用于加速水下航行器垂直平面斜航运动计算流体力学计算的数据驱动流场初始化框架

Tianli Hu[a,c,d]，Chengsheng Wu[a,c,d]，Jun Ding[a,c]，XingWang[a,c,d]，YuYang[b,*]和Jianchun Wang[a,c,d]

[a]中国船舶科学研究中心，无锡，214082，中国[b]上海交通大学海洋与土木工程学院海洋工程国家重点实验室海洋数值实验中心，上海，200240，中国[c]太湖实验室深海技术科学实验室，无锡，214082，中国[d]水动力学国家重点实验室，无锡，214082，中国

arXiv:2601.02693v1 [physics.flu-dyn] 6 Jan 2026

文章信息

关键词：流场预测 机器学习 计算流体力学加速 水下航行器

摘要

准确预测水下航行器进行垂直平面斜航运动时周围的流场，对水动力分析至关重要，但通常需要耗费大量计算资源进行计算流体力学模拟。本研究提出一种数据驱动流场初始化（DDFI）框架，通过集成深度神经网络（DNN）预测全域流场，从而加速计算流体力学模拟。以不同入口速度和攻角下的Suboff艇体为例，训练深度神经网络，使其基于网格几何、运行条件和混合向量预测速度、压力和湍流量。该深度神经网络能够提供较为准确的预测，相对误差约为3.3%。为提高数值精度并保持物理一致性，将神经网络预测的流场用作计算流体力学求解器的初始解，在残差阈值为5×10^{-6}和5×10^{-8}时，分别实现最高3.5倍和2.0倍的加速。该方法通过传统计算流体力学求解器对神经网络输出进行精细修正，在保持物理一致性的同时兼顾计算效率与精度。值得注意的是，缩小训练集规模不会对加速性能产生实质性影响。此外，该方法展现出跨网格泛化能力。总体而言，这种混合方法为复杂水下航行器周围的高保真、高效全域流场预测提供了一条新路径。

1. 引言

水下航行器是海洋探索的重要装备，在民用和军事领域均有重要应用（Luo, Guo, Dai and Rao, 2021; Ardeshiri and Mousavizadegan, 2022）。准确、高效地预测潜艇几何体周围的流场，对于理解其水动力行为，以及优化不同流动条件下潜艇模型的阻力系数等参数至关重要（Liu, Yu, Zhang, Liu, Feng and Zhang, 2021; Li, Yang, Zhai, Wang and lin He, 2021a）。水动力性能，包括阻力、操纵稳定性和声学特征，根本上取决于速度分布、压力场和湍流特性等流动特征（Panda, Mitra and Warrior, 2021）。Suboff通用潜艇艇体因其几何形状有详尽记录且拥有丰富的实验数据库，已被广泛用作验证水下应用中计算流体力学（CFD）方法的标准基准构型（Posa a nd Balaras, 2018; Sarraf, Abbaspour, Dolatshahi, Sarraf and Sani, 2022）。理解此类构型周围的稳态流动物理，是进行性能评估和运行分析的基础（Meng, Yang, Su and Gu, 2019; Qu, Wu, Zhao, Huang, Fu and Wang, 2021; Zhou, Li, Yang, Wang and Xu, 2022）。

获取详细流场信息的传统方法高度依赖高保真计算流体力学模拟（Sezen、Dogrul、Delen 和 Bal，2018；Qiu、Huang、Pan、Shi 和 Dong，2020；Rocca、Cianferra、Broglia 和 Arme- nio，2022）。尽管现代计算流体力学求解器（如雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）求解器）能够提供较高的精度，但其计算成本也十分高昂（Chu、Guo、Wu、Zhou、Zhang、Cai 和 Yang，2024）。例如，在特定运行条件下，对 Suboff 这类复杂几何体进行一次模拟，即使只求解稳态问题，也可能需要在高性能集群上耗费数小时至数天（Chu、Liu、Dong、Chong、Qian、Kai 和 Yang，2023）。这种高昂的计算成本主要源于：需要进行精细的空间离散，以充分解析边界层、尾流区和涡结构；同时还需迭代求解耦合的非线性控制方程，直至收敛（Blazek，2015）。

对水下航行器周围流场开展高精度、大规模和多尺度三维数值模拟，仍然是一项计算密集型任务（Lu、Wang 和 Qin，2020）。近年来，机器学习（ML）（Liong 和 Chua，2022；Li、Cao 和 Borthwick，2021b；Yang 和 Liao，2024；Yang、Peng、Liao 和 Li，2025；Jiang、Li、Tao、Chen、Zeng、Cai、Zhu 和 Li，2024）已成为一种有效的复杂系统建模方法，能够在不了解底层物理规律的情况下从数据中发现模式。在各种机器学习技术中，深度神经网络（DNN）（Jordan 和 Mitchell，

*通讯作者yuyangyy@sjtu.edu.cn
Y. Yang）ORCID：

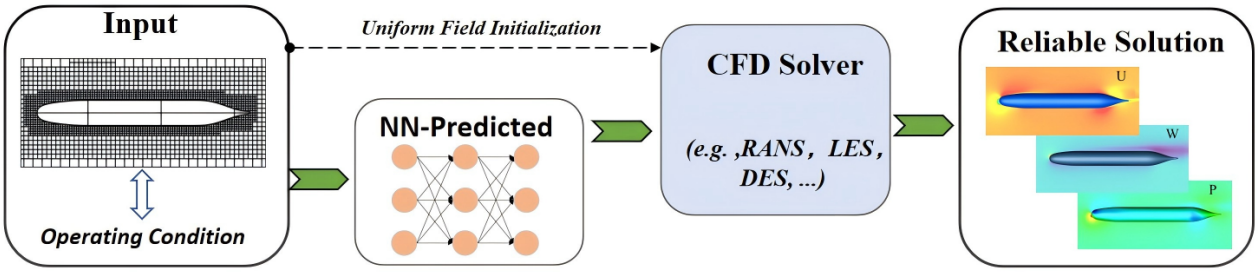


图 1： DDFI 计算工作流程示意图。

2015；Yang、Peng 和 Liao，2023b）因其逼近高度非线性关系的能力而受到广泛关注。深度神经网络是受生物学启发的计算模型，由相互连接的人工神经元层组成。在训练过程中，通过反向传播对神经网络的权重进行迭代优化，以最小化预测误差。得益于其通用逼近能力，深度神经网络在需要高维函数逼近的任务中表现出良好性能，因此特别适用于复杂动力学建模（Samek、Montavon、Lapuschkin、Anders 和 Müller，2021；Yang、Peng 和 Liao，2023a）。通过将深度学习模型实现为代理模型，可以有效降低传统流体动力学模拟所需的计算成本（Xie、Zhao、Bian、Xia、Ding、Wang 和 Liu，2024）。例如，深度神经网络已成功用于预测船舶阻力和尾流场（Kim 和 Moon，2006；Grabowska 和 Szczuko，2015）。此外，基于深度神经网络的降阶模型已被用于快速预测稳态速度场（Peng、Aubry、Zhu、Chen 和 Wu，2021）。需要注意的是，在利用机器学习进行流场预测的研究中，现有大多数工作主要聚焦于尾流场预测或近壁面预采样流场预测，而本文将重点放在完整流场的预测上，即整个计算域。

需要指出的是，尽管机器学习模型可以作为高效的代理模型，快速提供流场预测，但这通常会以解的精度和物理一致性为代价。对于要求高保真结果的科学与工程应用，传统CFD求解器仍应在计算工作流程中发挥核心作用。目前，降低误用神经网络预测的风险并确保结果的可靠性至关重要（Zhou、Han、Zafar、Wolf、Schrock、Roy和Xiao，2025）。对于需要高精度的任务，可以采用混合策略，即利用传统CFD求解器进一步细化或校正基于神经网络的预测，从而在计算效率和数值精度之间实现平衡。Zhou等人（2025）提出了一种超保真方法，利用神经网络将低保真解映射为高保真初始猜测，从而加速诸如二维层流绕椭圆柱的流动以及翼型或机翼上的湍流。然而，构建与CFD求解器集成的基于机器学习的算子，以预测类似SUBOFF潜艇这类复杂三维物体周围完整的高分辨率流场，仍然是一项重大挑战。此外，与使用低保真度流场作为神经网络输入相比（Zhou等人，2025），本研究尝试使用网格拓扑信息和运行参数作为输入，使该方案能够直接集成到传统CFD工作流中。

本研究提出了一种数据驱动流场初始化（DDFI）框架，利用计算流体力学求解器加速获取全域流场。以 Suboff 模型的稳态流动问题为例，我们构建了一个深度神经网络模型，用于根据给定的网格几何、运行工况和混合向量，预测流场参数，包括速度、压力和湍流量。该深度神经网络能够提供精度较为理想的初步预测。为在确保符合控制物理方程的同时提高精度，我们将神经网络预测的流场用作计算流体力学求解器的初始解，从而显著加快数值模拟的收敛速度。此外，我们还研究了训练数据集规模对深度神经网络预测性能和计算流体力学求解器收敛效率的影响。进一步而言，所提出的神经网络加速的 CFD 框架适用于更高分辨率的网格。该策略为加速复杂水下航行器结构周围的流场预测提供了新的途径。

2. 方法

对于稳态问题，任何物理量都可以用以下通用输运方程描述，其表达式为：

$$\rho\nabla\cdot(\mathbf{V})\phi-\nabla\cdot(\zeta\nabla\phi)+Q=0, \tag{1}$$

其中，ρ为流体密度，$\mathbf{V}=(U,V,W)$为速度矢量，∇ 为广义扩散系数，ϕ为流场中的广义物理量，Q为广义源项。对于动量方程，ϕ 由 $\mathbf{V}$替换，Q 由 $\nabla p+Q$替换。对于特定运行工况，满足方程（1）左端（LHS）为零的物理量 ϕ和速度矢量 $\mathbf{V}$ 是未知的。

表1深度神经网络模型的输入特征 **F** 分类、描述和定义。

类别	特征	描述	定义
Mesh 几何	$\hat{x}$	船体相对 x-坐标	$\hat{x} = x - x_0$
	$\hat{y}$	船体相对 y-坐标	$\hat{y} = y - y_0$
	$\hat{z}$	船体相对 z-坐标	$\hat{z} = z - z_0$
	$\hat{\lambda}$	最小壁面距离	$\hat{\lambda} = \lambda/\lambda_{max}$
	$\hat{\gamma}$	单元体积	$\hat{\gamma}=\gamma/\gamma_{\ max}$
	$\hat{\kappa}$	船体距离	$\hat{\kappa} = \kappa/\kappa_{max}$
	η	Flag	单元：0，面：1
运行条件	$\hat{u}$	入口总速度	$\hat{u} = \lvert\mathbf{V}\rvert/\lvert\mathbf{V}_{max}\rvert$
	θ_{rad}	入口速度角	$\theta_{\text{rad}} = \alpha\frac{\pi}{180^\circ}$
	$\mathbf{u}_{inf}$	单位入口速度	$(\cos\theta, 0, \sin\theta)$
混合向量	$\boldsymbol{\omega}_w$	壁面混合向量	$\boldsymbol{\omega}_w = \mathbf{n}_w \times \mathbf{u}_{inf}$
	$\boldsymbol{\omega}_h$	船体混合向量	$\boldsymbol{\omega}_h = \mathbf{n}_h \times \mathbf{u}_{inf}$

经典方法采用均匀场作为初始条件，并通过迭代使左端趋近于零，但这一过程通常非常耗时，尤其是在均匀场与实际流场相差较大时。一个自然的思路是提供足够准确的初始条件，以减少迭代次数，从而加快求解过程。然而，获得如此准确的初始条件往往极具挑战性。幸运的是，数据驱动机器学习技术的发展为实现这一设想开辟了一条可行的途径。

基于此，本研究提出了DDFI策略，其核心是在流场初始化过程中通过深度神经网络输出足够准确的初始条件，从而提高计算流体力学求解器的迭代收敛速度，如图所示。1。值得注意的是，本研究中神经网络的输入是网格拓扑信息和运行参数。与使用低保真度流场作为输入（Zhou等人，2025）相比，所提出的方案与传统CFD工作流的结合更加紧密，工程实用性更强，但也面临更大的挑战。为此，我们对神经网络的输入特征进行了精心设计，以确保预测结果的可靠性和工程适用性。

2.1. 数据预处理

总体而言，本研究提出的深度神经网络的输入特征 **F** 可分为三部分，包括网格几何与拓扑信息、运行条件信息，以及网格与运行条件的混合信息。为便于说明，以下以本研究考察的Suboff模型的上升/下降运动为例（详见第3节）。对于网格中的第i个网格单元质心，其输入特征可表示为：

$$\mathbf{F}^{(i)} = \underbrace{\left[\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z},\ \hat{\lambda},\ \hat{\gamma},\ \hat{\kappa},\ \eta\right.}_{G^{(i)}},\ \underbrace{\hat{u},\ \theta_{\text{rad}},\ \mathbf{u}_{\text{inf}}}_{O^{(i)}},\ \underbrace{\left.\boldsymbol{\omega}_w,\ \boldsymbol{\omega}_h\right]^{(i)}}_{H^{(i)}},\quad i \in \Omega \tag{2}$$

