arXiv:2601.02705v1 [math.PR] 6 Jan 2026

历史依赖双层 M/M/1 排队平稳分布的扩散极限

Masahiro Kobayashi[1], MasakiyoMiyazawa[2], YutakaSakuma[3]1 东海大学，[2] 东京理科大学，[3] 日本防卫大学 邮箱：21506@ms.dendai.ac.jp

2026年1月7日 最终版

摘要

最近，Atar 和 Miyazawa [2] 提出了一种具有有限个级别的多层 GI/G/1 队列，其中到达率和服务率均取决于与当前队列长度对应的级别。针对该模型，他们证明了其队列长度过程在重载下的扩散极限是 [6] 的层依赖反射布朗运动。随后，Kobayashi 等人 [4] 推导出了相应的平稳分布扩散极限。这些研究的动机是根据队列长度控制服务能力。我们关注一种更一般的情形，即这种控制也可能取决于队列长度的历史。作为实现这一推广的第一步，我们将多层 GI/G/1 队列具体化为双层 M/M/1 排队。随后，我们扩展该模型的动态，使其到达率和服务率不仅取决于当前队列长度，也取决于近期的队列长度历史。在该模型的稳定性条件下，我们首先以闭式求出其平稳分布，然后推导其在重载下的扩散极限。最后，我们利用这一扩散极限推导平稳分布的近似公式，并通过数值计算评估其准确度。

关键词： 历史依赖队列，层依赖队列，扩散近似，平稳分布，近似公式。

1 引言

近年来，在各个领域中，根据系统状态调整处理能力和资源分配的动态机制变得日益重要，

例如云计算、通信网络、生产线和医疗服务。比如，许多现实世界系统会在队列长度增加时，通过控制提高处理速度或增加服务器数量。人们也普遍观察到，到达率可能会随系统状态而变化。在网络服务和医疗预约系统中，由于拥塞水平可见，用户可能会避开拥塞时段或选择拥塞程度较低的时段，从而表现出自我调节。在这种情况下，有效到达率取决于队列长度，因此到达过程具有状态依赖性。

为满足此类实际需求，已有大量研究探讨处理能力可根据拥塞程度调整的排队模型。例如，Altalejo 等人[1], 受数据中心服务器运行方式的启发，分析了一种 M/M/c 型模型，其中服务器会动态启用和停用；该模型采用拟生灭过程结构，限制同时处于活动状态的服务器数量。Gandhi 等人 [3]以及 Phung-Duc 和 Kawanishi [7] 提出了一种考虑服务器切换所致设置延迟的多服务器模型，并计算了性能指标。Schwartz 等人 [8] 提出了一种多服务器设置排队模型，其中服务器具有忙碌、空闲和关闭状态。他们的研究受到节能需求以及队列长度变化与服务器三种状态之间转移依赖关系的启发。在此基础上，Mitrani[5]开发了一种更一般的模型，将历史依赖性和不可忽略的服务器设置时间纳入考虑，并为这一更复杂的情形提供了精确解析解。尽管这些研究给出了模型的性能度量，但要理解这些度量（例如平均队列长度、等待时间）与基本参数（例如到达率和服务率）之间的关系，仍然颇具挑战。

应对这一挑战的一种有力方法是重交通分析，它在系统负载较重的条件下，用扩散过程近似排队过程。与精确分析相比，这种方法通常能以更易处理的形式揭示系统参数与性能度量之间的基本关系。相关研究中，到达率和服务率取决于队列长度的排队模型也受到了广泛关注。为分析其极限行为，研究人员考察了具有状态依赖系数的连续模型，例如反射扩散过程。具体而言，Atar 和 Miyazawa [2] 证明，在重载下，队列长度过程的扩散极限是一个反射扩散过程，其漂移系数和扩散系数取决于水平；他们还证明，该过程唯一地作为相应随机微分方程（SDE）的弱解得到。此外，Kobayashi 等人 [4] 推导出了重交通条件下，具有水平依赖转移的单服务器队列的扩散尺度化平稳分布极限的闭式表达式。在这些研究中，模型的状态空间本质上是一维的，且其转移结构未纳入历史信息或背景状态等额外信息。

受上述研究启发，我们的研究聚焦于一种不仅取决于队列水平，还取决于队列长度历史的排队模型，并推导其

平稳分布的扩散近似。我们考虑一种排队模型，其中服务率不仅根据当前队列长度进行调整，还取决于队列长度过程近期的轨迹。这使我们能够刻画更复杂、更贴近现实的控制机制。作为第一步，我们引入一种双层 M/M/1 模型，其转移率取决于当前拥塞水平及其近期队列长度历史。鉴于 M/M/1 框架具有基础性的重要地位且结构易于处理，我们在这项初步分析中将其作为基准。对于该模型，我们首先以闭式计算其平稳分布。随后，我们推导其重载下的扩散极限，从而更清晰地揭示系统参数与性能之间的关系。尽管精确的平稳分布能够完整刻画系统的长期行为，但其表达式可能较为复杂。相比之下，扩散近似通常能得到更易处理的公式，更清楚地揭示系统参数与性能度量之间的基本关系，这对于系统设计和控制尤为重要。

本研究的主要贡献如下：

- 我们构建了一个纳入历史依赖和水平依赖的 M/M/1 排队，并以闭式推导出其平稳分布。

- 针对每种背景状态，我们在重交通条件下得到了该 M/M/1 排队平稳分布的扩散极限。值得注意的是，其中一些极限分布呈现出非标准形式，既非指数分布，也非均匀分布，因此有别于扩散极限研究中通常得到的结果。

- 利用所得的密度函数，我们阐明了关键性能指标与模型底层参数之间的关系。

- 通过数值示例，我们评估了扩散近似的准确度，并展示了其在实践中的有效性。

本文其余部分安排如下。第 2 节构建具有状态与历史依赖的转移结构的 M/M/1 模型，并推导其平稳分布的闭式表达。第 3 节推导重交通条件下平稳分布的扩散极限。第 4 节给出前文主要定理的证明。第 5 节通过数值示例评估扩散近似的准确度，并验证理论结果。第 6 节总结全文并展望未来研究方向。

2 历史依赖型双级别 M/M/1 排队

本节将正式定义我们的排队模型，并介绍一些标准记号。设 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别为全体实数和全体整数的集合，并且

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}, \qquad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\},$$
$$\mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}, \qquad \mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 0\}, \qquad \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\}.$$

我们的排队模型扩展了标准 M/M/1 排队，允许到达率和服务率取决于队列长度的历史和级别。设 $L(t)$ 表示时刻 $t \in \mathbb{R}_+$ 的队列长度（包括正在接受服务的顾客），并设 ℓ_d 和 ℓ_u 为满足 $\ell_d < \ell_u$的正整数。我们定义两个重叠区域，并将其称为级别。集合 $\{0, 1, \ldots, \ell_u\}$ 称为级别 1，集合 $\{\ell_d, \ell_d + 1, \ldots\}$ 称为级别 2。显然，这两个级别在 $\{\ell_d, \ell_d + 1, \ldots, \ell_u\}$上相交。当队列长度属于 $\{\ell_d, \ell_d + 1, \ldots, \ell_u\}$时，需要额外的信息来确定有效的到达率和服务率。为此，我们引入背景状态过程 $\{B(t);\ t \in \mathbb{R}_+\}$，其取值于 $\{1, 2\}$。背景过程的状态根据队列长度过程 $\{L(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ 按如下方式变化：

- 若 $B(t-) = 1$，且一次到达使队列长度向上穿越阈值 ℓ_u（即 $L(t-) = \ell_u$ 且 $L(t) = \ell_u + 1$），则背景状态切换为 $B(t) = 2$。
- 若 $B(t-) = 2$，且一次服务完成使队列长度向下穿越阈值 ℓ_d（即 $L(t-) = \ell_d$且 $L(t) = \ell_d - 1$），则背景状态切换为 $B(t) = 1$。

对于每个背景状态 $i \in \{1, 2\}$，我们指定到达率和服务率常数，λ_i，$\mu_i \in \mathbb{R}_{>0}$。于是，时刻 t 的有效速率为 $\lambda_{B(t)}$ 和 $\mu_{B(t)}$。

这些结构引入了历史依赖性。例如，考虑某个时刻 t_1，此时队列长度为 $L(t_1) = \ell_u$。如果系统是经由从$\ell_u + 1$离开而到达这一状态，则背景状态将为 $B(t_1) = 2$，有效速率为（λ_2，μ_2）。相反，如果在另一时刻 t_2，系统经由从 $\ell_u - 1$到达而进入 $L(t_2) = \ell_u$，则背景状态将为 $B(t_2) = 1$，速率则为（λ_1，μ_1）。因此，有效速率不仅取决于当前状态，也取决于过程的历史。基于此，我们将该模型称为历史依赖型两级 M/M/1 排队。图 1 和图 2 分别展示了该模型的样本路径和状态转移图。

