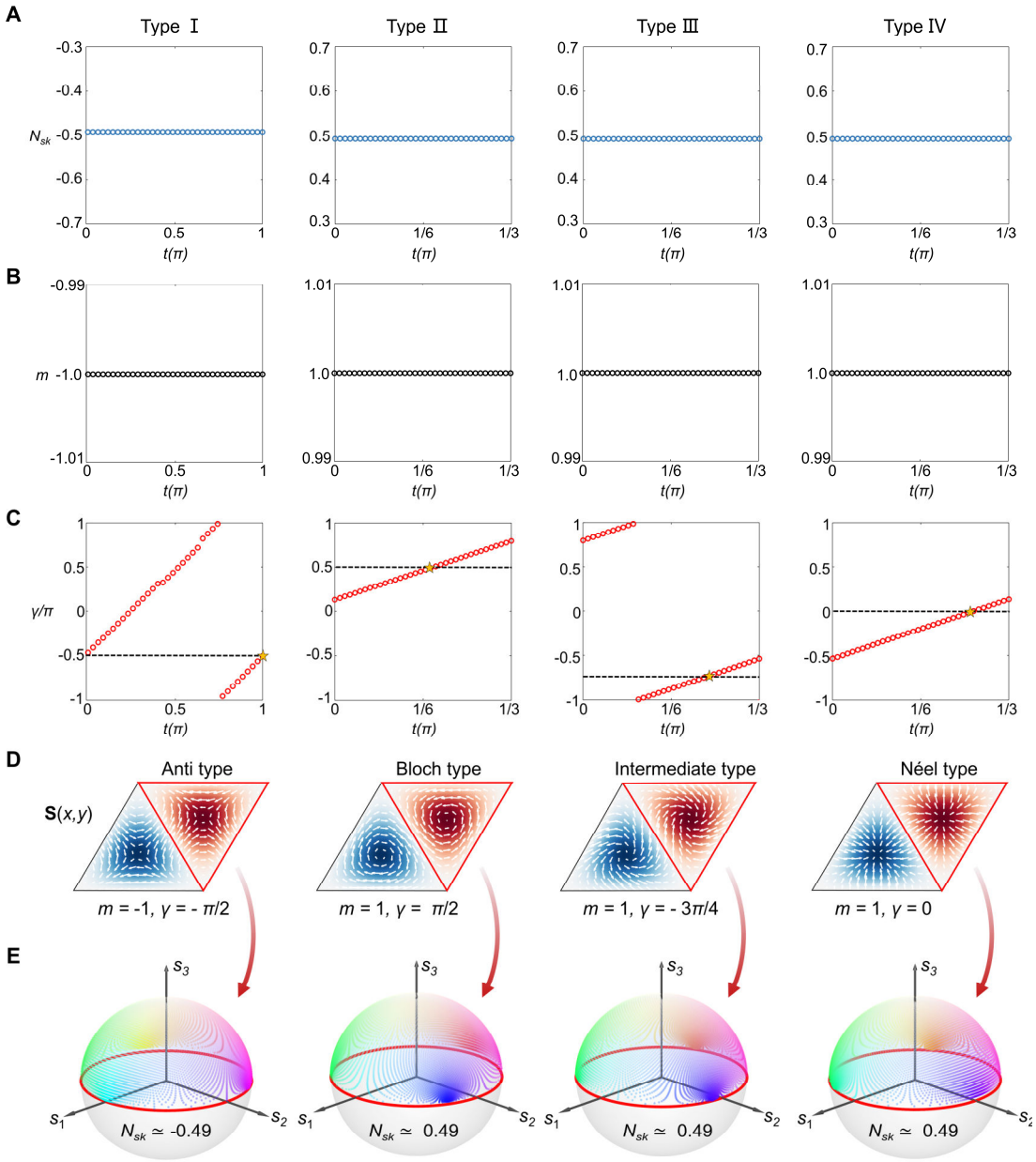


图 S7. 无自旋轨道相互作用时，与偏振构型对应的理想半斯格明子的拓扑特征。（**A**）计算得到的斯格明子数N_{sk}、（**B**）涡旋度 、（**C**）螺旋度 随输入偏振态的变化，以及（**D**）三角形晶胞上的选定斯托克斯矢量**S**（*x*,*y*）（（C）中的黄色星号）与（**E**）映射到庞加莱球上的结果。

S4 节：重叠因子的推导 $\mathcal{K}$

本节中，我们将重叠因子 定义为一种度量，用于评估光学晶格在实空间中的 N 重旋转对称性；我们基于公式（S6）—（S14）的形式体系推导其显式表达式。此外，我们计算了跨越不同自旋轨道相互作用的理想 C_3 晶格在偏振空间中的归一化态密度（1、2、3）。

为量化晶格畸变程度，我们利用归一化傅里叶谱表征干涉晶格的平移和旋转对称性，从而消除由晶格在实空间中未对准所导致的歧义。如图S8所示，生成理想光学晶格的三波干涉场（图S8A）的傅里叶变换在动量空间中呈现六个强度相同的峰（图S8C），而畸变晶格的傅里叶峰（图S8B）可能减弱甚至消失（图S8D）。实际上，动量空间中六个傅里叶峰的幅值对应于沿三个传播方向 $ji = j - i$ 的复振幅，{ ≠、、 = 1、2、3}。因此，我们引入归一化重叠因子，即:

$$\mathcal{K} = \frac{\iint |\mathcal{F}(S_3)|\left|\mathcal{F}\left(S_3^{\mathrm{p}}\right)\right| dk_x dk_y}{\sqrt{\iint |\mathcal{F}(S_3)|^2 dk_x dk_y}\sqrt{\iint \left|\mathcal{F}\left(S_3^{\mathrm{p}}\right)\right|^2 dk_x dk_y}} \tag{S21}$$

这里，$_3$ 表示特定自旋晶格的分布，而 S_3^{p} 对应于方程(S14)定义的理想三角晶格。当趋近于 1 时，表示理想C_3 晶格的形成。

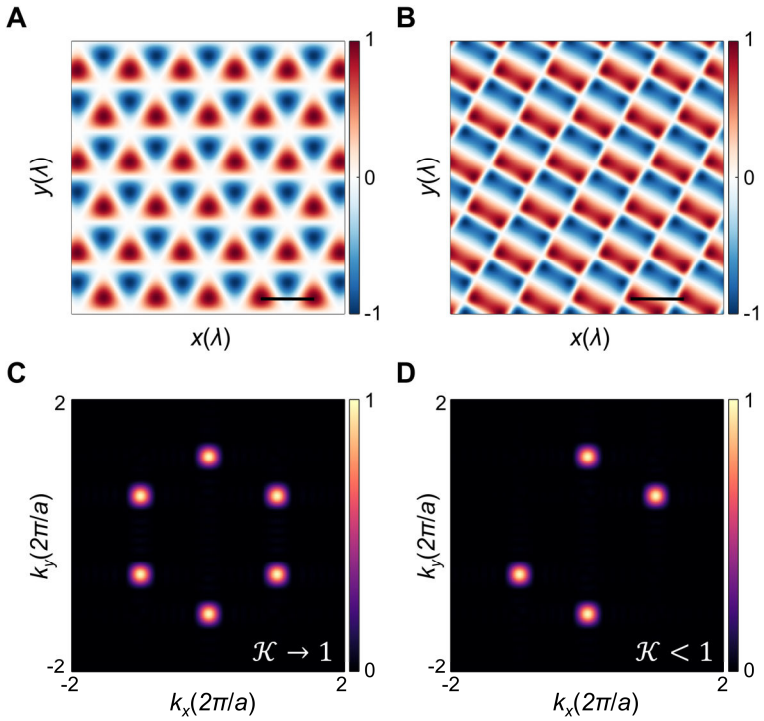


Fig. S8. 光学晶格与其傅里叶谱的比较，针对 bot
h 完美与破缺 C_3 对称性。 (A)-(B) 有限区域内具有精确和破缺C_3对称性的自旋晶格。**(C)-(D)** S_3.对应的傅里叶变换结果

