arXiv:2601.02696v1 [math.GN] 6 Jan 2026

分形方块的分类

Gregory Conner[1], Curtis Kent[2], Jun Luo[3], and Yi Yang[4]

[1]*Department of Mathematics, Brigham Young University, Provo, UT 84602, USA conner@mathematics.byu.edu*[2]*Department of Mathematics, Brigham Young University, Provo, UT 84602, USA*[3]*curtkent@mathematics.byu.edu School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China*[4]*luojun3@mail.sysu.edu.cn School of Mathematics (Zhuhai), Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China yangy699@mail.sysu.edu.cn*（通讯作者）

摘要

令 $\lambda_K\colon \mathbb{R}^2 \to \{0,1,\ldots\}\cup\{\infty\}$ 为平面紧连续统 K的 lambda 函数，其定义见 MR4488162。已知，一个平面连续统是局部连通的，当且仅当其 lambda 函数处处为零，等价地， $\lambda_K(K) = \{0\}$。本文证明，每个分形正方形 K 都满足 $\lambda_K(K) \subset \{0,1\}$，并给出判别准则，以分类 $\lambda_K(K)$ 等于 $\{0\}$、$\{1\}$或 $\{0,1\}$的情形。这里，对于任意整数 $N \geq 2$及任意集合 $\mathcal{D} = \{(i,\ j)\colon 0 \leq i,\ j \leq N-1\}$，若其基数为 ≥ 2，且令 $K^{(0)} = [0,1]^2$和 $K^{(n)} = \left\{ \begin{matrix} x+d \\ N \end{matrix} \colon x \in K^{(n-1)},\ d \in \mathcal{D} \right\}(n \geq 1)$，则称 $K = \bigcap_n K^{(n)}$为分形方块。

目录

1 引言与主要结果 2 2 通过分析近似研究 K **3 证明定理 1 13 4 证明定理3 17 5 存在平面紧致集** L_n（$n \geq 1$），**其中** $\lambda_{L_n}(L_n)$ $= \{0,\ldots,n\}$ **20**

1 引言与主要结果

设 K 为一个具有局部连通分支且没有孤立点的平面紧致体。在三种情形下， K 得到了很好的理解。第一，若其连通，则 K 是一个 Peano 连续统；第二，若所有连通分支都是点，则 K 是一个康托尔集；第三， K 是 $[0,1]$ 与一个康托尔集的乘积。这类 K 可能作为某些动力系统的不变集出现，例如有理 Julia 集或自仿射集。第一类包括双曲有理映射 f的 Julia 集。在这种情况下，Julia 集的每个连通分支都是局部连通的 [19, 推论 1.3]；此外，除去有限个周期分支 J_0 满足 $f^p(J_0) = J_0$ （其中 $p \geq 1$ ）及其原像这一可能例外，Julia 集的其他每个连通分支要么是单点，要么是若尔当曲线 [19, 定理 1.2]。第二类包括分形正方形。根据 [15, 定理 2], ，分形正方形的每个连通分支都是局部连通的。

一个值得关注的问题是从某些角度对这类 K 进行分类。我们选择拓扑学观点，并使用 [6]中引入的 lambda 函数 $\lambda_K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。另请参见定义 1.7。注意，若 $x \notin K$ ，则 $\lambda_K(x) = 0$。这意味着， K 之外的单个点与K的拓扑无关。因此，关键在于研究集合 $\lambda_K(K)$。当 K 是一个连续统时， $\lambda_K(K) = \{0\}$ 当且仅当 K是一个 Peano 连续统。当 K 是 $[0,1]$ 与康托尔集的乘积时， $\lambda_K(K) = \{1\}$。当 K 不连通时，要使 $\lambda_K(K)$等于 $\{0\}$，充要条件是 K 的每个连通分支都是 Peano 连续统，且对任意常数 $C > 0$ ， K 中直径为 $> C$的连通分支至多只有有限个。为说明集合 $\lambda_K(K)$可能变得多大，我们参见例5.2和例5.3，其中构造了简单的平面紧空间 K ，它们具有局部连通分支且没有孤立点，并且对某个 $n \geq 2$，有$\lambda_K(K) = \{0, 1, \ldots, n\}$。

本文的主要目标是证明：如果 K 是一个分形方块 $\lambda_K(K)$，那么它等于 $\{0\}$、 $\{1\}$ 或 $\{0,1\}$。一方面，这几种情况都有可能发生；另一方面，我们可以找到判别准则，判断具体的分形方块属于哪种情况。目前，本文尚未涉及双曲有理 Julia 集，不过我们认为类似的结果对它们也成立。

分形方块可定义如下。给定 $N \geq 2$和基数为 $\#\mathcal{D} \geq 2$ 的 $\mathcal{D} \subset \{0, 1, \ldots, N-1\}^2$，我们得到一个有限族 $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \left\{ f_d : \ d \in \mathcal{D} \right\}$，其中每个 $f_d(x) = \frac{x+d}{N}$ 都是比率为 $\frac{1}{N}$ 的压缩映射。按照 Hutchison [11], 的说法，我们称 $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ 为**迭代函数系统** （简称 IFS）。已知存在唯一的非空紧集 $K = K(N, \mathcal{D})$ 满足集合方程 $K = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} f_d(K)$。参见 [5, 第124页，定理9.1] 或 [11, §3.1]。

Defi定义 1.1. 称 $K = K(N, \mathcal{D})$ 为 **分形方块**，其阶为 N，且 $\mathcal{D}$ 为 **数字集** .

分形方块是满足开集条件 [5, pp.128-129]的自相似集。文献中关于分形正方形有许多有趣的结果。近期聚焦于拓扑性质的文章，见 [4, 13, 15, 18, 21, 22, 23, 27]。另请参阅综述 [1] 及其中的参考文献。

给定一个分形方块 K，其所有连通分支都是局部连通的。这样的连通分支可能是一个点、一条线段、一个树状连续体（其基本群是平凡的）、一个基本群非平凡的佩亚诺连续体，或一个没有局部割点的连续体；后一种连续体与谢尔宾斯基通用平面曲线同胚 [25, 定理 3]。 K 在拓扑上的多样性，使得研究分形正方形十分值得。

另一方面， K 的拓扑似乎也受到某种限制。例如，根据 [27] 中的讨论，可以推断出两个简单的二分结论。第一个结论指出， K 要么只有有限个连通分支，要么有不可数多个连通分支。第二个结论表明， K 要么没有点连通分支，要么有不可数多个点连通分支。事实上，如果 K 同时具有点连通分支和非退化连通分支，那么这些非退化连通分支构成一个集合，记为 K_c，其豪斯多夫维数 $\dim_H K_c$ 严格小于 K [10,定理 1.1]的豪斯多夫维数。

从动力学观点来看，分形方块的拓扑同样很有趣，因为分形方块K 通常与某些变换半群在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用有关。 [13], 采用了这一观点，尽管作者没有对这类动力系统作出明确说明。为说明这一点，下面我们给出必要的设定。

给定 $K = K（N，\ \mathcal{D}）$，可以将 $\mathbb{Z}^2$ 视为作用于 $\mathbb{R}^2$上的平移群 $x \mapsto x + d$，其中$d \in \mathbb{Z}^2$，并考察由群 $\mathbb{Z}^2$和位似变换 $\psi_N（x）= Nx$生成的半群 $\mathcal{G}_N$。该半群在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用产生了一个离散动力系统。因此，如果集合 $X \subset \mathbb{R}^2$ 满足在 $\mathcal{G}_N$下不变，则称其为不变的，即对所有 $g \in \mathcal{G}_N$，都有 $g（X）\subset X$。特别地， $H = K + \mathbb{Z}^2 = \{x + d\colon\ x \in K，\ d \in \mathbb{Z}^2\}$ 在 $\mathcal{G}_N$下不变，因为 $H = H + \mathbb{Z}^2$ 且 $\psi_N（H）\subset H$。下文中，我们令 $K^{(0)} = [0, 1]^2$。按照[13], 对 $n \geq 1$ 的定义，我们进一步令

$$K^{(n)} = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \frac{K^{(n-1)} + d}{N}. \tag{1}$$

则 $K^{(n)} = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} \frac{[0,1]^2 + d}{N^n}$，其中 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ 和

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_1 + N\mathcal{D}_{n-1} = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} N^i d_i\colon\ d_i \in \mathcal{D} \right\}. \tag{2}$$

定义1.2。称 $K^{(n)}$ 为 n的 $K = K（N，\ \mathcal{D}）$阶近似。

备注1.3。为了强调 N和 $\mathcal{D}$，我们常将 $K^{(n)}（N、\ \mathcal{D}）$写作 $K^{(n)}$和 $H（N、\ \mathcal{D}）$，而不写作 H。由于 $\left\{K^{(n)}\colon\ n \geq 1\right\}$ 是一个满足 $K = \bigcap_n K^{(n)}$的递减序列，因此可以通过分析 $K^{(n)}$来揭示 K 的某些性质。例如，如果 $K^{(3)}$ 的连通分支数目 $\beta_0\left(K^{(2)}\right)$ 等于 $K^{(2)}$的连通分支数目，那么 $\beta_0（K）= \beta_0\left(K^{(3)}\right)$。参见定理*2.6*。这里， $\beta_0（\cdot）$ 通常表示道路连通分支的数目。由于分形方块 K 的每个连通分支都是局部连通的（因而是道路连通的），所以我们可以放心地用 $\beta_0（K）$表示 K的连通分支数目。

为了便于 在我们的讨论中，下面将引入更多术语。取一条无限直线 L，令 Orb(L)

表示 $\mathrm{Orb}(L) = \{g(L)\colon\ g \in \mathcal{G}_N\}$ 的闭包，即 L 在 $\mathcal{G}_N$ 作用下的轨道。令

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ d \in \{0,1,\dots,N-1\}^2 :\ \frac{[0,1)^2 + d}{N} \bigcap \overline{\mathrm{Orb}(L)} \neq \emptyset \right\}. \tag{3}$$

除了只使用一条直线 L，还可以从一个闭集 $\mathcal{L}$出发，该闭集由两条或更多条直线组成，甚至由无穷多条直线组成；这些直线可以具有相同或不同的斜率，并以类似的方式确定集合 $\mathcal{D}(\mathcal{L})$。这样， $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{L})$便定义良好，并满足 $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \{0,1,\dots,N-1\}^2$。

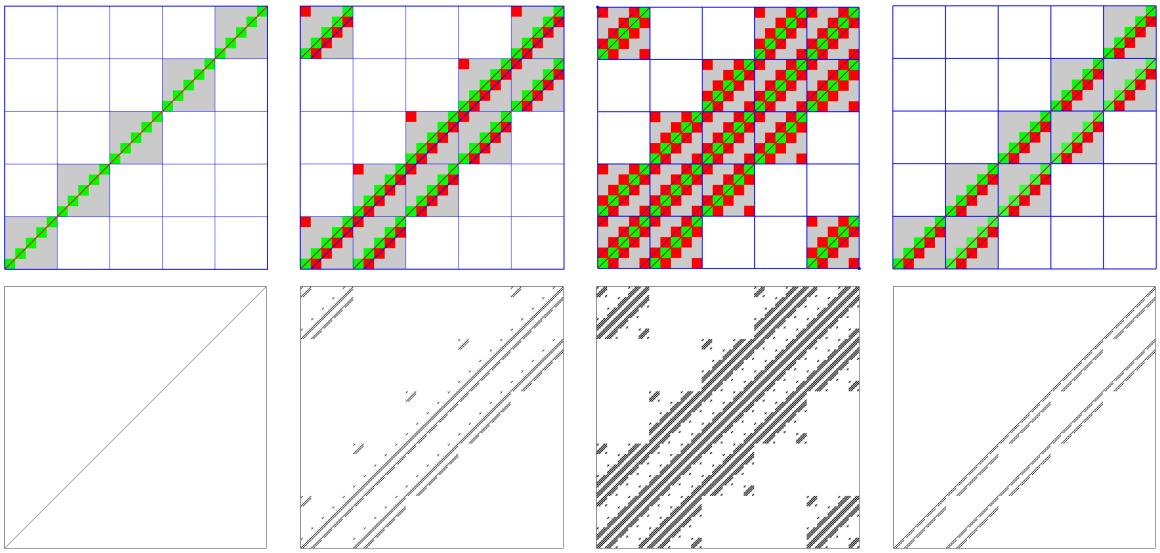
定义 1.4. 称 $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{L})$ 为**数字算子。**

