arXiv:2601.02710v1 [math.GT] 6 Jan 2026

有效埃伦普赖斯猜想

QILIANG LUO

Abstract. 设 M 和 N 是两个闭双曲黎曼曲面。Ehrenpreis 猜想（由 Kahn-Markovic 于[3]证明）断言，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在有限覆盖 $M_\epsilon \to M$和 $N_\epsilon \to N$，使得 M_ϵ 与 N_ϵ 在适当模空间中的 Teichmüller距离小于 ϵ。自然会问，要使 M_ϵ 与 N_ϵ 之间的距离小于 ϵ，这些覆盖的次数需要多大。本文证明存在一个常数 $k > 0$，仅依赖于 M和 N，使得覆盖 $M_\epsilon \to M$和 $N_\epsilon \to N$的次数可以选得小于 ϵ^{-k}。我们通过考察这样的情形证明此界是最优的： M 和 N 是具有相同不变迹域、彼此不可公度的算术黎曼曲面。

Contents

1. 引言 1 2. 构造黎曼曲面的覆盖空间 7 3. 双曲几何预备知识 17 4. 半随机映射理论预备知识 20 5. 替换映射与分解定理 24 6. 从群同调到良裤 33 7. 优良裤子同调定理的证明 41 参考文献 48

1. Introduction

1.1. 主要结果。 对于任意整数 $g \geqslant 2$，记 $\mathcal{M}_g$ 为亏格为 g 的闭双曲曲面的模空间。对于任意 S_1， $S_2 \in \mathcal{M}_g$ 我们将 Teichmüller距离定义为

$$d_T(S_1, S_2) = \min_{f: S_1 \to S_2} \left\{ \log K(f) \right\}$$

其中 f 是拟共形映射， f 的拟共形常数为 $K(f) \geqslant 1$ （见 [1]）。

Kahn 和 Markovi´c 在他们关于 Ehrenpreis 猜想的论文 [3]中证明，对于任意两个闭黎曼曲面 M 和 N，以及任意 $\epsilon > 0$，都存在有限覆盖 $M_\epsilon \to M$ 和 $N_\epsilon \to N$，使得 M_ϵ 和 N_ϵ具有相同的亏格，并且满足

$$d_T(M_\epsilon, N_\epsilon) \leqslant \epsilon.$$

本文的主要目的在于给出覆盖次数的一个有效上界。通过改进 Kahn-Markovi´c 的构造，尤其是其中与良裤子同调相关的部分，我们证明了以下定理。

定理1 (有效 Ehrenpreis 猜想)。 设 M 和 N 是两个闭双曲黎曼曲面。存在仅依赖于 M 和 N 的常数 k、$\epsilon_0 > 0$，使得以下结论成立。对于任意 $\epsilon_0 \geqslant \epsilon > 0$，都可以找到次数至多为$\epsilon^{-k}$ 的有限覆盖 $M_\epsilon \to M$ 和 $N_\epsilon \to N$，满足 $d_T(M_\epsilon、 N_\epsilon) \leqslant \epsilon$。

如下定理表明，这个上界是最优的。

定理 2。 设 M、N 是两个具有相同不变迹域、但不可公度的算术闭黎曼曲面。存在仅依赖于 M、N的 k_0、$\epsilon_0 > 0$，使得以下结论成立。假设有限覆盖 $M_\epsilon \to M$和 $N_\epsilon \to N$满足 $d_T(M_\epsilon、 N_\epsilon) \leqslant \epsilon$和 $\epsilon \leqslant \epsilon_0$。那么覆盖映射的次数大于 ϵ^{-k_0}。

除此之外，定理 2 的证明还运用了算术黎曼曲面的理论，以及 Doria 和 Paiva[5]近期的工作。根据 $[10,$ 定理 8.2.6 和定理 7.3.$6],$，存在两个算术黎曼曲面 M 和 N，它们具有相同的不变迹域，但不变四元数代数不同。具有不同不变四元数代数的两个黎曼曲面并不可公度。这证明了定理 2 中黎曼曲面的存在性。

1.2. 具有优良裤子分解的覆盖空间。 定理 1 的证明本质上依赖于这样一个事实：对任意闭双曲黎曼曲面，都存在具有优良裤子分解的覆盖空间。

设 M_0 是一条闭黎曼曲面，其给定的裤子分解为 $\mathcal{C}$。那么，裤子分解 $\mathcal{C}$ 的约化 Fenchel-Nielsen 坐标由以下集合给出：$\big($**半长度**$(C),$ $\mathbf{s}(C)\big)$，其中任意 $C \in \mathcal{C}$ 均成立。对于任意 $C \in \mathcal{C}$，我们将 **半长度**(C) 定义为测地曲线C的半长度，并将 $\mathbf{s}(C) \in [0,$ **半长度**$(C))$ 定义为具有边界 C 的两条裤子的约化扭曲参数，依照 $[2]$ （另见第2.1小节）。

定义 1（优良裤子分解）。设 ϵ，$R > 0$。若裤子分解 $\mathcal{C}$ 的约化 Fenchel-Nielsen 坐标满足以下不等式，则称其为 $(\epsilon,\ R)$-优良：

$$\left|\mathbf{hl}(C) - R\right| < \epsilon, \text{ and } \quad \left|\mathbf{s}(C) - 1\right| < \frac{\epsilon}{R}$$

对于任意闭曲线 $C \in \mathcal{C}$。

下面的定理断言，任意闭双曲黎曼曲面都有带优良裤子分解的覆盖空间。其证明将在本文余下部分给出。

定理 3. 设 M 是一个闭双曲黎曼曲面。存在常数 R_M、ϵ_M、$q_M > 0$，使得以下结论成立。假设$R \geqslant R_M$，且 $\epsilon_M \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_M R}$。那么存在一个有限覆盖$M_0 \to M$，其次数至多为 e^{50R}，使得 M_0 具有一个 $(\epsilon、\ R)$-优良裤子分解。

1.3.具有优良裤子分解的曲面彼此接近。定理1证明所依据的另一项关键事实是，两个具有优良裤子分解的黎曼曲面在经过有限覆盖后，在模空间中彼此接近。推论1确立了这一事实。

令 Π_R 为三条边界的半长度均为 R的双曲裤曲面。令 S_R 为将两个 Π_R 以扭转参数 1 粘合而成的亏格 2 双曲曲面。用 O_R表示 S_R 关于 S_R的自同构群的商。因此，任何具有 $(0、\ R)$-优良裤子分解的黎曼曲面，都是轨形 O_R的有限覆盖。

以下定理归功于 Kahn-Markovi´c $[2,\ 定理\ 2.2]$。该定理证明，具有 $(\epsilon、\ R)$-优良裤子分解的黎曼曲面与轨形 O_R的有限覆盖接近。