我们进一步推导了关于偏振组合（1、2、3）的表达式。考虑有限方晶格的傅里叶变换:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}(S_3)| &\propto \left| \sum_{i \neq j}^{3} \{\Re\{\mathcal{S}_i \mathcal{S}_j^*\} \sin(\varphi_{ij}) - \Im\{\mathcal{S}_i \mathcal{S}_j^*\} \cos(\varphi_{ij})\} \mathcal{F}\{\sin(\mathbf{k}_{ji} \cdot \mathbf{r})\, rect_l(\mathbf{r})\} \right| \\
&= \left| \sum_{i \neq j}^{3} \{\Re\{\mathcal{S}_i \mathcal{S}_j^*\} \sin(\varphi_{ij}) - \Im\{\mathcal{S}_i \mathcal{S}_j^*\} \cos(\varphi_{ij})\} \mathcal{F}\{\sin(\mathbf{k}_{ji} \cdot \mathbf{r})\} \otimes \mathcal{F}\{rect_l(\mathbf{r})\} \right| \\
&= \left| \sum_{i \neq j}^{3} \{\Re\{\mathcal{S}_i \mathcal{S}_j^*\} \sin(\varphi_{ij}) - \Im\{\mathcal{S}_i \mathcal{S}_j^*\} \cos(\varphi_{ij})\} [g(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{ji}) - g(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{ji})] \right|
\end{aligned}
$$

忽略傅里叶峰之间的空间重叠（ ≫）：

$$\begin{aligned}&\approx \left|\sum_{i\neq j}^{3}\left\{\Re\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\sin(\varphi_{ij})-\Im\{\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*\}\cos(\varphi_{ij})\right\}\right| |g(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_{ji})| \\ &\propto \sum_{i\neq j}^{3}|\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*|\,|\sin(\varphi_{ji}+\beta_{ij})||g(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_{ji})|\end{aligned} \tag{S22}$$

这里，() = ι() = (x/2)ι(y/2)， 是所选区域的边长，且 ij =arg (i_j^*)。类似地，对于由C_3光源生成的完美晶格：

$$|\mathcal{F}(S_3^{\mathrm{p}})| \propto \sum_{i\neq j}^{3}|\sin(\varphi_{ji})||g(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_{ji})| \tag{S23}$$

考虑以下积分关系：

$$\iint |g(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_{ji})||g(\mathbf{k}\pm\mathbf{k}_{mn})|dk_x dk_y \propto \begin{cases}0, ji\neq mn\\ \\ 1/l^2, ji=mn\end{cases} \tag{S24}$$

将方程(S22)–(S24)代入方程(S21)，最终得到：

$$\mathcal{K}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{\sum_{i\neq j}^{3}|\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*||\sin(\varphi_{ji}+\beta_{ij})|}{\sqrt{3}\sqrt{\sum_{i\neq j}^{3}|\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j^*|^2|\sin(\varphi_{ji}+\beta_{ij})|^2}} \tag{S25}$$

根据方程(S25)，我们计算了态密度 (> c)，它表示偏振立方体中能够产生完美C_3晶格的偏振态所占的百分比。在图S9A中，当超过0.25时，(> c)迅速上升，并在 → /2时达到最大值，其中阈值$_c$ 设为0.99。这一现象源于强SOI下q-C_3 群的增殖。需要指出的是，这里我们仅将斯托克斯S_3 的因子作为衡量指标。然而，(3) → 1 并不总能保证C_3 半斯格明子的形成（也可能是由强度畸变导致的巧合）。为确保生成理想半斯格明子，

(0) → 1 也必须得到满足，这会导致偏振态的演化略有差异。更多详情请参见影片。

对于具有偏振构型（–、、）的 q-C_3 态，使得 |()*(–)| = |()| · |*(–)| = |()|² 成立的厄米共轭，以及方程(S25)，可进一步简化为：

$$\mathcal{K}(-\xi,\xi,\xi;\theta)=\frac{\sum_{i\neq j}^{3}\left|\sin\left(\varphi_{ji}+\beta_{ij}\right)\right|}{\sqrt{3}\sqrt{\sum_{i\neq j}^{3}\left|\sin\left(\varphi_{ji}+\beta_{ij}\right)\right|^{2}}} \tag{S26}$$

如图S9B所示，当 →/2 时， 会在整个连续偏振系综中迅速趋近于 1，且在不同的 c 取值下，增殖效应保持稳定。

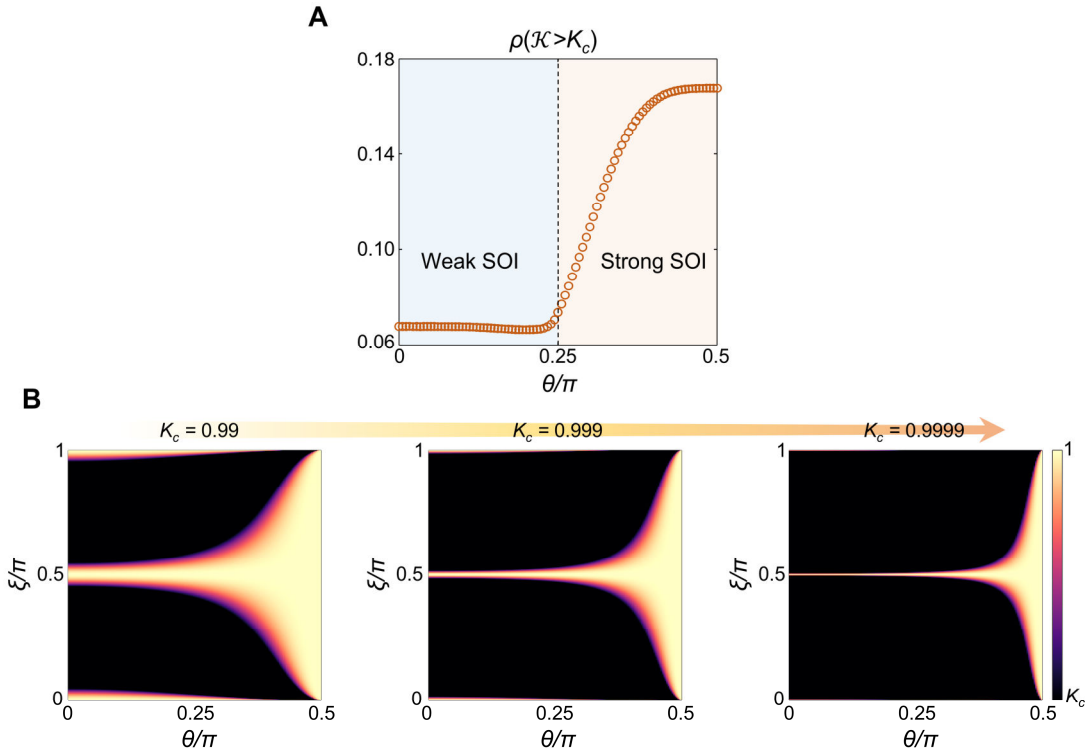


图 S9。 (A) 理想 C_3 晶格的偏振态总密度计算结果，以及 **(B)** 在不同阈值下的分布$_c$ ，适用于 q-C_3 群。

S5节：向任意偏振偶极源的扩展

本节将准对称性的概念从线偏振扩展到圆偏振以及任意椭圆偏振偶极子干涉系统。对于由方位角$\Phi_i = _i + _i$ 和椭圆率 $_i \in [-/4、/4]$, 表征的一般面内偏振态 $_i$ ，相应的电场可表示为：

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\Phi_i & -\sin\Phi_i\\ \sin\Phi_i & \cos\Phi_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\chi_i\\ i\sin\chi_i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\Phi_i}(\cos\chi_i + \sin\chi_i)\\ e^{+i\Phi_i}(\cos\chi_i - \sin\chi_i)\end{pmatrix} \quad \text{(S27)}$$

类似地，相应的散射场为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) \propto \widehat{\mathcal{H}}(\mathbf{k})\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix}\mathcal{S}_R e^{-i\varphi_i}\\ \mathcal{S}_L e^{+i\varphi_i}\end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_R &= Ae^{-i\xi_i}(\cos\chi_i + \sin\chi_i) - Be^{+i\xi_i}(\cos\chi_i - \sin\chi_i)\\ \mathcal{S}_L &= Ae^{+i\xi_i}(\cos\chi_i - \sin\chi_i) - Be^{-i\xi_i}(\cos\chi_i + \sin\chi_i)\end{aligned} \quad \text{(S28)}$$