其中，$G^{(i)}$、$O^{(i)}$ 和 $H^{(i)}$ 分别对应上述三类。具体而言，$\hat{x}$、$\hat{y}$和 $\hat{z}$是以Suboff艇艏为原点的相对坐标（x_0，y_0，z_0）、$\hat{\lambda}$ 和 $\hat{\gamma}$ 分别表示归一化最小壁面距离和单元体积，$\hat{\kappa}$ 表示距Suboff艇艏的归一化距离，η 表示标志符号，$\hat{u}$ 和 θ_{rad}分别表示归一化入口速度标量 $|\mathbf{V}|$和以弧度表示的入口角 α，$\mathbf{u}_{\text{inf}}$ 表示单位入口速度在各坐标方向上的投影向量。

此外，为了更准确地刻画运行工况与网格之间的耦合交互作用，本文引入了两个混合特征，分别记为 $\boldsymbol{\omega}_w$ 和 $\boldsymbol{\omega}_h$。具体而言，$\boldsymbol{\omega}_w$ 表示最近壁面的面法向量与 $\mathbf{u}_{\text{inf}}$的叉积，用于表征近壁区域的流场特征。$\boldsymbol{\omega}_h$ 表示从网格单元质心指向 Suboff 船艏的向量与 $\mathbf{u}_{\text{inf}}$的叉积，用于描述相应网格单元在全局流场中的空间方向。详细的特征定义见表1。

此外，$i \in \Omega$ 表示所有输入网格组件的集合，包括网格 Ω_c的单元质心和 SUBOFF 壁面上的面质心 Ω_f，即：

$$\Omega = \Omega_c \cup \Omega_f. \tag{3}$$

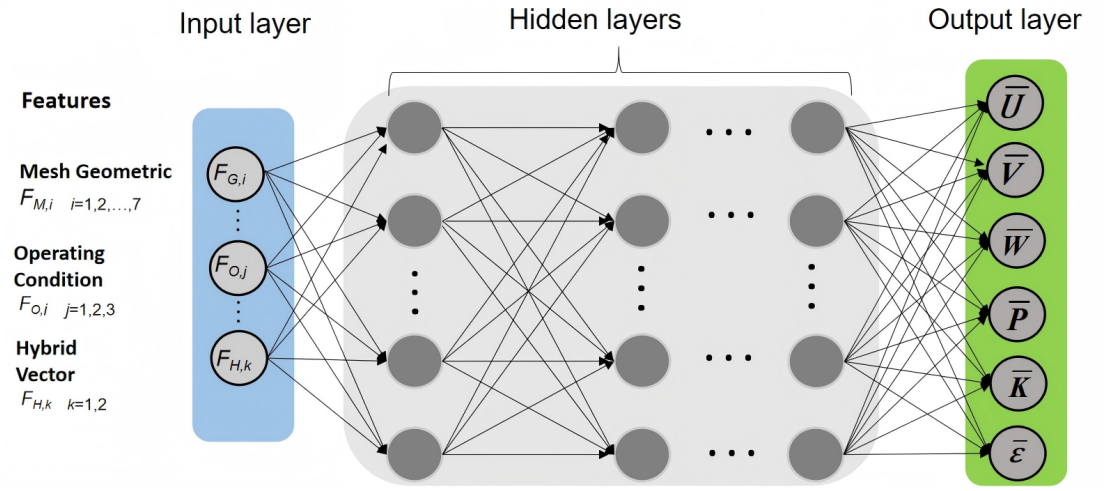


图 2：深度神经网络模型架构示意图。

表 2深度神经网络模型的架构和初始化方法

	深度神经网络模型
输入神经元数量	17
隐藏层数量	5
输出神经元数量	6
架构	(17,80,80,80,80,80,6)
激活函数	带泄露修正线性单元；线性函数（最后一层）
权重初始化	Xavier均匀初始化 增益=0.7（输入&隐藏层） 增益=默认（输出层）

2.2. 神经网络架构构建

对于典型的深度前馈神经网络（Jordan 和 Mitchell，2015），其第 p层的计算可写为：

$$a^{[p]} = g^{[p]}(z^{[p]}), \tag{4}$$

其中，$g^{[p]}$ 表示激活函数，$z^{[p]}$ 表示仿射变换，其表达式为：

$$z^{[p]} = W^{[p]}a^{[p-1]} + b^{[p]}, \tag{5}$$

其中，$W^{[p]} \in \mathbb{R}^{m^{[p]}\times m^{[p-1]}}$ 表示权重矩阵，$b^{[p]}$表示偏置向量，$m^{[p]}$ 表示第 p层中的神经元数量。

通用逼近定理（Hornik、Stinchcombe 和 White，1989；Cybenko，1989）已证实，只要配置足够数量的神经元，配备非线性激活函数和隐藏层的前馈神经网络就有潜力成为通用流场逼近器。基于这一结论，本文建立了图2 所示的深度神经网络架构。深度神经网络的详细架构和初始化策略见表。2。请注意

表3深度神经网络模型输出数据的无量纲归一化

符号	描述	定义
$\tilde{U}$	x-速度	$\tilde{U} = U/\|\mathbf{V}\|$
$\tilde{V}$	y-速度	$\tilde{V} = V/\|\mathbf{V}\|$
$\tilde{W}$	z-速度	$\tilde{W} = W/\|\mathbf{V}\|$
$\tilde{P}$	压力	$\tilde{P} = P/\rho\|\mathbf{V}\|$
$\tilde{K}$	湍动能	$\tilde{K} = K/\|\mathbf{V}\|^2$
$\tilde{\epsilon}$	耗散率	$\tilde{\epsilon} = \epsilon L/\|\mathbf{V}\|^3$

输入特征由 9 个标量和 3 个向量组成，并且忽略了 $\boldsymbol{u}_{inf}$ 中恒为零的项，因此总计为 17 个特征（即 9+2+3+3=17）。数值结果表明，采用本文设计的输入特征后，使用上述轻量级深度神经网络可获得理想的预测精度。

此外，对于计算流体力学求解器给出的广义物理量 ϕ，需要进行两步处理，以得到深度神经网络的输出值 $\bar{\phi}$：

1). 归一化 ϕ 为无量纲量 $\tilde{\phi}$，使用入口速度 $\mathbf{V}$、密度 ρ 和特征长度 L，如表3所示。

2). 将 $\tilde{\phi}$ 转换为 $\bar{\phi}$：使用以下公式将其标准化到 0 到 1 的范围：

$$\bar{\phi}^{(i)} = (\tilde{\phi}^{(i)} - \tilde{\phi}^{(i)}_{min})/(\tilde{\phi}^{(i)}_{max} - \tilde{\phi}^{(i)}_{min}). \qquad i \in \Omega \tag{6}$$

损失函数由单元损失 l_c 和面损失 l_f组成，表示如下：

$$l_c = \frac{1}{|\Omega_c|}\Sigma_{\Omega_c}(\bar{\phi}_{pred} - \bar{\phi}_{true})^2, \tag{7}$$

$$l_w = \frac{1}{|\Omega_f|}\Sigma_{\Omega_f}(\bar{\phi}_{pred} - \bar{\phi}_{true})^2. \tag{8}$$

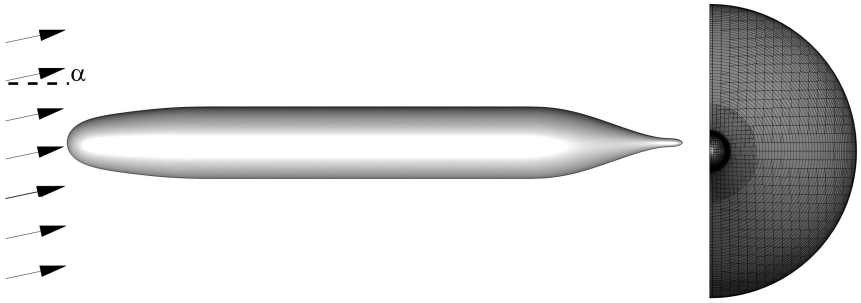


图 3： Suboff模型艇体、来流攻角和壁面网格分布示意图。

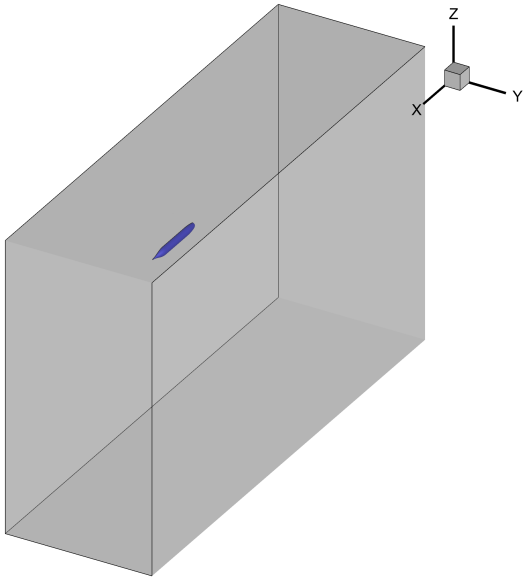


图 4： Suboff模型计算域示意图。

其中，ϕ_{pred} 表示神经网络（NN）预测结果，ϕ_{true} 表示计算流体力学（CFD）结果。则总误差可表示为：

$$Loss = c_1 l_c + c_2 l_w, \tag{9}$$

在不失一般性的情况下，我们设定 $c_1 = c_2 = 1$。

3. 数值结果

为验证本文提出的DDFI策略在计算流体力学计算中的加速性能，我们研究了裸SUBOFF艇体在不同入口速度和攻角下的垂直面斜向（上升/下潜）运动。与直线航行相比，这种垂直机动运动的模拟更具挑战性，因为它涉及更复杂的非线性现象。

图 3展示了本研究采用的无附加帆和舵的 Suboff 裸艇体模型，并说明了裸 Suboff 艇体壁面上的网格分布。该模型总长为 4.356 m，平行中体段长为 2.229 m，最大直径为 0.508 m（Groves、Huang 和 Chang，1989）。图 4 进一步展示了其计算域的构型。

艇体运动局限于垂直平面内，这意味着对于入口速度 $\mathbf{V}^*$，其 y 分量始终为零，即 $V^* \equiv 0$，而其 x 和 z 分量 U^* 和 W^* 则随攻角 α变化。如图 3 和图 4所示，α 定义为来流速度矢量与 x 轴正方向之间的夹角；当 α 与 W^* 轴正方向一致时，z取正值。

计算域的边界条件如图 5所示。对于该六面体计算域，其中三个面设为速度入口，静态速度为 $\mathbf{V} = \mathbf{V}^*$，另外两个面设为压力出口，静压为 $P = 0$。此外，还设置了一个对称面，其速度法向分量和压力法向梯度均为零。此外，SUBOFF艇体表面施加无滑移边界条件。

在配置数据集运行条件时，入口速度 $|\mathbf{V}^*|$和攻角 α的大小分别从集合 $\{2.0, 2.85, 4.25, 5.0\}$m/s 和

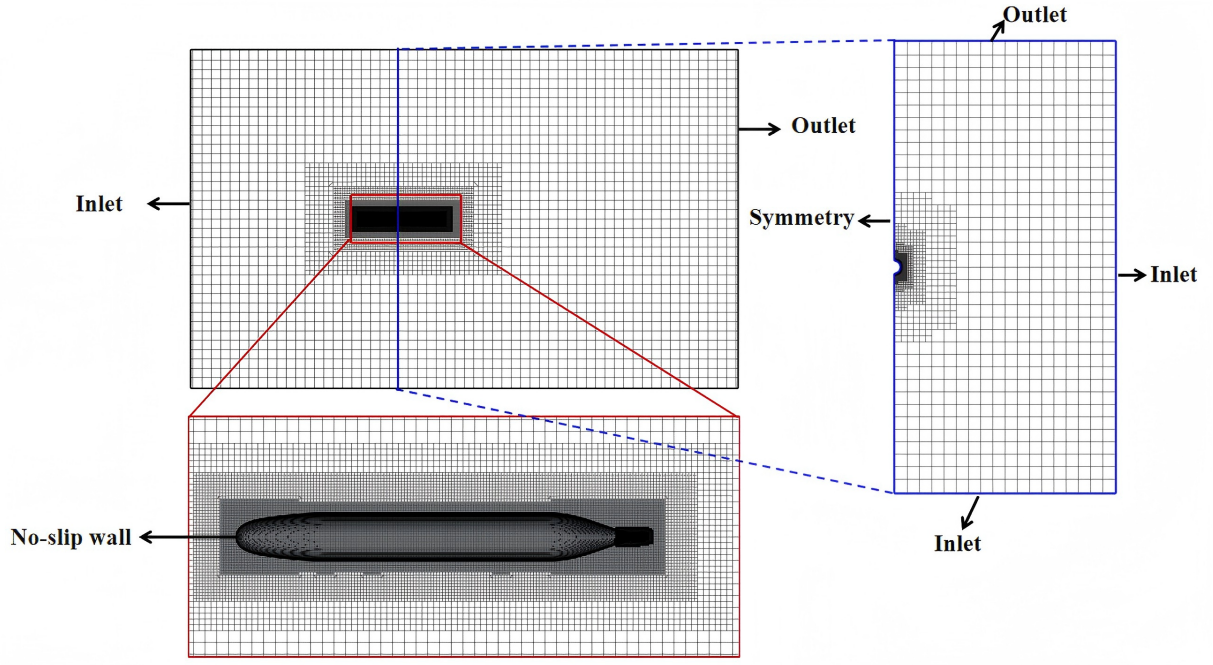


图 5： 计算域内网格分布示意图及 Suboff模型边界条件设置。

表 4速度-角度参数空间中训练集和测试集的分布。符号：•（训练集），T_i（测试集），其中 $i = 1, \ldots, 5$。空白单元表示无对应案例。

角度（°）	速度（m/s）				
	2.000	2.850	3.765	4.250	5.000
3.0	•	•			•
4.0				T_4	
5.0	•	•		•	•
6.0			T_3		T_5
7.0	•			•	
8.0	T_1	T_2			
9.0		•		•	•