定理 4 (Kahn-Markovi´c 的判据)。存在普适常数$\hat{}\hat{}\epsilon、\ R、\ c > 0$，使得以下结论成立。假设 M_0是一个黎曼曲面，具有某个 $\hat{}\epsilon \geqslant \epsilon > \hat{}0$对应的 $(\epsilon、\ R)$-优良裤子分解，并且 $R > R$。那么，存在一个黎曼曲面 M_0'，具有 $(0、\ R)$-裤子分解，以及一个 $(1 + c\epsilon)$-拟共形映射 $f\colon\ M_0 \to M_0'$。

推论1。假设 M_0、N_0是两个带有$(\frac{\epsilon}{3c}、\ R)$-优良裤子分解的黎曼曲面。存在有限覆盖 $M_\epsilon \to M_0$ 和$N_\epsilon \to N_0$，使得 $d_T(M_\epsilon、\ N_\epsilon) \leqslant \epsilon$，并且满足以下条件

$$deg(M_\epsilon \to M_0) \leqslant -3\chi(N_0),\ and \quad deg(N_\epsilon \to N_0) \leqslant -3\chi(M_0),$$

其中 $\chi(M_0)$ 和 $\chi(N_0)$ 是相应曲面的欧拉示性数。

证明。首先，我们构造覆盖映射。根据 Kahn-Markovi´c 判据，存在黎曼曲面 M_0'，N_0'，以及 $(1+\frac{\epsilon}{3})$-拟共形映射

$$f : M_0 \to M_0', \text{ and } \quad g : N_0 \to N_0'$$

其中 M_0', N_0'是 O_R的覆盖空间。令 S为 M_0'和 N_0'的最小公共覆盖（若 $O_R = \mathbb{H}^2/G$, $M_0' = \mathbb{H}^2/G_1$,且 $N_0' = \mathbb{H}^2/G_2$,，则 $S = \mathbb{H}^2/(G_1 \cap G_2)$,，其中 G_1, G_2 是 G的子群）。令

$$\tilde{f} : M_\epsilon \to S, \text{ and } \quad \tilde{g} : N_\epsilon \to S$$

f 和 g 分别关于覆盖映射$S \to M_0'$和 $S \to N_0'$的提升。因此，M_ϵ 和 N_ϵ分别是 M_0 和 N_0 的覆盖˜。提升后的映射 f 和 $\tilde{g}$ 也都是 $(1+\frac{\epsilon}{3})$-拟共形的。令 $h = (\tilde{g})^{-1} \circ \tilde{f} : M_\epsilon \to N_\epsilon$。映射 h 是一个 $(1+\epsilon)$-拟共形映射。因此，$d_T(M_\epsilon, N_\epsilon) \leqslant \epsilon$。

根据构造 $deg(M_\epsilon \to M_0) = deg(S \to M_0')$。同时，

$$deg(S \to M_0') \leqslant deg(N_0' \to O_R) = \frac{\chi(N_0')}{\chi(O_R)} = -3\chi(N_0')$$

其中不等式来自这一群论事实

$$[G_1 : G_1 \cap G_2] \leqslant [G : G_2].$$

这给出了关于 $deg(M_\epsilon \to M_0)$ 的估计。应用相同的论证，我们得到关于 $deg(N_\epsilon \to N_0)$ 的估计。□

1.4. 定理1的证明。设 M, N 是两条闭双曲黎曼曲面。我们将构造覆盖映射 $M_\epsilon \to M$ 和 $N_\epsilon \to N$，使得 $d_T(M_\epsilon, N_\epsilon) \leqslant \epsilon$，并估计这些覆盖映射的次数。

设 $q = \min\{q_M, q_N\}$，且 $\epsilon_1 = 3c\min\{e^{-qR_M}, e^{-qR_N}, \epsilon_M, \epsilon_N\}$。因此，若 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon > 0$，且 $R = -q^{-1}\log(\epsilon/3)$,，则常数 $\frac{\epsilon}{3c}$ 和 R 满足定理 3 对 M 和 N 的假设。于是，存在有限覆盖 $M_0 \to M$ 和 $N_0 \to N$，其次数均不超过e^{50R}，且 M_0 和 N_0 均有 $(\frac{\epsilon}{3c}, R)$-优良裤子分解。

将推论1应用于曲面 M_0 和 N_0，我们得到有限覆盖 $M_\epsilon \to M_0$ 和 $N_\epsilon \to N_0$，使得 $d_T(M_\epsilon, N_\epsilon) \leqslant \epsilon$。现在只需估计有限覆盖的次数。根据推论1，我们有以下不等式

$$\begin{aligned} deg(M_\epsilon \to M) &= deg(M_\epsilon \to M_0)deg(M_0 \to M) \\ &\leqslant -3\chi(N_0)deg(M_0 \to M). \end{aligned}$$

由于 $M_0 \to M$ 和 $N_0 \to N$ 的次数至多为 $e^{50R} = (\epsilon/3)^{-50q^{-1}}$, ，我们得到

$$-3\chi(N_0)deg(M_0 \to M) \leqslant C\epsilon^{-100q^{-1}}$$

对于某个常数 $C = C(M, N)$。令 $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_1, 3^{-100}C^{-q}\}$。结合上述两个估计，我们得到

$$deg(M_\epsilon \to M) \leqslant \epsilon^{-k}$$

对于 $k = 101q^{-1}$ 和 $\epsilon_0 \geqslant \epsilon$。同样的估计也适用于覆盖映射 $N_\epsilon \to N$。证明至此完成。

1.5. 定理 2 的证明。关于 M 和 N 的算术，我们所需的唯一事实包含在下面的引理中；该引理证明了 M 的长度谱与 N 的长度谱的并集具有指数级小的间隙。

引理 1。设 M 和 N 是具有相同不变迹域 k的两条算术闭黎曼曲面。假设 l 是 M中一条测地线的长度， l' 是 N中一条测地线的长度，并且 $l > l'$。那么

$$l/l' \geqslant 1 + ce^{-2l}$$

对于某个仅依赖于 M、 N 的常数 c。

证明。设 $M = \mathbb{H}^2/G$, 和 $N = \mathbb{H}^2/G'$ 是 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中的两个福克斯群，其中 G, G'。设 $A \in G$ 和 $A' \in G'$ 是分别表示长度为 l 和长度为 l' 的测地线的群元素。因此， $|tr(A)| = 2\cosh(l/2)$, 且 $|tr(A')| = 2\cosh(l'/2)$。令$\xi = tr(A^2) - tr((A')^2)$。应用迹公式 $tr(A)^2 - 2 = tr(A^2)$，得到方程

$$4\big(\cosh(l/2)^2 - \cosh(l'/2)^2\big) = \xi$$

由初等估计和中值定理可得

$$e^{2l}\left(l/l' - 1\right) \geqslant 2\sinh(l)(l - l') \geqslant |\xi|$$

接下来，我们证明 $|\xi|$大于某个仅依赖于 M, N 的常数。设 $k \subset \mathbb{R}$ 是 M 和 N 的不变迹域。设$\phi_1 = id, \phi_2, \ldots, \phi_d$ 为从 k 到 $\mathbb{C}$ 的所有域嵌入。数 ξ 的范数定义为

$$n(\xi) = \prod_{i=1}^{d} \phi_i(\xi)$$

根据 [9, 定理 1] ，以下两个结论成立

1. 数 $\xi \neq 0$ 是 k中的代数整数。因此， $n(\xi)$是整数，且 $n(\xi) \geqslant 1$。

2. 存在一个常数 $C = C(M,\ N) > 0$，使得对于任意$A \in G \cup G'$，且 $\phi_i \neq id$，我们有 $|\phi_i(tr(A^2))| \leqslant C$。因此，对于任意 $i \neq 1$, $|\phi_i(\xi)| \leqslant 2C$。