值得注意的是，由于存在非零椭圆率，散射振幅的右旋圆偏振和左旋圆偏振分量之间不能进行厄米共轭（即，$_R \neq {}^*_L$），因此结果与线偏振情况不同。

首先，我们考虑如图 S10A 和 D 所示、椭圆率为 $= \pm/4$ 的圆偏振C_3 偶极子。当 ≈ 0 时，会形成平庸的六角晶格（图 S10C 和 F 的上方各面板），呈现纯S_3分量（向上或向下）的空间分布，并映射到庞加莱球的两个极点。这意味着，该场通过自由空间传输继承了光源的自旋态。随着 增大，自旋轨道相互作用会产生自旋翻转分量，使斯托克斯矢量逐渐从极点向赤道扩散。当 $\approx /2$ 时，会生成理想的C_3 斯托克斯半子；由于自旋转换达到极限，它们覆盖了整个半球区域

这是由最强的自旋轨道相互作用诱导的（图 S10C 和 F 的下方面板）。计算得到的斯格明子数（N_{sk}）随 从 0 连续演变至 ±0.5，证实了图 S10B 和 E 所示的自旋轨道相互作用驱动的拓扑相变。

接下来，我们聚焦于椭圆偏振偶极子的情形。为简化起见，我们将三个偶极子的椭圆率设为相同，即 $_i$ = ∈ [−/4, /4], = 1,2,3.（以确保对称群定义良好）。我们首先通过由 $_{sk}$ 群生成的斯托克斯晶格，计算 N_{sk} 随椭圆率 和 的变化关系（左图，图 S11A）。可以观察到，在傍轴近似下（ → 0），无法形成具有 ≠ 0 的拓扑纹理。随着 增大，这一限制逐渐解除。当 ≳ 0.45 时，由于自旋轨道相互作用很强，任意椭圆率的偶极子构型均可产生半子纹理。这一显著结果表明，内禀自旋轨道相互作用不仅抑制了相对偏振（）的影响，还消除了对光源椭圆率（）的要求，从而形成一个高度稳健的偏振区域，使光源能够诱导产生拓扑晶格。此外，随着自旋轨道相互作用增强，椭圆率 对完美晶格偏振态密度的影响变得更加显著—也就是说，较大的 ‖ 对应较高的 （图 S11B）。其内在机制是，较大的椭圆率会减弱偏振取向的影响。当 → /2 时，在纯圆偏振照明（ = ±/4）下， 会迅速收敛至 1。此时， 会引入不同的初始相位延迟；在 $N = 3$ （*10*）的情况下，这只会导致晶格发生位移，而不会使其发生畸变。

最后，我们讨论偏振对称群的行为。当 ‖ > 0 时，C_3 群所保证的对称性逐渐被破坏，这使得即使光源表现出整体旋转对称性，在弱 SOI 下也无法形成理想的半子纹理。q-C_3 群也经历了类似的转变。随着 ‖增大并趋近于 /4，C_3 群和 q-C_3 群由于在圆偏振态下部分镜像操作的冗余性而变得无法区分（图 S12）。事实上，强 SOI 确保：

在圆偏振态下部分镜像操作的冗余性（图 S12）。事实上，强 SOI 确保：

$$\left|\mathcal{S}_R\left(\xi;\theta\to\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\mathcal{S}_L\left(\pm\xi;\theta\to\frac{\pi}{2}\right)\right| \tag{S29}$$

该关系表明，C_3 和 q-C_3 是广泛参数空间中的基本构型，并进一步凸显了自旋轨道相互作用的关键作用。

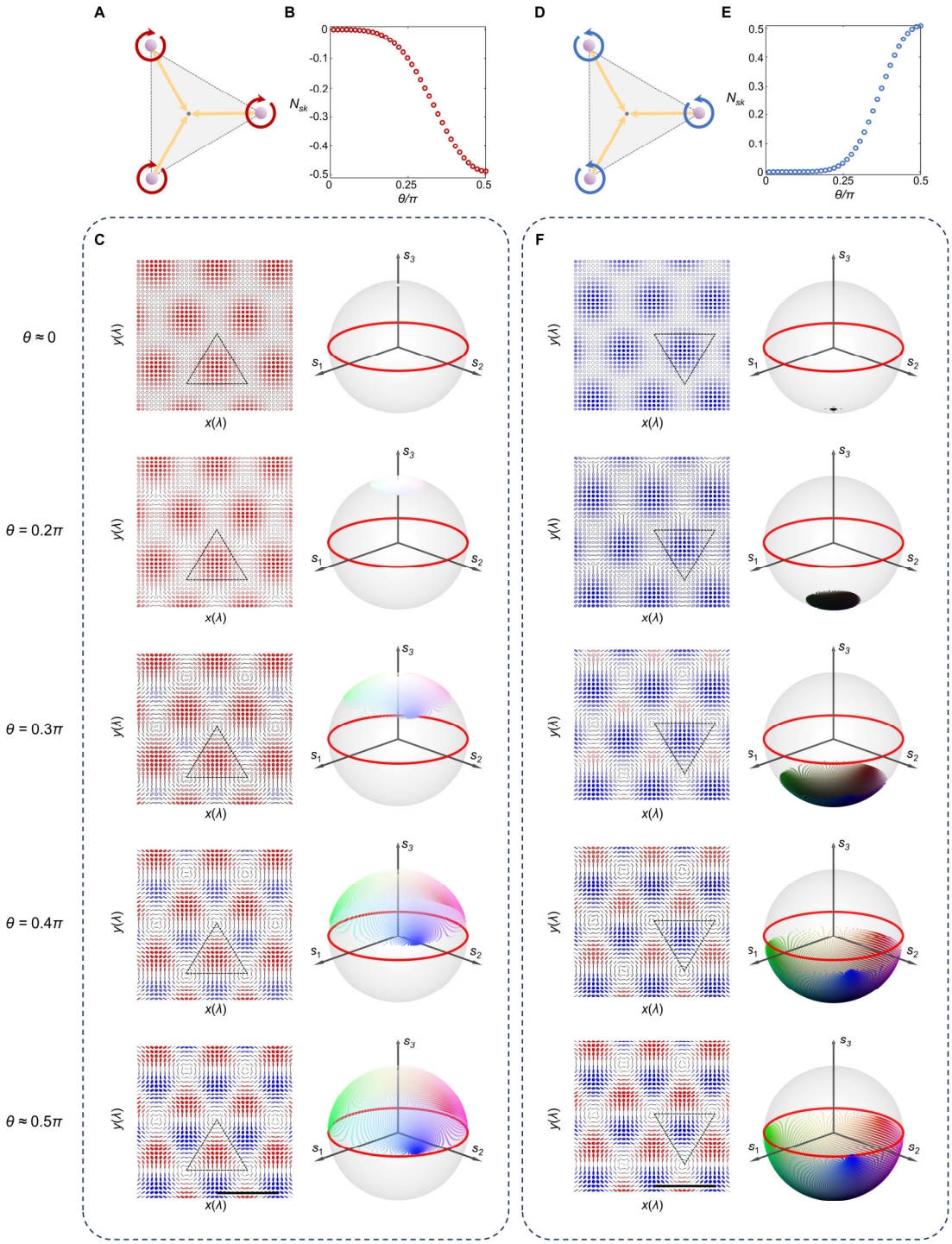
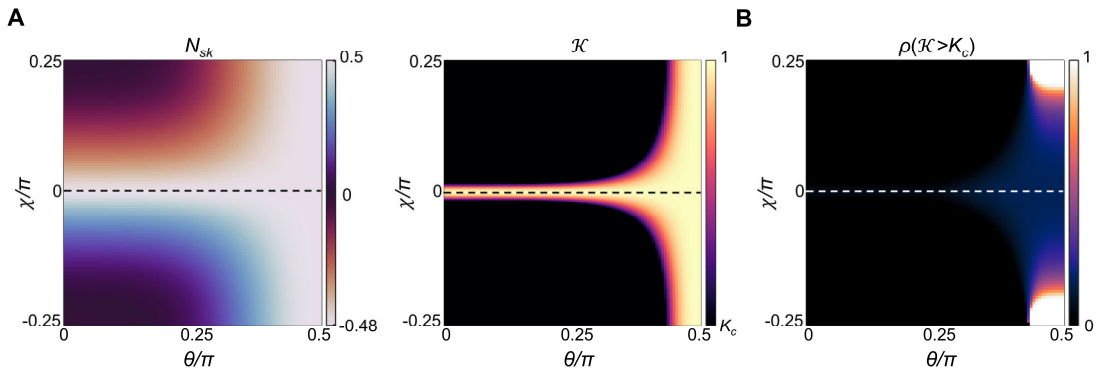