对于在 $\mathcal{G}_N$下不变的任意闭集 X，令 $\mathfrak{L}(X)$ 为包含在 X 中的所有无限直线的并集。则 $\mathcal{D} \mapsto \mathfrak{L}\Big(H(N,\mathcal{D})\Big)$ 定义良好。复合算子 $\mathcal{L} \mapsto \mathfrak{L}\Big(K(N,\mathcal{D}(\mathcal{L}))\Big)$ 也定义良好，其输出是一个在 $\mathcal{G}_N$ 下不变且包含 $\mathrm{Orb}(\mathcal{L})$ 的闭集。此外，对于全不连通分形正方形$K(N,\mathcal{D})$，不存在由无限直线组成的集合 $\mathcal{L}$ 使得 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{L})$。还有其他一些 $K(N,\mathcal{D})$并非全不连通，但也找不到满足 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{L})$ 的 $\mathcal{L}$。此类分形方块的例子见例 1.5 中的 $K(5,\mathcal{D}_0)$。例 2.10 和例 2.11 中，我们给出两个分形方块，一个是树状连续体，另一个则不是。它们都不包含线段。因此，它们的数字集无法通过使用数字算子 $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{L})$ 得到。这里的包含关系 $\mathfrak{L}\Big(H(N,\mathcal{D}(\mathcal{L}))\Big) \supset \mathrm{Orb}(\mathcal{L})$ 可能是严格的。若令 $N = 3$ 和 $\mathcal{L} = L_1 \cup L_2$，其中 $L_1\colon\ x_2 = \frac{x_1}{2}$ 且 $L_2\colon\ x_2 = \frac{2}{3}$，便是这种情况，因为$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{0,1,2\}^2 \setminus \{(1,1)\}$，而 $\mathfrak{L}\Big(H(N,\mathcal{D}(\mathcal{L}))\Big)$ 包含所有经过 $(\omega + i, 0)$ 或 $(0, \omega + i)$、且 $i \in \mathbb{Z}$ 和 ω 属于康托三分集的竖直（或水平）直线。

例 *1.5*。固定 $N = 5$。令 $L_1\colon\ x_2 = x_1$、 $L_2\colon\ x_2 = x_1 - \frac{1}{5}$以及 $L_3\colon\ x_2 = x_1 + \frac{1}{5}$ 为斜率为 *1*、截距分别为 *0*、 $-\frac{1}{5}$ 和 *1 5* 的无限直线。令 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(L_1)$、 $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}(L_1 \cup L_2)$、 $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ 以及 $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_2 \setminus \{(0,4)\}$。图*1*展示了 $K^{(n)}(5,\mathcal{D}_i)(n = 2, 4)$ 对于 $0 \le i \le 3$的情形。于是可以很容易地得到以下观察结果。首先， $K(5,\mathcal{D}_1)$ 是 $[0,1]^2$ 的对角线。其次， $K(5,\mathcal{D}_2)$ 含有可数条线段，其中有无穷多条的直径为 $\ge \frac{4\sqrt{2}}{5}$。第三， $K(5,\mathcal{D}_3)$ 含有不可数条直径为 $\ge \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 的线段。最后， $K(5,\mathcal{D}_0)$ 含有可数条线段，并且它们构成一个零序列，其含义是：对于任意 $C > 0$，其中至多只有有限条线段的直径为 $\ge C$。注意， $\mathfrak{L}\Big(H(5,\mathcal{D}_2)\Big)$ 包含可数条直线，并且一条直线是无限序列的直线$l_j \in \mathfrak{L}\Big(H(5,\mathcal{D}_2)\Big)$ 的极限，当且仅当它包含于 $L_1 + \mathbb{Z}^2$ 中。此外， $\mathfrak{L}\Big(H(5,\mathcal{D}_3)\Big)$ 中位于由 $L_1 \cup L_1 + (0,1)$ 界定的带状区域内的部分，由所有穿过 $(0,t)$ 且 t属于康托尔集 $\mathcal{C}$ 的斜率为 *1* 的直线组成。这个康托尔集 $\mathcal{C}$ 是 $\{g_1, g_2\}$ 的吸引子，其中 $g_1(t) = \frac{t}{5}$ 且 $g_2(t) = \frac{t+4}{5}$。由此可得 $\dim_H \mathfrak{L}\Big(H(5,\mathcal{D}_3)\Big) = 1 + \ln 2 / \ln 5$。

本文中，我们研究分形正方形 K，并讨论与连通性和局部连通性相关的拓扑性质。下面回顾一些概念。

Peano紧致空间是指一种紧集，其局部连通分支具有如下性质：对于任意常数 $C > 0$，直径 $\ge C$ 的分支至多只有有限多个。例如，分形方块



$K^{(n)}(5,\ \mathcal{D}_1)(n=2,\ 4)$ $K^{(n)}(5,\ \mathcal{D}_2)(n=2,\ 4)$ $K^{(n)}(5,\ \mathcal{D}_3)(n=2,\ 4)$ $K^{(n)}(5,\mathcal{D}_0)(n=2,4)$

图1：四个分形正方形的近似 K。

$K(5,\mathcal{D}_i)(i=0,1)$（例 1.5）是皮亚诺紧致体，而 $K(5,\mathcal{D}_i)(i=2,3)$ 则不是。参见 [14, 定理3]，了解研究多项式 Julia 集时引入 Peano紧致空间的动机。另请参见 [17]，了解 Peano紧致空间在将 Carath´eodory 连续性定理（[2, 定理 3]或[20, 第 18] 页）推广至无限连通域时所发挥的作用。

根据 [14, 定理 7], ，我们知道每个平面紧致体 K 都允许进行一种特殊的上半连续（简称 usc）分解，将其分解为子连续体，记作 $\mathcal{D}_K^{PC}$，并且同时满足以下两个要求。首先，所得的商空间是一个佩亚诺紧集。其次， $\mathcal{D}_K^{PC}$细化任何其他满足第一项要求的此类分解。

定义 1.6。 我们称 $\mathcal{D}_K^{PC}$为 K 关于皮亚诺商空间的**核心分解** 。

注意， $\mathcal{D}_K^{PC}$也是 K的一个原子分解，按照 [7, 定义 1.1]的意义来说。因此， $\mathcal{D}_K^{PC}$的每个元素都称为 K的一个**原子** （一阶）或一**阶原子** 。此外，若 δ 是 K的一个一阶原子，则 δ 的每个原子都称为 K的二**阶原子**。归纳地，我们可以为 $m \geq 3$ 定义 **阶原子** m ，并进一步定义 λ_K： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 如下。

对所有 $x \notin K$，令 λ_K（x） $= 0$ 。对满足以下条件的 $x \in K$ ，令 λ_K（x） $= m-1$ ： 存在最小的 $m \geq 1$，使得 $\{x\}$ 是 K 的一个m 阶原子（因此，若 $m > 1$，则 $\{x\}$ 不是 $m-1$阶原子）。若不存在这样的整数 m ，则令 λ_K（x） $= \infty\, x \in K$。

定义 1.7。我们称 λ_K： $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为**lambda 函数**，其对应的 K。

lambda 函数 λ_K 及其值域 $\lambda_K(K) = \{\lambda_K(x) : x \in K\}$ 量化了 K拓扑的某些方面。特别地，若连续统 $K \subset \mathbb{R}^2$ 满足 $\lambda_K(x) = 0$，则它在 $x \in K$ 处局部连通。以下示例说明， K 在 x_0 处的局部连通性并不意味着 $\lambda_K(x_0) = 0$。

例 1.8. 令 K 为 $L_0 = \{(t,0) : 0 \le t \le 1\}$ 与连接$(0、0)$和$(1, \frac{1}{n})$的线段 $L_n (n \ge 1)$ 的并集。那么 K 是**闭无限扫帚** *_[24, p.139]*，并且 $\lambda_K(x) = 1$ 当且仅当 $x \in L_0$。特别地， K 在 $x_0 = (0,0)$ 处局部连通，而 $\lambda_K(x_0) = 1$。

给定一个连续统 $K \subset \mathbb{R}^2$， $\lambda_K(x)$ 对特定的 x 度量了其在 x_0 处的非局部连通程度。因此， $\lambda_K(x)$ 为非局部连通性提供了一种数值尺度。基于平面连续体的纤维构造的类似尺度已在 [12] 中讨论。

借助 λ_K，我们可以对经典的 Torhorst定理（[26, 第106页，(2.2)]）进行“量化”。该定理指出，局部连通连续统的每个补域都由一个局部连通连续统作为边界。我们可以将这一结果加强如下。

定理 ([**6, 定理 2**])。 给定一个紧集 $K \subset \mathbb{R}^2$、 $\mathbb{R}^2 \setminus K$ 的一个连通分支 U 以及一个非空紧集 $L \subset \partial U$，对于所有 $x \in \mathbb{R}^2$，有 $\lambda_L(x) \le \lambda_{\partial U}(x) \le \lambda_K(x)$。

如果 K 源自复动力学（如多项式 Julia 集）或分形几何（如自相似集），lambda 函数 λ_K 将特别值得关注。本文重点研究分形正方形 K，它们是特殊的自相似集。首先，我们得到以下结果。

定理 1 (**二分定理**)。设 K 是一个分形方块，且 $H = K + \mathbb{Z}^2$。则下列结论之一成立：*(1)* $\mathbb{R}^2 \setminus H$ 的连通分支无界，且 K 的每个连通分支要么是单点，要么是线段；*(2)* $\mathbb{R}^2 \setminus H$ 的连通分支直径为 $\le \sqrt{2}(N^2+1)^2/N$，并且K 是一个 *Peano*紧致空间。因此，我们有 $\lambda_K(K) \subset \{0,1\}$。 _

根据 [15, 定理 2], ，分形方块的每个连通分支都是局部连通的。然而，这并不意味着 $\lambda_K(K) \subset \{0,1\}$。例5.2和例5.3给出了紧空间 $L_n (n \ge 2)$，它们的连通分支局部连通，且满足 $\lambda_{L_n}(L_n) = \{0,1,\dots,n\}$。根据定理 1，如果 $\lambda_K(x) > 0$ 对某个 $x \in K$ 成立，那么 K 的每个连通分支要么是一个点，要么是一条线段。由此可得 $\lambda_K(K) \subset \{0,1\}$。因此，定理 1 改进了以下结果。

定理 ([**13, 定理 2.2**]). 设 K 是一个分形方块，且 $H = K + \mathbb{Z}^2$。那么，以下断言之一成立：*(1)* $\mathbb{R}^2 \setminus H$ 的连通分支无界，且 K 的每个连通分支要么是一个点，要么是一条线段；*(2)* $\mathbb{R}^2 \setminus H$的连通分支的直径为 $\le \sqrt{2}(N^2+1)^2/N$。 _

其次，我们刻画满足 $\lambda_K(K) = \{1\}$ 的分形方块 $K = K(N, \mathcal{D})$。这里必须有 $N \ge 3$，因为对于所有 $\mathcal{D} \subset \{0,1\}^2$， $K(2, \mathcal{D})$ 都是连通的。

定理 2。 **</style}给定** $(N, \mathcal{D})$，其中 $N \ge 3$, $\lambda_K(K) = \{1\}$，当且仅当 K 是 $[0,1]$与某个线性康托集的乘积，且该线性康托集是如下形式的迭代函数系统的吸引子： $\left\{ f_j(t) = \frac{s+t_j}{N} : __1 \le j \le k \right\}$，其中 $2 \le k \le N-2$ 且 $t_1, \dots, t_k \in \left\{ \frac{i}{N} : \quad 0 \le i \le N-1 \right\}$ 互不相同。