现在，我们将联合过程 $\{(L(t)\ B(t));\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 表述为连续时间马尔可夫链，并着手推导其平稳分布。该过程的状态空间记为 $S = S_1 \cup S_2$，其中 $S_1 = \{0, 1, \ldots, \ell_u\} \times \{1\}$ 和 $S_2 = \{\ell_d, \ell_d + 1, \ldots\} \times \{2\}$。令 $Q = \{q_{(\ell,k),(\ell',k')}; (\ell, k), (\ell', k') \in S\}$ 为一个方阵，其非对角元素

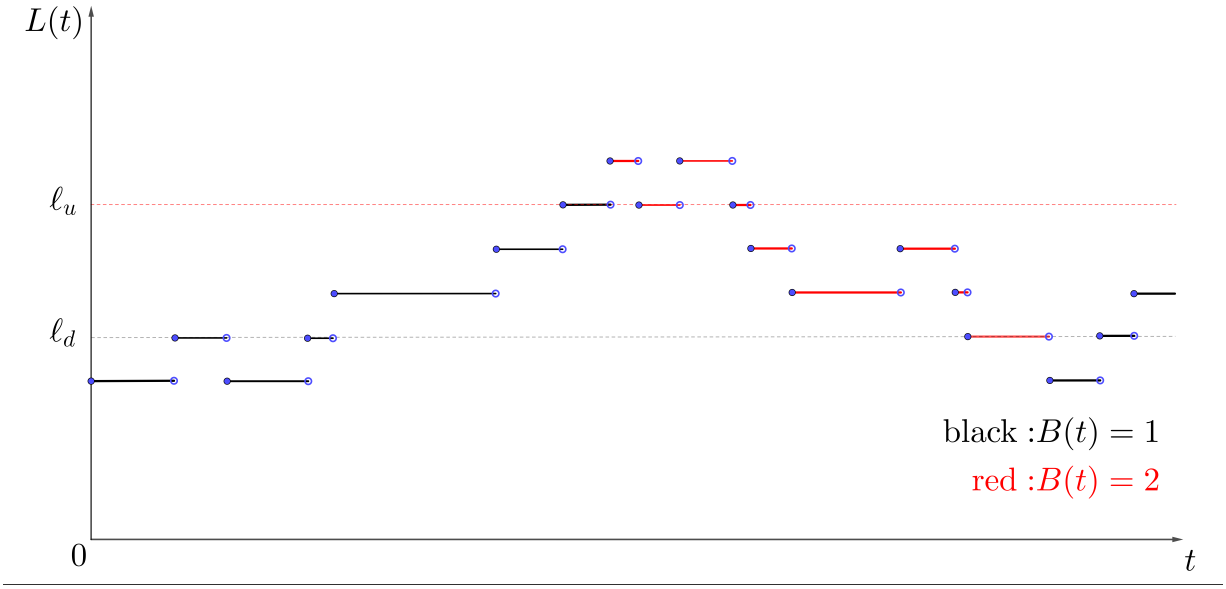


图1： $L(t)$ 的样本路径

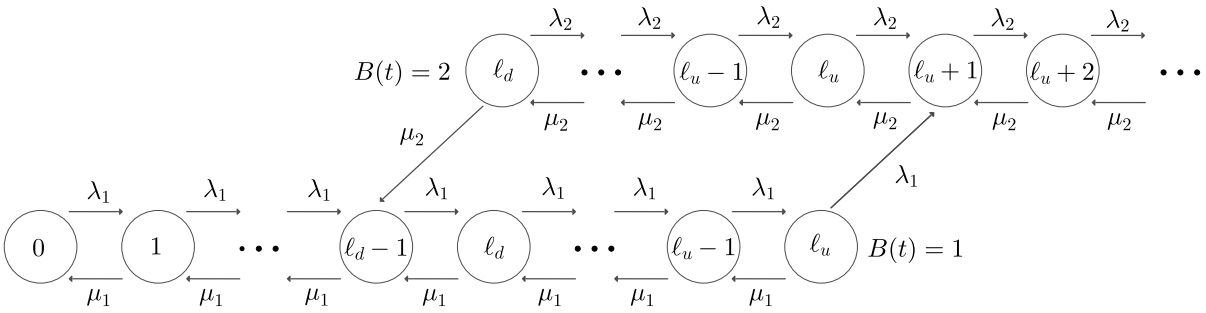


图2：$(L(t)\ B(t))$ 的转移图

对于 $(\ell,k)\neq(\ell',k')$，取值为，

$$q_{(\ell,k),(\ell',k')}=\begin{cases}\lambda_i, & (\ell,k),(\ell',k')\in S_i,\ell'=\ell+1,i=1,2,\\ \mu_i, & (\ell,k),(\ell',k')\in S_i,\ell'=\ell-1,i=1,2,\\ \lambda_1, & (\ell,k)\in S_1,(\ell',k')\in S_2,\ell=\ell_u,\ell'=\ell_u+1,\\ \mu_2, & (\ell,k)\in S_2,(\ell',k')\in S_1,\ell=\ell_d,\ell'=\ell_d-1,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

且对角元素由 $q_{(\ell,k),\ (\ell,k)}=-\sum_{(\ell',\ k')\neq(\ell,\ k)} q_{(\ell,k),\ (\ell',k')}$ 给出。则，矩阵 Q 是 $\{(L(t)\ B(t))\}$ 的转移速率矩阵。

令 $\rho_i=\frac{\lambda_i}{\ }$ for $i=1,2$ and $\rho_{12}=\frac{\lambda_1}{\ }$。如果过程$\mu_i$ $\mu_2\{($ $L(t)\ B(t))\}$ 存在平稳分布，我们将其记为 $\pi=(\pi(\ell,k);(\ell,k)\in S)$。显然，

平稳分布 π 存在当且仅当

$$\rho_2 < 1. \tag{2.1}$$

值得注意的是，我们不要求条件 $\rho_1 < 1$。本文始终假设稳定性条件 (2.1)。定义集合 ∂S 如下:

$$\partial S = \{(0,1), (\ell_d - 1, 1), (\ell_d, 2), (\ell_u, 1), (\ell_u + 1, 2)\}.$$

平稳分布 π 满足以下平衡方程:

$$(\lambda_k + \mu_k)\pi(\ell, k) = \lambda_k \pi(\ell - 1, k) + \mu_k \pi(\ell + 1, k), \quad (\ell, k) \in S \setminus \partial S, \tag{2.2}$$

$$\lambda_1 \pi(0,1) = \mu_1 \pi(1,1), \tag{2.3}$$

$$(\lambda_1 + \mu_1)\pi(\ell_d - 1, 1) = \lambda_1 \pi(\ell_d - 2, 1) + \mu_1 \pi(\ell_d, 1) + \mu_2 \pi(\ell_d, 2), \tag{2.4}$$

$$(\lambda_2 + \mu_2)\pi(\ell_d, 2) = \mu_2 \pi(\ell_d + 1, 2), \tag{2.5}$$

$$(\lambda_1 + \mu_1)\pi(\ell_u, 1) = \lambda_1 \pi(\ell_u - 1, 1), \tag{2.6}$$

$$(\lambda_2 + \mu_2)\pi(\ell_u + 1, 2) = \lambda_2 \pi(\ell_u, 2) + \mu_2 \pi(\ell_u + 2, 2) + \lambda_1 \pi(\ell_u, 1). \tag{2.7}$$

为便于分析，我们将状态空间 S 划分为四个子集，$S_{1,1}$，$S_{1,2}$，$S_{2,1}$，$S_{2,2}$，定义如下

$$S_{1,1} = \{0, 1, \ldots, \ell_d - 1\} \times \{1\}, \qquad S_{2,1} = \{\ell_d, \ell_d + 1, \ldots, \ell_u\} \times \{1\},$$
$$S_{1,2} = \{\ell_d, \ell_d + 1, \ldots, \ell_u\} \times \{2\}, \qquad S_{2,2} = \{\ell_u + 1, \ell_u + 2, \ldots\} \times \{2\}.$$

对于条件 A，令 1(A) 表示

$$1(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1, & \text{if A is true,} \\ 0, & \text{if A is false.} \end{cases}$$

为方便起见，令 ϕ 表示定义在 $\mathbb{Z}_+$ 上的辅助函数

$$\phi(i) = \sum_{j=0}^{i} \rho_1^j = \frac{1 - \rho_1^{i+1}}{1 - \rho_1} 1(\rho_1 \neq 1) + (i+1) 1(\rho_1 = 1), \qquad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.8}$$

然后，求解平衡方程 (2.2)–(2.7) 可得以下定理。

定理 2.1 在稳定性条件 (2.1) 下，平稳分布 π 由以下表达式给出:

$$\pi(\ell, k) = \begin{cases} \rho_1^{\ell} \pi(0,1), & (\ell, k) \in S_{1,1}, \\ \dfrac{\phi(\ell_u) - \phi(\ell - 1)}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1)} \pi(0,1), & (\ell, k) \in S_{2,1}, \\ \dfrac{\rho_1^{\ell_u}}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1)} \dfrac{1 - \rho_2^{\ell - (\ell_d - 1)}}{1 - \rho_2} \rho_{12} \pi(0,1), & (\ell, k) \in S_{1,2}, \\ \dfrac{\rho_1^{\ell_u}}{\phi(\ell_u - \ell_d + 1)} \dfrac{1 - \rho_2^{\ell_u - \ell_d + 2}}{1 - \rho_2} \rho_{12} \rho_2^{\ell - (\ell_u + 1)} \pi(0,1), & (\ell, k) \in S_{2,2}, \end{cases} \tag{2.9}$$