图 S10. 强……诱导的从平庸态到半斯格明子晶格的拓扑相变

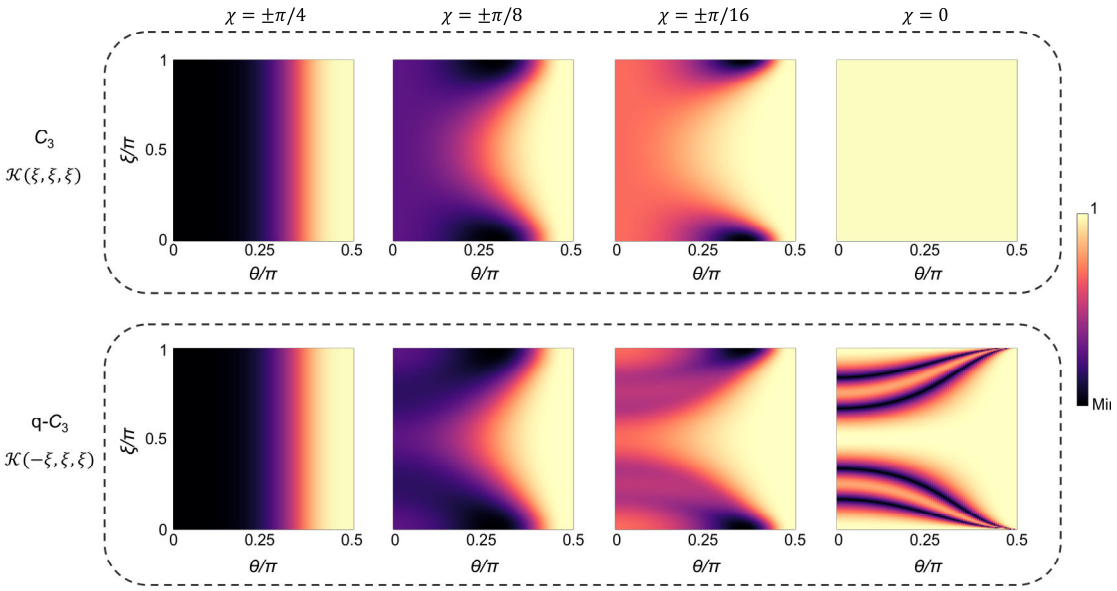
圆偏振偶极源作用下的 SOI。位于 *xy* 平面内的面内 （**A**）右旋圆偏振和（**D**）左旋圆偏振偶极子的示意图。计算得到的斯格明子数 N_{sk} 作为（**B**） = /4 和（**E**） = –/4 中 的函数。 （**C**）（**F**）典型的偏振椭圆分布，以及在相同三角形上的归一化斯托克斯矢量对应映射

将晶胞（黑色虚线边界）映射到单位球上。在晶格中，椭圆的填充颜色表示归一化自旋的取值。



Fi图 S11. 椭圆偏振偶极子产生的理想半子演化。（A)

在偏振立方体中，椭圆率和偏转角的函数关系下，具有 =/4 的C_3 构型对应的斯格明子数N_{sk} 及分布；以及（**B**）总态密度（ $>c$）。其中$_c = 0.99$。



Fi图 S12. 偶极椭圆率对准对称群的影响。 计算得到

(±、、；) 分别表示不同椭圆率 下 C_3 和 q-C_3 群的分布。

S6 节：一般自旋-轨道相互作用系统中普遍存在的准对称性

除了瑞利散射（电偶极子）之外，还存在各种非傍轴光学系统，例如紧聚焦光束（*11*、*12*）和米氏散射（*13*）等。在此，我们将光的一般自旋轨道相互作用中的准对称群的形式体系及其存在条件加以推广。

S6.1 强聚焦多光束。

如图 S13A 所示，入射准直光束的波矢经过高数值孔径（NA）透镜旋转，在聚焦区域形成锥形**k**分布。根据德拜-沃尔夫理论（*14*），这一折射过程伴随着局域偏振态的绝热旋转，这些偏振态附着于每个**k**并与之正交。类似地，聚焦场可分解为一系列三维旋转：R $_z$(–)R $_y$(–)R$_z$() 。具体而言，圆偏振基下的变换矩阵形式如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{k}) &= \sqrt{\cos\theta}\hat{V}^{\dagger}\hat{\mathcal{R}}_z(-\varphi)\hat{\mathcal{R}}_y(-\theta)\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi)\hat{V}\mathbf{E}_i \\ &= \sqrt{\cos\theta}\begin{pmatrix} A & -Be^{-2i\varphi} & \sqrt{2AB}e^{-i\varphi} \\ -Be^{2i\varphi} & A & \sqrt{2AB}e^{i\varphi} \\ -\sqrt{2AB}e^{i\varphi} & -\sqrt{2AB}e^{-i\varphi} & A-B \end{pmatrix}\mathbf{E}_i \end{aligned} \qquad \text{(S30)}$$

其中， ＝cos²(/2)， ＝ sin²(/2)，而 √cos 是渐晕因子。显然，方程(S30)具有与偶极算符类似的数学结构。

因此，我们可以通过高 NA 透镜对多光束进行聚焦并使其发生干涉，从而构建拓扑结构。正如图 S13A 和 B 所示，我们通过聚焦三束具有绕 z 轴三重旋转对称性的共线偏振光束，生成斯托克斯三角形磁子晶格，以此加以展示。

对于这一多光束系统，约化自旋轨道相互作用与镜像算符之间仍满足方程 (3) 中的对易关系，从而确保此前关于准对称性的结论依然成立。图 S13C 显示，自旋保持分量和自旋翻转分量 与 的演化行为不同于偶极辐射中的情况，但它们仍会在 → /2 时分别收敛到 = 。因此，偏振态密度仍会在 = /2 处达到峰值，这对应于最大的聚焦孔径，如图 S13D 所示。此外，如第 S5 节所述，通过高 NA 透镜对 C_3 圆偏振光束进行强聚焦，我们可以直接生成理想半子。