$\{3.0, 5.0, 7.0, 9.0\}$°中采样。在选择测试集时，我们考虑到攻角变化对流场的影响往往比入口速度变化更为显著。为了提高测试集的挑战性，我们针对每个入口速度选择一个未包含在训练集中的攻角。此外，还加入了一个入口速度和攻角均未出现在训练集中的额外测试案例，具体为$|\mathbf{V}^*| = 3.765$m/s 和 $\alpha = 6°$。上述训练集能够全面评估 DDFI策略。遵循Zhou等人(2025)提出的方法，测试集还可根据其与训练集的分布关系分为三类：插值（T_3）、弱外推（T_2, T_4）和外推（T_1, T_5）。总体而言，如表4所示，该数据集包含训练集的 12 种流场运行条件和测试集的 5 种流场运行条件。

3.1. 数据集获取与训练设置

本研究采用不可压缩流体的雷诺平均纳维–斯托克斯方程（Reynolds, 1895），以获取 Suboff 潜艇模型上升和下降运动时的湍流场，方程如下：

$$\nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{V}}) = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \{\rho \overline{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{V}}\} = -\nabla \overline{p} + \nabla \cdot (\overline{\boldsymbol{\tau}} - \rho \overline{\mathbf{V}'\mathbf{V}'}) + \overline{\mathbf{f}}_b \tag{11}$$

上划线和上标中的撇号分别表示时间平均量和随时间波动的量的分量，$\{\cdot\}$ 表示向量的张量积，方程（11）中的时间项被忽略

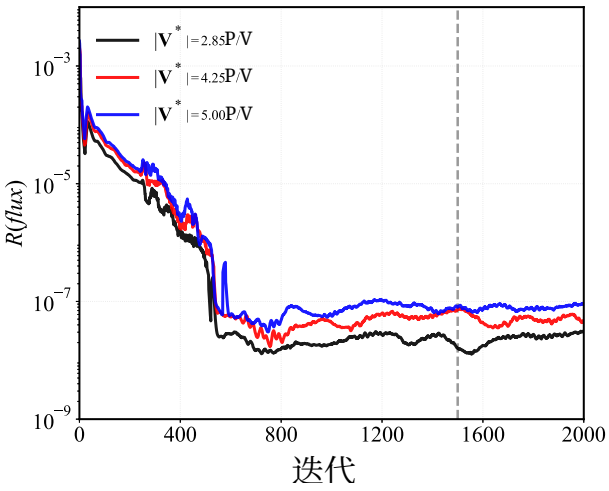


图 6：三种入口速度下的通量残差收敛曲线对比（$|\mathbf{V}^*| = 2.85$，4。25，5。00米/秒），攻角 α 为 9°。

以对应于稳态条件。因此，$\mathbf{V}$和 $\mathbf{V}'$ 分别表示速度矢量的时间平均量和随时间波动的部分，$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T)$表示黏性应力项，$\mu$ 表示动力黏度，p 表示压力的时间平均分量，$\mathbf{f}_b$ 表示体力源项的时间平均值。需要指出的是，$\rho\mathbf{V}'\mathbf{V}'$ 表示雷诺应力，用于表征湍流的影响。然而，它也引入了额外的未知量，导致方程组不闭合。为实现闭合，采用了由 $k-\epsilon$ 提出的两方程Jones 和 Launder（1972）湍流模型，该模型基于 Boussinesq 假设（Boussinesq，1877；Schlichting 和 Kestin，1961）。

本文的所有计算均使用单核，通过自主开发的不可压缩黏性流体软件MarineFlow中的稳态求解器完成。空间离散基于有限体积法（FVM）实现，速度-压力方程则通过压力链接方程半隐式方法（SAMPLE）算法以解耦方式求解。如图4所示，计算域中的网格总数为 4.45×10^5。所有模拟中的流体密度 ρ 和动力黏度 μ 分别设为999.1kg/m^3 和0.001145$N\cdot$s/m^2，，与实验条件一致。值得注意的是，尽管运行条件的设置参考了实验数据，本研究仍以传统CFD结果为基准，主要关注DDFI策略相较于传统CFD方法在效率提升方面的表现。

此外，所有结果数据均在完成 1500 个迭代步数后获得。图 6 展示了 $R(flux)$ 在若干入口速度和攻角 9° 条件下流场通量残差的收敛过程。可以观察到，流场在 600 个迭代步数后基本达到稳态。因此，提取 1500 个迭代步数后的结果是完全可靠的。

在训练阶段，与大多数现有研究主要关注尾流场或近壁面预采样流场不同，本研究聚焦于全局流场，旨在获取覆盖整个计算域的数据。训练框架基于 PyTorch 构建，并采用 Adam优化器最小化损失函数。初始学习率设为 0.001，并采用阶梯衰减学习率策略，具体而言，每 800 个训练轮次将学习率缩减至原来的 0.75。鉴于样本总量庞大，本研究采用了相对较大的批量大小 16384。训练过程共进行 6000 轮，在单块昇腾910芯片上耗时约 16.8 小时。

3.2. 数据驱动流场加速计算

本节首先展示三个具有代表性的测试工况（即插值 T_3、弱外推 T_4和外推工况 T_1）下计算流体力学收敛结果与神经网络预测结果的对比图，以说明深度神经网络对流场的预测精度。具体而言，图7 展示了SUBOFF计算域对称面近壁区域的流场对比。该对比对应于以 $|\mathbf{V}^*| = 3.765$米/秒和$\alpha = 6°$运行的插值测试工况。在图中，第一列显示计算流体力学收敛结果，第二列展示神经网络预测结果，第三列则为前两列之间的归一化误差，其归一化方法定义如下：

$$E_n^{(i)} = \frac{\left|\phi_{pred}^{(i)} - \phi_{true}^{(i)}\right|}{max(\left|\phi_{true}^{(i)}\right|)}, \qquad i \in \Omega. \tag{12}$$