最后，我们刻画满足 $\lambda_K(K) = \{0,1\}$ 的分形正方形 K。根据定理 1，我们只需考虑 K 同时具有点和线段作为连通分支的情形。于是，所有这些线段的斜率都相同，为 $\tau = \frac{r}{s}$，其中 r 和 s 是互素整数。设 $(x_1, x_2) \xrightarrow{\Pi_\tau} x_2 - \tau x_1$ 为 $\mathbb{R}^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的投影。$\prod_\tau(H_1)$ 的连通分支是开区间，其直径有正下界；$\Omega_1 = \left[0, \frac{1}{s}\right] \setminus \prod_\tau \left(\mathbb{R}^2 \setminus H_1\right)$ 是一个非空紧集，具有有限多个连通分支，它们是孤立点或非退化闭区间。不失一般性，假设 Ω_1 有 $m = m_{\mathcal{D}}$ 个（或没有）非退化连通分支，以及 $q = q_{\mathcal{D}}$ 个（或没有）孤立点。于是，得到如下结论。

定理3。如果 $m \geq 2$，那么豪斯多夫维数 $\dim_H \lambda_K^{-1}(1)$ 严格大于一。如果 $m = 1$ 且 $q \geq 1$，那么 $\dim_H \lambda_K^{-1}(1) = 1$。如果 $m \leq 1$ 且 $mq = 0$，那么 $\lambda_K^{-1}(1) = \emptyset$。

例 1.9。设数字集 $\mathcal{D}_i (i = 1、2、3)$ 如例 *1.5* 中所示。则这一对 (m, q) 分别等于 $(0、1)、(1、1)$ 和 $(2、0)$。根据定理*3*，分形方块 $K_i = K(5、\mathcal{D}_i)$ 分别满足 $\lambda_{K_1}^{-1}(1) = \emptyset、\dim_H \lambda_{K_2}^{-1}(1) = 1$ 以及 $\dim_H \lambda_{K_3}^{-1}(1) > 1$。

注 1.10。对于任意给定了 N 和 $\mathcal{D} \subset \{0, \ldots, N-1\}^2$ 的 $K = K(N, \mathcal{D})$，整数 $q_{\mathcal{D}}$ 和 $m_{\mathcal{D}}$ 均可确定。因此，定理*3*刻画了所有同时以点和线段为连通分支的分形正方形。进一步细节请参见定理 *4.1* 和 *4.4*。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍必要的概念和基本结果，并尝试说明 K 的某些拓扑性质与 $K^{(n)}$ 的联系。第 3 节证明定理 1 和 2。第 4 节讨论定理3。第 5 节给出具体构造的紧空间 L_n（$n \geq 1$），使得 $\lambda_{L_n}(L_n) = \{0, \ldots, n\}$。

2 通过分析近似来研究 K （ $K^{(n)}$）

阶为 $N = 2$ 的分形方块有三种可能：（1）它是一条线段；（2）它是整个单位正方形；（3）它与经典的谢尔宾斯基三角形之间存在仿射双射。由于我们主要关注拓扑性质，因此将聚焦于任意给定阶 $N \geq 3$ 的 $K = K(N, \mathcal{D})$。显然，若 $\mathcal{D} \subset \{0, 1, \ldots, N-2\}^2$，那么 K 是一个康托尔集。因此，除非明确说明相反情况，我们通常假设存在 $d = (i, j) \in \mathcal{D}$，且 $\max\{i, j\} = N - 1$。

在本节中，我们将 $\mathcal{D}$ 视为 K 的“数据”，并探讨 K 的拓扑受到$\mathcal{D}$的哪些限制。实际上，我们将说明连通分支的数量 $\beta_0(K)$ 如何由 $K^{(3)}$ 决定，以及在什么条件下基本群 $\pi_1(K)$（当 K 连通时）是平凡的。对于一般的自相似集，人们不会预期存在这样的联系。

我们先从一些有用的图说起。第一个是经典图，其起源于 [8]。

定义 2.1。 给定一个分形方块 $K = K(N, \mathcal{D})$，令 $G_1 = G_1(\mathcal{D})$ 为顶点集$\{f_d(K) : d \in \mathcal{D}\}$ 的图，其中两个顶点 $f_d(K)f_{d'}(K)$ 相邻，当且仅当 $d \neq d'$ 且对应的集合相交。我们称 G_1 为 $K(N, \mathcal{D})$的**第一 Hata 图** 。

同样地， G_1 也可针对一般的自相似集进行定义。根据 [8, 定理 4.6]，当且仅当 G_1 连通时， K 才是连通的。进一步地，对所有满足 $d_i \in \mathcal{D}$的 $d = \sum_{i=0}^{n-1} N^{i-1}d_i$，令 $f_d = f_{d_1} \circ f_{d_2} \circ \cdots \circ f_{d_n}$。类似地，我们可以定义图 $G_n = G_n(\mathcal{D})$，其顶点集为 $\{f_d(K)$：当且仅当 $d \neq d'$ 且相应的集合相交时， $d \in \mathcal{D}_n\}$ 使得 $f_d(K)f_{d'}(K)$ 共享一条边。

定义 2.2。 将 $G_n = G_n(\mathcal{D})$ 称为 $K = K(N, \mathcal{D})$的第 n 个畑图。

注意， $K(N,\ \mathcal{D})$ 也是一个阶为 $N^n(n \geq 2)$ 的分形方块，其数字集为 $\mathcal{D}_n$。因此，我们有$K(N,\ \mathcal{D}) = K(N^n,\ \mathcal{D}_n)$。下文将研究 K 的拓扑，以及 $\beta_0(K)$ 与带有 $n \leq 3$ 的 $K^{(n)}$ 之间的关系。令 $G_1^* \subset G_1$ 为具有相同顶点集的子图，使得当且仅当 $K^{(2)} + d$ 与 $K^{(2)} + d'$相交时， G_1^* 中有一条边连接 $f_d(K)$ 和 $f_{d'}(K)$。于是得到如下结果。

定理 2.3 ([4, 定理 2.2])。 $G_1 = G_1^*$。因此，如果 $\beta_0\left(K^{(3)}\right) = 1$ 那么 $\beta_0(K) = 1$。

定理 2.3 也可由以下结果推出。

引理 2.4。 如果 $\left(K^{(2)} + d_1\right) \cap \left(K^{(2)} + d_2\right) \neq \emptyset$ 对于属于 $\mathcal{D}_1$ 的 $d_1 \neq d_2$，则存在 $e_1, e_2 \in \mathcal{D}_2$ 使得 $\left(\frac{K+e_1}{N^2} + d_1\right) \cap \left(\frac{K+e_2}{N^2} + d_2\right) \neq \emptyset$。特别地，我们有 $(K + d_1) \cap (K + d_2) \neq \emptyset$。

证明。 如果 $[0, 1]^2$ 的某个角不属于 K，那么它也不属于 $K^{(1)}$，因此不属于 $K^{(2)}$。所以，只要 $|d_1 - d_2| = \sqrt{2}$，结论就显然成立。因此，我们只需考虑 $|d_1 - d_2| = 1$ 的情形。不失一般性，可设 $d_1 = (0,0)$ 和 $d_2 = (1,0)$。

假设 $\left(K^{(2)} + d_1\right) \cap \left(K^{(2)} + d_2\right) \neq \emptyset$ 蕴含存在 $e_1, e_2 \in \mathcal{D}_2$，使得 $\frac{[0,1]^2+e_1}{N^2} + d_1$ 和 $\frac{[0,1]^2+e_2}{N^2} + d_2$ 至少有一个公共点 x_0。只需验证：

$$\left(\frac{K + e_1}{N^2} + d_1\right) \cap \left(\frac{K + e_2}{N^2} + d_2\right) \neq \emptyset. \tag{4}$$

为此，我们选取 $e_i', e_i'' \in \mathcal{D}_1$ 作为 $i = 1, 2$，使得 $e_i = e_i' + Ne_i''$，并设定 $Q_i = \frac{K^{(1)}+e_i}{N}$。于是有三种可能。第一， $e_1'' = (N - 1, k)$ 且 $e_2'' = (0, k + 1)$，其中 $0 \leq k \leq N - 2$和 $x_0 \in Q_1 \cap Q_2$。见图 2 左侧。第二， $e_1'' = (N - 1, k + 1)$ 且 $e_2'' = (0, k) \in \mathcal{D}$，其中 $0 \leq k \leq N - 2$和 $x_0 \in Q_1 \cap Q_2$。见图 2 右侧。第三， $e_1'' = (N - 1, k)$ 且 $e_2'' = (0, k)$，其中$0 \leq k \leq N - 1$和 $x_0 \in Q_1 \cap Q_2$。在第一种情况下，我们有 $\{(0, 0), (N - 1, N - 1)\} \subset \mathcal{D}$，这意味着 $(0, 0), (1, 1) \in K$，因此

$$x_0 \in \left(\frac{K + e_1}{N^2} + d_1\right) \bigcap \left(\frac{K + e_2}{N^2} + d_2\right).$$

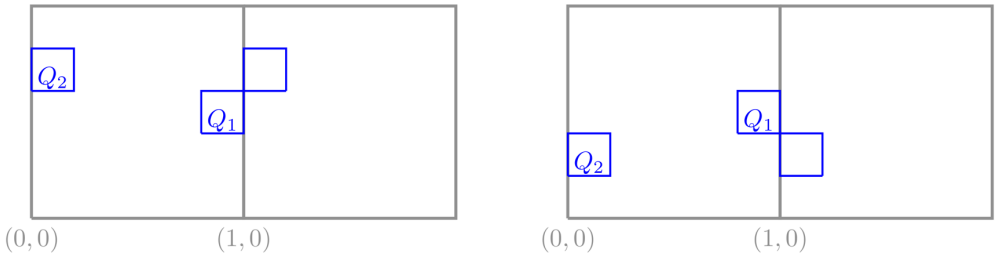


图 2：第一种和第二种情况下 Q_1 与 Q_2 的相对位置。

在第二种情况下，我们有 $\{(N-1,\ 0),\ (0,\ N-1)\} \subset \mathcal{D}$，这意味着 $(1,\ 0),\ (0,\ 1) \in K$，因此

$$x_0 \in \left(\frac{K+e_1}{N^2}+d_1\right) \bigcap \left(\frac{K+e_2}{N^2}+d_2\right).$$

在最后一种情况下，点 $u_1 = \left(1, \frac{k}{N-1}\right)$ 由 $f_{e_1''}(x) = \frac{x+e_1''}{N}$ 固定，并与 $u_2 + (1,\ 0)$ 重合，其中 $u_2 = \left(0, \frac{k}{N-1}\right)$ 由 $f_{e_2''}(x) = \frac{x+e_2''}{N}$ 固定。因此

$$u_1 \in \left(\frac{K+e_1}{N^2}+d_1\right) \bigcap \left(\frac{K+e_2}{N^2}+d_2\right).$$

在所有情况下，我们都验证了方程4。证明至此完成。 □

为了说明 $K^{(n)}$ 的拓扑如何随 n增大至 ∞而变化，我们引入以下细分规则。对于任意 $i,\ j \geq 1$，令 $K^{(i)} \bigotimes K^{(j)}$ 为通过**将每个正方形** $\frac{[0,1]^2+d}{N^i}$ **替换为** $d \in \mathcal{D}_i$ **而得到的集合** $\frac{K^{(j)}+d}{N^i}$。所得对象就是 $K^{(i+j)}$。

定义2.5。称 $K^{(i)} \bigotimes K^{(j)}$ 为对 $K^{(i)}$ 进行基于 $K^{(j)}$的细分。

我们认为 $K^{(i)} \bigotimes K^{(j)}$ 和 $K^{(j)} \bigotimes K^{(i)}$ 是不同的操作，因为 $K^{(i)} \bigotimes K^{(j)}$ 表示从 $K^{(i)}$ 开始，通过基于 $K^{(j)}$的细分规则得到 $K^{(i+j)}$；而 $K^{(j)} \bigotimes K^{(i)}$ 表示从 $K^{(j)}$ 开始，通过基于 $K^{(i)}$的细分规则得到 $K^{(i+j)}$。

定理2.6。对于任意 $n_0 \geq 2$，如果 $\beta_0\left(K^{(n_0+1)}\right) = \beta_0\left(K^{(n_0)}\right)$，那么 $\beta_0(K) = \beta_0\left(K^{(n_0)}\right)$。