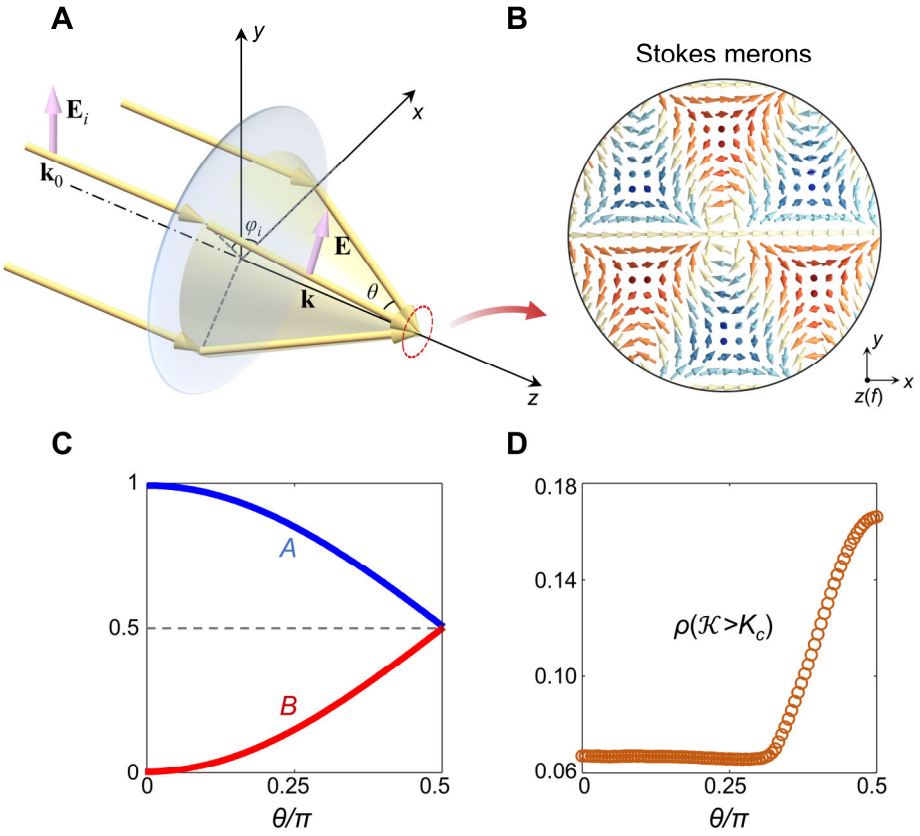


图 S13. 通过高 NA 透镜对紧聚焦的 C_3光束进行干涉形成的斯托克斯子午子晶格。 **(A)** 对三束近轴偏振波进行紧聚焦，可在焦平面上生成完美的斯托克斯子午子晶格（**B**）。（**C**）自旋轨道相互作用系数 和 ，以及（**D**）偏振态总密度 ($> c$) 随 的变化关系。此处 $_c = 0.99$。

S6.2 米氏散射的SOI算子。

米氏理论精确描述了任意半径和折射率的小型球形粒子的光学吸收与散射（*15*）。球面几何中麦克斯韦方程组的解可以表示为矢量球谐函数的叠加，这对应于电磁场的多极展开。设一束沿z轴传播的x偏振平面波入射到位于原点的球形粒子上，则散射电场和磁场可表示为以下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\mathrm{s}} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(ia_n\mathbf{N}_{e1n}^{(3)} - b_n\mathbf{M}_{o1n}^{(3)}\right) \\ \mathbf{H}_{\mathrm{s}} = \frac{k}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty} E_n\left(ib_n\mathbf{N}_{o1n}^{(3)} + a_n\mathbf{M}_{e1n}^{(3)}\right) \end{cases}$$

其中 $_n = ^n(2\ +1)/(\ +1),\quad \in \mathrm{Z}$。函数$_{e\ o1n}^{(3)}$，和$_{e\ o1n}^{(3)}$，是矢量球谐函数。系数 $_n$ 和$_n$ 表示电谐波模态和磁谐波模态的复振幅，这些系数由入射波长以及均匀粒子的尺寸和折射率决定。

由于我们只关注远场区域中的传播波（ $\gg 1$），此时散射场为横向场（ $_{\mathrm{s}}\cdot$ $_{\mathrm{s}} \simeq 0$），因此入射场与散射场振幅之间的关系为（*15*）：

$$\begin{pmatrix} E_{||\mathrm{s}} \\ E_{\perp\mathrm{s}} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr}\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{||0} \\ E_{\perp 0} \end{pmatrix} \tag{S31}$$

其中

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{n=1} \frac{2n+1}{n(n+1)}(a_n\pi_n + b_n\tau_n) \\ S_2 = \sum_{n=1} \frac{2n+1}{n(n+1)}(a_n\tau_n + b_n\pi_n) \end{cases} \tag{S32}$$

这里将角度相关函数定义为$_n = _n^1/\sin$、$_n = _n^1/$。（$_n^1$为连带勒让德函数）。方程（S31）衔接了场变换

全局坐标系与局部坐标系。我们进一步通过图 S14 所示的一系列纯几何旋转，将其推导为类似于方程（S3）的形式，即：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s &= \hat{V}^{\dagger}\hat{\mathcal{R}}_z(-\varphi)\hat{\mathcal{R}}_y(-\theta)\hat{\mathrm{M}}\hat{\mathcal{R}}_y(\theta)\hat{\mathcal{R}}_z(\varphi)\hat{V}\mathbf{E}_0 \\ &\propto \begin{pmatrix} S_2\cos\theta + S_1 & (S_2\cos\theta - S_1)e^{-2i\varphi} & -\sqrt{2}S_2\sin\theta e^{-i\varphi} \\ (S_2\cos\theta - S_1)e^{2i\varphi} & S_2\cos\theta + S_1 & -\sqrt{2}S_2\sin\theta e^{i\varphi} \\ -\sqrt{2}S_2\sin\theta e^{i\varphi} & -\sqrt{2}S_2\sin\theta e^{-i\varphi} & 2S_2\tan\theta\sin\theta \end{pmatrix}\mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad (S33)$$

此处，$\mathrm{M} = \mathrm{diag}(2/\cos, 1, 0)$ 在局部坐标系中充当加权投影算符，分别沿$\hat{}_\theta$和$\hat{}_\varphi$轴调制投影场 $\mathrm{p} = {}_0 - (_k \cdot {}_0)_k$（M 并非镜像算符 M）。对于尺寸远小于入射波长的粒子，考虑电偶极近似时，只有系数 $_1$ 非零。在这种情况下，M 化简为投影算符 $_z = \mathrm{diag}(1,1,0)$，方程(S33)也随之化为方程(S3)的形式。值得注意的是，M 的作用类似于几何相位超表面中使用的平面各向异性结构（*16*）。然而，M 的这一性质并非源自任何结构各向异性或非均匀性，而是由多极分量之间的耦合所致。

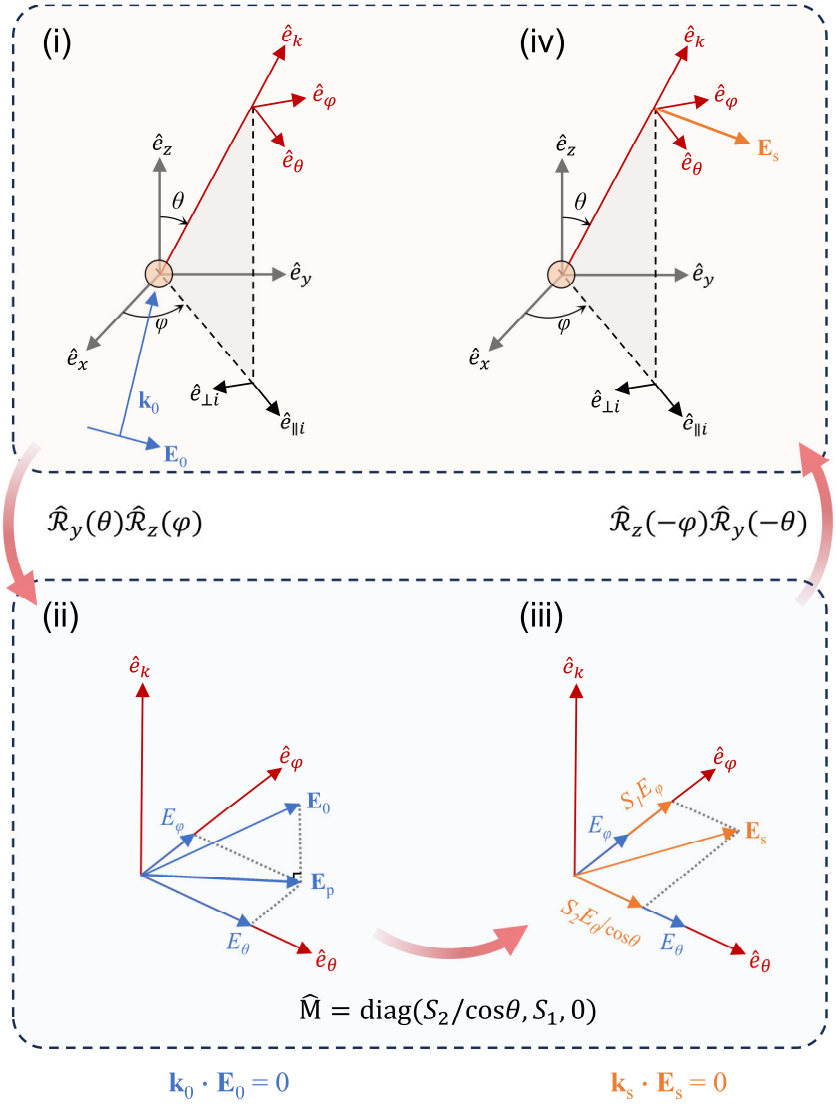


Fig. S14. 米氏散射中电场几何变换的示意图

散射。散射过程中的偏振变换包含以下几个步骤： (i)–(ii) 将全局笛卡尔坐标系 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 连续旋转至局部坐标系 $(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{k})$：$R_y()R_z()$。(ii)–(iii) 描述局部坐标系中的散射过程，即对投影后的入射场进行各向异性操作。(iii)–(iv) 逆向旋转 $R_z(-)R_y(-)$ 表示返回原全局坐标系。此处，$\hat{\theta}$、$\hat{\varphi}$、$\hat{k}$ 是与散射波的辐射动量相关联的正交归一基向量。入射场（蓝色箭头）和散射场（橙色箭头）均满足横向条件。