其中归一化常数 $\pi(0,1)$ 由下式给出

$$\pi(0,1)=\left(\phi(\ell_d-1)+\sum_{\ell=\ell_d}^{\ell_u}\frac{\phi(\ell_u)-\phi(\ell-1)}{\phi(\ell_u-\ell_d+1)}+\frac{\rho_{12}\rho_1^{\ell_u}\left(\ell_u-\ell_d+2\right)}{\phi(\ell_u-\ell_d+1)(1-\rho_2)}\right)^{-1}. \tag{2.10}$$

注 2.1 由 (2.8) 可知，(2.9) 可写为：当 $(\ell,k)\in S_{2,1}$ 时，

$$\pi(\ell,k)=\left(\frac{\rho_1^{\ell}-\rho_1^{\ell_u+1}}{1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2}}1(\rho_1\neq 1)+\frac{(\ell_u+1)-\ell}{\ell_u-\ell_d+2}1(\rho_1=1)\right)\pi(0,1),$$

当 $(\ell,k)\in S_{1,2}$ 时，

$$\pi(\ell,k)=\left(\frac{\rho_1^{\ell_u}-\rho_1^{\ell_u+1}}{1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2}}1(\rho_1\neq 1)+\frac{1}{\ell_u-\ell_d+2}1(\rho_1=1)\right)\frac{1-\rho_2^{\ell-(\ell_d-1)}}{1-\rho_2}\rho_{12}\pi(0,1),$$

并且，当 $(\ell,k)\in S_{2,2}$ 时，

$$\pi(\ell,k)=\left(\frac{\rho_1^{\ell_u}-\rho_1^{\ell_u+1}}{1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2}}1(\rho_1\neq 1)+\frac{1}{\ell_u-\ell_d+2}1(\rho_1=1)\right)\frac{1-\rho_2^{\ell_u-\ell_d}}{1-\rho_2}\rho_{12}\rho_2^{\ell-\ell_u+1}\pi(0,1).$$

此外，由 (2.10) 可将归一化常数表示为

$$\pi(0,1)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-\rho_1}-\dfrac{\rho_1^{\ell_u+1}(\ell_u-\ell_d+2)}{(1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2})}+\dfrac{\rho_{12}(\rho_1^{\ell_u}-\rho_1^{\ell_u+1})(\ell_u-\ell_d+2)}{(1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2})(1-\rho_2)}\right)^{-1}, & \rho_1\neq 1,\\ \left(\dfrac{\ell_u+\ell_d+1}{2}+\dfrac{\rho_{12}}{1-\rho_2}\right)^{-1}, & \rho_1=1.\end{cases}$$

定理 2.1 的证明见附录 A。令 (L,B) 为服从平稳分布 π 的随机向量。我们还将 L 的矩母函数（MGF）记为 ψ，定义如下：

$$\psi(\theta)=\mathbb{E}\left(e^{\theta L}\right),\qquad \theta\in\mathbb{R}.$$

注意，对于所有 $\theta\leq 0$，$\psi(\theta)<\infty$。此外，对于 $i,j=1,2$，令

$$\psi_{i,j}(\theta)=\mathbb{E}\left(e^{\theta L}1((L,B)\in S_{i,j})\right)=\sum_{(\ell,k)\in S_{i,j}}e^{\theta\ell}\pi(\ell,k),\qquad \theta\in\mathbb{R}.$$

那么，对于所有 $\theta\in\mathbb{R}$，$\psi_{1,1}(\theta)$、$\psi_{2,1}(\theta)$ 和 $\psi_{1,2}(\theta)$ 均为有限值。相比之下，$\psi_{2,2}(\theta)$ 仅在

当 $\theta < \log \rho_2^{-1}$ 时才有限。根据注 2.1，对于 $\rho_1 \neq 1$，我们有

$$\psi_{1,1}(\theta) = \frac{1-(\rho_1 e^{\theta})^{\ell_d}}{1-\rho_1 e^{\theta}}\pi(0,1), \tag{2.11}$$

$$\psi_{2,1}(\theta) = \frac{\frac{(\rho_1 e^{\theta})^{\ell_d}-(\rho_1 e^{\theta})^{\ell_u+1}}{1-\rho_1 e^{\theta}} - \rho_1^{\ell_u+1}\frac{e^{\theta\ell_d}-e^{\theta(\ell_u+1)}}{1-e^{\theta}}}{1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2}}\pi(0,1), \qquad \theta \neq 0, \tag{2.12}$$

$$\psi_{1,2}(\theta) = \frac{\rho_{12}(\rho_1^{\ell_u}-\rho_1^{\ell_u+1})}{(1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2})(1-\rho_2)}\left(\frac{e^{\theta\ell_d}-e^{\theta(\ell_u+1)}}{1-e^{\theta}} - e^{\theta(\ell_d-1)}\frac{\rho_2 e^{\theta}-(\rho_2 e^{\theta})^{\ell_u-\ell_d+2}}{1-\rho_2 e^{\theta}}\right)\pi(0,1),$$
$$\theta \neq 0, \text{ 对数 } \rho_2^{-1}, \tag{2.13}$$

$$\psi_{2,2}(\theta) = \frac{\rho_{12}(\rho_1^{\ell_u}-\rho_1^{\ell_u+1})(1-\rho_2^{\ell_u-\ell_d+2})}{(1-\rho_1^{\ell_u-\ell_d+2})(1-\rho_2)}\frac{e^{\theta(\ell_u+1)}}{1-\rho_2 e^{\theta}}\pi(0,1), \qquad \theta < \log \rho_2^{-1}. \tag{2.14}$$

对于情形 $\rho_1 = 1$，表达式如下：

$$\psi_{1,1}(\theta) = \frac{1-e^{\theta\ell_d}}{1-e^{\theta}}\pi(0,1), \qquad \theta \neq 0, \tag{2.15}$$

$$\psi_{2,1}(\theta) = \frac{(\ell_u-\ell_d+1)e^{\theta\ell_d} - \frac{e^{\theta(\ell_d+1)}-e^{\theta(\ell_u+2)}}{1-e^{\theta}}}{(\ell_u-\ell_d+2)(1-e^{\theta})}\pi(0,1), \qquad \theta \neq 0, \tag{2.16}$$

$$\psi_{1,2}(\theta) = \frac{\rho_{12}}{(\ell_u-\ell_d+2)(1-\rho_2)}\left(\frac{e^{\theta\ell_d}-e^{\theta(\ell_u+1)}}{1-e^{\theta}} - e^{\theta(\ell_d-1)}\frac{\rho_2 e^{\theta}-(\rho_2 e^{\theta})^{\ell_u-\ell_d+2}}{1-\rho_2 e^{\theta}}\right)\pi(0,1),$$
$$\theta \neq 0, \text{对数 } \rho_2^{-1}, \tag{2.17}$$

$$\psi_{2,2}(\theta) = \frac{\rho_{12}(1-\rho_2^{\ell_u-\ell_d+2})}{(\ell_u-\ell_d+2)(1-\rho_2)}\frac{e^{\theta(\ell_u+1)}}{1-\rho_2 e^{\theta}}\pi(0,1), \qquad \theta < \log \rho_2^{-1}. \tag{2.18}$$

3 主要结果

在本节中，我们推导平稳分布 π 的扩散极限。按照扩散分析的标准方法，我们考虑一列由 $n \in \mathbb{N}$ 索引的排队系统。对于与第 n 个系统相关的任何记号，例如 $\ell_u^{(n)}$、$\ell_d^{(n)}$ 和 $(L^{(n)}, B^{(n)})$，我们都加上上标 (n)。我们的目标是求出缩放后的队列长度 $\frac{1}{\sqrt{n}}L^{(n)}$ 在 $n \to \infty$ 时的极限分布，并将其称为平稳分布的扩散极限。为此，我们作出以下条件。对于函数 f 和 g，若 $g(x) = o(f(x))$，则记作 $x \to \infty$，当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

(a) 对所有 $n \in \mathbb{N}$，第 n 个系统都是稳定的：$\rho_2^{(n)} < 1$。

(b) 对于 $i = 1,2$，存在常数 $\widetilde{\lambda}_i, \widetilde{\mu}_i \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $\lambda_i^{(n)} \to \widetilde{\lambda}_i$，且当$n \to \infty$时，$\mu_i^{(n)} \to \widetilde{\mu}_i$。

(c) 存在正常数 $\ell_d, \ell_u \in \mathbb{R}_{>0}$，使得 $\ell_d < \ell_u$，且

$$\ell_d^{(n)} = \sqrt{n}\widetilde{\ell}_d + o(\sqrt{n}), \quad \ell_u^{(n)} = \sqrt{n}\widetilde{\ell}_u + o(\sqrt{n}),$$