证明。令 $q = \beta_0\left(K^{(n_0)}\right)$。我们将归纳证明，对于所有 $n \geq n_0$，$\beta_0\left(K^{(n)}\right) = q$。当 $n \leq n_0+1$时，这已由假设给出。下文中，我们假设对于 $n_0 \leq j \leq n$，$\beta_0\left(K^{(j)}\right) = q$，并推得 $\beta_0\left(K^{(n+1)}\right) = q$ 仍然成立。设 $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_q$ 是 $K^{(n-1)}$ 的连通分支，$\mathcal{P}_1^{\#}, \ldots, \mathcal{P}_q^{\#}$ 是 $K^{(n)}$ 的连通分支，且 $\mathcal{P}_j^{\#} \subset \mathcal{P}_j$。回想一下，$K^{(n)} = K^{(1)} \bigotimes K^{(n-1)}$ 且 $K^{(n+1)} = K^{(1)} \bigotimes K^{(n)}$。对于任意 $1 \leq j \leq q$ 和 $d \in \mathcal{D}_1$，令 $\Delta_{j,d} = \frac{\mathcal{P}_j+d}{N}$ 以及 $\Delta_{j,d}^{\#} = \frac{\mathcal{P}_j^{\#}+d}{N}$。这里有三个观察。首先，所有这些集合 $\Delta_{j,d}$ 和 $\Delta_{j,d}^{\#}$ 都是连通的。其次，以下两个等式均成立：

$$K^{(n)} = \bigcup_{j=1}^{q} \bigcup_{d \in \mathcal{D}_1} \Delta_{j,d} \tag{5}$$

$$K^{(n+1)} = \bigcup_{j=1}^{q} \bigcup_{d \in \mathcal{D}_1} \Delta_{j,d}^{\#} \tag{6}$$

最后，每个 $\mathcal{P}_i^{\#}$ 由所有 $\Delta_{j,d} \in \mathcal{U}^{(i)}$ 组成。对于 $1 \le i \le q$，令 $\mathcal{U}^{(i)}$ 为满足 $1 \le j \le q$ 且 $d \in \mathcal{D}_1$ 、并包含于 $\mathcal{P}_i$ 中的那些 $\Delta_{j,d}$ 所构成的族。类似地，令 $\mathcal{U}^{\#(i)}$ 为满足 $1 \le j \le q$ 且 $d \in \mathcal{D}_1$ 、并包含于 $\mathcal{P}_i^{\#}$ 中的那些 $\Delta_{j}^{\#}{}_{,d}$ 所构成的族。于是我们分别定义两个图 $\mathcal{G}^{(i)}$ 和 $\mathcal{G}^{\#(i)}$，其顶点集分别为 $\mathcal{U}^{(i)}$ 和 $\mathcal{U}^{\#(i)}$；当且仅当对应的集合相交时，两个顶点之间存在一条边。对于任意 $(j,d) \neq (j',d')$，若 $1 \le j, j' \le q$ 且 $d \neq d'$ 属于 $\mathcal{D}_1$，由引理 2.4 可知，以下两个等式均成立：

$$\Delta_{j,d} \cap \Delta_{j',d'} = \frac{\mathcal{P}_j + d}{N} \cap \frac{\mathcal{P}_{j'} + d'}{N} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathcal{P}_j \cap K + d}{N} \cap \frac{\mathcal{P}_{j'} \cap K + d'}{N} \neq \emptyset \tag{7}$$

$$\Delta_{j,d}^{\#} \cap \Delta_{j',d'}^{\#} = \frac{\mathcal{P}_j^{\#} + d}{N} \cap \frac{\mathcal{P}_{j'}^{\#} + d'}{N} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathcal{P}_j^{\#} \cap K + d}{N} \cap \frac{\mathcal{P}_{j'}^{\#} \cap K + d'}{N} \neq \emptyset \tag{8}$$

由此可知，$\mathcal{G}^{(i)}$ 和 $\mathcal{G}^{\#(i)}$ 是同构图，因为 $\mathcal{P}_k \cap K = \mathcal{P}_k^{\#} \cap K$ 适用于 $1 \le k \le q$，因此我们有：

$$\Delta_{j,d} \cap \Delta_{j',d'} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_{j,d}^{\#} \cap \Delta_{j,d}^{\#} \neq \emptyset \tag{9}$$

由于 $\mathcal{P}_i^{\#}$ 是 $K^{(n)}$ 的一个连通分支，且由所有$\Delta_{j,\ d} \in \mathcal{U}^{(i)}$构成，因此我们看到 $\mathcal{G}^{(i)}$，故 $\mathcal{G}^{\#(i)}$ 是一个连通图。这就意味着所有$\Delta_{j}^{\#}{}_{,\ d} \in \mathcal{U}^{\#(i)}$ 的并集 $\mathcal{Q}_i$ 是一个连通集。由于$K^{(n+1)} = \bigcup_i \mathcal{Q}_i$，显然有 $\beta_0\left(K^{(n+1)}\right) = q$。证毕。

□

若在定理2.6中有 $n_0 = 2$，则很容易判断 $\beta_0\left(K^{(2)}\right) = \beta_0\left(K^{(3)}\right)$是否成立。注意，条件 $n_0 \ge 2$ 是尖锐的。例如，若 $\mathcal{D}_1$ 取自例 2.7，则 $\beta_0\left(K^{(1)}(3,\ \mathcal{D}_1)\right) = \beta_0\left(K^{(2)}(3,\ \mathcal{D}_1)\right) = 1$，而 $\beta_0\left(K^{(3)}(3,\ \mathcal{D}_1)\right) = 3$。然而，目前尚无已知的分形方块 K 满足$1 < \beta_0\left(K^{(1)}\right) = \beta_0\left(K^{(2)}\right) < \beta_0\left(K^{(3)}\right)$。

例 2.7. 令 $\mathcal{D}_1 = \{(1,0)、(0,1)、(1,1)、(2,1)、(2,2)\}$。图 *3* 的左侧展示了 $K^{(n)}(3,\mathcal{D}_1)$，对应 $1 \le n \le 3$。我们有 $\beta_0\left(K^{(1)}(3,\mathcal{D}_1)\right) = \beta_0\left(K^{(2)}(3,\mathcal{D}_1)\right) = 1$，以及 $\beta_0\left(K^{(3)}(3,\mathcal{D}_1)\right) = 3$。右

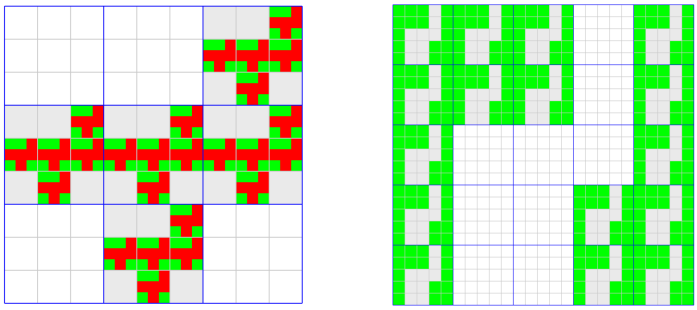


图 3：两个分形正方形的初始近似。

图 *3* 的右侧展示了 $K^{(n)}(5,\mathcal{D}_2)(n = 1,2)$，对应 $K(5,\mathcal{D}_2)$；其中 $\mathcal{D}_2$ 是对 *[27, 图 1]*，中所示内容的修改，使用的数字更少。注意，$\beta_0\left(K^{(1)}(5,\mathcal{D}_2)\right) = \beta_0\left(K^{(2)}(5,\mathcal{D}_2)\right) = 2$。由此可得$\beta_0\left(K^{(3)}(5,\mathcal{D}_2)\right) = 2$，因此 $\beta_0\left(K(5,\mathcal{D}_2)\right) = 2$。

第 n 扩展定理给出了使基本群 $\pi_1(K)$ 平凡的一个充分条件。

定理 2.8. 给定一个连通分形方形 K, $\pi_1(K)$ 当且仅当 $\pi_1\left(K^{(3)}\right)$ i 时是平凡的

The $s.$

证明。 假设 $K = K(N,\ \mathcal{D})$，其中 $\mathcal{D} \neq \{0,1,\ldots,N-1\}^2$ 是数字集。反之，若 $\pi_1(K)$ 不是平凡的，则存在一个非平凡环路 $\gamma\colon\ [0,1] \to K$，使得补集 $[0,1]^2 \setminus \gamma([0,1])$ 至少有一个连通分支 U，该连通分支通过 $\gamma([0,1])$ 与 ∞ 分离。于是，当 n 足够大时，至少有一个大小为 $\frac{1}{N^n}$ 的正方形完全包含于 $U \setminus K^{(n)}$ 中。这意味着 $\pi_1\left(K^{(n)}\right) \neq \{0\}$。因此，只需证明对所有 $n \geq 1$ 都有 $\pi_1\left(K^{(n)}\right) = \{0\}$。接下来我们将通过归纳法完成证明。

由于根据假设 $\pi_1\left(K^{(3)}\right) = \{0\}$，$\pi_1\left(K^{(n)}\right) = \{0\}$（其中 $n \leq 3$）得以保证，我们假设对于所有 $j \leq n$（其中 $n \geq 3$）都有 $\pi_1\left(K^{(j)}\right) = \{0\}$，并据此推得 $\pi_1\left(K^{(n+1)}\right) = \{0\}$。

首先，假设 $\mathcal{D} \neq \{0,1,\ldots,N-1\}^2$ 和 $\pi_1\left(K^{(1)}\right) = \{0\}$ 蕴含以下结论。

断言 1。 K 不包含 $\partial[0,1]^2$

其次，我们得到以下结论。

im 2。给定 $d \neq d'$ 属于 $\mathcal{D}$，如果 $\left(K^{(2)}+d\right) \cap \left(K^{(2)}+d'\right)$ 非空，则它是连通的

Cla .

否则，就会存在一个分离，记为 $\left(K^{(2)}+d\right) \cap \left(K^{(2)}+d'\right) = A \cup B$。取 $a \in A$ 和 $b \in B$。根据引理 2.4，我们有 $d - d' \in \{\pm(1,0)\ \pm(0,1)\}$。不妨设 $d - d' = \pm(1,0)$。取两条弧 $\gamma \subset K^{(2)}+d$ 和 $\gamma' \subset K^{(2)}+d'$，它们分别连接 a 与 b。于是，$J = \gamma \cup \gamma'$ 有一个有界补连通分支，记为 U，该分支不包含于并集 $\left(K^{(2)}+d\right) \cup \left(K^{(2)}+d'\right)$ 中。这是因为 $\pi_1\left(K^{(2)}\right) = \{0\}$。因此，$\frac{U}{N}$ 不包含于 $K^{(3)}$ 中。由于 $\frac{K^{(2)}+d}{N}$ 和 $\frac{K^{(2)}+d'}{N}$ 都包含于 $K^{(3)}$ 中，$\frac{J}{N}$ 包含于 $K^{(3)}$ 中，而 $\frac{U}{N}$ 是 $\mathbb{R}^2 \setminus \frac{J}{N}$ 的一个连通分支。鉴于假设，$\frac{U}{N}$ 不包含于 $K^{(3)}$ 和 $\pi_1\left(K^{(3)}\right) = \{0\}$ 中，这显然是不可能的。

第三，我们使用**断言 2**来得到如下结论。

断言 3。如果存在 $d, d' \in \mathcal{D}$，且 $d - d' = (1,0)$，那么不存在满足 $\{0, N-1\} \times \{u, v\} \subset \mathcal{D}$的 $0 \leq u < v \leq N-1$。同样，如果存在 $d, d' \in \mathcal{D}_1$，且 $d - d' = (0,1)$，那么不存在满足 $\{u, v\} \times \{0, N-1\} \subset \mathcal{D}$的$0 \leq u < v \leq N-1$。

反设存在这样的整数 $u < v$。那么 $K^{(2)}$ 将包含集合$\frac{[0,1]^2+(N+1\ d'')}{N^2}$，其中 $d'' \in \{0, N-1\} \times \{u, v\}$。参见图 4，它展示了四个正方形 $\frac{[0,1]^2+d''}{N}$ 的相对位置，其中 $d'' \in \{0, N-1\} \times \{u, v\}$。由于我们假设存在 $d, d' \in \mathcal{D}$，且$d - d' = (1,0)$，$\left(K^{(2)}+d\right) \cap \left(K^{(2)}+d'\right)$ 包含

$$\left\{d + (0,t) : \frac{u}{N} + \frac{u}{N^2} \leq t \leq \frac{u}{N} + \frac{u+1}{N^2} \text{ or } \frac{v}{N} + \frac{v}{N^2} \leq t \leq \frac{v}{N} + \frac{v+1}{N^2}\right\}.$$