S6.3 一般准对称条件。

这里我们考虑与 S2节所述构型类似的C_3 米氏干涉系统，其中三束沿z轴传播的线偏振单色光束激发具有相同电磁响应的米氏粒子。根据方程(S33)，我们将约化自旋轨道相互作用算子的系数重新定义如下：

$$\begin{cases} A = S_1 + S_2\cos\theta \\ B = S_1 - S_2\cos\theta \end{cases} \tag{S34}$$

其中，和可以是复数，只要任意两个不同多极分量之间存在非零的或非相位差，因此()不再必然是厄米的。我们计算了理想C_3 晶格在三维参数空间（1, 2, 3 ）中的允许构型，其中 ∈(0, /2] 在若干典型多极矩及其组合下变化，结果如图 S15所示。对于磁偶极子（$_1 \neq 0$），三维立方体中仅存在C_3 群和反C_3 群对应的四条线，且对所有取值都保持稳定。与电偶极子不同，这里不会出现 q-C_3 群的增殖。对于电四极子（$_2 \neq 0$），偏振构型受的影响很大：其从近轴区域的四条线连续演变为 = 0.25处的一个庞大星形区域，对应于 q-C_3 群的出现；在掠入射下，最终还会产生三条额外的线，这些线不同于反C_3 群。对于一般的组合多极（例如，$_1 = 1, _2 = 1$），随着自旋轨道相互作用的变化，偏振态的分布及其演变会变得更加复杂。

接下来，我们讨论米氏散射中连续准对称群的存在条件。也就是说，至少存在一个 $\theta \in (0,\pi/2]$ ，以确保 $\mathcal{K}(-\xi,\xi,\xi)=1$ 对于任意 $\xi \in [0,\pi)$。这要求方程（S25）达到柯西–施瓦茨不等式的等号，从而得到：

$$\begin{cases} |A| = |B| \neq 0 \\ \phi_{BA} = \arg(B) - \arg(A) = m\pi, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \exists\, \theta \in (0, \pi/2] \qquad \text{(S35)}$$

方程（S35）表明，临界自旋轨道相互作用条件是准对称性出现的必要条件。如图 S16A-C 所示，满足 ‖ = ‖ ≠ 0 的 值恰好对应于 q-C_3 群的增殖。对于电偶极子， = ≠ 0在 =/2 处出现。对于磁偶极子，B 恒等于零（即不存在自旋翻转分量），这意味着准对称群不存在。对于电四极子，方程（S35）在 =/4 处实现。此外，对于一般的多极组合，q-C_3 群甚至可以在多个不同的 处出现。上述结果表明，准对称群具有普适性，并且总是对应于偏振区域的最大占据，如图 S16C 所示。通过控制米氏粒子的尺寸和折射率，我们可以灵活定制最优的 。

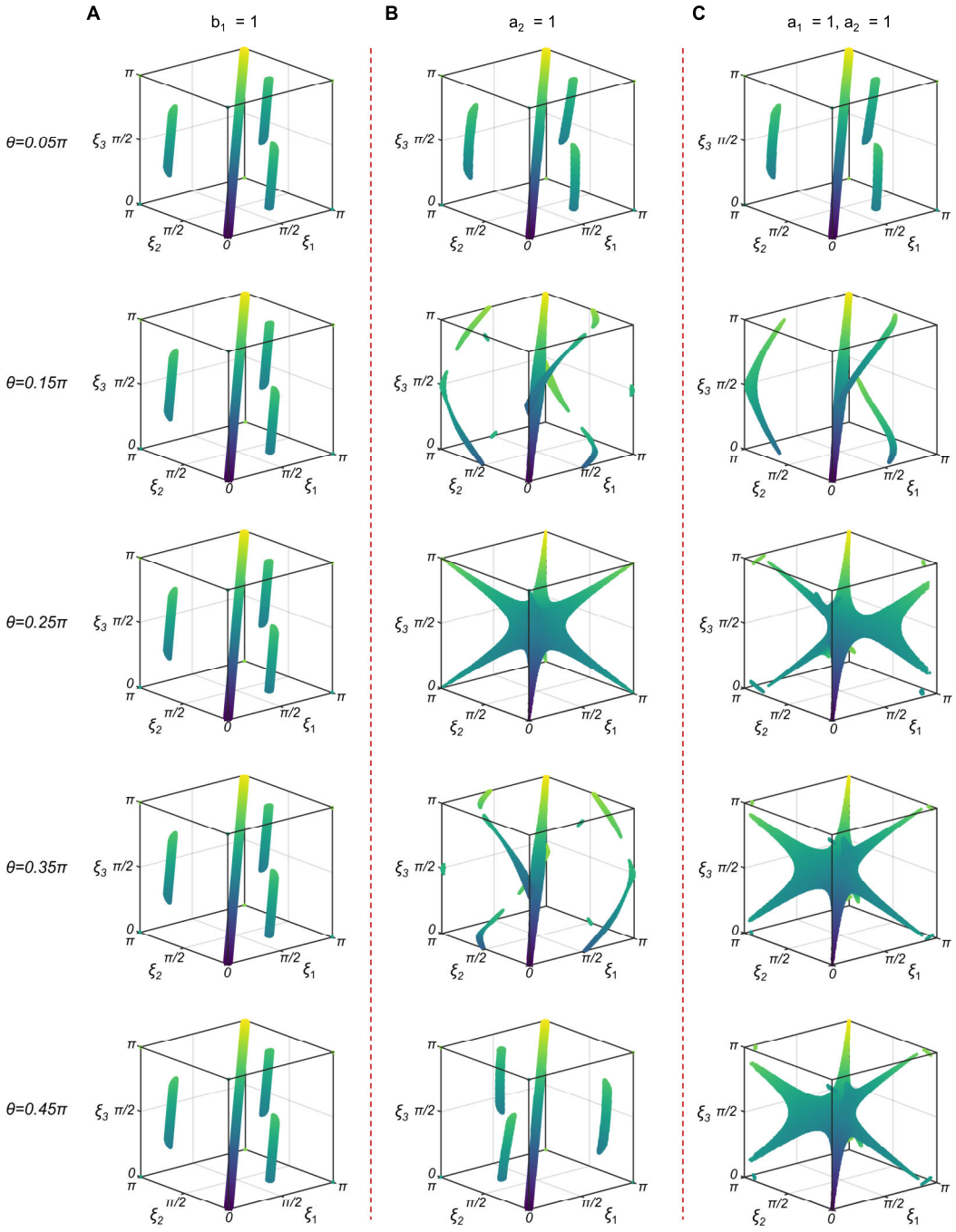


图 S15. 不同条件下偏振构型随 θ 变化的演化

多极矩的组合。 在不同米氏响应下，从顶部到顶部面板中形成完美C_3晶格的三维立方体中的偏振态：**(A)** 磁偶极子 ($_1 = 1$)、**(B)** 电四极子 ($_2 = 1$)，以及 **(C)** 电偶极子与四极子组合的组合 ($_1 = 1, _2 = 1$)。