从图7可以看出，本研究提出的神经网络能够生成与计算流体力学收敛结果在视觉上高度一致的预测结果

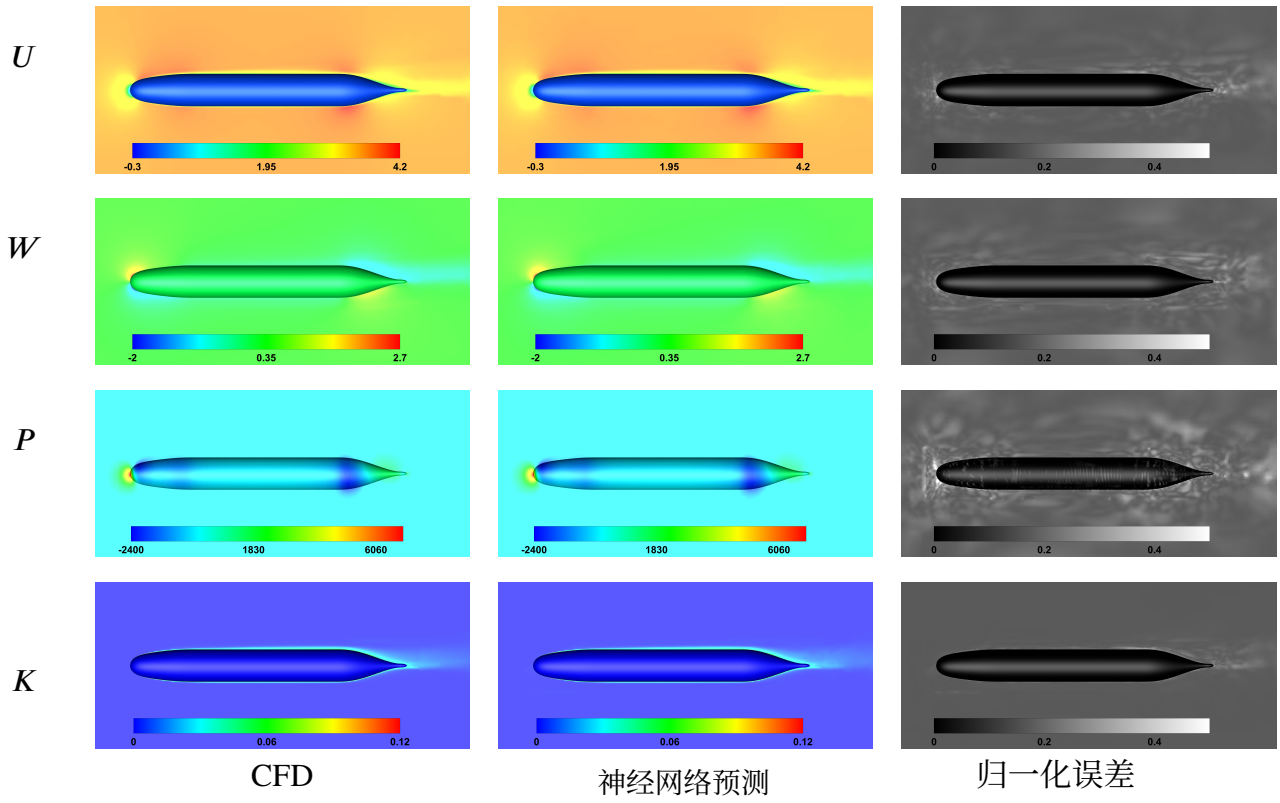


图7： 测试工况 T_3（$|\mathbf{V}^*| = 3.765$米/秒， $\alpha = 6°$）下Suboff模型近壁流场分布对比图。

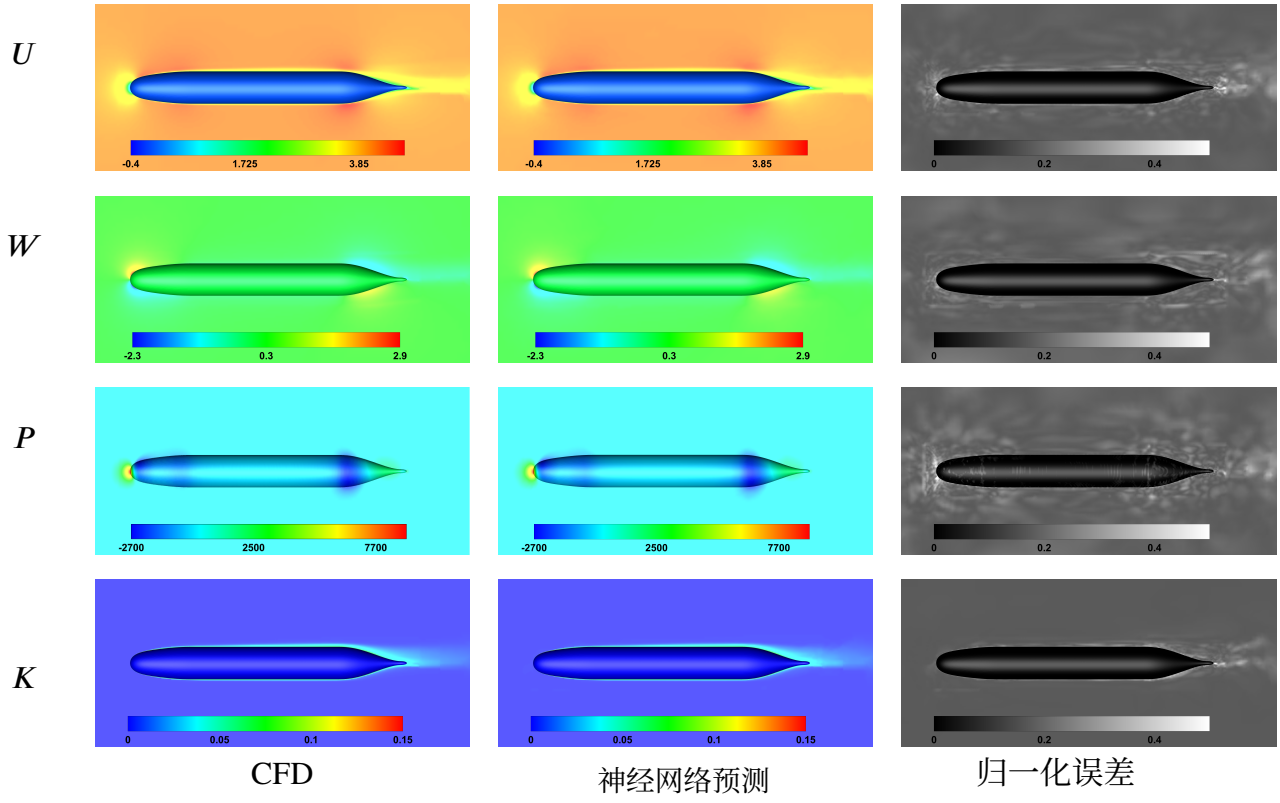


图8： 测试工况 T_4（$|\mathbf{V}^*| = 4.25$m/s， $\alpha = 4°$）下 Suboff模型近壁流场分布对比图。

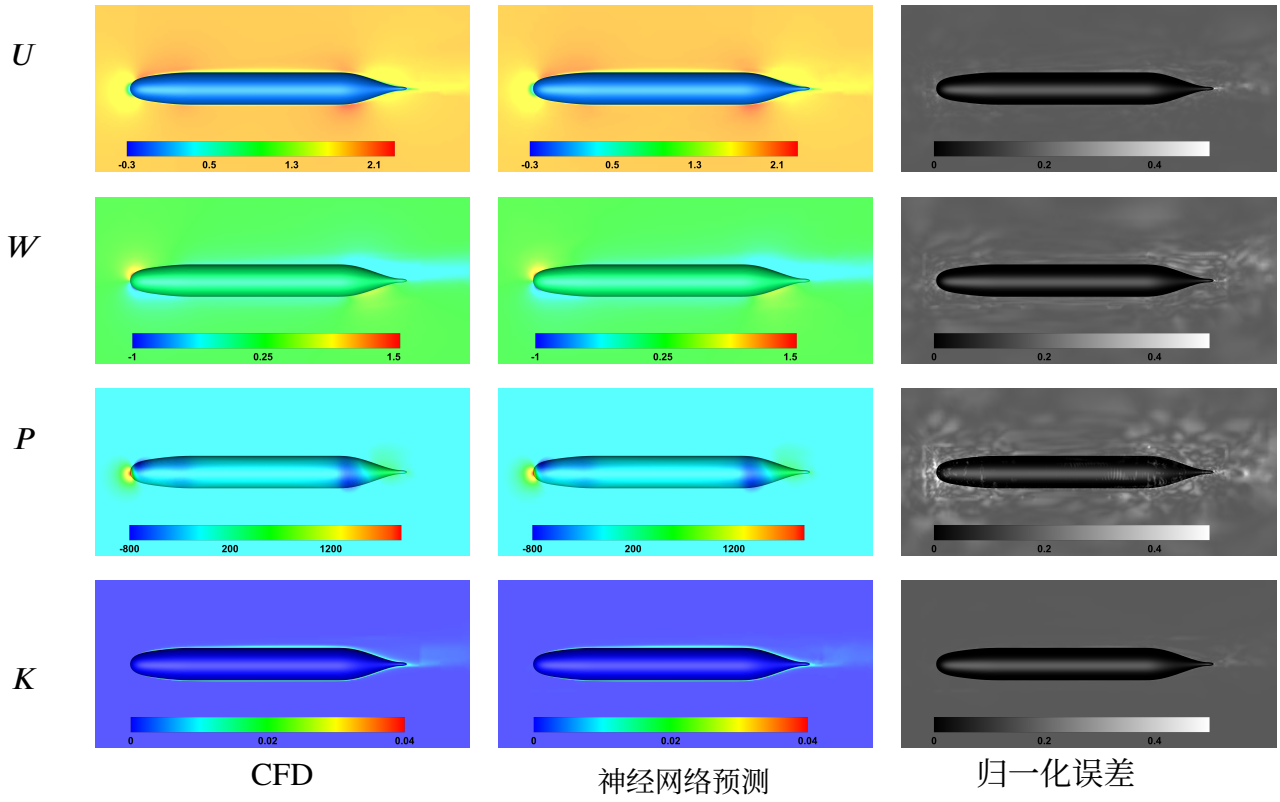


图9： 近壁流场分布对比图 Suboff模型在测试工况 T_2（$|\mathbf{V}^*| = 2\text{m/s}$， $\alpha = 8°$）下的近壁流场分布。

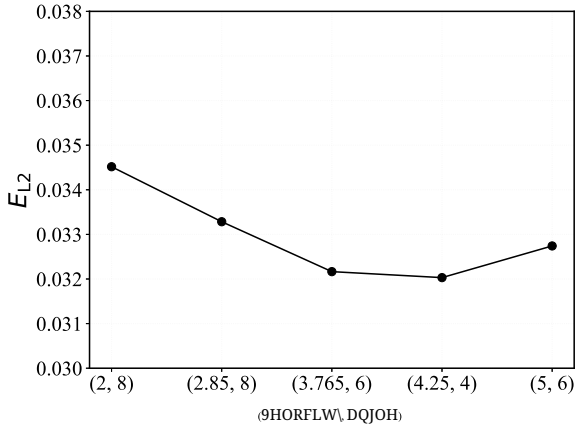


图10： 测试工况中神经网络预测结果与CFD结果之间的相对L2误差 E_{L2}（定义见方程（13）） T_i，其中 $i = 1, \ldots\ldots, 5$。

速度场、压力场和湍动能场的结果。值得注意的是，该测试工况的速度和角度未包含在训练集中。然而，神经网络仍能准确捕捉初始运行条件下流动变化的内在规律。此外，图 T_4（$|\mathbf{V}^*| = 4.25$米/秒，$\alpha = 4°$）所示的弱外推结果以及图 T_2 （$|\mathbf{V}^*|$ =2米/秒，$\alpha = 8°$）所示的外推结果进一步验证了上述结论。例如，与 $\alpha = 4°$ 工况相比， U 尾流区中的速度场在 $\alpha = 8°$作用下表现出更显著的不对称性，而神经网络的预测结果也能准确反映这一变化特征。

此外，图10 展示了五个测试工况下预测值与CFD结果之间的相对L2误差，计算公式如下：

$$E_{L2} = \frac{\sqrt{\sum_{i\in\Omega}(\phi_{pred}^{(i)} - \phi_{true}^{(i)})^2}}{\sqrt{\sum_{i\in\Omega}(\phi_{true}^{(i)})^2}}, \qquad i \in \Omega. \tag{13}$$

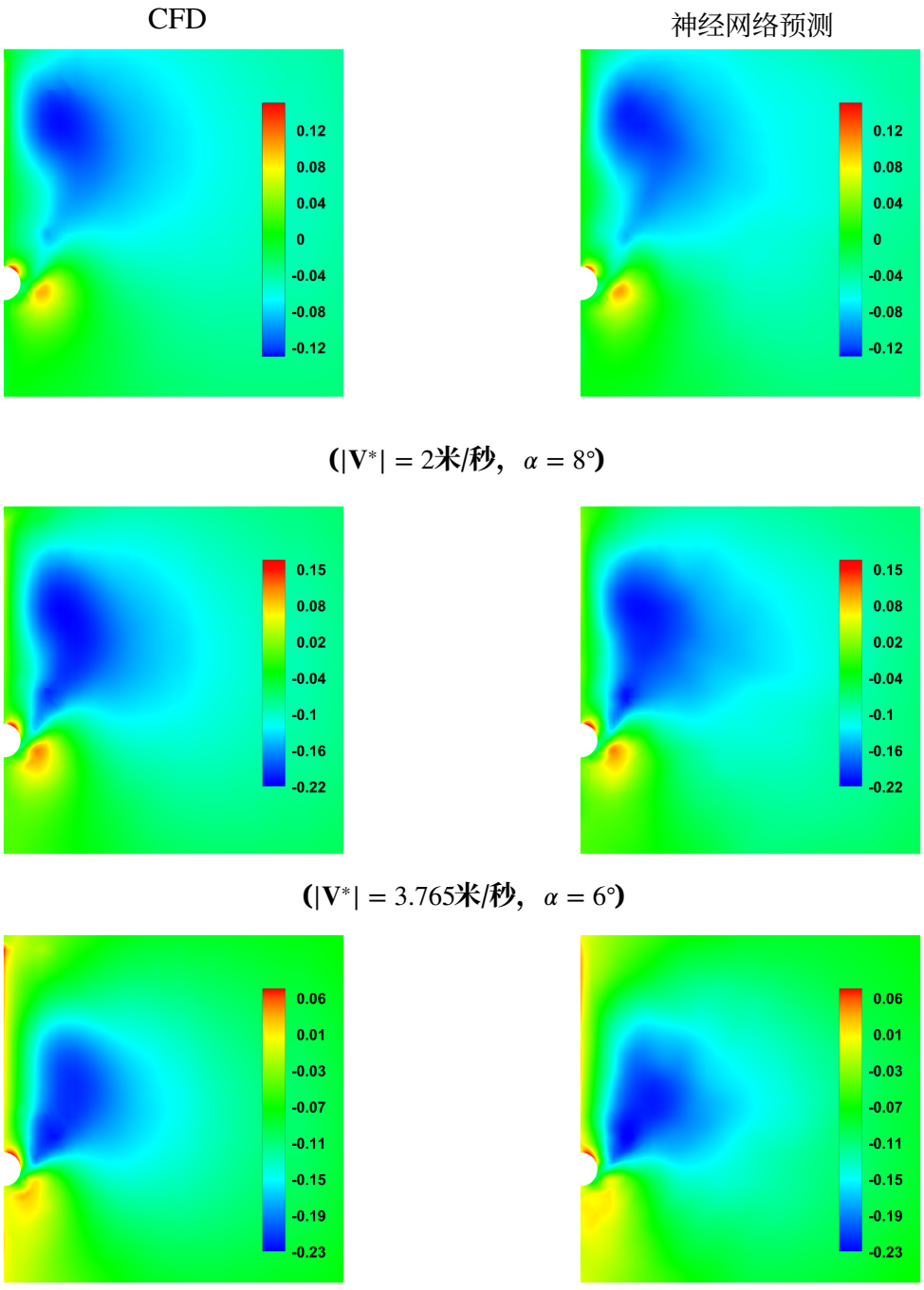


图11： Suboff模型在三种测试工况下 $x/L = 0.978$ 截面的 y方向速度 V 分布对比。左：计算流体力学结果，右：神经网络预测结果。

图11 展示了Suboff模型 V螺旋桨盘面附近的速度场等值线图。可以看出，神经网络能够准确输出与CFD结果一致的高、低速度区域分布，而这种分布一致性为实施DDFI加速策略提供了核心保障。

值得注意的是，尽管数据驱动神经网络模型能够生成在视觉上与真实流场高度相似的结果，但直接应用于实际工程场景时仍存在显著局限。如图7 至9第三列所示，在Suboff模型的关键特征区域（如船艏和船尾），几乎所有流场变量（尤其是压力场）都表现出更明显的预测偏差。这些误差直接反映了神经网络在局部区域的预测结果存在物理不一致性。这种不光滑性和非守恒性一方面会导致