应用**断言 2** 后，我们可以得出结论： K 包含 $[0,1]^2$ 的四个角，因此 $\partial[0,1]^2$。这与**断言 1**相矛盾。

现在，我们通过指出三个基本观察来完成证明。首先，$\left\{\frac{K^{(n)}+d}{N} :\ d \in \mathcal{D}\right\}$ 是 $K^{(n+1)}$的一个覆盖。其次，由**断言 2** 和**断言 3**可知，对于任意属于 $\mathcal{D}$ 的 $d \neq d'$ 以及任意

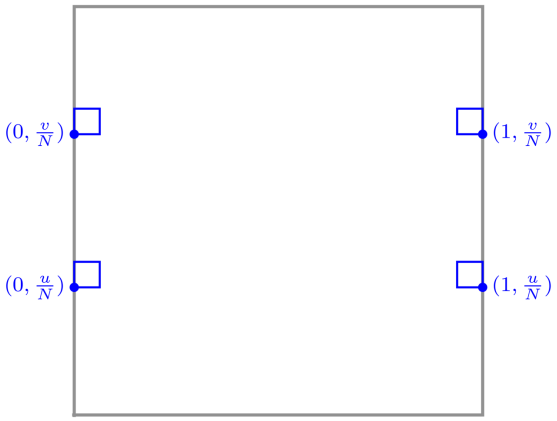


图 4： $[0,1]^2$ 中四个点 $(0, \frac{u}{N})$，$(0, \frac{v}{N})$，$(1, \frac{u}{N})$，$(1, \frac{v}{N})$的位置。

$n \geq 2$ 交集 $\frac{K^{(n)}+d}{N} \bigcap \frac{K^{(n)}+d'}{N}$ 要么为空，要么是单点集。第三，根据范·坎彭定理（参考文献 [9, 第43页, 定理 1.20]），显然有 $\pi_1\left(K^{(n+1)}\right) = \{0\}$。 □

本节最后，我们给出三个分形正方形。例 2.9 中的分形正方形表明定理 2.8 的逆命题不成立。例 2.10 中给出的分形正方形是一个树状连续体，因为它满足定理 2.8 的条件。然而，例 2.11 中给出的分形正方形具有非平凡的基本群，因此不满足定理 2.8 的条件。这里我们注意到，例 2.10 和例 2.11 中给出的两个分形正方形都不包含线段。

例 2.9。 设 $K = K_{\mathcal{D}}$ 是一个阶为五的分形正方形，其第一次和第六次近似分别如图 *5* 左侧和中间所示。注意， $\pi_1\left(K^{(n)}\right)$ 中没有一个是平凡的，而 $\pi_1(K)$是平凡的。令 $d' \notin \mathcal{D}$ 为相应的数字，使得 $f_{d'}[0,1]^2 = \frac{[0,1]^2+d'}{5}$ 如图 *5* 左侧所示。由此得到的分形正方形 K' 具有非平凡的、因而不可数的基本群。图 *5* 右侧展示了 K'的第六次近似。

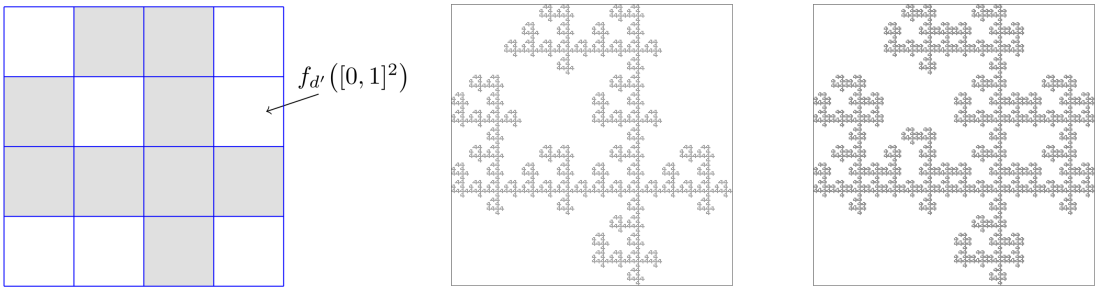


图 5： $K^{(1)}$ 和 $K^{(6)}$ （左图和中图）； K'的第六次近似。

例 2.10. 令 $K = K_{\mathcal{D}}$ 为一个四阶分形方块，其第一次近似和第一 *Hata* 图 G_1 如图 *6* 左侧所示。容易验证，*(1)* G_1 是树，且 *(2)*$\pi_1\left(K^{(1)}\right) = \pi_1\left(K^{(2)}\right) = \{0\}$。关于近似 $K^{(1)} \supset K^{(2)}$ 以及 $\frac{K^{(1)}+d}{4}$ 与 $\frac{K^{(1)}+d'}{4}$ 在 $\mathcal{D}$中相交的情形（其中 $d \neq d'$ 位于 $\mathcal{D}$中），请见图 *6* 中间部分。根据这些细节，很容易进一步推断

即 $\pi_1\left(K^{(3)}\right)=\{0\}$。根据定理 *2.8*， $\pi_1(K)$ 是平凡的，因此 K 是树状连续体。注意， K中不包含任何线段。

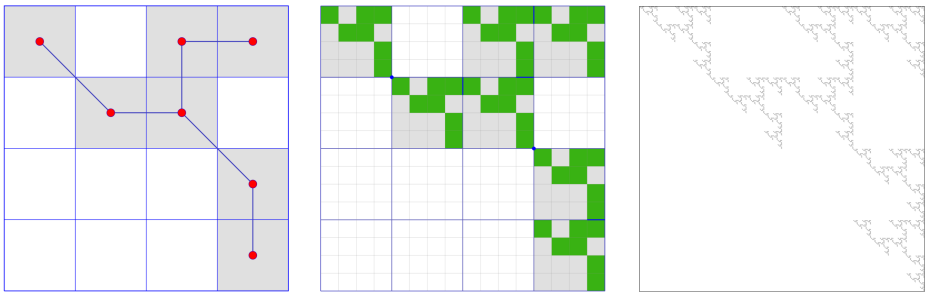


图 6： $K^{(1)}$ 和 G_1 **（左）**； $K^{(1)}\supset K^{(2)}$ **（中）**；以及 $K^{(6)}$ **（右）**。

例 2.11。 设 $K=K_{\mathcal{D}}$ 是一个四阶分形方块，其第一近似和第一 *Hata* 图 G_1 如图 *7* 左图所示。容易验证，*(1)* G_1 是一棵树；*(2)*$\pi_1\left(K^{(1)}\right)=\{0\}$，而 $\pi_1\left(K^{(n)}\right)\neq\{0\}$ 对所有 $n\geq 2$均成立。近似 $K^{(1)}\supset K^{(2)}$见图 *7* 中图。注意，对于某些位于 $\mathcal{D}$中的 $d\neq d'$， $\frac{K^{(1)}+d}{4}$ 与 $\frac{K^{(1)}+d'}{4}$ 的交集可能不连通。此外，我们可以推断 $\pi_1(K)\neq\{0\}$。同样， K中不包含任何线段。

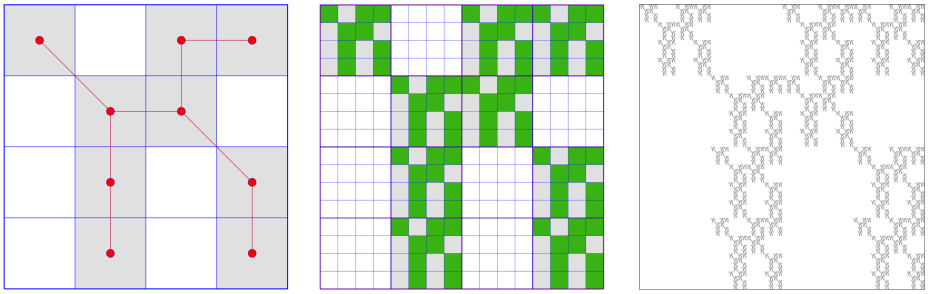


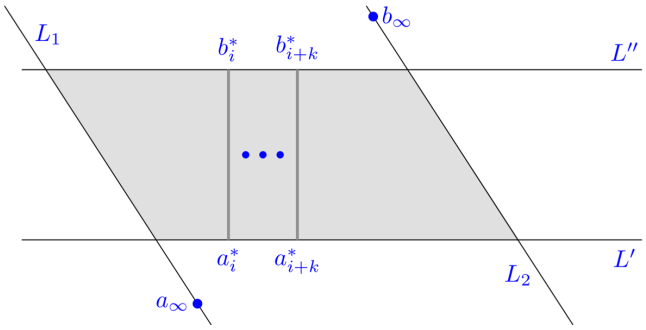
图 7： $K^{(1)}$ 和 G_1 **（左）**； $K^{(1)}\supset K^{(2)}$ **（中）**；以及 $K^{(6)}$ **（右）**

3 证明定理 1

本节旨在证明定理 1 和 2。首先回顾一下 [13, 定理 2.2], 该定理指出，对于任意分形方块 K 及其轨道 $H=K+\mathbb{Z}^2$，恰有两种可能：要么 $\mathbb{R}^2\setminus H$的所有连通分支都是无界的，要么每个连通分支的直径均为 $\leq\sqrt{2}\left(N^2+1\right)^2/N$。在第一种情形下， K 的所有连通分支都是点或线段。因此， K 的所有原子都是点或线段，故 $\lambda_K(K)\subset\{0,1\}$。在第二种情形下， H 至少有一个连通分支能够分离平面。为了得到定理 1，我们只需证明在后一种情形下 K 是一个 Peano紧致空间。为此，我们需要以下结果。**引理 3.1 ([14, 定理 3])** 。紧集 $K\subset\mathbb{R}^2$ 是 *Peano*紧致空间，当且仅当它满足 *Sch¨onflies* 条件；也就是说，对于任意由两条平行直线围成的带状区域 U，其中两条平行直线为 L_1 和 L_2，$U\setminus K$ 中与 L_1 和 L_2 两者都相交的连通分支至多有有限个。

在本节余下部分， $K = K(N, \mathcal{D})$ 是一个阶为 $N \geq 3$ 的分形方块，满足 $\mathbb{R}^2 \setminus H$的所有连通分支的直径均为$\leq \sqrt{2}\,(N^2+1)^{\,2}/N$。此外,$^{-}$ $H = K + \mathbb{Z}^2$。

定理 1 的证明。若 K 不是 Peano紧致空间，则根据引理 3.1，我们可以找到两条平行线 L_1 和 L_2，它们围成一个无界条带 U，且 $\partial U = L_1 \cup L_2$，使得 $U \setminus K$ 有无穷多个连通分支，记作 A_i，它们同时与 L_1 和 L_2相交。在每个 A_i 中，我们都可以选取一条若尔当弧 α_i，连接点 $a_i \in L_1$和点 $b_i \in L_2$。此外，我们可以要求 $\alpha_i \cap (L_1 \cup L_2) = \{a_i, b_i\}$。必要时取适当的子序列后，我们可以假设在豪斯多夫距离下 $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha_\infty$，且 $a_\infty = \lim_{i\to\infty} a_i$， $b_\infty = \lim_{i\to\infty} b_i$。对于足够小的 $r > 0$，我们可以选取某个整数 $n_0 > 0$和某个$i \in \{0, 1, \ldots, N^{n_0} - 1\}$，用带状区域 W将闭圆盘 $D_r(a_\infty)$ 和 $D_r(b_\infty)$ 分隔开来；该带状区域可以是 $\mathbb{R} \times \left[\frac{i}{N^{n_0}}, \frac{i+1}{N^{n_0}}\right]$，也可以是 $\left[\frac{i}{N^{n_0}}, \frac{i+1}{N^{n_0}}\right] \times \mathbb{R}$。我们可以假设 $W = \mathbb{R} \times \left[\frac{i}{N^{n_0}}, \frac{i+1}{N^{n_0}}\right]$，并将 α_i视为从 $[0,1]$到 U的映射，其中 $\alpha_i(0) = a_i$， $\alpha_i(1) = b_i$。因此，我们可以选取 $t_i < s_i$，使得 $a_i^* = \alpha_i(t_i) \in L'$， $b_i^* = \alpha_i(s_i) \in L''$，且 $\alpha_i([t_i, s_i]) \subset W$。这里 $L' = \mathbb{R} \times \left\{\frac{i}{N^{n_0}}\right\}$且 $L'' = \mathbb{R} \times \left\{\frac{i+1}{N^{n_0}}\right\}$。图 8 展示了 L'、 L''、 L_1、 L_2的相对位置。令 $\alpha_i^* \subset \alpha_i$为从 a_i^*到 b_i^*的子弧。于是，没有