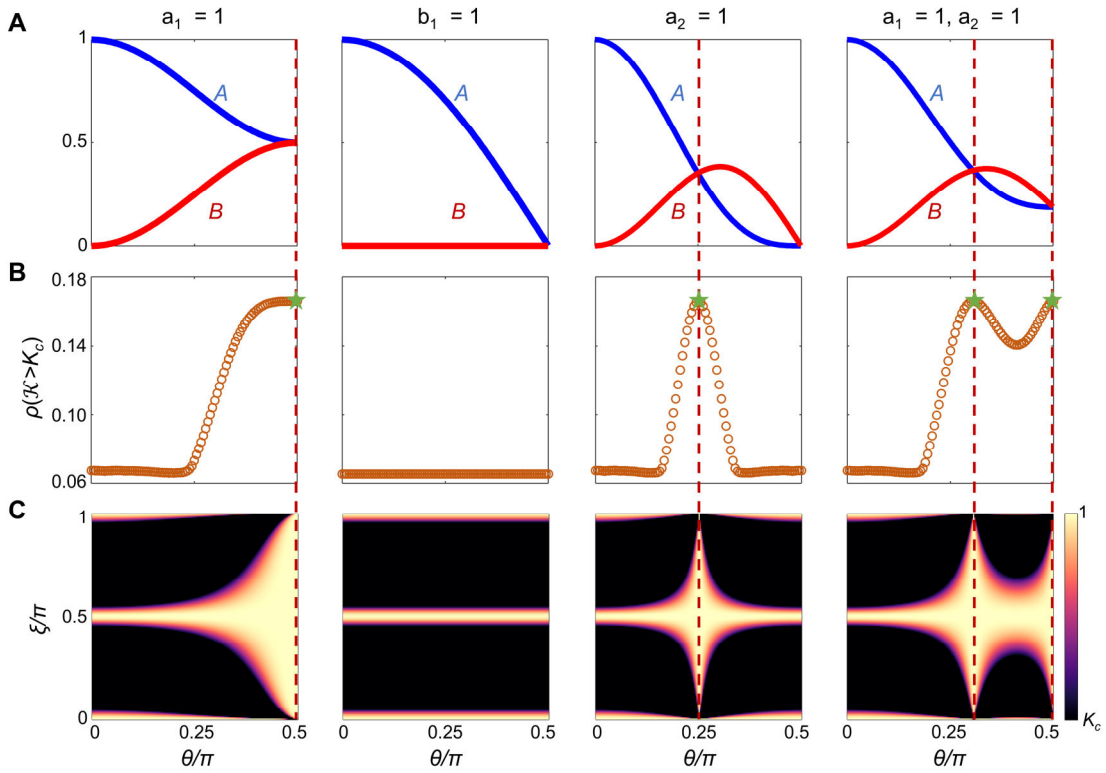
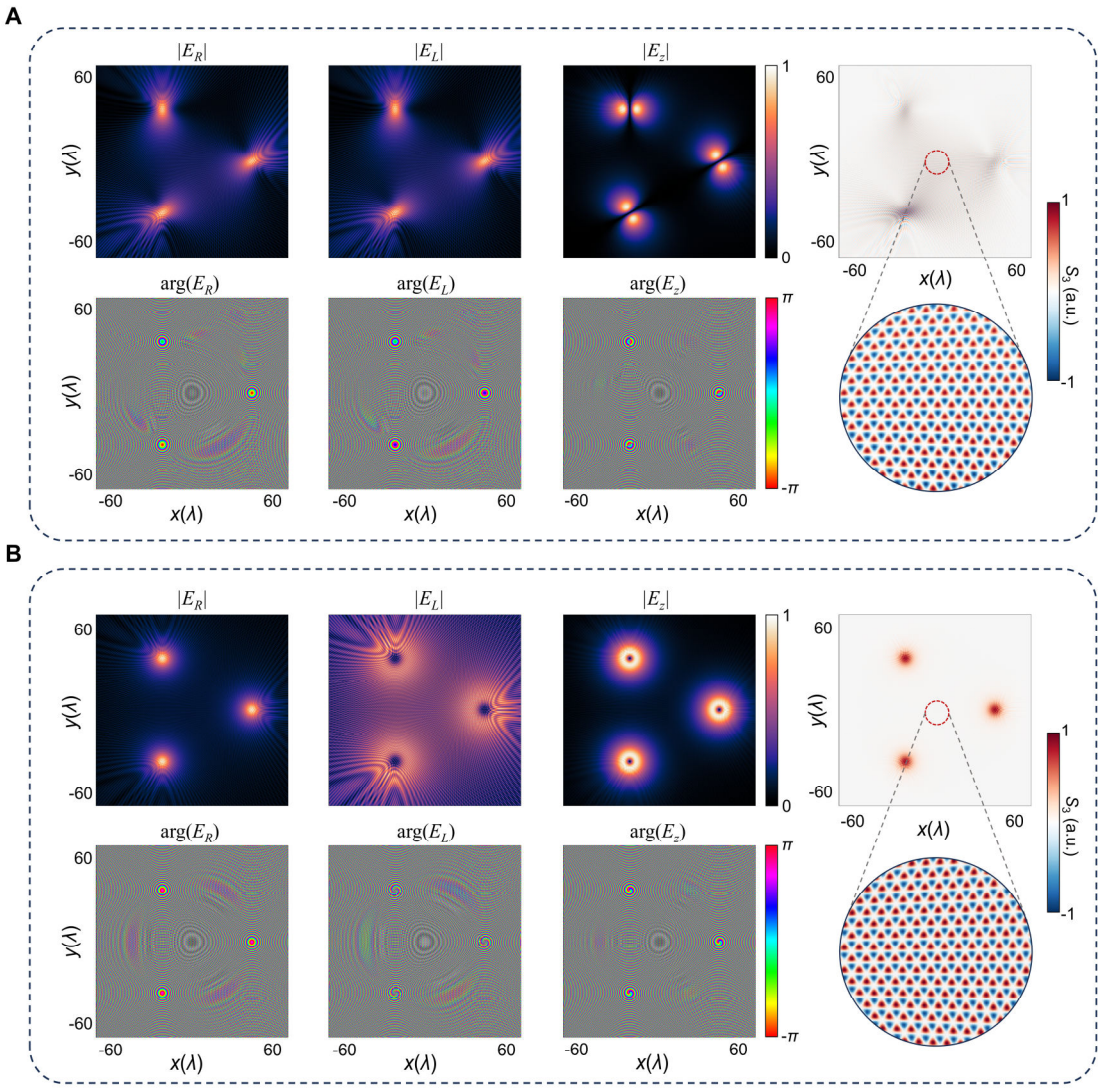


图 S16. 不同条件下准对称群存在的条件

米氏响应。 (A) 计算得到的自旋轨道相互作用系数A和B，**(B)** 偏振态密度 ($>_c$), **(C)** (–, ,) 作为不同米氏系数组合下 的函数。红色虚线标记 $\| = \| \neq 0$，绿色星号突出显示态密度峰值。$_c$ 设为 0.99。

第 S7 节：扩展观测区域上的偶极子干涉场

我们展示了大偏转角 = 0.45 时，扩展观测平面上的C_3 偶极干涉场分布和斯托克斯S_3，如图 S17 所示。在<style id='xy'>xy平面中心区域生成了高质量的C_3半斯格明子晶格（图 S17A 和 B 的插图），这是由于偶极子辐射动量关于z轴的三重旋转对称性近似得以保留。此外，对于圆偏振照明，在每个偶极子附近都能观察到明显的自旋到轨道角动量转换。



Fig。S17. 大尺度上干涉场和斯托克斯S_3 的分布观测区域。 圆偏振和纵向分量，

$|_R|$, $|_L|$, $|_z|$，arg($_R$)、arg($_L$)、arg ($_z$) 的相位分布，以及斯托克斯S_3；其中（**A**）为 q-C_3 偶极子构型， = /3；（**B**）为偏转角为 = 0.45 的三个右旋圆偏振偶极子。观测区域半径设为 40。