结合上述两个陈述，我们得到 $|\xi| \geqslant (2C)^{1-d}$。令 $c =(2C)^{1-d}$。证明完毕。□

设 $M,\ N$ 是两个具有相同不变迹域且不可公度的算术闭黎曼曲面。设 $M_\epsilon \to M$，并且$N_\epsilon \to N$ 是有限覆盖，使得存在一个 e^ϵ-拟共形映射 $f:\ M_\epsilon \to N_\epsilon$。我们将建立 M_ϵ的亏格下界，这将推出覆盖 $M_\epsilon \to M$和 $N_\epsilon \to N$的次数的所述下界。

对于任意闭曲线 γ，我们记$\mathbf{l}(\gamma)$ 为与 γ同伦的测地线的长度。由于 $M,\ N$ 不可公度，映射 f 不同伦于共形映射。因此，根据 [5, 定理1，1] 存在 M_ϵ 中的一条闭曲线 γ，使得$\mathbf{l}(\gamma) \neq \mathbf{l}(f(\gamma))$，且$\mathbf{l}(\gamma) \leqslant a \log\ g$，其中常数 a 仅取决于 M以及曲面 M_ϵ的亏格。

设 $l = \mathbf{l}(\gamma)$ 和 $l' = \mathbf{l}(f(\gamma))$。不失一般性，我们假设 $l > l'$。应用 Wolpert 引理 [7, 引理 31] 或 [8, 推论 54]，得到 $e^\epsilon \geqslant l/l',$；再应用引理 1，得到 $l/l' \geqslant 1 + ce^{-2l}$，其中$c = c(M, N)$ 是该引理中的常数。由于 $l \leqslant a \log\ g$，结合以上三个估计，我们得到

$$e^\epsilon \geqslant 1 + cg^{-2a}, \text{ or equivalently} \quad g \geqslant \frac{c^{1/2a}}{(e^\epsilon - 1)^{1/2a}}$$

设 $k_0 = 1/4a,$ 和 $\epsilon_0 = \min\{1, c^2(e-1)^2\}$。因此，当 $\epsilon_0 \geqslant \epsilon$ 时，我们得到 $g \geqslant \epsilon^{-k_0}$。证明完毕。

1.6. 论文概要。剩下要证明的是定理 3。也就是说，对于任意合适的 ϵ, R，我们需要构造一个有限覆盖 $M_{\epsilon,R} \to M$，使其存在一个 (ϵ, R)-优良裤子分解。覆盖映射是通过将一族浸入裤子曲面粘合到 M 中构造的。设 $\Gamma_{\epsilon,R}$ 为半长度与 R 相差不超过 ϵ 的测地曲线集合。设 $\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$ 为袖口半长度与 R 相差不超过 ϵ 的保向浸入裤子集合。

1. 在第2节中，我们假设优良裤子同调定理成立，并据此构造所需的覆盖映射。令 μ_1 为裤子族，它是$\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$ 中所有优良裤子的形式和，且系数均为 1。我们将应用优良裤子同调定理来修正多裤子 μ_1，使修正后的多裤子 μ 可以粘合起来，形成所需的覆盖映射。

所构造的覆盖映射的次数因而有界于 μ 中裤子的数量。至此，定理 3 的证明完成。

优良裤子同调定理是本文的核心技术贡献，它为 [3, 定理 34] 提供了一个有效版本。（这种有效性的确切含义将在第2.4小节中讨论。）令

$$\partial : \mathbf{\Pi}_{\epsilon,R} \to \mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,R}$$

为边界映射。简而言之，该定理旨在找到一个半随机映射

$$\Phi : \Gamma_{\epsilon,R} \to \mathbb{Q}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}$$

使得对于 $\partial\Phi(\nu) = \nu$ 任意同调平凡的良多曲线$\nu \in \mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,\ R}$。我们将通过显式构造所需的映射 Φ 来证明优良裤子同调定理。证明内容占据第3—7节。

2. 在第3节和第4节中，我们分别回顾双曲几何和半随机映射理论。第3节中的基本工具将支持映射 Φ构造的几何方面。为验证所构造的映射 Φ是半随机的，我们将在构造的每一步估计半随机范数。

3. 第 5 节和第 6 节旨在建立群同调与良裤子同调之间的联络。令 G 为曲面 M 的基本群。我们构造映射 $\mathcal{R}_G$ 和 $\mathcal{R}_{G\times G}$，它们分别定义在 G 和 $G \times G$ 的子集上，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}(G \times G) & \xrightarrow{\mathcal{R}_{G\times G}} & \mathbb{Q}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R} \\ \downarrow\partial & & \downarrow\partial \\ \mathbb{Z}G & \xrightarrow{\mathcal{R}_G} & \mathbb{Q}\Gamma_{\epsilon,R} \end{array}$$

这由群到裤子定理确立。

4. 在第 7 节中，我们首先将良曲线编码到群同调中，然后应用群到裤子定理，从而证明优良裤子同调定理。

2. Constructing covers of a Riemann surface

本节中，我们假设优良裤子同调定理（定理 6）成立，并据此证明定理 3。该定理将在第 7 节证明。设M 为一个闭双曲黎曼曲面。对于给定的合适的 ϵ 和R，我们构造一个覆盖 $M_{\epsilon,\ R} \to M$，它具有一个 $(\epsilon,\ R)$-优良裤子

分解。该覆盖是通过将M中的优良裤子粘合而构造的。因此，该覆盖的次数不超过所用此类裤子的数量。

本节安排如下。

1. 在第2.1小节中，我们建立以下判据：一个均匀分布且等分布的裤子族可以粘合成一个具有优良裤子分解的覆盖。2. 第2.2和第2.3小节接着证明，恰好各取一次每条优良裤子的裤子族是等分布且近乎均匀分布的。定理5确立了这一结果，它是 [3, 定理 3.1]的一个更定量的版本。3. 在第2.4小节中，我们引入优良裤子同调定理，并通过应用该定理，将上述裤子族修正为均匀分布的裤子族。特别是，我们解释了我们的优良裤子同调定理与Kahn-Markovic的定理之间的区别。4. 在第2.5小节中，我们证明修正后的多重裤子满足该判据，由此完成构造并证明定理 3。