当 $n \to \infty$ 时。

(d) 存在常数 $b_1 \in \mathbb{R}$ 和 $b_2 \in \mathbb{R}_{<0}$，使得

$$\rho_i^{(n)} = 1 + \frac{b_i}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

当 $n \to \infty$ 时。

关于这些假设，有几点说明。第 n 个系统的稳定性需要假设 (a)。假设 (b) 蕴含 $\rho_{12}^{(n)} = \widetilde{\rho}_{12} + o(1)$，其中 $\widetilde{\rho}_{12} = \frac{\lambda_1}{\widetilde{\mu}_2}$。对于所有 n，条件 $\ell_d^{(n)} < \ell_u^{(n)}$ 与 (c) 中的收敛共同蕴含 $\widetilde{\ell}_d \leq \widetilde{\ell}_u$。为简化讨论，我们假设 $\ell_d < \ell_u$。根据假设 (d),

$$\lambda_i^{(n)} - \mu_i^{(n)} = \frac{b_i}{\sqrt{n}}\mu_i^{(n)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad i = 1, 2, \quad n \to \infty. \tag{3.2}$$

由 (3.2) 和假设 (b)，必有 $\lambda_i = \widetilde{\mu}_i$ 对 $i = 1$，2。假设 (c) 和 (d) 等价于

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ell_i^{(n)} = \widetilde{\ell}_i, && i = d, u, \\ &\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(1 - \rho_j^{(n)}) = -b_j, && j = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

在这些条件下，我们现在可以陈述本文的主要结果。

令 $\nu^{(n)}$ 表示缩放后的队列长度 $\frac{1}{\sqrt{n}}L^{(n)}$的概率测度，即

$$\nu^{(n)}(E) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L^{(n)} \in E\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

其中，$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-域。现在我们可以陈述主要结果了。

定理 3.1 假设假设 (a)–(d) 成立。那么，当 $n \to \infty$ 时，序列$\{\nu^{(n)}\}$ 弱收敛于一个概率测度 ν，其概率密度函数为$f = f_{1,\,1} + f_{2,\,1} + f_{1,\,2} + f_{2,\,2}$，其中 $f_{1,\,1}$，$f_{2,\,1}$，$f_{1,\,2}$，$f_{2,\,2}$ 定义如下:

$$f_{1,1}(x) = C_0 \left(b_1 (e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} - 1) 1(b_1 \neq 0) + 1(b_1 = 0) \right) e^{b_1 x} 1(x \in [0, \widetilde{\ell}_d)), \tag{3.4}$$

$$f_{2,1}(x) = C_0 \left(b_1 (e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} - e^{b_1 x}) 1(b_1 \neq 0) + \frac{\widetilde{\ell}_u - x}{\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d} 1(b_1 = 0) \right) 1(x \in [\widetilde{\ell}_d, \widetilde{\ell}_u]), \tag{3.5}$$

$$f_{1,2}(x) = \frac{C_0 \widetilde{\rho}_{12}}{b_2} \left(b_1^2 e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} 1(b_1 \neq 0) + \frac{1(b_1 = 0)}{\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d} \right) (e^{b_2(x - \widetilde{\ell}_d)} - 1) 1(x \in [\widetilde{\ell}_d, \widetilde{\ell}_u]), \tag{3.6}$$

$$f_{2,2}(x) = \frac{C_0 \widetilde{\rho}_{12} (e^{b_2(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} - 1)}{b_2} \left(b_1^2 e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} 1(b_1 \neq 0) + \frac{1(b_1 = 0)}{\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d} \right) e^{b_2(x - \widetilde{\ell}_u)} 1(x \in (\widetilde{\ell}_u, \infty)), \tag{3.7}$$

其中，C_0 是归一化常数，定义为

$$C_0 = \begin{cases} \left(1 - e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} + b_1 (\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d) e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} - \dfrac{b_1^2}{b_2} (\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d) \widetilde{\rho}_{12} e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} \right)^{-1}, & b_1 \neq 0, \\ \left(\dfrac{\widetilde{\ell}_u + \widetilde{\ell}_d}{2} - \dfrac{\widetilde{\rho}_{12}}{b_2} \right)^{-1}, & b_1 = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

注 3.1 对于 $i,\ j = 1,\ 2$，密度函数 $f_{i,\,j}$揭示了若干有趣的性质。对于 $b_1 \neq 0$, $f_{1,\,1}$ 和 $f_{2,\,2}$ 具有指数分布形式，而对于 $b_1 = 0$, $f_{1,\,1}$ 则对应均匀密度。在这方面，分布 ν 与 [4] 中的分布相似。然而，分量 $f_{2,\,1}$ 和 $f_{1,\,2}$ 既非指数分布，也非均匀分布。这些新颖的形式直接源于我们模型的历史依赖结构。对于 [4], 中缺少两个级别之间重叠区域 $\{\ell_d, \ell_d + 1, \ldots, \ell_u\}$ 的层依赖队列，相应的密度分量为零。

我们将在下一节证明定理 3.1。

4 定理 3.1 的证明

对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $E \in \mathcal{B}$（$\mathbb{R}$），令 $\nu_{1\,1}^{(n)}{}_{,}$，$\nu_{2\,1}^{(n)}{}_{,}$，$\nu_{1\,2}^{(n)}{}_{,}$ 和 $\nu_{2\,2}^{(n)}{}_{,}$ 表示对应于四个状态空间划分的测度，定义如下

$$\nu_{i,j}^{(n)}(E) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)} \in E, (L^{(n)}, B^{(n)}) \in S_{i,j}^{(n)} \right), \qquad i, j = 1, 2,$$

其中我们回顾一下

$$S_{1,1}^{(n)} = \{0, 1, \ldots, \ell_d^{(n)} - 1\} \times \{1\}, \qquad S_{2,1}^{(n)} = \{\ell_d^{(n)}, \ell_d^{(n)} + 1, \ldots, \ell_u^{(n)}\} \times \{1\},$$
$$S_{1,2}^{(n)} = \{\ell_d^{(n)}, \ell_d^{(n)} + 1, \ldots, \ell_u^{(n)}\} \times \{2\}, \qquad S_{2,2}^{(n)} = \{\ell_u^{(n)} + 1, \ell_u^{(n)} + 2, \ldots\} \times \{2\}.$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，显然这些测度将总概率测度 $\nu^{(n)}$划分为若干部分：

$$\nu^{(n)}(E) = \sum_{i,j=1,2} \nu_{i,j}^{(n)}(E). \tag{4.1}$$

Fo令 i， $j = 1$， 2，令 $\nu_{i,\ j}$表示密度函数为 $f_{i,\ j}$ 的测度，即

$$\nu_{i,j}(E) = \int_E f_{i,j}(x)dx, \qquad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

为证明定理 3.1，只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{i,j}^{(n)}(E) = \nu_{i,j}(E), \qquad i,j = 1,2, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{4.2}$$

为验证 (4.2)，只需证明 $\varphi_i^{(n)}{}_{,\ j} \to \varphi_{i,\ j}$ 当 $n \to \infty$ 时，其中 $\varphi_i^{(n)}{}_{,\ j}$ 和 $\varphi_{i,\ j}$ 定义为

$$\varphi_{i,j}^{(n)}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x}\nu_{i,j}^{(n)}(dx) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}L^{(n)}} 1((L^{(n)}, B^{(n)}) \in S_{i,j}^{(n)})\right),$$
$$\varphi_{i,j}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x}\nu_{i,j}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f_{i,j}(x)dx,$$

对于 $n \in \mathbb{N}$， i， $j = 1$， 2 和 $\theta \in \mathbb{R}$。

It 由 (2.11)、(2.15) 以及假设 (c) 和 (d) 可知，对于 $\theta \neq -$ b_1，

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}^{(n)}(\theta) &= \psi_{1,1}^{(n)}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{1 - (\rho_1^{(n)} e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_d^{(n)}+1}}{1 - \rho_1^{(n)} e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}} \pi^{(n)}(0,1) \\ &= \frac{e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_d} - 1 + o(1)}{\theta + b_1 + o(1)} \sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1),\end{aligned} \tag{4.3}$$

这里用到了渐近展开

$$\left(\rho_1^{(n)}\right)^{\ell_d^{(n)}+1} = e^{b_1\widetilde{\ell}_d} + o(1), \qquad \rho_1^{(n)} e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}} = \left(1 + \frac{b_1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{4.4}$$

表达式 (4.3) 表明，为证明当 $n \to \infty$ 时 $_j(\theta) \to \varphi_{i,j}(\theta)$，我们需要确定 $\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1)$ 的渐近行为。为此，设 $g_i(n)$ 是定义在 $\mathbb{N}$ 上的一个函数，表示重交通展开中的高阶误差项：

$$g_i(n) = \rho_i^{(n)} - 1 - \frac{b_i}{\sqrt{n}}, \qquad i = 1,2. \tag{4.5}$$

由假设 (d)，我们立即得到当 $n \to \infty$ 时， $g_i(n) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$。我们首先给出以下引理。