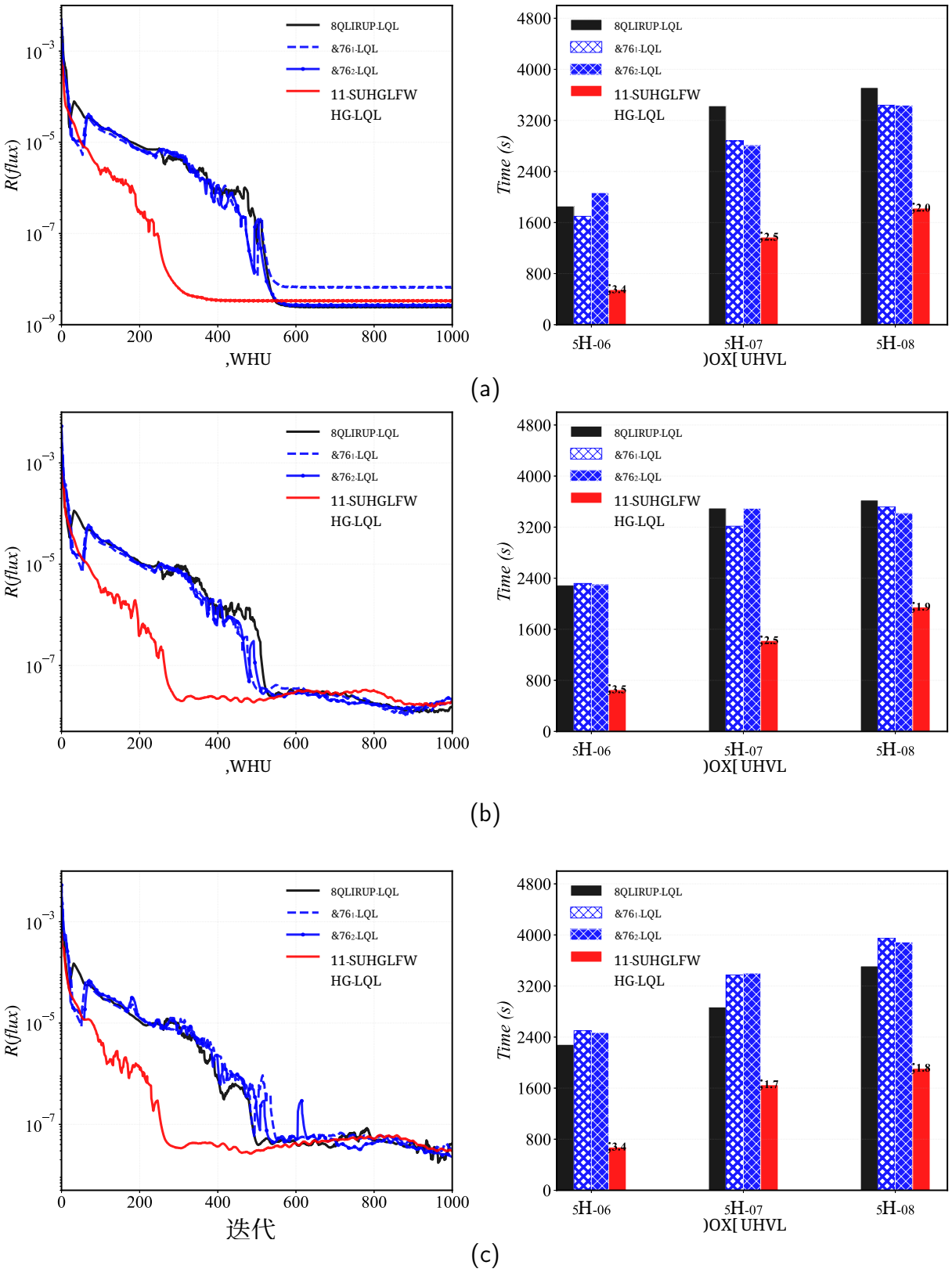
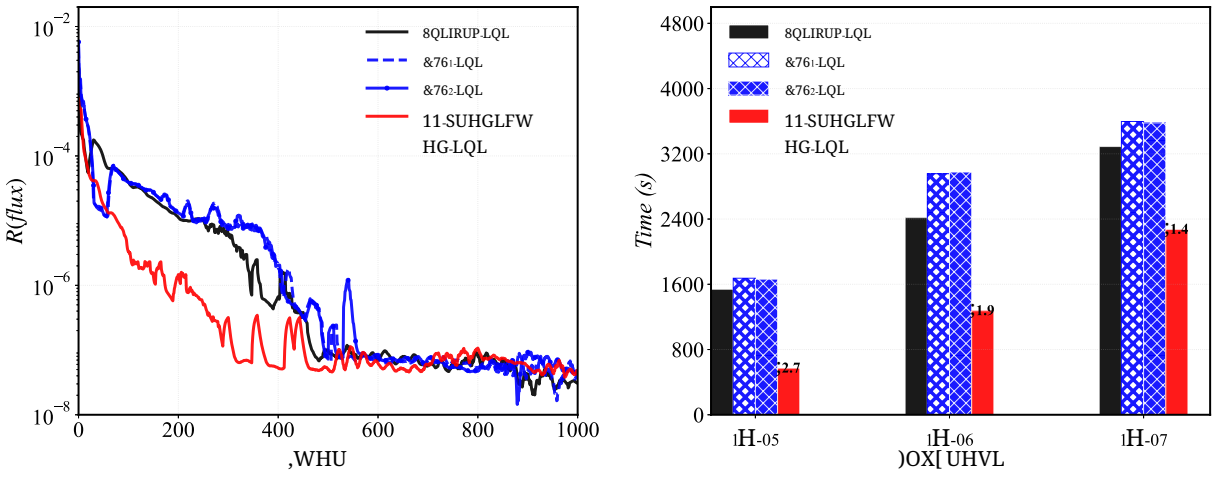
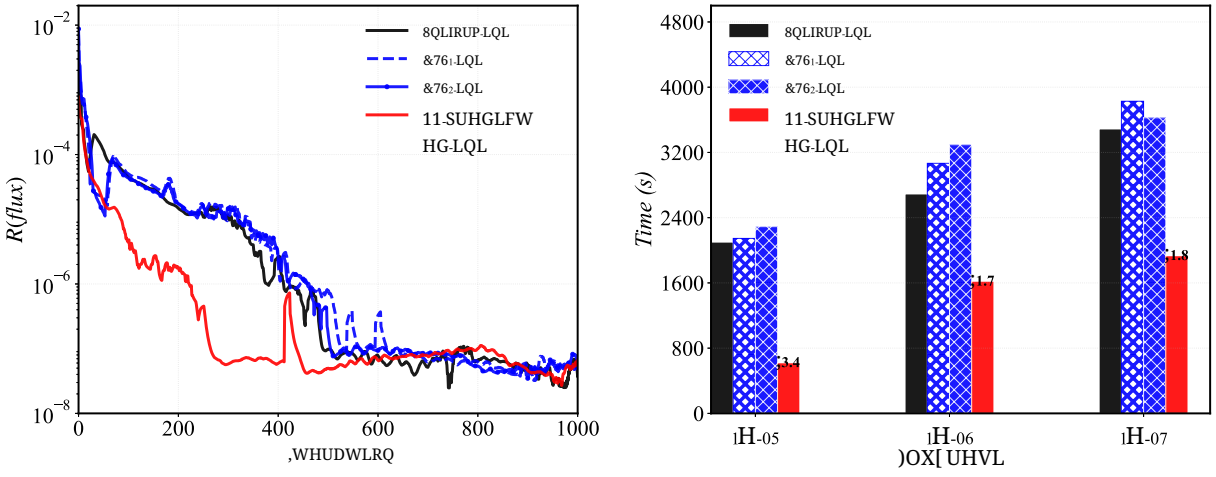


图12： 分别比较四种初始化条件（均匀、CTS1、CTS2 和神经网络预测（基于 10 步移动平均））下的通量残差收敛曲线（左）以及达到 5×10^{-6}、 5×10^{-7} 和 5×10^{-8} 收敛阈值所需的计算时间（右）。(a) 测试案例 T_1(2.0m/s, 8°)、CTS1=(2.0m/s, 7°)、CTS2=(2.85m/s, 9°)。(b) 测试案例 T_2(2.85m/s, 8°)、CTS1=(2.0m/s, 7°)、CTS2=(2.85m/s, 9°)。(c) 测试案例 T_3(3.765m/s, 6°)、CTS1=(2.85m/s, 5°)、CTS2=(4.25m/s, 7°)。



(d)



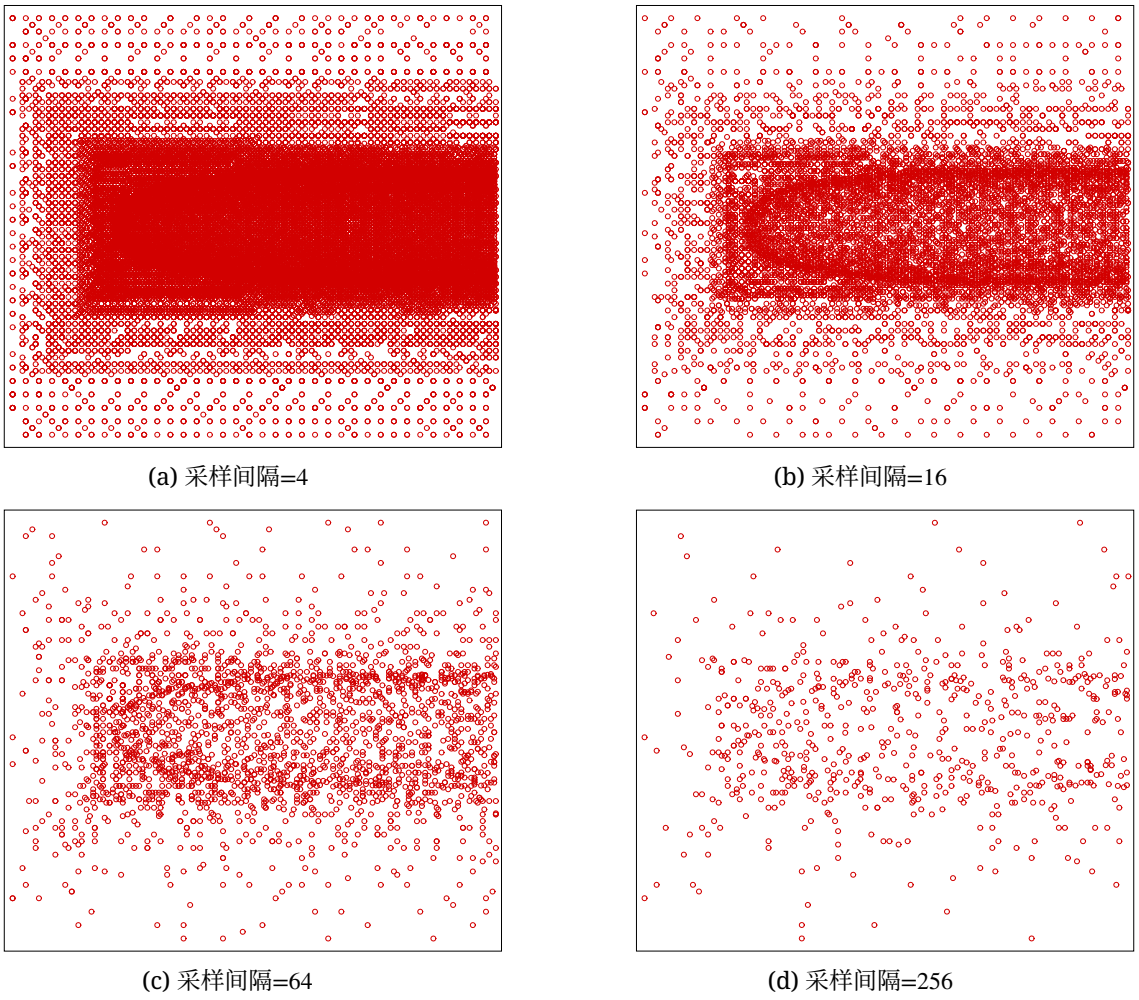
(e)

图13： 四种初始化条件下通量残差收敛曲线（左）以及达到 5×10^{-6}、 5×10^{-7} 和 5×10^{-8} 收敛阈值所需计算时间（右）的比较：均匀、CTS1、CTS2和神经网络预测（基于10步移动平均）。(d) 测试案例 T_4(4.25米/秒， 4°)、CTS1=(5.0米/秒， 3°)、CTS2=(4.25米/秒， 5°)。(e) 测试案例T_5(5.0米/秒， 6°)、CTS1=(4.25米/秒， 7°)、CTS2=(5.0米/秒， 5°)。

局部流场偏离真实物理机制，另一方面也会显著影响水动力性能指标的可靠性。因此，应引入传统的计算流体力学求解器，通过式（10）和式（11）所体现的基本物理守恒定律，对神经网络预测结果进行约束和修正，从而兼顾神经网络的效率与物理方程约束所保障的结果可靠性。

基于此，将神经网络的预测结果用作计算流体力学计算的初始流场，并与采用均匀初始场作为CFD求解起点的情况进行比较，从而量化前者对CFD求解过程的加速效果。此外，为了排除一种潜在疑问，即是否也能通过直接采用训练集中运行工况相近的流场作为初始条件来加速CFD求解，另外选取训练集中与测试工况最接近的两个运行工况（以下简称CTS1和CTS2），并将其对应的流场用作初始条件，在测试工况下进行计算流体力学计算。此外，当最接近的训练集工况的入口速度与测试工况的入口速度不一致时，采用第2 节所述的无量纲归一化方法进行缩放。结果表明，CFD求解加速的关键在于利用神经网络学习一般的流动规律，以实现准确的流场预测，而非仅仅依赖训练集中运行工况相近的流场数据。

具体而言，图12 和13 展示了不同测试工况下通量残差随迭代步数变化的收敛特性。显然，在所有测试条件下，



(a) 采样间隔=4

(b) 采样间隔=16

(c) 采样间隔=64

(d) 采样间隔=256

图14: 示意图　　Suboff模型船艏附近网格单元质心分布，采样间隔为四个　　.