2.1.黎曼曲面中的裤子。 本小节介绍黎曼曲面 M 中浸入裤子曲面的基本定义和记号。随后证明覆盖构造引理，即本节开头提到的判据。

设 γ 是一条测地弧或闭测地弧。用 $\mathbf{l}(\gamma)$ 表示 γ 的长度。对于任意测地弧 α，用 $i(\alpha)$ 表示 α 的单位初始向量，用 $t(\alpha)$ 表示单位终端向量。

设 Π_0 是一个固定的拓扑裤子曲面。用 C_1，C_2，C_3 表示 Π_0 的三条边界，称为裤腰。用 S_i 表示简单弧S_i：$[0,\ 1] \to \Pi_0$ 连接 C_i，C_{i+1} 与 $S_i(0) \in C_i$。M 中的浸入裤子曲面是一个浸入映射

$$\Pi : \Pi_0 \to M$$

在同伦以及 $MCG(\Pi_0)$ 的作用意义下，满足：$\Pi(C_i)$ 是测地曲线，并且对于任意$i = 1,\ 2,\ 3,\ \Pi(S_i)$ 是最短测地弧。

对于任意定向闭曲线 γ，用 $\sqrt{\gamma}$ 表示 γ 中所有对径点对的集合，并记作$\mathbf{hl}(\gamma) = \mathbf{l}(\gamma)/2$。用 $N^1(\gamma)$ 表示 γ的单位法丛。用 $N^1(\sqrt{\gamma})$ 表示由位于两个对径点且处于 γ同一侧的 γ 所构成的所有单位法向量对的集合。因此，$N^1(\sqrt{\gamma})$ 有两个连通分支，右侧 $N^1_+(\sqrt{\gamma})$和左侧 $N^1_-(\sqrt{\gamma})$。设 $\gamma = \Pi(C_1)$

是浸入裤子曲面的边界。我们将 Π在 γ 上的垂足定义为

$$Ft_\gamma(\Pi) = \{i(S_1), -t(S_2)\} \in N^1_+(\sqrt{\gamma})$$

定义 2. 我们将 $\sqrt{\gamma}$ 与欧几里得环面 $\mathbb{R}/\mathbf{hl}(\gamma)\mathbb{Z}$视为一个测度度量空间。假设 Π_1 是一个边界为 γ 的浸入裤子曲面，而 Π_2 是一个边界为 γ的浸入裤子曲面。因此，$Ft_\gamma(\Pi_1) \in N^1_+(\sqrt{\gamma})$ 且 $Ft_\gamma(\Pi_2) \in N^1_-(\sqrt{\gamma})$。令$a$ 为 $Ft(\Pi_1)$ 在 $\sqrt{\gamma}$ 处的支撑点，并令 b 为 $Ft(\Pi_2)$的支撑点。那么，它们的扭转参数$\mathbf{s}$ 定义为

$$\mathbf{s}_\gamma(\Pi_1, \Pi_2) = \mathbf{l}(\gamma_{ab})$$

其中 γ_{ab} 是从 a到 b的 $\sqrt{\gamma}$ 的子弧。

我们用 Γ 表示 M中所有定向闭测地线构成的空间。用$\mathbf{\Pi}$表示 M中所有浸入裤子曲面构成的空间。用 $N^1(\sqrt{\Gamma})$表示所有 $N^1(\sqrt{\gamma})$的不交并。令 $\mathbb{Z}\Gamma$ 为所有曲线形式和构成的集合，并将γ 与 $-\gamma$视为相同。我们有边界映射

$$\partial : \mathbf{\Pi} \to \mathbb{Z}\Gamma, \text{ defined by } \quad \Pi \mapsto \sum_{i=1}^{3} \Pi(C_i).$$

以及以下更精细的边界映射

$$\hat{\partial} : \mathbf{\Pi} \to \mathbb{Z}N^1\left(\sqrt{\Gamma}\right), \text{ defined by } \quad \Pi \mapsto \sum_{i=1}^{3} \left(\Pi(C_i), Ft_i(\Pi)\right)$$

一族浸入裤子曲面可视为一个多裤子$\mu \in \mathbb{Z}^+\mathbf{\Pi}$。对于由 $\mu = \sum \Pi_n$表示的任意多裤子 $\mu \in \mathbb{Z}\mathbf{\Pi}$，我们用$\partial\mu$ 表示边界映射的线性延拓。也就是说，我们定义 $\partial\mu = \sum \partial\Pi_n \in \mathbb{Z}\Gamma$。对于任意测地线 γ 和多裤子 μ，我们用 $\hat{}\ \partial_\gamma(\mu)$ 表示相对于有限子集 $\partial(\mu)|_{N^1_+(\sqrt{\gamma})}$ 在 $N^1_+\left(\sqrt{\gamma}\right)$ 上的计数测度$\hat{}$（计重数）。该测度刻画了多裤子 μ 中边界为 γ的裤子的分布。

令$\Gamma_{\epsilon,R}$ 为 Γ 中满足以下条件的曲线所构成的子集

$$\left|\mathbf{hl}(\gamma) - R\right| \leqslant \epsilon$$

我们用$\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}$ 表示所有浸入裤子曲面构成的空间，其中其边界的半长度 ϵ 接近于 R。

在陈述覆盖构造引理之前，我们先回顾等价测度的定义。设 X 是一个度量空间。设 μ, ν 是两个测度，满足 $\mu(X) = \nu(X)$，并设 $\delta > 0$ 是一个常数。

假设对于每个博雷尔集 $A \subset X$，我们都有 $\mu(A) \leqslant \nu(N_\delta(A))$。那么我们称 μ 和 ν 是 δ-等价测度。

引理 2 (覆盖构造)。假设一个多裤子 $\mu \in \mathbb{Z}^+\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$ 满足以下条件

1.（均匀分布）$\partial\mu = 0 \in \mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,\ R}$。*2.*（等分布）对于任意 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$，$N_+^1\left(\sqrt{\gamma}\right)$ 上的测度 $\partial_\gamma(\mu)$ 与某个欧几里得测度 $\frac{\epsilon}{2R}$-等价。

然后可以将这些多裤子粘合起来，得到一个覆盖 $M_{\epsilon,\ R} \to M$，它具有一个 (ϵ, R)-优良裤子分解。

证明。设 γ 为一条定向闭测地线。设 ι 为欧几里得环面 $\sqrt{\gamma}$ 上的一次平移的距离。由于欧几里得测度在 ι 的作用下保持不变，等分布性质蕴含：对于某个常数 K_γ，$\iota_*\partial_\gamma\mu$ 与 $K_\gamma d\lambda_\gamma$ 是 $\frac{\epsilon}{2R}$-等价的，其中 $\sqrt{\gamma}$ 上的勒贝格测度为 $d\lambda_\gamma$。另一方面，测度 $\partial_\gamma\mu$ 与欧几里得测度 $K_\gamma d\lambda_\gamma$ 等价，比例常数为 K_γ。均匀分布性质蕴含 $K_\gamma = K_{\gamma^n}$。因此，测度 $\iota_*\partial_\gamma\mu$ 与测度 $\partial_\gamma\mu$ 是 $\frac{\epsilon}{R}$-等价的。由霍尔婚配定理（参见 [2, 定理 3.2], ），存在一个配对 σ_γ，将 $\partial_\gamma\mu$ 上的足点与 $\partial_\gamma\mu$ 上的足点配对，使得对于任意边界为 γ^n 的 $\Pi \in \mu$，我们有

$$\left|\mathbf{s}_\gamma\left(\Pi, \sigma_\gamma\Pi\right) - 1\right| \leqslant \frac{\epsilon}{R} \tag{1}$$