S8节：各种对称群概述

此处，我们总结了通过多偶极子干涉构建理想光的拓扑晶格时涌现的各种偏振对称群，如下图 S18 所示。C_3 群在面内偏振态 $_i$ 和动量 $_i$中均呈现绕z轴的三重旋转对称性。由于 $_i$ 与 $_i$ 相匹配，该群具有高度的全局对称性，因此在非傍轴传播过程中仍能保持稳定（图 S18，中间图）。反C_3 群由C_3构型的偏振序列发生奇置换后形成，且仅在近轴区域内保持稳定。由于缺乏全局对称性，该群本质上十分脆弱，在中等强度的自旋轨道相互作用作用下会完全消失（图 S18，左图）。q-C_3 群由对任意源子集施加部分镜像操作定义，在弱自旋轨道相互作用下呈现对称性破缺。然而，随着自旋轨道相互作用增强，沿 $_i$ 的面内场 ($_i$)会逐渐减弱（右图中的箭头已标出）。在掠入射极限下，任意偏振矢量都与相应的 $_i$ 完全垂直，从而促进 q-C_3群的增多。

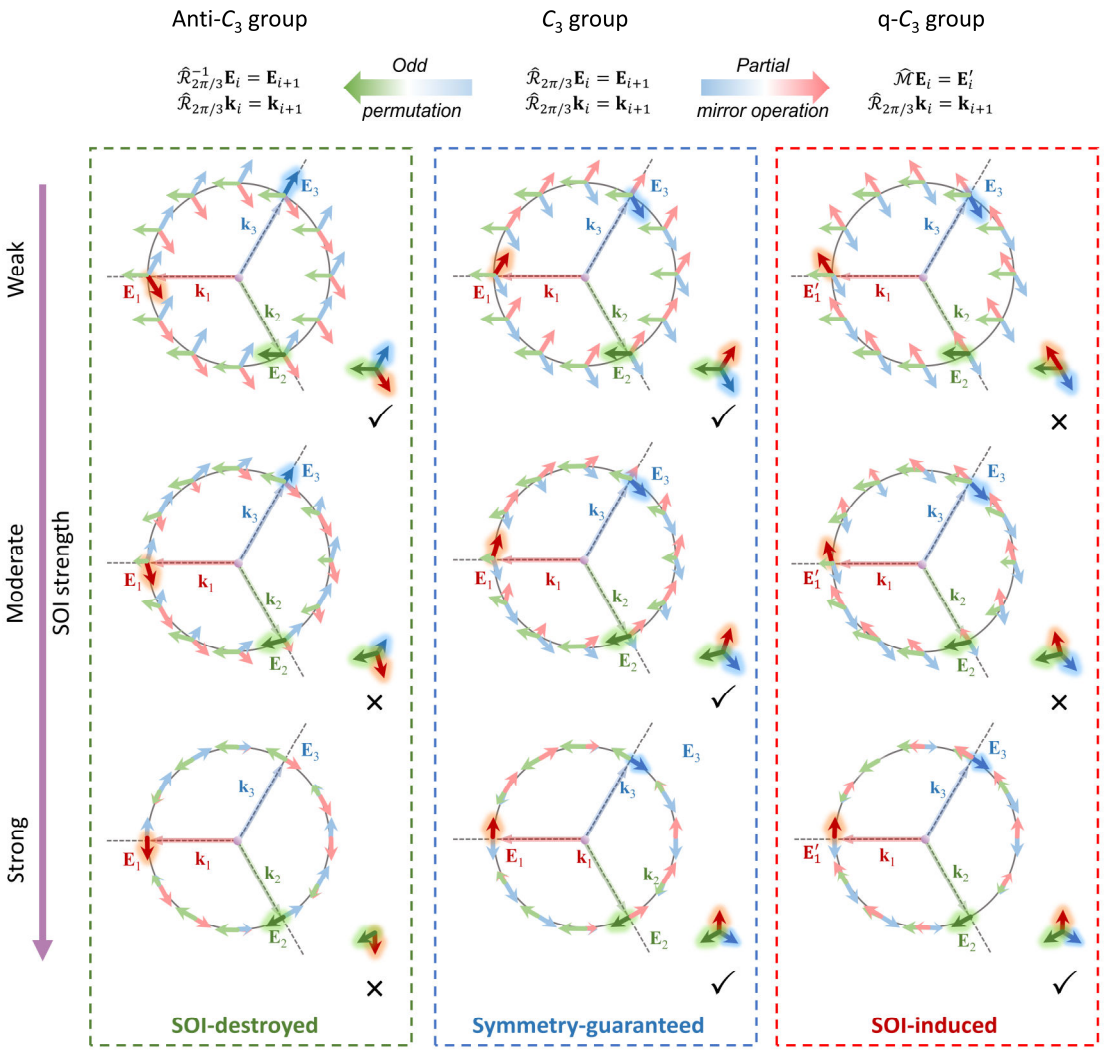


图 S18. 各种偏振对称群的性质随……变化

自旋轨道相互作用。 从左到右，所定义的反C_3, C_3 群和 q-C_3 群，分别源于偶极子的面内偏振矢量 $_i$ 及其对应辐射动量 $_i$ 的不同对称特征（上排图）。在不同自旋轨道相互作用下，源的不同对称群所对应的传播**k**锥及其附带偏振矢量（不同颜色的箭头）的演化（下排图）。

参考文献

1. K. Y. Bliokh、E. A. Ostrovskaya、M. A. Alonso、O. G. Rodríguez-Herrera、D. Lara、C. Dainty，《聚焦、散射和成像系统中的自旋到轨道角动量转换》。*Optics Express* **19**，26132（2011）。2. D. Haefner、S. Sukhov、A. Dogariu，《球面几何中的光的霍尔效应》。*Physical Review Letters* **102**，123903（2009）。3. O. G. Rodríguez-Herrera、D. Lara、K. Y. Bliokh、E. A. Ostrovskaya、C. Dainty，《通过光的自旋轨道相互作用进行光学纳米探测》。*Physical Review Letters* **104**，253601（2010）。4. J. D. Jackson、R. F. Fox，《经典电动力学》，第3版。*Am. J. Phys.* **67**，841–842（1999）。5. M. Neugebauer、P. Banzer、S. Nechayev，《线性偶极子发射圆偏振光》。《科学进展》 **5**，eaav7588（2019）。6. X. Lei，《光子自旋晶格：斯格明子和半子拓扑结构的对称性约束》。*Physical Review Letters* **127**（2021）。7. Y. Shen、E. C. Martínez、C. Rosales-Guzmán，《生成具有可调拓扑纹理的光学斯格明子》。《*ACS*光子学》 **9**，296–303（2022）。8. Y. Shen，《拓扑双半斯格明子光束》。光学快报，*OL* **46**，3737–3740（2021）。9. A. McWilliam、C. M. Cisowski、Z. Ye、F. C. Speirits、J. B. Götte、S. M. Barnett、S. Franke-Arnold，《表征光学斯格明子和多斯格明子的拓扑方法》。《激光与光子学评论》 **17**，2300155（2023）。10. M. Lin、X. Gou、Z. Xie、A. Yang、L. Du、X. Yuan，《自旋角动量的光子准晶体》。《科学进展》 **11**，eadv3938（2025）。11. Y. Zhao、J. S. Edgar、G. D. M. Jeffries、D. McGloin、D. T. Chiu，《强聚焦光束中的自旋到轨道角动量转换》。*Physical Review Letters* **99**，073901（2007）。12. Y. Dong、Y. Wang、D. He、T. Wang、J. Zeng、J. Wang，《利用光诱导力显微镜在纳米尺度近场观测自旋轨道相互作用》。《科学进展》 **10**，eadp8460（2024）。13. V. Garbin、G. Volpe、E. Ferrari、M. Versluis、D. Cojoc、D. Petrov，《米氏散射可区分光学涡旋的拓扑荷：向古斯塔夫·米致敬》。《新物理学杂志》 **11**，013046（2009）。14. B. Richards、E. Wolf，《光学系统中的电磁衍射，II：消像差系统中的像场结构》。*Proc. A* **253**，358–379（1959）。

15. C. F. Bohren、D. R. Huffman，小粒子对光的吸收与散射（Wiley-VCH，魏因海姆，2004）。16. B. Wang、F. Dong、Q.-T. Li、D. Yang、C. Sun、J. Chen、Z. Song、L. Xu、W. Chu、Y.-F. Xiao、Q. Gong、Y. Li，《用于多波长消色差和高色散全息图的可见频率介电超表面》。《纳米快报》**16**，5235–5240（2016）。