引理 4.1 设 $a(n) \in \mathbb{R}$ 和 $b(n) > 0$ 是定义在 $\mathbb{N}$ 上的函数，满足 $a(n) = o\left(\frac{1}{b(n)}\right)$，且当 $n \to \infty$ 时，$b(n) \to \infty$。那么，我们有

$$(1 + a(n))^{b(n)} = 1 + a(n)b(n)(1 + o(1)), \tag{4.6}$$

$$(1 + a(n))^{b(n)} = 1 + a(n)b(n)\left(1 + \frac{a(n)(b(n) - 1)}{2}(1 + o(1))\right), \tag{4.7}$$

当 $n \to \infty$ 时。

证明。由于 $|a(n)| = o\left(\frac{1}{b(n)}\right)$ 且 $b(n)|\log(1 + a(n))| \leq |a(n)|b(n)$，我们有 $\lim_{n\to\infty} b(n)\log(1 + a(n)) = 0$，这等价于 $\lim_{n\to\infty}(1 + a(n))^{b(n)} = 1$，即，

$$(1 + a(n))^{b(n)} = 1 + o(1),$$

当 $n \to \infty$ 时。根据二项式定理，

$$(1 + a(n))^{b(n)} - 1 = \sum_{k=1}^{b(n)} \frac{b(n)!}{k!(b(n) - k)!}(a(n))^k.$$

因此，我们有

$$\sum_{k=1}^{b(n)} \frac{b(n)!}{k!(b(n) - k)!}(a(n))^k = o(1). \tag{4.8}$$

提出第一项作为公因子，得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{b(n)} \frac{b(n)!}{k!(b(n) - k)!}(a(n))^k &= a(n)b(n)\left(1 + \sum_{k=2}^{b(n)} \frac{(b(n) - 1)!}{k!(b(n) - k)!}(a(n))^{k-1}\right) \\ &= a(n)b(n)\left(1 + \sum_{k=1}^{b(n)-1} \frac{(b(n) - 1)!}{(k + 1)!(b(n) - 1 - k)!}(a(n))^k\right).\end{aligned}$$

由（4.8）可知，右侧的求和为 $o(1)$，从而证明了（4.6）。类似地，为得到二阶项，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{b(n)} \frac{b(n)!}{k!(b(n) - k)!}(a(n))^k \\ &\quad = a(n)b(n)\left(1 + \frac{a(n)(b(n) - 1)}{2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{b(n)-2} \frac{(b(n) - 2)!}{(k + 2)!(b(n) - 2 - k)!}(a(n))^k\right)\right).\end{aligned}$$

再次由（4.8）可知，右侧的求和项为 $o(1)$，这意味着（4.7）。
□

由引理 4.1，我们得到归一化常数渐近行为的以下结果。

引理 4.2 假设假设 (a)–(d) 成立。若 $b_1 \neq 0$，则

$$\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1) = \left(\frac{1}{-b_1 + o(1)} - \frac{e^{b_1 \widetilde{\ell}_u}(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d) + o(1)}{1 - e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} + o(1)} + \frac{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)\widetilde{\rho}_{12} e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} + o(1)}{b_2(1 - e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)}) + o(1)} \right)^{-1}, \tag{4.9}$$

若 $b_1 = 0$，则

$$\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1) = \left(\frac{\widetilde{\ell}_u + \widetilde{\ell}_d + o(1)}{2(1 + o(1))} - \frac{\widetilde{\rho}_{12} + o(1)}{b_2 + o(1)} \right)^{-1}, \tag{4.10}$$

当 $n \to \infty$ 时。

证明。由假设 (b) 和 (d)，我们有以下收敛：

$$\rho_{12}^{(n)} = \widetilde{\rho}_{12} + o(1), \qquad 1 - \rho_i^{(n)} = -\frac{b_i}{\sqrt{n}} - g_i(n), \quad i = 1, 2, \tag{4.11}$$

$$(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2} = e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} + o(1), \qquad (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}} = (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} + 1} = e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} + o(1), \tag{4.12}$$

当 $n \to \infty$。此外，根据注 2.1，对于 $\rho_1^{(n)} \neq 1$，$\pi^{(n)}(0, 1)$ 具有以下形式：

$$\left(\frac{1}{1 - \rho_1^{(n)}} - \frac{(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} + 1}(\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2)}{(1 - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2})} + \frac{\rho_{12}^{(n)}((\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}} - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} + 1})(\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2)}{(1 - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2})(1 - \rho_2^{(n)})} \right)^{-1}. \tag{4.13}$$

若 $b_1 \neq 0$，则对所有充分大的 n，$\rho_1^{(n)} \neq 1$。将假设 (c) 中的渐近关系以及 $\sqrt{n} g_1(n) = o(1)$ 这一事实代入 (4.13)，得到

$$\pi^{(n)}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{-b_1 + o(1)} - \frac{e^{b_1 \widetilde{\ell}_u}(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d) + o(1)}{1 - e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} + o(1)} + \frac{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)\widetilde{\rho}_{12} e^{b_1 \widetilde{\ell}_u} + o(1)}{b_2(1 - e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)}) + o(1)} \right)^{-1},$$

由此完成了 (4.9) 的证明。

若 $b_1 = 0$，则必须考虑 $\rho_1^{(n)} \neq 1$ 和 $\rho_1^{(n)} = 1$两种情形，并证明它们得到相同的极限 (4.10)。我们首先假设，当足够大时，$b_1 = 0$ 和 $\rho_1^{(n)} \neq 1$

$n \in \mathbb{N}$。注意，$\rho_1^{(n)} = 1 + g_1(n)$ 与 $g_1(n) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$。因此，由引理 4.1 中的 (4.6) 和 (4.7)，

$$(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}} = 1 + \ell_u^{(n)} g_1(n)\,(1 + o(1))\,, \tag{4.14}$$

$$1 - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2} = -(\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2) g_1(n) \left(1 + \frac{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 1}{2} g_1(n)(1 + o(1))\right). \tag{4.15}$$

请注意，(4.14) 和 (4.15) 中的 $o(1)$ 项不一定相同。由 (4.13) 可得，当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned}
\pi^{(n)}(0,1) &= \left(\frac{1}{-g_1(n)} + \frac{1 + \ell_u^{(n)} g_1(n)(1 + o(1))}{g_1(n)\left(1 + \frac{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 1}{2} g_1(n)(1 + o(1))\right)} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\sqrt{n} g_1(n)(\widetilde{\rho}_{12} + o(1))(1 + \ell_u^{(n)} g_1(n)\,(1 + o(1)))}{g_1(n)\left(1 + \frac{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 1}{2} g_1(n)(1 + o(1))\right)(b_2 + o(1))} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\ell_u^{(n)} + \ell_d^{(n)} + \sqrt{n} o(1)}{2\left(1 + \frac{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 1}{2} g_1(n)(1 + o(1))\right)} - \frac{\sqrt{n}(\widetilde{\rho}_{12} + o(1))(1 + o(1)\,(1 + o(1)))}{(1 + o(1)(1 + o(1)))\,(b_2 + o(1))} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\sqrt{n}\left(\left(\widetilde{\ell}_u + \widetilde{\ell}_d + g_1(n)\right) + o(1)\right)}{2(1 + o(1))} - \frac{\sqrt{n}(\widetilde{\rho}_{12} + o(1))}{b_2 + o(1)} \right)^{-1},
\end{aligned}$$

这意味着 (4.10) 成立。

最后，若对所有充分大的 n 都有 $\rho_1^{(n)} = 1$，则再次由注 2.1 可得，

$$\begin{aligned}
\pi^{(n)}(0,1) &= \left(\frac{\ell_u^{(n)} + \ell_d^{(n)} + 1}{2} + \frac{\rho_{12}^{(n)}}{1 - \rho_2^{(n)}} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\sqrt{n}(\widetilde{\ell}_u + \widetilde{\ell}_d + o(1))}{2} - \frac{\sqrt{n}(\widetilde{\rho}_{12} + o(1))}{b_2 + o(1)} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

因此，在这种情形下，我们也有式 (4.10)。 □

定理 3.1 的证明。由引理 4.2 中的式 (4.9)，对于 $b_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1) &= \left(\frac{1}{-b_1} - \frac{e^{b_1\widetilde{\ell}_u}(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)}{1-e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}} + \frac{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)\widetilde{\rho}_{12}e^{b_1\widetilde{\ell}_u}}{b_2(1-e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)})}\right)^{-1} \\ &= C_0 b_1(e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-1), \end{aligned} \tag{4.16}$$

并且由 (4.10) 可得，对于 $b_1 = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1) = \left(\frac{\widetilde{\ell}_u+\widetilde{\ell}_d}{2} - \frac{\widetilde{\rho}_{12}}{b_2}\right)^{-1} = C_0. \tag{4.17}$$

因此，由 (4.3) 可得,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{1,1}^{(n)}(\theta) = C_0(b_1(e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-1)1(b_1\neq 0)+1(b_1=0))\frac{e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_d}-1}{\theta+b_1}.$$