我们通过沿边界 γ 将多裤子 μ 中的裤子曲面 Π 与裤子曲面 $\sigma_\gamma\Pi$ 粘合，构造所需的覆盖。这显然给出了一个覆盖映射。由于每个粘合块都满足半长度条件，且粘合 σ 满足不等式 (1)，因此该覆盖满足优良裤子分解的条件。

□

2.2. 生成浸入裤子。在本小节中，我们研究如何构造浸入裤子曲面。这种构造称为 θ-图构造。作为一项快速应用，我们用第三连接来编码每个裤子曲面，其分布已得到充分理解。

设 p, q 是 M 中的两个点，并设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三条从 p 出发并终止于 q 的测地弧。如果三条测地弧的并集满足单位向量三元组 $(i(\alpha_1), i(\alpha_2), i(\alpha_3))$ 与 $(t(\alpha_1), t(\alpha_2), t(\alpha_3))$ 关于 T^1M_p 和 T^1M_q 上的定向具有相反的循环次序，则称其为 θ-图。M 中的 θ-图同伦于 M 中唯一的浸入裤子曲面。以下命题是上述 θ-图构造的一个特例。

命题1（第三联络构造）。设 γ 是一条闭测地曲线，η 是一条连接 γ 右侧与 γ 右侧的正交测地弧。那么存在唯一一个同伦于 M 中浸入图 $\gamma \cup \eta$ 的浸入裤子曲面，记作 $Thd(\gamma, \eta)$。

用 $\mathbf{\Pi}_\gamma$ 表示所有以 γ 为边界的浸入裤子所构成的空间。用 $Conn_\gamma$ 表示所有连接 γ 右侧与 γ 右侧的正交测地线所构成的空间。第三联络构造定义了一个映射

$$Thd_\gamma : Conn_\gamma \to \mathbf{\Pi}_\gamma.$$

反过来，对于任意定向闭测地线 γ 和任意裤子曲面$\Pi \in \mathbf{\Pi}_\gamma$，第三连接 η 是 Π 中连接 γ 与 γ 自身且长度最短的唯一分离弧。因此，对于任意 γ，第三连接映射都是双射。

接下来，我们研究第三连接的分布。设A，B 是 M 上两条定向测地线段，并设 $0 < L_0 < L_1$。我们定义

$$Conn_{A,B}(L_0, L_1)$$

它表示所有满足 $len(\eta) \in [L_0, L_1]$，且连接 A 右侧与 B 右侧的正交测地线所构成的空间。以下连接原理由 [3, 定理 11.3] 通过应用 M 上测地流的指数混合性质证明。

连接原理。存在满足以下陈述的常数 $q_0 = q_0(M)$。对于任意 $L > 0$，令 $\delta = \exp(-q_0 L)$。假设 $len(A) = len(B) = \delta^2$，则

$$\#Conn_{A,B}(L, L + \delta^2) = E_M \exp(L)\delta^6\big(1 + O(\delta)\big). \tag{2}$$

其中 E_M 和 O 仅依赖于 M。此外，常数 q_0 满足 $q_0 = q/40$，其中 q 是 M 上测地流的指数混合常数，见 [3, 定理 11.3]。此外，混合常数 q 满足 $q = C'\lambda_1(M)$，其中 C' 是某个普适常数，见 [6, 命题 5.1]。结合上述两个结果，我们得到

$$q_0 = C\lambda_1(M)$$

其中 C 是某个普适常数。

以下推论可直接由连接原理推出。

推论2。令 q_0、E_M 为连接原理中的常数。对于任意 $W > 0$，令 $\delta = e^{-q_0 W}$。因此，对于任意区域

$$\Omega \subset \gamma \times \gamma \times [W, \infty),$$

我们有

$$\#\Big(Conn_\gamma \cap \Omega\Big) = \left(\int_\Omega E_M \exp(w) dw d\lambda_\gamma^2 \pm \int_{N_{3\delta^2}(\partial\Omega)} E_M \exp(w) dw d\lambda_\gamma^2\right) \cdot \big(1 + O(\delta)\big)$$

其中 O 仅取决于 M。

2.3. **优裤分布**。在本小节中，我们证明，将每个裤子赋值为 1 的多裤子 $\mu_1 \in \mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$ 是等分布且近乎均匀分布的。

定理5。令 q_0 为连接原理中的常数。对于任意充分大的 R 和 $1 > \epsilon \geqslant e^{-2q_0 R}$，将每个裤子赋值为 *1* 的多裤子 $\mu_1 \in \mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$ 满足

1. 对于每个 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$，令 K_γ 为 $\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$ 中以 γ 为边界的所有裤子的总数。那么 $K_\gamma \asymp \epsilon^2 R e^R$。*2.*（近乎均匀分布）对于任意 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$，我们有

$$\left|\frac{K_\gamma}{K_{\overline{\gamma}}} - 1\right| \leqslant C\delta$$

其中 $\delta = e^{-q_0 R}$ 和 C 是一个普适常数。

3.（等分布）对于任意 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$，以及满足 $\boldsymbol{l}(I) \geqslant \delta^2$ 的任意子弧 $I \subset \sqrt{\gamma}$，我们有

$$\hat{\partial}_\gamma \mu_1(I) = \frac{K_\gamma}{\mathbf{hl}(\gamma)} \boldsymbol{l}(I) \cdot \big(1 + O(\delta)\big).$$

ˆ证明。 我们通过描述第三连接所在的区域来考察测度 $\partial_\gamma \mu_1$。假设 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$ 是一条有向测地曲线，且 I 是 $\sqrt{\gamma}$ 的一个子弧。我们将空间 $\mathcal{R}(\gamma,\ I) \subset \gamma \times \gamma \times \mathbb{R}^+$ 定义为满足下述条件的 $(x,\ y,\ w)$ 的集合：

1. 设 $\sigma_1,\ \sigma_2$ 是 $\gamma \backslash \{x,\ y\}$ 的两条线段。那么对于任意 $i = 1,\ 2$

$$\Big|h\left(\mathbf{l}(\sigma_i), w\right) - 2R\Big| \leqslant 2\epsilon$$

其中 h 是由双曲三角学确定的函数，使得 $h\left(\mathbf{l}(\sigma_i),\ w\right)$ 等于闭测地线 $[\eta\sigma_i]$ 的长度。也就是说，$\cosh\left(h(a,\ b)/2\right) = \sinh(a/2)\sinh(b/2)$。