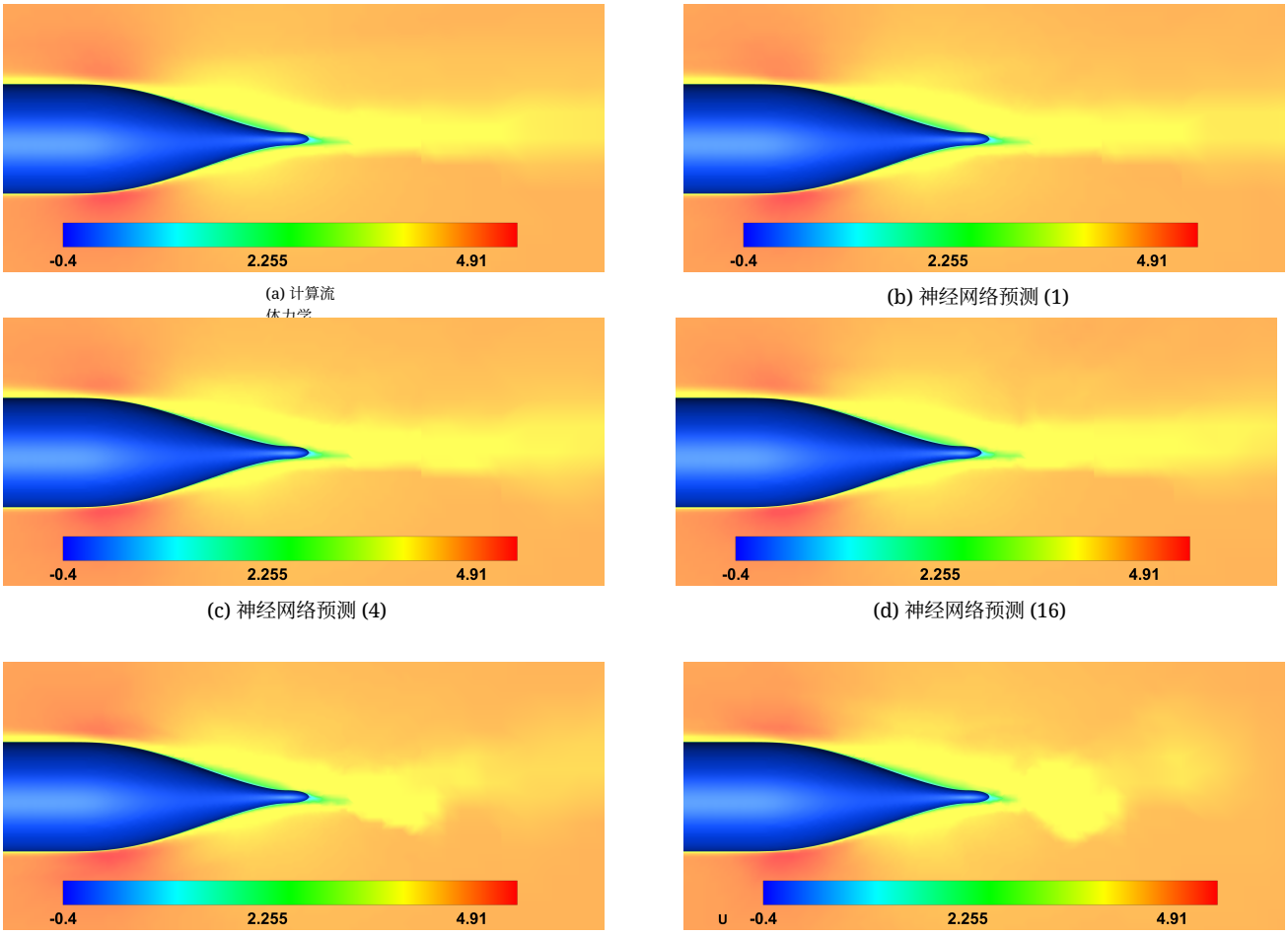
与采用均匀场作为初始条件相比，采用神经网络预测的流场作为初始条件时，通量残差的下降速度始终更快。

进一步研究发现，即使选择与测试工况最接近的训练工况所对应的流场作为初始条件，其收敛率也不优于均匀场初始条件。尤其是当测试工况的非线性特征增强时（即入口流速增大），最接近的训练工况对应的初始条件往往需要更多迭代步数，才能达到相同的残差收敛阈值。

事实上，当将近似工况的流场用作初始条件时，迭代早期往往会出现一种称为伪收敛的现象：通量残差迅速下降至接近 10^{-5} 的量级，随后快速反弹，接着进入平台阶段，在数百个迭代步数内几乎没有下降。这是因为即使运行参数相似，壁面附近的流场分布仍存在显著差异，因此计算流体力学求解器需要消耗大量迭代步数进行修正。

值得庆幸的是，神经网络能够生成与目标工况匹配度更高、精度更好的流场结果，这意味着计算流体力学求解过程具有更快的收敛速度和更强的鲁棒性。如图第一列所示。12 和 13，神经网络预测的流场完全避免了伪收敛问题。与其他三种初始化策略相比，通量残差呈现出更快、更平稳的下降趋势。该结果充分证明了本文提出的DDFI策略在提升计算流体力学求解性能方面的独特优势。

图12 和13 的第二列定量展示了 DDFI策略在三种残差阈值（）下的加速效果。在两个相对宽松的通量残差阈值 5×10^{-6} 和 1×10^{-5}下，DDFI策略的最大加速比可达到3.5。即使在最严格的两个通量残差阈值 5×10^{-8} 和 1×10^{-7}下，在绝大多数测试条件下，DDFI仍可实现接近2 的加速比。需要指出的是，



(a) 计算流体力学

(b) 神经网络预测 (1)

(c) 神经网络预测 (4)

(d) 神经网络预测 (16)

(e) 神经网络预测 (64)

（f）神经网络预测（256）

图15：测试案例 T_5 （5.0m/s 6°）中，Suboff模型船尾处 x方向速度场 U 的结果对比。（a）计算流体力学结果。（b）未采样的神经网络预测结果（采样间隔=1），（c）–（f）采样间隔分别为 =4、16、64、256。

入口流速增加会增强流场的非线性，导致通量残差收敛过程中出现更多振荡。图13 (d) 中观察到的加速效果下降正是由这一现象所致，这也是所有计算流体力学数值求解过程中普遍面临的技术挑战。

4. 讨论

4.1. 训练集简化的影响

对于上述 DDFI策略，一个核心挑战在于，高精度计算流体力学数据会显著扩大所构建的神经网络训练数据集的规模。这不仅大幅增加了模型训练时间，也限制了将更多运行工况纳入训练集的可行性。为探究DDFI策略在多运行工况场景下的可扩展性，本节重点考察通过采样方法缩减数据集规模的技术可行性。在不失一般性的前提下，本研究采用最基本的采样范式，即基于网格数量的等距采样策略。图14 展示了 Suboff 船艏附近网格单元质心分布的示意图，采样间隔分别为 4、16、64 和 256。在训练过程中，批量大小按照与采样间隔相同的倍数缩减，而其他训练策略则与完整训练集所采用的策略保持一致。值得注意的是，为缓解过拟合，采用了早停策略。因此，我们从原始训练集中构建了四个不同规模的子集，以考察在训练数据不足的情况下 DDFI策略是否仍然有效。表5 列出了每个子集所含的样本数量。

图15展示了测试工况下，神经网络对 Suboff 模型船艏压力场的预测结果 T_5 （$|\mathbf{V}^*|$ = 5.0米/秒 α = 6°）。可以观察到，当采样间隔为 4 时，神经网络预测的压力场在视觉上与收敛的CFD结果以及未采样结果完全一致。随着采样间隔增大，预测精度逐渐降低。当采样间隔达到 256 时，SUBOFF船艏区域的流场预测出现明显差异，其中