另一方面，由 (3.4) 可知,

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}(\theta) &= \int_0^{\widetilde{\ell}_d} e^{\theta x}C_0\left(b_1(e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-1)1(b_1\neq 0)+1(b_1=0)\right)e^{b_1 x}dx \\ &= C_0(b_1(e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-1)1(b_1\neq 0)+1(b_1=0))\frac{e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_d}-1}{\theta+b_1}.\end{aligned}$$

因此，我们证明了 $\lim_{n\to\infty}\varphi_{1\,1}^{(n)}(\theta) = \varphi_{1,1}(\theta)$，这意味着，对于 $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，$\lim_{n\to\infty}\nu_{1\,1}^{(n)}(E) = \nu_{1,1}(E)$。其他分量的收敛性可验证如下:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_{2,1}^{(n)}(\theta) &= C_0 b_1\left(\frac{e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_d}-e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_u}}{\theta+b_1} + e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_u}-e^{\theta\widetilde{\ell}_d}}{\theta}\right)1(b_1\neq 0) \\ &\quad + C_0\frac{\theta e^{\theta\widetilde{\ell}_d}\left(\widetilde{\ell}_d-\widetilde{\ell}_u\right)+e^{\theta\widetilde{\ell}_u}-e^{\theta\widetilde{\ell}_d}}{\theta^2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}1(b_1=0) = \varphi_{2,1}(\theta),\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_{1,2}^{(n)}(\theta) &= \frac{C_0\widetilde{\rho}_{12}}{b_2}b_1^2e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\left(\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_d}-e^{\theta\widetilde{\ell}_u}}{\theta} + \frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_u+b_2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-e^{\theta\widetilde{\ell}_d}}{\theta+b_2}\right)1(b_1\neq 0) \\ &\quad + \frac{C_0\widetilde{\rho}_{12}}{b_2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}\left(\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_d}-e^{\theta\widetilde{\ell}_u}}{\theta} + \frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_u+b_2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-e^{\theta\widetilde{\ell}_d}}{\theta+b_2}\right)1(b_1=0) = \varphi_{1,2}(\theta),\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi_{2,2}^{(n)}(\theta) &= \frac{C_0\widetilde{\rho}_{12}}{b_2}b_1^2e^{b_1\widetilde{\ell}_u}(1-e^{b_2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)})\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_u}}{\theta+b_2}1(b_1\neq 0) \\ &\quad + \frac{C_0\widetilde{\rho}_{12}}{b_2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}(1-e^{b_2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)})\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_u}}{\theta+b_2}1(b_1=0) = \varphi_{2,2}(\theta).\end{aligned} \tag{4.20}$$

由于 (4.19) 和 (4.20) 的推导类似，我们仅在附录 B 中证明 (4.18)。因此，对于所有 $i, j = 1, 2$，均有 $\lim_{n\to\infty} \varphi_{ij}^{(n)}(\theta) = \varphi_{i,j}(\theta)$，由此完成定理 3.1 的证明。
□

5 近似与数值示例

本节基于主要定理推导近似公式，并通过数值示例评估其准确度。我们首先证明均值收敛。

引理 5.1 在定理 3.1 的相同假设下，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)}\right) = \int_0^\infty x\nu(dx), \tag{5.1}$$

其中，右侧的积分是关于概率测度 ν 的勒贝格积分。

证明. 根据定理 3.1，只需验证随机变量序列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)}\right\}$ 的一致可积性。根据假设 (c)，对于任意 $\alpha \geq \widetilde{\ell}_u + 1$ 和充分大的 n，有 $(L^{(n)}, B^{(n)}) \in S_{2,2}^{(n)}$。如果 $\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)} \geq \alpha$。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)} \geq \alpha\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)} \geq \alpha, (L^{(n)}, B^{(n)}) \in S_{2,2}^{(n)}\right).$$

此外，由注 2.1 可知，第 n 个系统的平稳分布形式为

$$\pi^{(n)}(\ell, 2) = c(n)(\rho_2^{(n)})^{\ell - \ell_u^{(n)} + 1}, \qquad \ell \geq \ell_u^{(n)},$$

其中 $c(n)$ 的表达式为

$$\left(\frac{(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}} - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}+1}}{1 - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2}} 1(\rho_1^{(n)} \neq 1) + \frac{1(\rho_1^{(n)} = 1)}{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2}\right) \frac{1 - (\rho_2^{(n)})^{\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)}}}{1 - \rho_2^{(n)}} \rho_{12}^{(n)} \pi^{(n)}(0, 1).$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)} 1\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L^{(n)} \geq \alpha\right)\right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\ell = \lceil \sqrt{n}\alpha \rceil}^{\infty} \ell \pi^{(n)}(\ell, 2) \\
&= \sqrt{n} c(n) \left(\frac{\lceil \sqrt{n}\alpha \rceil}{n(1 - \rho_2^{(n)})} (\rho_2^{(n)})^{\lceil \sqrt{n}\alpha \rceil} + \frac{(\rho_2^{(n)})^{\lceil \sqrt{n}\alpha \rceil + 1}}{n(1 - \rho_2^{(n)})^2}\right),
\end{aligned}$$

其中 $\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\}$ 对于 $x \in \mathbb{R}$。由引理 4.2 和定理 3.1 的证明可知，$\sqrt{n}c(n)$ 收敛到一个正常数。因此，存在一个常数K 使得

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n}c(n) < K.$$

当 n_0 足够大时，对于 $n \geq n_0$，有

$$\frac{\lceil\sqrt{n}\alpha\rceil}{n(1-\rho_2^{(n)})}(\rho_2^{(n)})^{\lceil\sqrt{n}\alpha\rceil} = \frac{(1+o(1))\lceil\alpha\rceil}{-b_2+o(1)}(e^{b_2\alpha}+o(1)), \tag{5.2}$$

$$\frac{(\rho_2^{(n)})^{\lceil\sqrt{n}\alpha\rceil+1}}{n(1-\rho_2^{(n)})^2} = \frac{e^{b_2\alpha}+o(1)}{(-b_2+o(1))^2}. \tag{5.3}$$

由于在假设 (d) 下 $b_2 < 0$，对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个 β，使得 (5.2) 和 (5.3) 的右端不大于 $\dfrac{\epsilon}{2K}$，对任意 $\alpha \geq \beta$ 均成立。此外，根据条件 $\rho_2^{(n)} < 1$，我们可以选取一个足够大的 γ，使得对于 $\alpha \geq \gamma$ 和所有 $n < n_0$,

$$\frac{\lceil\sqrt{n}\alpha\rceil}{n(1-\rho_2^{(n)})}(\rho_2^{(n)})^{\lceil\sqrt{n}\alpha\rceil} < \frac{\epsilon}{2K}, \qquad \frac{(\rho_2^{(n)})^{\lceil\sqrt{n}\alpha\rceil+1}}{n(1-\rho_2^{(n)})^2} < \frac{\epsilon}{2K}.$$

综合这些观察，我们可以得出

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L^{(n)}1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L^{(n)} \geq \alpha\right)\right) = 0.$$

证明完毕。 □

此外，由 (4.16)、(4.17) 和 (5.1)，我们很容易得到以下结果。

推论 5.1 平均队列长度 $\mathbb{E}(L^{(n)})$ 具有以下渐近性质：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)}(0,1)\mathbb{E}(L^{(n)}) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}L^{(n)}\right) \\ &= C_0(b_1(e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-1)1(b_1\neq 0)+1(b_1=0))\int_0^\infty x\nu(dx). \end{aligned} \tag{5.4}$$

推论 5.1 表明，$\mathbb{E}(L^{(n)})$ 的增长率与空闲概率 $\pi^{(n)}(0,1) = \mathbb{P}(L^{(n)} = 0)$ 的衰减率相同。

接下来，我们给出数值示例，以评估我们近似方法的性能。根据假设 (d)，可由 (5.1) 得出平均队列长度的实用近似：

$$\mathbb{E}(L^{(n)}) \approx \frac{-b_2}{1-\rho_2^{(n)}}\int_0^\infty x\nu(dx), \tag{5.5}$$

其中，根据定理 3.1，对于 $b_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x\nu(dx) &= \int_0^{\widetilde{\ell}_d} x f_{1,1}(x)dx + \int_{\widetilde{\ell}_d}^{\widetilde{\ell}_u} x(f_{2,1}(x)+f_{1,2}(x))dx + \int_{\widetilde{\ell}_u}^\infty x f_{2,2}(x)dx \\ &= \left(1 - e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)} + b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)e^{b_1\widetilde{\ell}_u} - \frac{b_1^2}{b_2}(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)\widetilde{\rho}_{12}e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\right)^{-1} \\ &\quad \left(\frac{1}{b_1}(e^{b_1(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}-1) + e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\left(\frac{b_1(\widetilde{\ell}_u^2-\widetilde{\ell}_d^2)}{2} - \widetilde{\ell}_u + \widetilde{\ell}_d\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{b_1^2\widetilde{\rho}_{12}e^{b_1\widetilde{\ell}_u}}{b_2^2}\left(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d - \frac{b_2(\widetilde{\ell}_u^2-\widetilde{\ell}_d^2)}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