2. 由 σ_1, σ_2 的中点组成的对径点对位于区间 I 内。

因此，当且仅当其第三连接 $\eta \in \mathcal{R}(\gamma, I)$ 时，裤子曲面 $\Pi \in \mathbf{\Pi}_\gamma$ 位于 $\mathbf{\Pi}_{\epsilon,}$ $_R$ 和 $Ft_\gamma(\Pi) \in I$ 中。这意味着以下方程

$$\hat{\partial}_\gamma \mu(I) = \#\Big(Conn_\gamma \cap \mathcal{R}(\gamma, I) \Big). \tag{3}$$

关于测度 $d\lambda^2 dw$ 在 $\gamma \times \gamma \times \mathbb{R}^+$ 上，各区域的体积满足

$$Vol\big(\mathcal{R}(\gamma, I)\big) \asymp \epsilon^2 \mathbf{l}(I), \text{ and } \quad Vol\left(N_{3\delta^2}\left(\partial \mathcal{R}(\gamma, I)\right)\right) \asymp \epsilon^2\delta^2 + \epsilon \mathbf{l}(I)\delta^2,$$

其中 $\delta = e^{-q_0 R}$。若 $\mathbf{l}(I), \epsilon > \delta^2$，则有

$$Vol\left(N_{3\delta^2}\left(\partial \mathcal{R}(\gamma, I)\right)\right) = Vol\big(\mathcal{R}(\gamma, I)\big) O(\delta).$$

结合上述估计与推论2，可得

$$\hat{\partial}_\gamma \mu_1(I) = \int_{\mathcal{R}(\gamma, I)} E_M \exp(w) dw d\lambda_\gamma^2 \cdot \big(1 + O(\delta)\big). \tag{4}$$

特别地，由于 $w \approx R + 2\log 2$，令 $I = \sqrt{\gamma}$，得到 $^-$

$$K_\gamma = \hat{\partial}_\gamma \mu_1(\sqrt{\gamma}) \asymp \epsilon^2 R e^R.$$

这证明了第一个性质。此外，由于中点映射

$$\mathcal{R}(\gamma, \gamma) \to \sqrt{\gamma} \quad (x, y, w) \mapsto \text{the midpoints of } \sigma_1, \sigma_2$$

具有平移不变性，应用富比尼定理可得

$$\int_{\mathcal{R}(\gamma, I)} E_M \exp(w) dw d\lambda_\gamma^2 = k \ \mathbf{l}(I)$$

对于某个常数 $k = k\big(\mathbf{l}(\gamma), \epsilon, R\big)$。将其与估计式 (4) 结合，得到

$$\hat{\partial}_\gamma \mu_1(I) = k \ \mathbf{l}(I) \cdot \big(1 + O(\delta)\big).$$

这证明了第三个性质，因为

$$K_\gamma = k \ \mathbf{hl}(\gamma) \cdot \big(1 + O(\delta)\big). \tag{5}$$

另一方面，我们声称估计式 (5) 也意味着多裤子 μ_1近乎均匀分布。事实上，由于 k 仅取决于测地曲线 γ的长度，因此我们有 $k(\gamma) \doteq k(\gamma)$ 和$K_\gamma = \underline{K}_\gamma \cdot \big(1 + O(\delta)\big)$。证明至此完成。 □

以下是多裤子 μ_1 几乎均匀分布性质的一个推论。

推论 3. 存在一个普适常数 C，使得对于任意充分大的 $R>0$ 和 $1\geqslant\epsilon\geqslant e^{-2q_0R}$，以下结论成立。存在一条多曲线 $\nu\in\mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,\ R}$，使得 $\nu=\partial\mu_1$ 并且

$$|\nu(\gamma)|\leqslant CK_\gamma\delta \tag{6}$$

对于任意 $\gamma\in\Gamma_{\epsilon,\ R}$，其中 $\delta=e^{-q_0R}$。

2.4. **优良裤子同调定理**。 在本小节中，我们陈述优良裤子同调定理，该定理将在第 7 节中证明。此定理是本文的核心技术贡献。它给出了 [3, 定理 3.4]的一个有效版本。

定理 6 (优良裤子同调**)**。 存在常数 $R_1,\epsilon_1,q_1>0$，它们仅依赖于 M，使得对于任意 $R\geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1\geqslant\epsilon\geqslant e^{-q_1R}$，以下结论成立。存在一个自然数 $N_R\leqslant e^{30R}$（仅依赖于 R）以及一个映射

$$\Phi:\Gamma_{\epsilon,R}\to\frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{N_R},$$

使得映射 Φ 满足以下性质：

1. 同调条件：存在一个 $\mathbb{Z}$-线性映射

$$\Psi:H_1(M,\mathbb{Z})\to\frac{\mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,R}}{N_R}$$

使得对于任意良曲线 $\gamma\in\Gamma_{\epsilon,\ R}$，我们有

$$\partial\Phi(\gamma)=\gamma-\Psi(H(\gamma)),$$

其中 $H(\gamma)\in H_1(M,\mathbb{Z})$ 是 γ 的同调类。

2. 随机性条件：对于任意优良裤子 $\Pi\in\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$，以下条件成立

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_{\epsilon,R}}|\Phi(\gamma)|(\Pi)\leqslant e^{-R}(R\epsilon^{-1})^m.$$

优良裤子同调定理用于将几乎均匀分布的多裤子 μ_1 修正为均匀分布的多裤子。

定义 3（修正后的多重裤子）。 假设 ϵ，R 满足定理 6 中的条件。我们定义

$$\mu_2=\mu_1-\Phi(\nu)\in\frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{N_R}\quad\text{, and }\mu=N_R\cdot\mu_2\in\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}.$$

命题 2. 多裤子 μ均匀分布。

证明。 由于 $\nu = \partial\mu_1$，多曲线 ν 具有平凡同调。也就是说 $H(\nu) = 0$。应用定理 6 中的同调条件，可得

$$\begin{aligned}\partial\mu =& N_R \cdot (\partial\mu_1 - \partial\Phi(\nu)) \\ =& N_R \cdot (\nu - \partial\Phi(\nu)) = 0.\end{aligned}$$

□

现在只需证明修正后的多裤子 μ 是均匀分布的，并估算 μ中的裤子数量。在深入证明定理 3 之前，我们先简要说明我们的优良裤子同调定理与 Kahn-Markovic 的 [3, 定理 34]之间的区别。我们的定理在三个方面具有有效性：