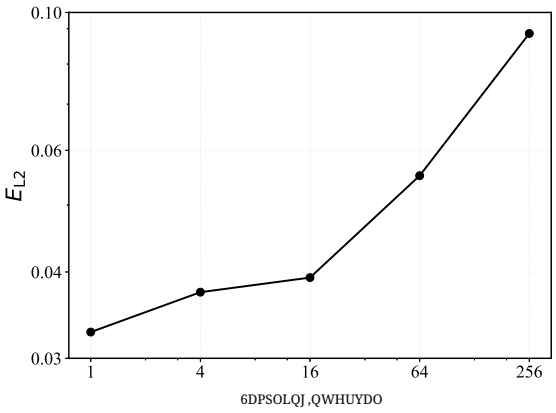


图16： 不同采样间隔下，测试工况 E_{L2} 之间的相对L2误差（定义于式 13），比较计算流体力学结果与神经网络预测结果 T_{50}。

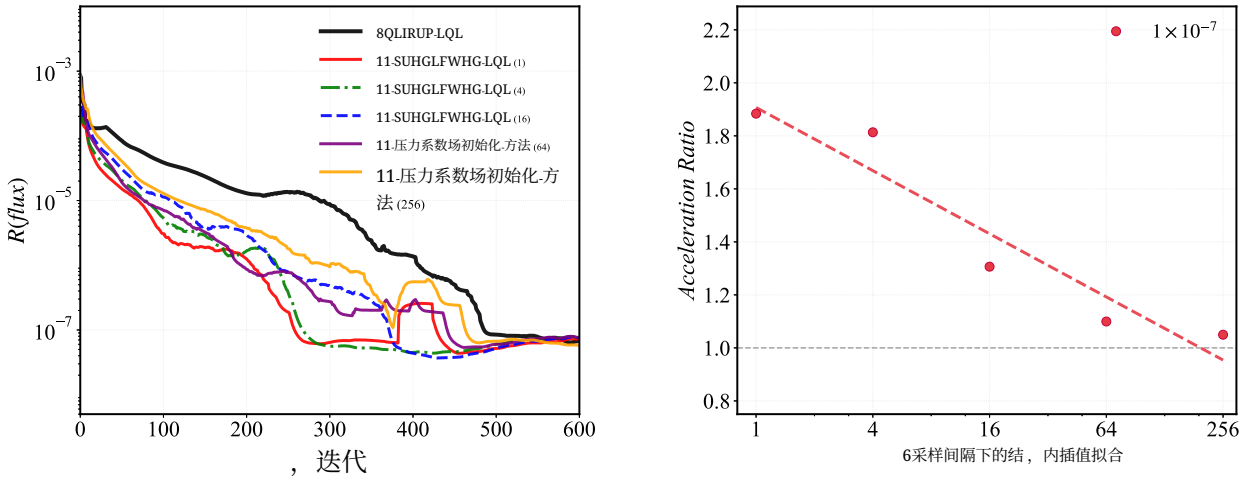


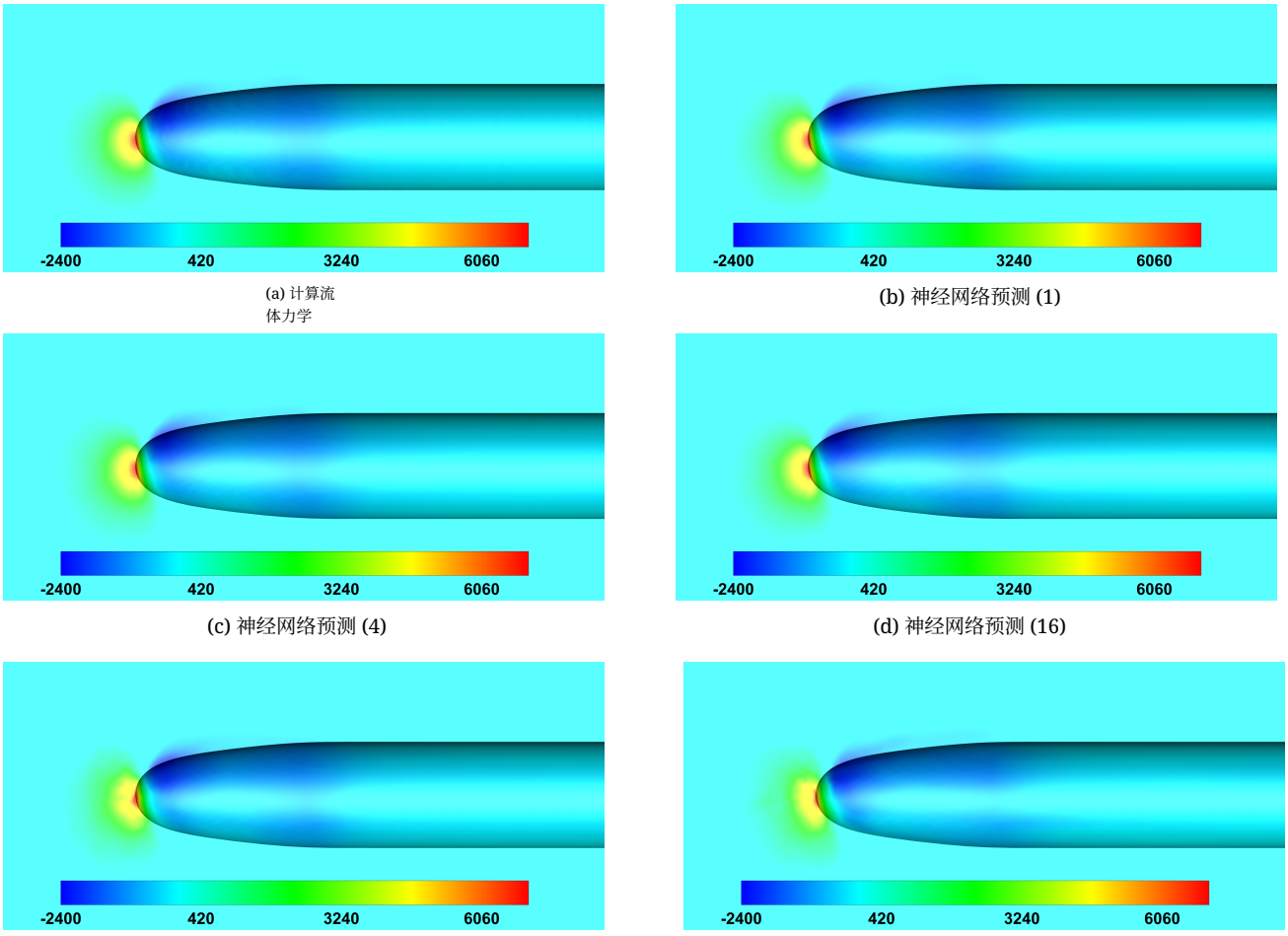
图 17： 左：均匀初始化与以不同采样间隔下的神经网络预测结果作为初始条件时的通量残差收敛曲线对比；右：收敛阈值为 $R(flux) = 1\times10^{-7}$ 时，不同采样间隔下神经网络预测结果相较于均匀初始化的加速比（基于 40 步移动平均）。测试工况为 T_{50}。

表5不同采样间隔下的输入样本数量

采样间隔	单元	面	总计
1	5,341,428	182,520	5,523,948
4	1,335,357	45,630	1,380,987
16	333,839	11,408	345,247
64	83,460	2,852	86,312
256	20,866	712	21,578

红色高压区的范围明显小于CFD数值求解结果。图16依据公式（13）展示了不同采样间隔下的相对L2误差。此外，即使采样间隔相当大，神经网络的预测结果与CFD求解之间也没有显著偏差，这表明DDFI策略在稀疏数据条件下的应用潜力。

为进一步量化采样对计算流体力学流场迭代加速效果的影响，本节采用以不同采样间隔的数据集训练得到的神经网络预测流场，作为计算流体力学迭代计算的初始条件。图 17 展示了相应的残差收敛曲线，以及相对于均匀流场初始条件的加速比（迭代次数）。可以看出，随着插值间隔增大，加速效果会减弱。然而，均匀流场初始条件对应的收敛曲线始终高于其他所有曲线，这表明在 DDFI 策略框架下，与上述几乎所有采样间隔对应的预测流场都能有效提高计算流体力学的迭代收敛效率。具体而言，当采样间隔为 4 时，其加速效果与未采样情形几乎一致。当采样间隔为



(a) 计算流体力学　(b) 神经网络预测 (1)

(c) 神经网络预测 (4)　(d) 神经网络预测 (16)

(e) 神经网络预测 (64)　(f) 神经网络预测 (256)

图18： 测试工况 T_3 (3.765m/s 6°)下Suboff模型船艏处压力场 P 的结果对比。(a) CFD结果。(b) 未经采样的神经网络预测结果（采样间隔=1）；(c)–(f)的采样间隔分别为 =4、16、64和256。

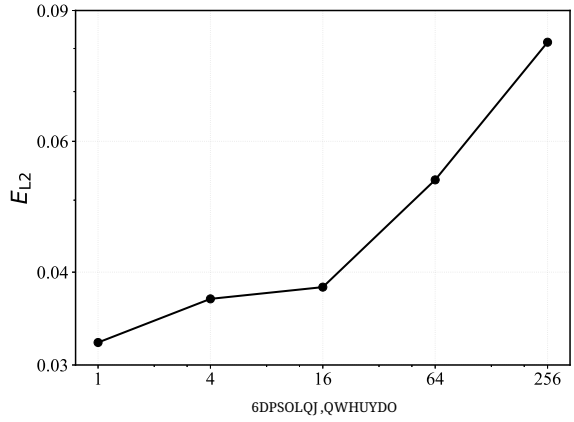


图19： 相对L2误差 E_{L2} （定义见式13）表示不同采样间隔下测试工况的CFD结果与神经网络预测结果之间的误差。

256（即仅使用完整数据集的 0.39%），该策略仍能确保其收敛效率始终优于均匀流场初始条件，并且在几乎与后者相同的迭代次数内达到了最严格的收敛阈值。

图 18 和图 19 展示了另一个测试案例的结果T_3 （$|\mathbf{V}^*| = 3.765$米/秒，$\alpha = 6°$）。同样，预测结果

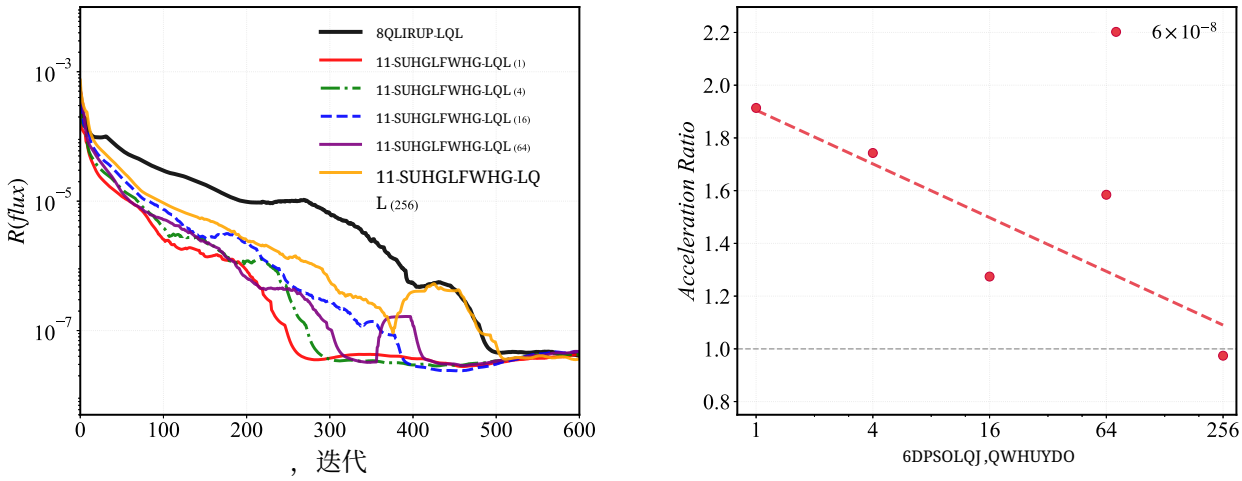
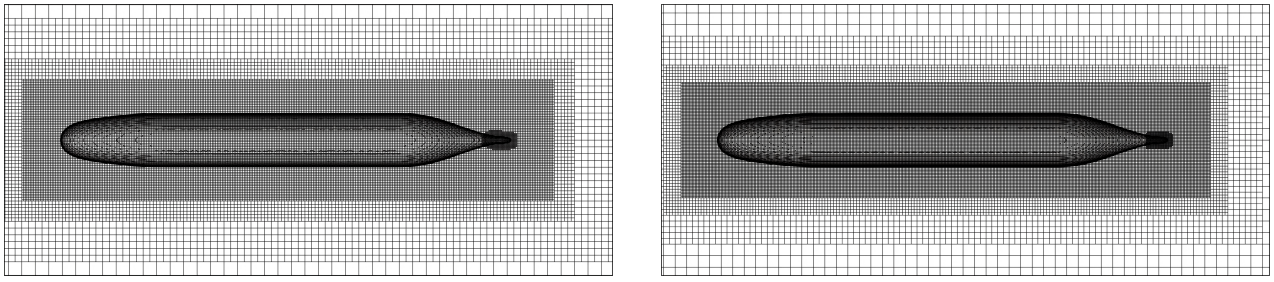


图 20： 左：比较采用均匀初始化和神经网络预测结果作为初始条件时，不同采样间隔下的通量残差收敛曲线；右：收敛阈值为 $R(flux) = 6 \times 10^{-8}$ 时，不同采样间隔下神经网络预测结果相较于均匀初始化的加速比（基于 40 步移动平均）。测试工况为 T_3。



(a) 网格$_{f1}$　　(b) 网格$_{f2}$

图 21： 两个加密网格在近壁区域的网格分布。(a) 7.9×10^5 个单元。(b) 1.15×10^6 个单元。

准确率会随着采样间隔的增大而降低，但流场分布总体上仍与CFD数值模拟结果保持一致。图20 展示了该运行条件下的残差收敛特性以及加速比。采样数据集仍可生成流场初始条件，从而加快计算流体力学求解器的迭代求解。尽管采样间隔的增大会削弱加速效果，但即使采样间隔相当大，DDFI策略的加速功能仍然有效。

总之，上述两个案例得出了一个令人鼓舞的结论：缩小训练集规模不会对DDFI策略的加速性能产生实质性影响。对于本研究所考察的案例，当采样间隔设为4时，其对CFD求解加速效果的影响可以忽略不计。在极端情况下，可以采用64甚至256的采样间隔。如此大的采样间隔能够使训练集覆盖更多运行工况，从而增强模型的泛化能力，这对于DDFI策略的工程应用具有重要意义。

4.2. 跨网格输出的泛化能力

另一个核心问题在于神经网络模型的跨网格泛化能力。如今，在工业级应用场景中，通常需要使用高分辨率网格，以准确捕捉流场的精细演化特征。显然，一旦网格拓扑发生改变，就有必要重建数据集并重新训练神经网络，而由此产生的计算资源消耗是无法接受的。我们希望所构建的神经网络模型具备一定程度的跨网格泛化能力，即无需重新训练，仅通过输入新的网格拓扑信息，就能够输出训练集中未对应网格尺度下的预测流场。

基于此，本节采用两种经过细化的Suboff网格，即网格$f1$ 和网格$f2$，分别包含 7.9×10^5 和 1.15×10^6 个单元，如图21所示。为不失一般性，考虑测试工况 T_5 ($|\mathbf{V}^*| = 5.0\text{m/s}$， $\alpha = 6°$)，并将这两种网格的几何信息输入训练好的模型，以获得神经网络预测初始条件。

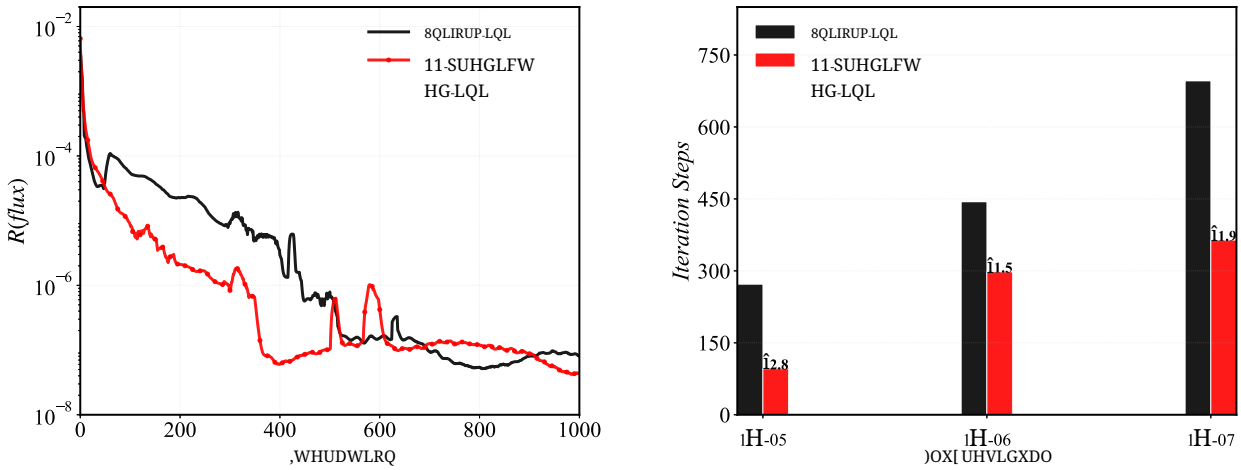


图 22： 在均匀初始化和神经网络预测初始化下，网格f_1的通量残差收敛曲线（左）及达到 1×10^{-5}、 1×10^{-6} 和 1×10^{-7} 阈值所需的计算时间（右）对比（基于 10 步移动平均）。测试工况为 T_5。