对于 $b_1 = 0$,

$$\int_0^\infty x\nu(dx) = \left(\frac{\widetilde{\ell}_u+\widetilde{\ell}_d}{2} - \frac{\widetilde{\rho}_{12}}{b_2}\right)^{-1}\left(\frac{\widetilde{\ell}_u^2+\widetilde{\ell}_u\widetilde{\ell}_d+\widetilde{\ell}_d^2}{6} + \frac{\widetilde{\rho}_{12}}{b_2^2}\left(1 - \frac{b_2(\widetilde{\ell}_u+\widetilde{\ell}_d)}{2}\right)\right).$$

我们首先考察不同 n 值下近似式 (5.5) 的准确度。表 1

T表 1： $n = 10$ = 10, 10_2,10_3,10 的近似式 (5.5) 的数值精度 [4].

n	10	10^2	10^3	10^4
$\rho_1^{(n)}$	1.31623	1.1	1.03162	1.01
$\rho_2^{(n)}$	0.683772	0.9	0.968377	0.99
$\rho_{12}^{(n)}$	0.483772	0.7	0.768377	0.79
$\mathbb{E}(L^{(n)})$	18.5982	62.6715	201.009	640.299
近似式 (5.5)	20.296	64.1817	202.96	641.817

su总结了结果。我们为这项实验设定了以下参数 :

$$b_1 = 1,\ b_2 = -1,\ \widetilde{\ell}_d = 3,\ \widetilde{\ell}_u = 10,\ \rho_{12}^{(n)} = 0.8 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.8\ (n\to\infty). \tag{5.6}$$

设置集对应情形 $\rho_1^{(n)} > 1$。正如预期，随着 n 增大，近似的准确度会提高。此外，即使 n 较小，近似的准确度看起来也相当不错。图3（左图）进一步展示了这种收敛：图中绘出了 n 从 1 到 10^3 时的精确值和近似值。两条曲线几乎无法区分，凸显了我们的近似在整个范围内都具有很高的准确度。

最后，我们考察参数 b_1 对平均队列长度的影响，如图3（右图）所示。在这项实验中，我们将扩散参数固定为$n = 1000$ ，并将 b_1 从 -10 变化到 10。其他参数与（5.6）中的相同。从图中可以看出，该近似在 b_1 的整个取值范围内都保持了极高的准确度。这些数值结果表明，我们的近似方法可作为一种实用且可靠的工具，用于实际应用。

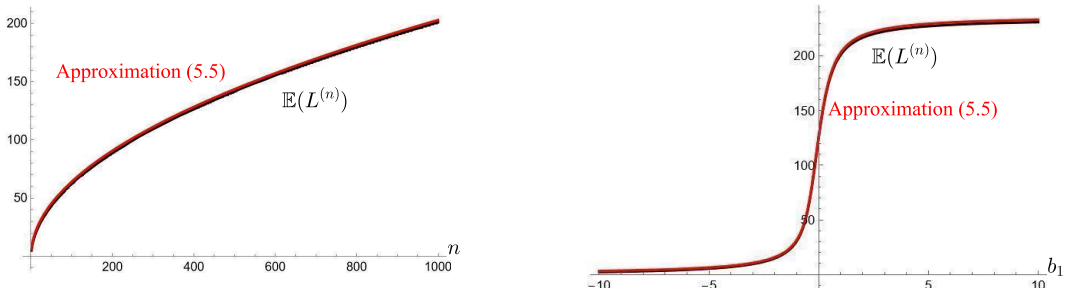


图3：变化中的 n 和 b_1图

6 总结说明

本文分析了到达率和服务率同时依赖于当前队列长度（层级）及其近期历史的 M/M/1 排队。我们首先推导出其平稳分布的闭式表达式。随后，我们得到其重载扩散极限，并证明缩放后的队列长度对应的平稳分布序列弱收敛于一个具有密度函数 f的极限分布。密度函数 f 值得注意，因为其部分分量既不是指数分布，也不是均匀分布，这是历史依赖结构直接导致的结果。最后，我们利用扩散极限构造了平均队列长度的实用近似，并通过数值示例验证了该方法的有效性和可靠性。

本研究为未来研究开辟了若干方向。一个自然的下一步是将我们的分析扩展到马尔可夫设定之外。文献 [4] 研究了一个多层 GI/G/1 队列，并使用平稳方程和测试函数（也称为 BAR 方法）求得其平稳分布的扩散极限。我们推测，BAR 方法也可应用于我们的历史依赖框架。因此，研究历史依赖 GI/G/1 队列是未来工作的一个有前景的方向。另一个可能的扩展是考虑具有更大状态空间的复杂背景过程，以便容纳更复杂的历史依赖形式。

致谢

第一作者（M. Kobayashi）获得了 JSPS KAKENHI Grant Number JP19K11845 的部分资助，第三作者（Y. Sakuma）获得了 JSPS KAKENHI Grant Number JP22K11927 的部分资助。本研究还得到了京都大学数理科学研究所（RIMS）国际联合使用／研究中心的支持。

定理 2.1 的证明

由 $k=2$ 的平衡方程 (2.2)，可得

$$\pi(\ell,2)=\rho_2^{\ell-(\ell_u+1)}\pi(\ell_u+1,2),\qquad \ell\geq\ell_u+1.$$

将此表达式代入（2.7），可得

$$\pi(\ell_u+1,2)=\rho_2\pi(\ell_u,2)+\rho_{12}\pi(\ell_u,1).$$

再次由（2.2）可知

$$\pi(\ell,2)=\rho_2^{\ell-\ell_d}\pi(\ell_d,2)+\sum_{j=0}^{\ell-(\ell_d+1)}\rho_2^j\rho_{12}\pi(\ell_u,1),\qquad \ell_d\leq\ell\leq\ell_u+1.$$

由（2.5）和（2.7），可得

$$\pi(\ell_d,2)=\rho_{12}\pi(\ell_u,1). \tag{A.1}$$

另一方面，由（2.6）可得,

$$\pi(\ell_u,1)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}\pi(\ell_u-1,1)=\frac{\rho_1}{1+\rho_1}\pi(\ell_u-1,1).$$

由此以及（2.2）可得

$$\pi(\ell_u-1,1)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\frac{\mu_1}{1+\rho_1}}\pi(\ell_u-2,1)=\frac{\rho_1+\rho_1^2}{1+\rho_1+\rho_1^2}\pi(\ell_u-2,1).$$

因此，对于 $\ell_d-1\leq\ell\leq\ell_u$，我们可以通过归纳得到

$$\begin{aligned}\pi(\ell,1)&=\frac{\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^{\ell_u-(\ell-1)}}{1+\rho_1+\cdots+\rho_1^{\ell_u-(\ell-1)}}\pi(\ell-1,1)\\&=\frac{\rho_1^2+\rho_1^3+\cdots+\rho_1^{\ell_u-(\ell-2)}}{1+\rho_1+\cdots+\rho_1^{\ell_u-(\ell-2)}}\pi(\ell-2,1)\\&=\cdots\\&=\frac{\rho_1^{\ell-\ell_d+1}+\rho_1^{\ell-\ell_d+2}+\cdots+\rho_1^{\ell_u-\ell_d+1}}{1+\rho_1+\cdots+\rho_1^{\ell_u-\ell_d+1}}\pi(\ell_d-1,1).\end{aligned} \tag{A.2}$$

由 (2.4)、(A.1) 和 (A.2)，可得

$$\begin{aligned}&(\lambda_1+\mu_1)\pi(\ell_d-1,1)\\&\quad=\lambda_1\pi(\ell_d-2,1)+\lambda_1\frac{1+\rho_1+\cdots+\rho_1^{\ell_u-\ell_d}}{1+\rho_1+\cdots+\rho_1^{\ell_u-\ell_d+1}}\pi(\ell_d-1,1)\\&\qquad+\lambda_1\frac{\rho_1^{\ell_u-\ell_d+1}}{1+\rho_1+\cdots+\rho_1^{\ell_u-\ell_d+1}}\pi(\ell_d-1,1)\\&\quad=\lambda_1\pi(\ell_d-2,1)+\lambda_1\pi(\ell_d-1,1).\end{aligned}$$

因此，

$$\pi(\ell_d - 1, 1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1}\pi(\ell_d - 2, 1) = \rho_1\pi(\ell_d - 2, 1).$$

基于这一结果，并由 (2.2) 和 (2.3)，我们可以通过归纳得出

$$\pi(\ell, 1) = \rho_1^{\ell}\pi(0, 1), \qquad \text{for } 0 \le \ell \le \ell_d - 1.$$