1. 首先，有必要明确该定理成立时常数 ϵ， R 的可容许范围。我们证明，对于某些仅依赖于 M 的常数 R_1， ϵ_1， $q_1 > 0$，当 $R \geqslant R_1$ 且 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$ 时，该定理成立。2. 其次，为了控制修正后族μ中的裤子数量，我们必须建立一个系数得到有效控制的良裤子同调版本，而不是像 [3]中那样使用 $\mathbb{Q}$-系数。3. 最后，我们必须完整描述修正映射 Φ 的随机性条件在 $\epsilon \to 0$和 $R \to \infty$时的渐近行为，而不能像 [3]中那样只描述其在 $R \to \infty$ 时的行为。

注 1. “优良裤子同调定理”这一名称之所以恰当，是因为它满足如下同调条件。优良裤子同调群 Ω_1 定义为由良曲线的形式和构成，并对良裤子形式和的边界取商，即

$$\Omega_1 = \mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,R}/\partial(\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}).$$

因此，存在一个从优良裤子同调群 Ω_1 到标准同调群的自然态射。在定理 6 中，我们建立了其逆 $\mathcal{R}$ ，即到 $\frac{\mathbb{Z}}{N_R}$系数自然态射的逆。因此，$\frac{\mathbb{Z}}{N_R}$系数的 $(\epsilon,\ R)$-优良裤子同调与 $\frac{\mathbb{Z}}{N_R}$系数的标准同调同构，这是一个极其非平凡的结果。

2.5. **定理 3 的证明**。在本小节中，我们证明存在常数 R_M、 ϵ_M和 q_M，使得对于任意 $R \geqslant R_M$和 $\epsilon_M \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_M R}$，修正后的多重裤子 μ 是等分布的，并且 μ 中的裤子总数小于 e^{50R}。因此，根据覆盖构造引理，我们可以将多重裤子 μ 粘合起来，从而得到一个满足定理 3 中条件的有限覆盖。

下面的引理表明，修正项 $\Phi(v)$ 的系数非常小。

引理 3. 存在仅依赖于 M 的常数 $R_2, q_2 > 0$，使得对于任意 $R \geqslant R_2$ 和 $\epsilon \geqslant e^{-q_2 R}$，以下估计成立

$$\Phi(\nu)(\Pi) \leqslant \sqrt{\delta} < 1, \tag{7}$$

其中 $\delta = e^{-q_0 R}$。

证明。 应用估计（6），对于任意 $\Pi \in \mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}$，以下结论成立

$$\begin{aligned}\Phi\nu(\Pi) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_{\epsilon,R}} \nu(\gamma)\cdot(\Phi(\gamma))(\Pi)\\ &\leqslant \sum_{\gamma\in\Gamma_{\epsilon,R}} C_1 K_\gamma \delta \cdot \left|\Phi(\gamma)\right|(\Pi).\end{aligned}$$

由定理5可得 $K \asymp K_\gamma$，其中 $K = \epsilon^2 R e^R$。因此，存在一个常数 $C_2 = C_2(M)$，使得 $K_\gamma \leqslant C_2 K$。将此与上述估计结合，我们得到

$$\Phi\nu(\Pi) \leqslant C_1 C_2 K\delta \sum_{\gamma\in\Gamma_{\epsilon,R}} \left|\Phi(\gamma)\right|(\Pi).$$

应用定理 6 中的随机性条件，可得

$$\Phi\nu(\Pi) \leqslant (C_1 C_2 K\delta)\left(e^{-R}(R\epsilon^{-1})^m\right) = \left(C_1 C_2 R^{m+1} e^{-q_0 R/2}\epsilon^{-m+2}\right)\sqrt{\delta}.$$

令 $q_2 = q_0/(4m+8)$, 和 R_2 足够大，使得

$$C_1 C_2 R^{m+1} e^{-q_0 R/2}\epsilon^{-m+2} \leqslant 1.$$

证明至此完成。 □

我们将验证多裤子 μ是等分布的，并估计 μ中裤子的总数。由于有 K_γ 个裤子的边界包含 γ，应用估计（7），得到

$$(\partial\Phi(\nu))(\gamma) \leqslant K_\gamma\sqrt{\delta}.$$

将此与定理5中的第三个性质结合起来，对于满足 $\mathbf{l}(I) \geqslant \delta^{1/4}$, 的任意子弧$\overline{I} \subset \sqrt{\gamma}$，以下估计成立

$$\begin{aligned}\hat{\partial}_\gamma\mu_2(I) &= \hat{\partial}_\gamma\mu_1(I) - \hat{\partial}_\gamma\Phi\nu(I)\\ &= \frac{K_\gamma}{\mathbf{hl}(\gamma)}\mathbf{l}(I)\cdot\left(1+O(\delta)\right) + O\left(K_\gamma\sqrt{\delta}\right)\\ &= \frac{K_\gamma}{\mathbf{hl}(\gamma)}\mathbf{l}(I)\cdot\left(1+O(\delta^{1/4})\right).\end{aligned}$$

这意味着 μ_2 是等分布的。由于 $\mu = N_R\mu_2$, μ 也等分布。另一方面，我们有以下估计

$$\mu(\mathbf{\Pi}) = N_R\mu_2(\mathbf{\Pi}) \leqslant 2N_R\mu_1(\mathbf{\Pi}),$$

其中不等式来自估计（7）。由于

$$\mu_1(\mathbf{\Pi}) \leqslant \#\mathbf{\Pi}_{1,R} \asymp e^{3R},$$

μ 中的裤子总数小于 e^{50R}。

3. Preliminaries on hyperbolic geometry

优良裤子同调定理的证明是构造性的。本节回顾双曲几何的一些基本工具，这些工具为构造提供支持。

3.1. 连接集与连接引理。 对于支撑于同一点的任意两个单位向量 u_1, $u_2 \in T^1M$我们将$\Theta(u_1, u_2)$ 记为 u_1 与 u_2之间的无向角。

定义 4.（连接集）设 $L, \epsilon > 0$ 为两个常数， u, v为任意两个单位向量。我们用 $Conn_{\epsilon,L}(u, v)$ 表示单位速测地线段的集合 $\gamma : [0, l] \to M$，满足

1. 单位向量 u 的支点为 $\gamma(0)$，向量 v 的支点为 $\gamma(l)$。并且 $\Theta(u, i(\gamma)), \Theta(v, t(\gamma)) \leqslant \epsilon$. 2. $|l - L| \leqslant \epsilon$