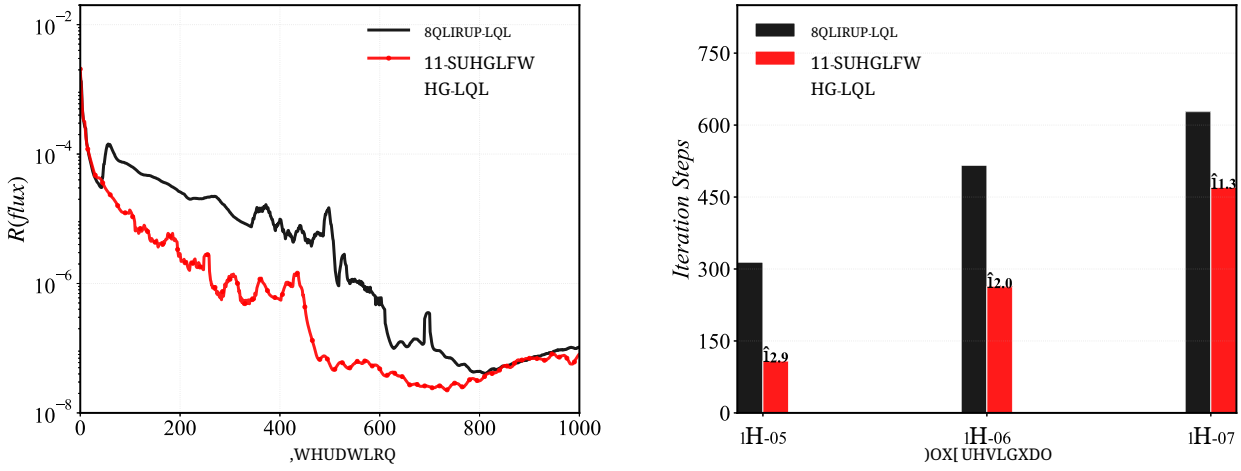


图 23： 在均匀初始化和神经网络预测初始化下，网格f_2的通量残差收敛曲线（左）及达到 1×10^{-5}、 1×10^{-6} 和 1×10^{-7} 阈值所需的计算时间（右）对比（基于 10 步移动平均）。测试工况为 T_5。

图22 和图23展示了基于网格f_1 和网格f_2进行数值计算时，神经网络预测初始条件对流场迭代求解的加速效果。从通量残差收敛曲线可以看出，神经网络预测初始条件下的残差下降速度始终快于均匀流场初始条件下的下降速度。尤其当迭代步数 ≈ 100时，均匀流场出现残差反弹，这一现象表明需要重新修正流场构型。相比之下，神经网络预测初始条件的残差持续下降，这一优势源于其流场分布与当前运行条件更加一致。

需要指出的是，对于强非线性运行工况，例如 Suboff 上浮/下潜运动，不同分辨率网格引入的数值误差将导致即使在相同运行工况下，CFD流场的详细特性也存在差异，从而进一步增加跨网格预测的难度。尽管如此，对于本节中的测试场景，网格分辨率分别比训练集提高.8倍和.5倍，本文提出的神经网络仍能生成精度令人满意的初始条件，并显著提高CFD迭代的收敛效率，充分展示了DDFI策略在跨网格流场加速任务中的应用潜力。

5. 结论

本文提出了一种 DDFI 策略，用于快速预测水下航行器在稳态条件下垂直平面斜航运动所产生的流场。

为兼顾计算效率与结果可靠性，该策略摒弃了在计算流体力学求解器初始化阶段将均匀场用作初始条件的传统做法，转而采用深度神经网络模型，以网格几何、运行工况以及网格—运行工况混合向量为输入，生成精细化的初始流场，从而显著缩短计算流体力学迭代的收敛时间。

选取具有上浮和下潜运动的Suboff模型作为研究对象进行验证。结果表明，在此类非线性运行条件下，所构建的神经网络能够在整个三维计算域内实现精度足够的流场预测。即使对于训练数据集中未涵盖的航行角度和速度，预测的流场分布仍与计算流体力学模拟结果吻合良好。通过上述初始流场优化，DDFI策略能够显著提高求解器的迭代收敛速度：在较宽松的收敛阈值下，最高加速比达到3.5；即使在严格的收敛阈值下，平均加速比仍达到1.8。此外，与传统策略相比，DDFI策略具有更优的计算稳定性，残差能够稳定、单调地收敛，不会出现明显反弹。值得强调的是，该策略保留了物理方程作为确保结果正确性的核心保障，这一特点对于实际工程应用不可或缺。

在此基础上，我们进一步探讨了DDFI策略工程应用中涉及的两个核心问题。结果表明，对训练数据集进行合理采样并不会从根本上削弱该策略的有效性。因此，通过增大采样间隔，我们可以在不增加训练成本的情况下扩大训练工况的覆盖范围。此外，我们还展示了该策略固有的跨网格泛化能力，这也是降低数据集构建和模型训练成本的核心因素。

总之，本文的核心目标是为数据驱动机器学习与计算流体力学求解器的集成提供一种实用且均衡的新方法，在充分发挥机器学习效率优势的同时，确保模拟结果的准确性和可靠性。然而，提升泛化能力仍是数据驱动机器学习方法面临的核心且长期的课题。未来，我们计划将这一策略扩展至更多运行工况和数值算例，包括以下两种具体情形：1). 角度/速度间隔更大、覆盖范围更广的运行工况；2). 改变潜航器外形后，进一步预测整个计算域内的流场分布特征。我们希望这些工作能够推动机器学习增强型计算流体力学技术的发展，并有助于解决实际应用中的关键挑战。

致谢

本研究部分获得海洋工程国家重点实验室独立研究项目及上海交通大学新进教师启动计划的经费支持。

参考文献

Ardeshiri, S., Mousavizadegan, S.H., 2022. 一种计算水下航行器操纵系数的高效方法。《海洋工程》266, 113168. Blazek, J., 2015. 计算流体力学：原理与应用。Butterworth-Heinemann. Boussinesq, J., 1877. 关于流动水理论的论文。Impr. nationale. Chu, X., Guo, W., Wu, T., Zhou, Y., Zhang, Y., Cai, S., Yang, G., 2024. 基于 LBM 生成数据和物理信息神经网络的 Suboff模型流场重建。《海洋工程》308, 118250. Chu, X., Liu, Y., Dong, Z., Chong, P., Qian, Y., Kai, Y., Yang, G., 2023. 利用 SWLBM 直接模拟网格生成湍流中 SUBOFF 周围的流场。《计算机与流体》265, 10. Cybenko, G., 1989. 通过 S 形函数的叠加进行逼近。《控制、信号与系统数学》2, 303–314. Grabowska, K., Szczuko, P., 2015. 利用人工神经网络预测船舶阻力，载于：2015年信号处理：算法、架构、编排与应用（SPA），IEEE。第168–173页。Groves, N.C., Huang, T.T., Chang, M.S., 1989. DARPA SUBOFF模型的几何特征（DTRC模型编号5470和5471）。戴维·泰勒研究中心。Hornik, K., Stinchcombe, M., White, H., 1989. 多层前馈网络是通用逼近器。《神经网络》2, 359–366. Jiang, X., Li, Z., Tao, L., Chen, Y., Zeng, W., Cai, C., Zhu, G., Li, Q., 2024. 人工智能闭环测试平台的开发与表征：浮式风力涡轮机 第一部分：构建、验证与基准测试。《海洋工程》297, 116968. Jones, W.P., Launder, B.E., 1972. 利用湍流双方程模型预测层流化。《国际传热传质杂志》15, 301–314. Jordan, M.I., Mitchell, T.M., 2015. 机器学习：趋势、观点与前景。《科学》349, 255–260. Kim, S.Y., Moon, B., 2006. 船舶设计中利用人工智能预测螺旋桨平面上的尾流分布。《船舶与海洋结构物》1, 89–98. Li, D., Yang, Q., Zhai, L., Wang, Z., lin He, C., 2021a. 对在自由液面附近运行的水下物体波浪干扰的数值研究。《国际船舶与海洋工程期刊》13, 65–74. Li, J., Cao, Z., Borthwick, A.G., 2021b. 浅水泥沙流的不确定性量化：随机Galerkin浅水水流-泥沙-地貌动力学模型。《应用数学建模》99, 458–477. Liong, C., Chua, K., 2022. 实时确定性预测船舶运动的数据同化。《海洋工程》244, 110356. Liu, Y., Yu, Z., Zhang, L., Liu, T., Feng, D., Zhang, J., 2021. 一种适用于水下航行器船体形状的精细阻力系数模型。《海洋工程》236, 109361. Lu, L., Wang, C., Qin, D., 2020. 斜向来流中泵喷推进器流动特性的数值研究。《应用海洋研究》103, 102343. Luo, W., Guo, X., Dai, J., Rao, T., 2021. 基于动态代理模型的水下航行器船体优化。《海洋工程》230, 109050. Meng, L., Yang, L., Su, T.C., Gu, H., 2019. 多孔材料对水下航行器水动力特性的影响研究。《海洋工程》191, 106528. Panda, J.P., Mitra, A., Warrior, H.V., 2021. 自主水下航行器水动力特性综述。《

机械工程师学会，M辑：海事环境工程杂志235, 15–29. Peng, J.Z., Aubry, N., Zhu, S., Chen, Z., Wu, W.T., 2021. 基于深度卷积神经网络的流体流动几何与边界条件自适应数据驱动模型。《流体物理》33. Posa, A., Balaras, E., 2018. 对名义潜艇在拖曳和自主推进构型下进行的大涡模拟。《计算机与流体》165, 116–126. Qiu, C., Huang, Q., Pan, G., Shi, Y., Dong, X., 2020. 斜流中不同梢部间隙泵喷推进器水动力与空化性能的数值模拟。《海洋工程》209, 107285. Qu, Y., Wu, Q., Zhao, X., Huang, B., Fu, X., Wang, G., 2021. DARPA SUBOFF模型周围流动结构的数值研究。《海洋工程》239, 109866. Reynolds, O., 1895. IV. 关于不可压缩黏性流体的动力学理论及判据的确定。《伦敦皇家学会哲学汇刊》（A），123–164. Rocca, A., Cianferra, M., Broglia, R., Armenio, V., 2022. 利用壁面模型大涡模拟和对流型Ffowcs Williams–Hawkings方程对BB2潜艇进行计算水声分析。《应用海洋研究》129, 103360. Samek, W., Montavon, G., Lapuschkin, S., Anders, C.J., Müller, K.R., 2021. 深度神经网络及其扩展的解释：方法与应用综述。《IEEE会刊》109, 247–278. Sarraf, S., Abbaspour, M., Dolatshahi, K.M., Sarraf, S., Sani, M., 2022. 浅水潜艇水动力性能的实验与数值研究。《海洋工程》266, 112849. Schlichting, H., Kestin, J., 1961. 边界层理论。第121卷。施普林格。Sezen, S., Dogrul, A., Delen, C., Bal, S., 2018. 利用雷诺平均纳维–斯托克斯方法研究DARPA SUBOFF的自主推进。《海洋工程》150, 258–271. Xie, X., Zhao, P., Bian, C., Xia, L., Ding, J., Wang, X., Liu, H., 2024. 一种用于快速预测DARPA SUBOFF尾流场的新型贝叶斯深度学习方法。《应用海洋研究》150, 104074. Yang, Y., Liao, S., 2024. 超混沌：机器学习与人工智能面临的重大挑战。《应用科学与工程中的分岔与混沌国际期刊》34, 2450202. Yang, Y., Peng, T., Liao, S., 2023a. 利用机器学习预测系泊驳船的三自由度运动。《海洋工程与科学杂志》8, 336–343. Yang, Y., Peng, T., Liao, S., 2023b. 利用机器学习预测浮式结构未来的系泊缆张力。《海洋工程》269, 113470. Yang, Y., Peng, T., Liao, S., Li, J., 2025. 基于储备池计算模型的船舶运动实时预测。《海洋工程与科学杂志》10, 379–395. Zhou, X.H., Han, J., Zafar, M.I., Wolf, E.M., Schrock, C.R., Roy, C.J., Xiao, H., 2025. 基于神经算子的超高保真度：一种加速稳态模拟的热启动方法。《计算物理学杂志》529, 113871. Zhou, Z., Li, Z., Yang, X., Wang, S., Xu, D., 2022. 对有螺旋桨和无螺旋桨水下航行器尾流特性的研究。《海洋工程》266, 113107.