F图 8：点 a_∞、 b_∞、 a_i^*、 b_i^*与直线 L_1、 L_2、 L'、 L''的相对位置。

弧 α_i中的两条可以包含在 $W \setminus K$的同一个连通分支中。由此可知， $W \cap K$有无穷多个连通分支，记为 Q_k，它们都与 L' 和 L'' 相交。例如，参见引理 3.8]。

现在，令 V为 $W \setminus (L' \cup L'')$ 中唯一一个其边界同时与 L' 和 L'' 相交的连通分支。在图 8 中，区域 V用阴影平行四边形表示，α_i^*用垂直线段表示。

显然，除有限多条外，弧 α_i^*都包含在V中。必要时，取一个恰当的子序列，我们可以假设在豪斯多夫距离下 $\lim_{k\to\infty} Q_k = Q_\infty$。这里，极限连续统 Q_∞ 必然包含在 $W \cap K$的某个连通分支中，记为 Q_0。图 9 展示了连通集 Q_k的一种自然次序。注意， $W \setminus Q_0$ 有两个无界连通分支，一个位于 Q_∞ 左侧，另一个位于其右侧。必要时，取一个恰当的子序列，我们可以假设每个 Q_k 都位于 Q_{k+1}左侧。见图 9。因此，我们可以找到无穷多个 $W \setminus K$ 的连通分支 $B_k (k \geq 1)$，它们都与 L' 和 L'' 相交。

这里我们选择 B_1，使其在 W 中分离 Q_1 和 Q_0。此外，对于任意 $k \geq 1$，给定 B_1，……，B_k，我们还可以进一步选择 B_{k+1}，使其在 W 中分离 $\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} Q_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right)$ 和 Q_0。显然，

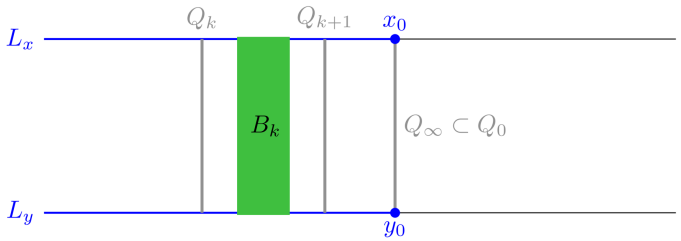


图 9： Q_k、 B_k、 Q_{k+1} 和 Q_∞的相对位置。

在豪斯多夫距离下取极限$\lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} Q_k = Q_\infty$。

给定 $n > n_0$，我们考虑所有与无穷多个 Q_k相交的 n-胞腔（见定义1.2）。这样的胞腔称为**阶数为** n 的黑胞腔。其他 n-胞腔称为**阶数为** n的白胞腔。注意，每个黑胞腔都与无穷多个 B_k相交。

选取 $x_0 \in (Q_\infty \cap L'')$ 和 $y_0 \in (Q_\infty \cap L')$，使得 $L'' \setminus \{x_0\}$ 的左侧分支（记作 L_x）和$L' \setminus \{y_0\}$ 的左侧分支（记作 L_y）均与 Q_0不相交。于是，它们都与所有 Q_k 和所有B_k相交。见图 9。

令 $M_n \subset K^{(n)}$ 由所有阶数为 n的黑胞腔组成。注意，内部 M_n^o 至多有有限多个连通分支（记为 W_1、.....、 W_p），使得对任意 $i \neq j$，$W_i \cap W_j$ 都是有限集。利用这一事实，可以推知 M_n^o 实际上是连通的。见 [15, 引理4.5]。因此， M_n 是一个包含 Q_∞ 的连续统，因而包含除有限多个 B_k之外的所有 B_k。注意， M_n 没有割点。此外，根据Torhorst定理（[26, 第106页， (2.2)]）， $W \setminus M_n$ 的两个无界连通分支之一由$L_x \cup L_y \cup \beta_n$围成，其中 $\beta_n \subset \partial M_n$ 是位于 W 中的一条开弧，它连接 L_x 上的一点和 L_y上的一点。

令 U_n 为具有 $\beta_n \subset \partial U_n$ 的 $\mathbb{R}^2 \setminus (\beta_n \cup L_x \cup L_y \cup Q_0)$ 的有界分支。于是可以例行地推知，除有限多个 B_k 外，其余均包含于 U_n 的闭包中。由于 $\mathbb{R}^2 \setminus M_n$ 至多有有限个连通分支，我们可以进一步推知，除有限多个 B_k 外，其余均包含于 $M_n^o \cup \partial W$ 中。

固定一个具有此性质的 B_k，并选取一条弧 $\gamma_n \subset B_k$，使其同时与 L_x 和 L_y 相交。由于 $B_k \subset K^{(n)} \setminus K$，我们看到 γ_n 包含于 $K^{(n)} \setminus K$ 的内部中，并且 $N^n \gamma_n \subset (\mathbb{R}^2 \setminus H)$。参见[15, 引理 4。3]由于 $n > n_0$ 是灵活的，且 γ_n 的直径大于 N^{-n_0}，我们可以选取足够大的 n，使得 $N^n \gamma_n$ 的直径大于 $\sqrt{2}(N^2+1)^2/N$。这是荒谬的，因为 $\mathbb{R}^2 \setminus H$ 的所有连通分支的直径均为 $\leq \sqrt{2}(N^2+1)^2/N$。

□

注意到，上述证明使用了 [13, 定理 2。2]，且独立于 [15, 定理 2]。本节其余部分将讨论定理 2。我们先介绍一些术语。

定义 3.2. 若分形方块 $K = K(N, \mathcal{D})$ 的阶为 n （或其数字集为 $\mathcal{D}$），并且存在 $i_1 < \cdots < i_j$ 属于 $\{0, 1, \ldots, N-1\}$，使得 $\mathcal{D} = \{i_1, \ldots, i_j\} \times \{0, 1, \ldots, N-1\}$ 或 $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, N-1\} \times \{i_1, \ldots, i_j\}$，则称**其具有乘积形式**。

分形方块 是 K 具有乘积形式的集合，由 $[0,1]$ 与齐次线性康托尔集的乘积构成 set

E，其比率为$\frac{1}{N}$。这样的集合正是由 $2 \le q \le n-1$ 个形如$g_i(x) = \frac{t+s_i}{N}$、且满足 $s_i \in \{0,1,\dots,N-1\}$的映射构成的迭代函数系统的吸引子。

定理 2 可由以下结论推出。

定理 **引理 3.3**。 分形方块 $K = K(N,\mathcal{D})$ 当且仅当 $\lambda_K(K) = \{1$ 具有乘积形式 $\}$

证明。 “若”部分是平凡的。因此我们只需证明“仅若”部分。我们将证明，若 K 不具有乘积形式，则 $\lambda_K(K) \neq \{1\}$。

若 $\mathcal{D}$ 包含 $\{i\}\times\{0,1,\dots,N-1\}$ 或 $\{0,1,\dots,N-1\}\times\{i\}$，其中某个 i，则 $0 \in \lambda_K(K)$。例如，若 $\mathcal{D} \supset \{i\}\times\{0,1,\dots,N-1\}$，则存在 $j \neq i$ 使得 $\mathcal{D} \not\subseteq \{j\}\times\{0,1,\dots,N-1\}$。由此可推知，对于任意 $d \in \mathcal{D} \cap \{j\}\times\mathbb{R}$， $f_d(x)$ 的不动点 $= \frac{x+d}{N}$，记作 x_0，是K的点连通分支。这是基于两个基本观察。首先，K 与直线 $\{x_0\}\times\mathbb{R}$ 的交集是一个全不连通集，记作 X_0。其次， X_0 中的每个点都是 K的点连通分支，因为 K 的每个非退化连通分支都是一条竖直线段。因此，我们有 $\lambda_K(x_0) = 0 \in \lambda_K(K)$。

如果 $\mathcal{D}$ 包含 $\{0,1,\dots,N-1\}\times\{i\}$，同样的论证仍然成立。

下文考虑这样的情形：对于任意 i， $\{i\}\times\{0,1,\dots,N-1\}$ 和 $\{0,1,\dots,N-1\}\times\{i\}$ 都不包含在 $\mathcal{D}$ 中。在这种情况下， H 不包含任何水平或竖直无限直线。我们需要证明 $\lambda_K(K) \neq \{1\}$。如果 $\lambda_K^{-1}(1) = \emptyset$，则结论成立。因此，我们只考虑 $\lambda_K^{-1}(1) \neq \emptyset$的情形。此时，只需证明 $0 \in \lambda_K(K)$。

根据定理 1， $\mathbb{R}^2 \setminus H$ 的所有连通分支都是无界的，而 K 的每个连通分支都是单点或线段。此外，H 包含斜率为 $\tau \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$的直线。特别地，我们可以固定这样一条直线 l ，使其将 $[0,1]^2$ 的内部分成两个区域。见图 10。不失

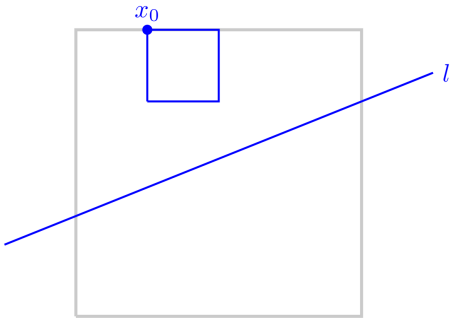


图 10：正方形 $f_d\left([0,1]^2\right)$ 和点 x_0，它们可能位于 $(0,1)^2$ 中。

不失一般性，我们可以要求 l 不经过 $[0,1]^2$ 的四个顶点中的任何一个，因此它与两个开线段 $\{i\}\times(0,1)$ 和 $(0,1)\times\{i\}$相交，其中 $i = 0,1$。选取 $\mathbb{R}^2 \setminus l$的一个连通分支，使其与 K 相交，并将另一个连通分支记为 U。令 $\delta > 0$ 为满足以下条件的最小数： U的闭 δ-邻域（记为 U_δ）包含 K_1。再选取 $d \in \mathcal{D}$，使得 $f_d\left([0,1]^2\right)$ 与边界 ∂U_δ仅在一点 x_0相交，而该点必然是 $f_d\left([0,1]^2\right)$的一个角。这里， x_0 可能位于

$[0,1]^2$的内部。

令 $l_j = f_d^j(l)$ 为一条直线，由所有满足 $x \in l$ 的点 $f_d^j(x)$ 组成。可数交集 $\bigcap_{j\geq 1} f_d^j\left([0,1]^2\right)$ 只包含一个点，记作 x_∞；它正是 $f_d(x) = \frac{x+d}{N}$ 的唯一不动点。令 U_j 为包含 x_0 的 $\mathbb{R}^2 \setminus l_j$ 的连通分支。则对所有 $j \geq 1$，$U_j \supset U_{j+1}$ 均成立。此外，包含 x_∞ 的 K 的连通分支是 $\bigcap_j U_j$ 的子集。也就是说，$\{x_0\}$ 是 K 的一个点连通分支，因此 $\lambda_K(x_0) = 0 \in \lambda_K(K)$。

□

4 定理 3 的证明

给定一个分形方块 $K = K(N, \mathcal{D})$，由定理 1 可知，只有当 $H = K + \mathbb{Z}^2$ 的补集没有无界连通分支时，K 才是 Peano紧致空间。由定理 2 进一步可知，$\lambda_K(K) = \{1\}$ 当且仅当 $\mathcal{D}$ 为乘积形式。在本节中，我们假设 $\lambda_K(K) = \{0,1\}$，并通过分析其一些特殊子集来刻画 $\lambda_K^{-1}(1)$。

后文将得到的这些子集，有助于我们刻画所有满足 $\dim_H \lambda_K^{-1}(1) > 1$ 或 $\dim_H \lambda_K^{-1}(1) = 1$ 或 $\lambda_K^{-1}(1) = \emptyset$的分形方块 K。