将这些中间结果代入彼此，即可得到定理 2.1 的完整表达式。证明至此完成。

B (4.18) 的计算

显然，我们首先有

$$\begin{aligned}
\varphi_{2,1}(\theta) &= \int_{\widetilde{\ell}_d}^{\widetilde{\ell}_u} e^{\theta x} C_0 \left(b_1(e^{b_1\widetilde{\ell}_u} - e^{b_1 x})1(b_1 \neq 0) + \frac{\widetilde{\ell}_u - x}{\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d}1(b_1 = 0) \right) dx \\
&= \left[C_0 b_1 \left(e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\frac{e^{\theta x}}{\theta} - \frac{e^{(\theta+b_1)x}}{\theta + b_1} \right) 1(b_1 \neq 0) + \left(\frac{\widetilde{\ell}_u e^{\theta x}}{\theta(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} - \frac{\theta x e^{\theta x} - e^{\theta x}}{\theta^2(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} \right) 1(b_1 = 0) \right]_{\widetilde{\ell}_d}^{\widetilde{\ell}_u} \\
&= C_0 b_1 \left(\frac{e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_d} - e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_u}}{\theta + b_1} - e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_d} - e^{\theta\widetilde{\ell}_u}}{\theta} \right) 1(b_1 \neq 0) \\
&\qquad + C_0 \frac{\theta e^{\theta\widetilde{\ell}_d}\left(\widetilde{\ell}_d - \widetilde{\ell}_u\right) + e^{\theta\widetilde{\ell}_u} - e^{\theta\widetilde{\ell}_d}}{\theta^2(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} 1(b_1 = 0).
\end{aligned}$$

接下来，我们计算 $\varphi_{2\,1}^{(n)}$，即 $n \to \infty$。对于情形 $b_1 \neq 0$，由 (2.12)、(4.12) 和 (4.16) 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_{2,1}^{(n)}(\theta) &= \lim_{n\to\infty} \psi_{2,1}^{(n)}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_d^{(n)}} - (\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_u^{(n)}+1}}{1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}} - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}+1}\frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}\ell_d^{(n)}} - e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}(\ell_u^{(n)}+1)}}{1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}}}{1 - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2}}\pi^{(n)}(0,1) \\
&= \frac{\frac{e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_d} - e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_u}}{\theta+b_1} - e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_d} - e^{\theta\widetilde{\ell}_u}}{\theta}}{e^{b_1(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)} - 1}\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1)\right) \\
&= C_0 b_1 \left(\frac{e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_d} - e^{(\theta+b_1)\widetilde{\ell}_u}}{\theta + b_1} - e^{b_1\widetilde{\ell}_u}\frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_d} - e^{\theta\widetilde{\ell}_u}}{\theta} \right),
\end{aligned}$$

其中我们还用到

$$1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}=-\frac{\theta}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\qquad 1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}=-\frac{\theta+b_1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

作为 $n\to\infty$。

对于情形 $\rho_1^{(n)}\neq 1$ 和 $b_1=0$,

$$\left(\rho_1^{(n)}\right)^{\ell(n)}=1+\ell(n)g_1(n)+\delta(n),\qquad e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}=1+\frac{\theta}{\sqrt{n}}+g_2(n),$$

其中 $\ell(n)\in\mathbb{N}$, $g_1(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 和 $g_2(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 可能彼此不同，且 $\delta(n)$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{\delta(n)}{g_1(n)}=0$。此外,

$$\begin{aligned}1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}&=1-(1+g_1(n)+\delta(n))\left(1+\frac{\theta}{\sqrt{n}}+g_2(n)\right)\\&=-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_1(n)-g_2(n)-\delta(n).\end{aligned}$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{2,1}^{(n)}(\theta)\\
&= \frac{\frac{(\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_d^{(n)}}-(\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_u^{(n)}+1}}{1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}} - (\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}+1}\frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}\ell_d^{(n)}}-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}(\ell_u^{(n)}+1)}}{1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}}}{1-(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2}}\pi^{(n)}(0,1)\\
&= \frac{(\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_d^{(n)}}(1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})}{(1-(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2})(1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})(1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})}\pi^{(n)}(0,1)\\
&\quad - \frac{(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_d^{(n)}}(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}+1}(1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})}{(1-(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2})(1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})(1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})}\pi^{(n)}(0,1)\\
&\quad + \frac{(\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})^{\ell_u^{(n)}+1}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}(1-\rho_1^{(n)})}{(1-(\rho_1^{(n)})^{\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2})(1-\rho_1^{(n)}e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})(1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})}\pi^{(n)}(0,1)\\
&= \frac{e^{\frac{\theta\ell_d^{(n)}}{\sqrt{n}}}(1+\ell_d^{(n)}g_1(n)+\delta(n))\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_2(n)\right)\pi^{(n)}(0,1)}{(-(\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2)g_1(n)-\delta(n))\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_1(n)-g_2(n)-\delta(n)\right)\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_2(n)\right)}\\
&\quad - \frac{e^{\frac{\theta\ell_d^{(n)}}{\sqrt{n}}}(1+(\ell_u^{(n)}+1)g_1(n)+\delta(n))\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_1(n)-g_2(n)-\delta(n)\right)\pi^{(n)}(0,1)}{(-(\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2)g_1(n)-\delta(n))\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_1(n)-g_2(n)-\delta(n)\right)\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_2(n)\right)}\\
&\quad + \frac{e^{\frac{\theta(\ell_u^{(n)}+1)}{\sqrt{n}}}(1+(\ell_u^{(n)}+1)g_1(n)+\delta(n))\left(1+\frac{\theta}{\sqrt{n}}+g_2(n)\right)(-g_1(n)-\delta(n))\pi^{(n)}(0,1)}{(-(\ell_u^{(n)}-\ell_d^{(n)}+2)g_1(n)-\delta(n))\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_1(n)-g_2(n)-\delta(n)\right)\left(-\frac{\theta}{\sqrt{n}}-g_2(n)\right)}\\
&= \frac{-g_1(n)(\theta e^{\theta\widetilde{\ell}_d}(\widetilde{\ell}_d-\widetilde{\ell}_u)+e^{\theta\widetilde{\ell}_u}-e^{\theta\widetilde{\ell}_d})-\delta(n)}{-(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)\theta^2 g_1(n)-\delta(n)}\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1),
\end{aligned}
$$

作为 $n\to\infty$。因此，根据 (4.17)，我们得到

$$
\lim_{n\to\infty}\varphi_{2,1}^{(n)}(\theta) = C_0\frac{\theta e^{\theta\widetilde{\ell}_d}\left(\widetilde{\ell}_d-\widetilde{\ell}_u\right)+e^{\theta\widetilde{\ell}_u}-e^{\theta\widetilde{\ell}_d}}{\theta^2(\widetilde{\ell}_u-\widetilde{\ell}_d)}. \tag{B.3}
$$

其中，根据 (4.17)，$\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1)\to C_0$ 作为 $n\to\infty$ 对于情形 $b_1=0$。

最后，我们考虑情形 $\rho_1^{(n)}=1$，对于任意 $n\ge n_0$，其中 n_0 是某个整数。我们

于是有

$$\begin{aligned}\varphi_{2,1}^{(n)}(\theta) &= \frac{(\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 1)e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}\ell_d^{(n)}} - \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}(\ell_d^{(n)}+1)} - e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}(\ell_u^{(n)}+2)}}{1-e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}}}}{(\ell_u^{(n)} - \ell_d^{(n)} + 2)(1 - e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}}})}\pi^{(n)}(0,1) \\ &= \frac{e^{\theta\widetilde{\ell}_d}(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d) + \frac{e^{\widetilde{\ell}_d} - e^{\widetilde{\ell}_u}}{\theta} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{-(\widetilde{\ell}_u - \widetilde{\ell}_d)\theta + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\sqrt{n}\pi^{(n)}(0,1),\end{aligned}$$

并且还得到了（B.3）。

参考文献

[1] Artalejo, J. R.、Economou, A. 和 Lopez-Herreo, M. J.（2005）。具有设置时间的多服务器排队系统分析。《排队系统》，**51** 53–76。URL https://doi.org/10.1007/s11134-005-1740-6。

[2]Atar, R. 和 Miyazawa, M.（2025）。通过非标准半鞅分解研究具有不连续系数的重交通极限。URLhttps://arxiv.org/pdf/2502.16467。[3]Gandhi, A.、Harchol-Balter, M. 和 Adan, I.（2010）。具有设置成本的服务器场。《性能评估》，**67** 1123–1138。URLhttps://doi.org/10.1016/j.peva.2010.07.004。[4] Kobayashi, M.、Miyazawa, M. 和 Sakuma, Y.（2025）。时间变换下多级单服务器排队系统平稳分布的重交通极限。已投稿发表。URL http://arxiv.org/abs/2505.03504。[5]Mitrani, I.（2013）。管理服务器场的性能与功耗。《运筹学年刊》，**202** 121–134。URL https://doi.org/10.1007/s10479-011-0932-1。[6] Miyazawa, M.（2024）。半直线上的多级反射布朗运动及其平稳分布。《印度概率与统计学会期刊》，**25** 543–574。URL https://arxiv.org/abs/2405.16764。[7] Phung-Duc, T. 和 Kawanishi, K.（2020）。采用设置策略并考虑顾客放弃的数据中心排队系统的延迟性能。《运筹学年刊》，**293** 263–293。[8] Schwartz, C.、Pries, R. 和 Tran-Gia, P.（2012）。数据中心节能机制的排队分析。*2012*年信息网络国际会议70–75。