本节接下来，我们固定 $N \geq 3$，并假设 K 的连通分支既包括点，也包括线段。在这种情况下，显然 $K \neq [0,1]^2$。此外，令 $\mathcal{G}_N$ 表示由平移群 $\mathbb{Z}^2$和 N-位似变换 $\psi_N(x) = Nx$生成的半群。

由定理 1 可知，包含于 K 中的线段彼此平行，且具有相同的有理斜率$\tau = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$，其中 $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 和 $s \in \mathbb{Z}_+$。$H = K + \mathbb{Z}^2$ 在 ψ_N 下的不变性意味着 H至少包含一条直线 l_{ω_0}：$x_2 = \omega_0 + \tau x_1$，因此包含所有直线 $l_{\omega_0} + \mathbb{Z}^2$。

设 $H_n = K^{(n)} + \mathbb{Z}^2$。设 $\Pi(x) = x_2 - \tau x_1$对 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$成立。于是，对于任意在 $\mathcal{G}_N$ 下不变的闭集 X，$\Pi(X^c)$ 的补集由所有满足以下条件的 ω 构成：l_ω：$x_2 = \omega + \tau x_1$ 包含于 X。由于 $H_n \supset \psi_N(H_{n+1})$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立，我们有

$$H_n^c \subset \mathbb{R}^2 \setminus \psi_N(H_{n+1}) = \psi_N\left(\mathbb{R}^2 \setminus H_{n+1}\right) = \psi_N\left(H_{n+1}^c\right). \tag{10}$$

由于 $\psi_N \circ \prod(x) = \prod \circ \psi_N(x)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^2$ 均成立，因此包含关系 $\Pi(H_n^c) \subset \psi_N \circ \Pi\left(H_{n+1}^c\right)$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立。由此可得

$$\mathbb{R} \setminus \Pi(H_n^c) \supset \mathbb{R} \setminus \psi_N \circ \Pi(H_{n+1}^c) = \psi_N\left(\mathbb{R} \setminus \Pi(H_{n+1}^c)\right). \tag{11}$$

为便于阐述，我们进一步设

$$\Omega = \left[0, \frac{1}{s}\right] \setminus \Pi(H^c) \tag{12}$$

$$\Omega_n = \left[0, \frac{1}{s}\right] \setminus \Pi\left(H_n^c\right) \ (n \geq 1) \tag{13}$$

那么我们 有一些基本观察，要么显而易见，要么可以通过常规方法加以验证。

(a) $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots$ 且 $\Omega = \bigcap_j \Omega_j$。此外，$\mathbb{R} \setminus \Pi(H^c) = \Omega + \frac{1}{s}\mathbb{Z}$ 且 $\mathbb{R} \setminus \Pi(H_j^c) = \Omega_j + \frac{1}{s}\mathbb{Z}$。

(b) Ω_1 包含 $q = q_{\mathcal{D}} \le N$ 个孤立点 $v_1, \ldots, v_q$（或无）以及 $m = m_{\mathcal{D}} \le N$ 个区间（或无），记作 $\left[\frac{u_1}{Ns}, \frac{u_1+1}{Ns}\right], \ldots, \left[\frac{u_m}{Ns}, \frac{u_m+1}{Ns}\right]$，其中每个都是 Ω_1 的一个连通分支。由于 $\omega_0 \in \Omega_1$，我们有 $q = q_{\mathcal{D}} \ge 1$（因此 $A_1 = \{v_1, \ldots, v_q\} \neq \emptyset$）或 $m = m_{\mathcal{D}} \ge 1$。

(c) 对每个 v_i（若 $q \ge 1$），l_{v_i}：$x_2 = v_i + \tau x_1$ 属于 $\bigcap_j H_j$，因此 $v_i \in \bigcap_j \left(\Omega_j + \frac{\mathbb{Z}}{s}\right) = \Omega + \frac{1}{s}\mathbb{Z}$。

(d) 对所有 $j \ge 1$，$\psi_N(\Omega_j)$ 包含 $\bigcup_{u=0}^{s-1}(\Omega_{j+1}+u)$。参见公式 (11)。因此 Ω_j 包含 $\Phi(\Omega_{j+1}) := h_{u_1}(\Omega_{j+1}) \cup \cdots \cup h_{u_m}(\Omega_{j+1})$，其中 $h_{u_i}(t) = \frac{t+u_i}{N}$。参见 (b)。

(e) $A_1 \cup \Phi\left(\left[0, \frac{1}{s}\right]\right) \supset \Omega_1$。参见 (b) 和 (d)。此外，我们有

$$A_1 \cup \Phi(A_1) \cup \Phi^2\left(\left[0, \frac{1}{s}\right]\right) \supset \Phi(\Omega_1). \tag{14}$$

将 Φ 反复应用于 (14) 的两边，对每个 $n \ge 2$，我们有

$$A_1 \cup \Phi(A_1) \cup \cdots \cup \Phi^{n-1}(A_1) \cup \Phi^n\left(\left[0, \frac{1}{s}\right]\right) \supset \Phi^{n-1}(\Omega_1). \tag{15}$$

根据这些观察，我们已具备得出以下结论所需的全部条件。

定理 4.1. 假设 $m \ge 2$，并令 $E_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} \Phi^i(A_1)$。那么，在豪斯多夫距离下，$\lim_{n\to\infty}\left(\Phi^n\left(\left[0, \frac{1}{s}\right]\right) \cup E_n\right)$ 存在且等于 Ω。因此，$\dim_H \Omega = \log m \log N$。

证明。另一方面，对所有 $i \ge 1$，$\Phi^i(A_1) \subset \Omega$。由 (c) 和 (d) 可知，因此对所有 $n \ge 1$，$E_n \subset \Omega$。另一方面，$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(A_1)$ 和 $\lim_{n\to\infty} \Phi^n\left(\left[0, \frac{1}{s}\right]\right)$ 在豪斯多夫距离下均存在，且都与由迭代函数系统 $\{h_{u_i} : 1 \le i \le m\}$ 确定的自相似集 E_∞ 重合。因此，每个 $\omega \in E_\infty$ 都可以由一个序列 $\{\omega_n : n \ge 1\}$ 逼近，其中 $\omega_n \in \Phi^n(A_1)$。每个 ω_n 都对应一条无限直线 l_{ω_n}：$x_2 = \omega_n + \tau x_1$，该直线包含于 Ω 中。这就迫使 $\omega \in \Omega$ 且 $\Omega = \lim_{n\to\infty}\left(\Phi^n\left(\left[0, \frac{1}{s}\right]\right) \cup E_n\right)$。第二部分显然成立，证毕。

□

注 4.2。定理 *4.1* 的主要思想早已在 *[28,* 定理 *1.2]* 中得到应用。我们在此总结其基本原理，并运用 *Barnsley* 的 *IFS* 理论中关于带凝聚的吸引子的内容，*[3]*说明这些论证背后的逻辑。

注 4.3。除了 $m \ge 2$ 定理 *4.1* 中考虑的特殊情形外，还存在其他情形。例如，如果 $m = 1$ 且 $q \ge 1$，那么 $\Omega =$ 极限 $_{n\to\infty} E_n$，其中 $E_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} \Phi^i(A_1)$。该集合恰好由 $\bigcup_n E_n$ 以及 $h_{u_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的唯一不动点 ω_1 组成。然而，如果 $m \le 1$ 且 $mq = 0$，则有两个子情形：或者是 (*1*) $m = 1$ 且 $q = 0$，或者是 (*2*) $m = 0$ 且 $q \ge 1$。在第一种情形中，$\Omega = \Omega_1 = \{\omega_1\}$。在第二种情形中，$\Omega = \Omega_1 = A_1$。

Let $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K$ 由 H中的所有无限直线组成。根据定理 4.1，我们得到如下结论 ng.

定理 4.4. 以下各项断言均成立：

(i) $\dim_H \lambda_K^{-1}(1) = \dim_H(\mathcal{H} \cap K)$。

(ii) 如果 $m \geq 2$ 那么 $\dim_H \lambda_K^{-1}(1) = 1 + \log m \log N$。

(iii) 如果 $m = 1$ 且 $q \geq 1$，那么 $\dim_H \lambda_K^{-1}(1) = 1$。

(iv) 如果 $m \leq 1$ 且 $mq = 0$，那么 Ω 是有限集，且 $\lambda_K^{-1}(1) = \emptyset$。

证明。回顾一下，$\mathcal{G}_N$ 是一个可数半群，而 $\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{G}_N$下是不变的。对于任意点$x \in \lambda_K^{-1}(1)$，包含 x 的 K 连通分支是一条线段，记作 L_x；此外，存在一个线段序列 L_j，它在豪斯多夫距离下的极限是一条包含 x的非退化线段。因此，我们可以找到 $g \in \mathcal{G}_N$，使得 $g(x) \in \mathcal{H}$。这就证明了第 (i) 项。其余各项将在下文证明。

If $m \geq 2$，我们可以应用定理 4.1 推得 $\dim_H \Omega = \log m \log N$。这证明了条目 (ii)。

如果 $m = 1$ 且 $q \geq 1$，那么 $A_1 = \{v_1, \ldots . v_q\}$ 恰好包含 q 个点。令 $E_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} \Phi^i(A_1)$。容易证明，$\Omega = \lim_{n\to\infty} E_n$ 由 $\bigcup_n E_n$ 以及 h_{u_1} 的唯一不动点 ω_1 组成：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。这意味着 Ω 是一个可数集，并且 $\mathcal{H}$ 至少包含一个直线序列，其截距为 $h_{u_1}^n(v_1)$，该序列收敛于无限直线 l_{ω_1}：$x_2 = \omega_1 + \tau x_1$。于是得到等式 $\dim_H \lambda_K^{-1}(1) = \dim_H K_c = 1$。这证明了条目 (iii)。

最后，如果 $m \leq 1$ 且 $mq = 0$，那么根据观察 (b)，$\Omega = A_1$。这意味着 $\Omega + \frac{\mathbb{Z}}{s}$ 是一致离散集，因此 H 不包含任何在豪斯多夫距离下收敛于某条极限直线的直线无限序列。这证明了条目 (iv)。

□

为总结本节内容，我们给出如下结论。

例 4.5。 设 $K = K(N, \mathcal{D})$ 是一个 $N = 7$ 阶分形方块。图 *11* 展示了第一次近似 $K^{(1)}$（左侧）、第二次近似 $K^{(2)}$（中间）和第三次近似（右侧）。此外，我们将有 $(m_{\mathcal{D}}, q_{\mathcal{D}}) = (2, 1)$。

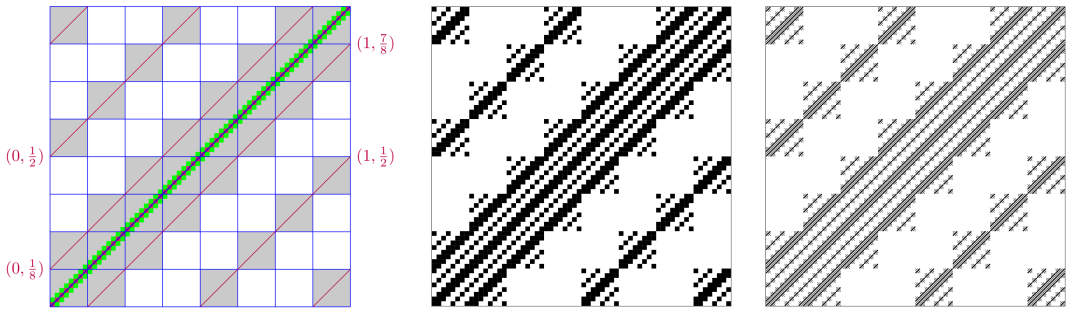
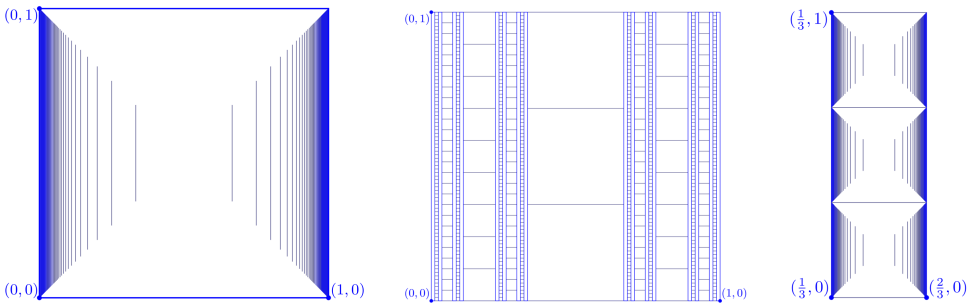


图 11：一个分形方块 $K(N, \mathcal{D})$，其具有 $(m, p) = (2, 1)$。

5 存在 平面紧致集 $L_n(n \geq 1)$，其中 $\lambda_{L_n}(L_n) = \{0, \ldots, n \}$

我们构造一个由紧空间 $L_n \subset \mathbb{R}^2(n \geq 2)$ 组成的序列，并满足两个要求。首先， L_n 的所有连通分支都是局部连通的。其次， $\lambda_{L_n}(L_n) = \{0, \ldots, n\}$。我们将用到康托尔三分集 $\mathcal{C}$ 和 $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ 的连通分支，记作 $\{(a_j, b_j): j \geq 1\}$。设 $a_1 = \frac{1}{3}$ 和 $b_1 = \frac{2}{3}$。令 Q 由 $[0,1]^2$ 的边界以及线段 $l'_k = \left\{\left(\frac{1}{k}, t\right): \frac{1}{k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{k}\right\}$ 和 $l''_k = \left\{\left(1 - \frac{1}{k}, t\right): \frac{1}{k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{k}\right\}$（其中 $k \geq 3$）组成。见图 12(a)。现在，对所有 $j \geq 1$，我们选取满足以下条件的 k_j



(a) (b) (c)

图12：（a）连续统 Q；（b）连续统 L_0；（c） $L_1 \bigcap \left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times [0,1] \right)$。

$b_j - a_j = 3^{-k_j}$ 并令 M_j 由所有线段 $l_{i,j} = \left\{\left(t, i \cdot 3^{-k_j}\right)$ 组成：$a_j \leq t \leq b_j\right\}$ 且 $0 \leq i \leq 3^{k_j}$。见图12(b)。于是， $\mathcal{C} \times [0,1]$ 与 $\bigcup_{j \geq 1} M_j$ 的并集记为 L_0，是一个局部连通连续统。对于 $j \geq 1$ 和 $0 \leq i \leq 3^{k_j}$，令 $f_{i,j}(x) = 3^{-k_j} x + \left(a_j, i \cdot 3^{-k_j}\right)$ 并且

$$\Lambda_0 = \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{i=0}^{3^{k_j}-1} f_{i,j}(Q).$$

进一步令 $\Lambda = \alpha_\infty \cup \left(\bigcup_p \alpha_p \right)$，其中 α_∞ 是连接 (0,1) 与 (1, 1) 的线段，而 $\alpha_p(p \geq 1)$ 是连接 $\left(\frac{1}{p+2}, 1 + \frac{1}{p+2}\right)$ 与 $\left(\frac{p+1}{p+2}, 1 + \frac{1}{p+2}\right)$ 的线段。

例 5.1. $L_1 = L_0 \cup \Lambda_0$ 具有局部连通分支，并满足 $\lambda_{L_1}(L_1) = \{0,1\}$，因为 L_1 的非退化原子恰好是满足 $u \in \mathcal{C}$ 的线段 $\{u\} \times [0,1]$。 $L_1 \bigcap \left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times [0,1] \right)$ 的简单示意图见图 *12(c)*。

例5.2。 $L_2 = \Lambda \cup L_1$ 具有局部连通分支，并满足 $\lambda_{L_2}(L_2) = \{0,1,2\}$。事实上，$L_2$ 只有一个非退化原子，记作 δ_2，它由 α_∞、 $\mathcal{C} \times [0,1]$ 和 $[1,2] \times \mathcal{C}$组成。图*13*左侧展示了 $\Lambda \cup \delta_2$。显然， $\lambda_{\delta_2}(\delta_2) = \{0,1\}$，因此 $\lambda_{L_2}(L_2) = \{0,1,2\}$。

注意， $L_2 = L_1 \cup L'_1$，其中 $L'_1 = \{(u,v): (v,u) \in L_1\} + (1,0)$。现在我们可以按如下方式归纳定义 $L_n(n \geq 3)$。若 $n = 2k$ 对 $k \geq 1$成立，则令 $L_n = L_{2k-1} \cup L'_1 + (k-1, k-1)$。若 $n = 2k+1$对 $k \geq 1$ 成立，则令 $L_n = L_{2k} \cup L_1 + (k-1, k-1)$。

例5.3。 $L_n(n \geq 3)$ 具有局部连通分支，并满足 $\lambda_{L_n}(L_n) = \{0, \ldots, n\}$。这里有四个基本观察。首先，对于所有 $n \geq 2$， $\delta_n \subset \delta_{n+1}$。其次， L_n 的每个连通分支都是局部连通的。

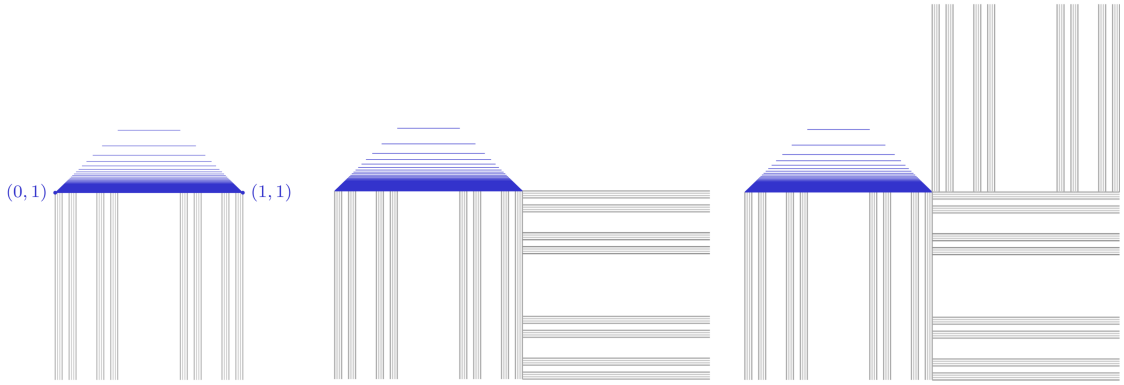


图13：(a) $\Lambda \cup \delta_2$；(b) $\Lambda \cup \delta_3$；(c) $\Lambda \cup \delta_4$。

第三， L_n 只有一个非退化原子 δ_n。图*13*的中间部分和右侧部分分别展示了$\Lambda \cup \delta_3$和 $\Lambda \cup \delta_4$。最后， δ_{n+1}的每个原子要么是一个点$(u,\ 1)$，且满足 $u \notin \mathcal{C}$；要么是一个线段 $\{u\} \times [0, 1]$，且满足 $u \in \mathcal{C}$；要么是一个与 δ_n全等的连续统。 *[16,* 中分析了一个类似的序列，*6],*旨在计算某些平面连续体的*NLC*尺度。显然，$\lambda_{\delta_n}(\delta_n) = \{0, \ldots, n-1\}$，因此 $\lambda_{L_n}(L_n) = \{0, \ldots, n\}$。

致谢。本研究由国家重点研发计划[No. 2024YFA 1013700]和广东省基础与应用基础研究基金（资助编号：2021A1515010242）资助。第三位署名作者感谢杨百翰大学的热情接待，该校支持了他于2024年和2025年的两次访问。作者还要感谢华中师范大学（武汉）的Hui RAO和Yuan ZHANG，以及浙江大学（杭州）的Huojun RUAN提供的有益建议。所有图片均为png格式。彩色图片使用tikz软件包绘制，其余图片由杨百翰大学的Greg Conner于2025年最近编写的一款新程序制作。

参考文献

[1] Shigeki Akiyama 和 J¨org M. Thuswaldner. 与数系相关的铺砌拓扑性质综述。*Geom. Dedicata*, 109:89–105，2004.[2] Maynard G. Arsove. Osgood-Taylor-Carath´eodory 定理。*Proc. Amer. Math. Soc.*，19:38–44，1968.[3] Michael F. Barnsley. 处处有分形。Academic Press Professional, 波士顿，马萨诸塞州，第二版，1993。由 Hawley Rising III 协助修订，并附有其撰写的序言。[4] Xin-Rong Dai、Jun Luo、Huo-Jun Ruan、Yang Wang 和 Jian-Ci Xiao. 广义谢尔宾斯基地毯的连通性与局部割点。*Asian J. Math.*，27(4):529–570，2023年。

[5] Kenneth Falconer. 分形几何。John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，1990。数学基础与应用。[6] Li Feng、Jun Luo 和 Xiao-Ting Yao. 关于 lambda 函数及 Torhorst 定理的量化。Topology Appl.，320：论文编号 108245，22，2022。[7] R. W. FitzGerald 和 P. M. Swingle. 连续统的核分解。Fund. Math.，61:33–50，1967。[8] Masayoshi Hata. 关于自相似集的结构。Japan J. Appl. Math.，2(2):381–414，1985。[9] Allen Hatcher. 代数拓扑。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[10] Liang-yi Huang 和 Hui Rao. 分形立方体的维数下降现象。J. Math. Anal. Appl.，497(2)：论文编号 124918，11，2021。[11] John E. Hutchinson. 分形与自相似性。Indiana Univ. Math. J.，30(5):713–747，1981。[12] Timo Jolivet、Benoˆıt Loridant 和 Jun Luo. 非局部连通平面连续统的数值尺度。Topology Appl.，202:21–39，2016。[13] Ka-Sing Lau、Jun Jason Luo 和 Hui Rao. 分形正方形的拓扑结构。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.，155(1):73–86，2013。[14] Benoˆıt Loridant、Jun Luo 和 Yi Yang. 平面中紧集的核心分解。Adv. Math.，343:219–244，2019。[15] Jun Luo、Hui Rao 和 Ying Xiong. 分形正方形的每个连通分支都是 Peano 连续统。Topology Appl.，322：论文编号 108271，14，2022。[16] Jun Luo 、 Yi Yang 和 Xiao-Ting Yao. 有理 Julia 集的 Peano 模型。预印本，2019。[17] Jun Luo 和 Xiao-Ting Yao. 无限连通平面区域上保角同胚的连续延拓。Trans. Amer. Math. Soc.，375(9):6507–6535，2022。[18] Jun Jason Luo 和 Jing-Cheng Liu. 关于分形正方形的分类。Fractals，24(1):1650008，11，2016。[19] Kevin Pilgrim 和 Tan Lei. 具有非连通 Julia 集的有理映射。Ast´erisque，(261):xiv，349–384，2000。复几何与动力系统（奥赛，1995）。[20] Christian Pommerenke. 保角映射的边界行为，数学科学基础丛书第299卷 *[*数学科学基本原理*]*。Springer-Verlag，柏林，1992。

[21] Feng Rao、Xiaohua Wang 和 Shengyou Wen。分形正方形的拓扑分类。*Fractals*, 25(3):1750028，12，2017年。[22] Huo-Jun Ruan 和 Yang Wang。分形正方形的拓扑不变量与利普希茨等价。*J. Math. Anal. Appl.*，451(1):327–344，2017年。[23] Huo-Jun Ruan、Yang Wang 和 Jian-Ci Xiao。关于连通广义谢尔宾斯基地毯割点的存在性。*Ann. Fenn. Math.*，48(1):229–254，2023年。[24] Lynn Arthur Steen 和 J. Arthur Seebach, Jr. 拓扑学中的反例。Dover Publications, Inc.，纽约州米尼奥拉，1995。1978年第二版的重印本。[25] G. T. Whyburn。谢尔宾斯基曲线的拓扑刻画。*Fund. Math.*，45:320–324，1958年。[26] Gordon Thomas Whyburn。解析拓扑学。美国数学学会专题论文集，第28卷。美国数学学会，纽约，1942年。[27] Jian-Ci Xiao。具有有限个连通分支的分形正方形。*Nonlinearity*，34(4):1817–1836，2021。[28] Yan-Fang Zhang。分形正方形拓扑豪斯多夫维数的下界。*Fractals*，28(6):2050115，8，2020年。