我们用 $Conn_{\epsilon,<L}(u, v)$ 表示满足上述第一个条件且满足 $l < L$ 的测地弧集合。

以下引理是连接原理的一个较弱版本。

引理 4（连接引理）。设 q_0 为连接原理中的常数。存在一个常数 $L_0 = L_0(M) > 0$，使得下述结论成立。设

$$L(\epsilon) = \max\{-q_0^{-1} \log \epsilon, -\log \epsilon, L_0\}.$$

假设 $L \geqslant L(\epsilon)$。那么，对于任意单位向量 u 和 v，连接集 $Conn_{\epsilon,L}(u, v)$ 非空。此外，存在一个仅依赖于 M 的 $C > 0$，使得

$$\#Conn_{\epsilon,L}(u, v) \geqslant Ce^L\epsilon^3.$$

证明。令 $A_u : [-\epsilon/3, \epsilon/3] \to M$ 为一条满足 $A'_u(0) = \sqrt{-1}u$ 的测地线段。令 $\overline{B_v : [-\epsilon/3, \epsilon/3]} \to M$ 为一条满足 $B'_v(0) = -\sqrt{-1}v$ 的测地线段。对于任意正交测地线

$$X \in Conn_{A,B}(L - \epsilon/3, L + \epsilon/3),$$

通过将 X 的起点和终点分别移动到 u和 v的基点，我们得到一条测地弧 $X' \in Conn_{\epsilon,L}(u,v)$。因此，

$$\#Conn_{\epsilon,L}(u,v) \geqslant \#Conn_{A,B}(L-\epsilon/3, L+\epsilon/3).$$

根据连接原理，存在一个常数 L_0，使得以下估计成立

$$\#Conn_{A,B}(L-\epsilon/3, L+\epsilon/3) \geqslant Ce^L\epsilon^3 > 0$$

条件是 $L \geqslant L_0$ 和 $\epsilon \geqslant e^{-q_0 L}$。证明完毕。 □

3.2. 链引理与直角链引理。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 M 中一列连续的测地弧，且 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是一条分段测地弧。用 $[\cdot\alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot]$ 表示一条与该分段测地弧端点固定同伦的测地弧。若 α_1 的起点与 α_n 的终点相同，则用 $[\alpha_1 \cdots \alpha_n]$ 表示相应的测地闭曲线。

以下引理估计 $[\cdot\alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot]$的长度，其证明见 [2, 定理4.1和引理4.1] 。

引理 5（链引理）。存在一个普适常数 $Q > 0$，使得以下结论成立。设 $\boldsymbol{l}(\alpha_i) \geqslant Q$ 对任意 $i = 1、\ldots、n$，并且

$$\Theta(t(\alpha_i), i(\alpha_{i+1})) \leqslant \delta < 1$$

对任意 $i = 1、\cdots、n-1$。则对于某个普适常数 O，以下估计成立

$$\boldsymbol{l}\big([\cdot\alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot]\big) = \sum_i \boldsymbol{l}(\alpha_i) + O(n\delta)$$

$$\Theta\left(i(\alpha_1), i\left([\cdot\alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot]\right)\right), \Theta\left(t(\alpha_n), t\left([\cdot\alpha_1 \cdots \alpha_n \cdot]\right)\right) = O(n\delta)$$

此外，假设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是一条分段测地曲线，并且

$$\Theta(t(\alpha_n), i(\alpha_1)) \leqslant \delta$$

则以下估计成立

$$\boldsymbol{l}\big([\alpha_1 \cdots \alpha_n]\big) = \sum_i \boldsymbol{l}(\alpha_i) + O(n\delta)$$

以下引理是链引理的一个推论。

引理 6（直角链）。令 Q 为链引理中的常数。令 $L \geqslant 2Q$。假设 $\alpha_1、\ldots、\alpha_n$ 是一列连续弧，使得

1. 对于任意 $i = 1, \ldots, n$，我们有 $\boldsymbol{l}(\alpha_i) \geqslant L$

2. 对于任意 $i=1,\dots,n-1$，我们有

$$\left|\Theta\left(t(\alpha_i),i(\alpha_{i+1})\right)-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant e^{-L}$$

于是，对于某个普适的 O，以下估计成立

$$\boldsymbol{l}\left([\cdot\alpha_1\cdots\alpha_n\cdot]\right)=\sum_i\boldsymbol{l}(\alpha_i)-(n-1)\log 2+O\left(ne^{-L}\right),$$

$$\Theta\left(i(\alpha_1),i\left([\cdot\alpha_1\cdots\alpha_n\cdot]\right)\right),\Theta\left(t(\alpha_n),t\left([\cdot\alpha_1\cdots\alpha_n\cdot]\right)\right)=O\left(ne^{-L}\right).$$

此外，假设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是一条分段测地曲线，并且

$$\left|\Theta\left(t(\alpha_n),i(\alpha_1)\right)-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant e^{-L},$$

那么以下估计成立

$$\boldsymbol{l}([\alpha_1\cdots\alpha_n])=\sum_i\boldsymbol{l}(\alpha_i)-n\log 2+O\left(ne^{-L}\right).$$

证明。 假设 η_1， η_2 是连续弧，使得对于任意$i=1$，2，都有$\mathbf{l}(\eta_i)\geqslant L/2$，且以下条件成立

$$\left|\Theta\left(t(\eta_1),i(\eta_2)\right)-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant e^{-L}.$$

记 $\eta_3=[\cdot\eta_1\eta_2\cdot]$。于是根据双曲三角学，我们有

$$\mathbf{l}(\eta_3)=\mathbf{l}(\eta_1)+\mathbf{l}(\eta_2)-\log 2+O\left(e^{-L}\right)$$

$$\Theta\left(i(\eta_1),i(\eta_3)\right),\Theta\left(t(\eta_2),t(\eta_3)\right)=O\left(e^{-L}\right)$$

对于某个通用的 O。设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 是满足引理中条件的一列连续弧。对于任意 $i=1,\dots,n$，设 a_i 为 α_i 的中点；对于任意 $i=1,\dots,n-1$，设 β_i 为连接 a_i,a_{i+1} 的测地弧。设 $\beta_0=\alpha_1|_{[0,a_1]}$ 和 $\beta_n=\alpha_n|_{[a_n,\mathbf{l}(\alpha_n)]}$。那么 $\beta_0,\dots,\beta_n$ 是一列满足链引理中条件的连续弧，其中 $\delta=e^{-L}$。因此，该引理由链引理得出。□

3.3. 低效理论。 在本小节中，我们引入半随机映射的概念，然后引用并修订第 [3,4.2] 小节中的引理，以满足我们的目的。

定义 5. 设 α 为双曲曲面上的一条分段测地弧。用 γ 表示与 α端点相同且同伦的测地弧。令 $I(\alpha)=\mathbf{l}(\alpha)-\mathbf{l}(\gamma)$，并称 $I(\alpha)$为 α的低效度。

引理 7. 设 α 表示 $\mathbb{H}$上的一条分段测地弧，并设 γ 为端点相同的测地弧。设 $\pi:\alpha\to\gamma$ 为最近点投影。设

$$E(\alpha)=\sup_{x\in\alpha} d(x,\pi(x)).$$

那么 $E(\alpha)\leqslant \frac{1}{2}I(\alpha)+\log 2$。

引理 8. 存在一个普适常数 C，使得以下结论成立。设 $\alpha\beta$ 是双曲平面上的一条弧，其中 α 是一条分段测地弧，β 是一条测地弧。设 γ 是与 $\alpha\beta$端点相同的测地弧。若 $l(\beta)\geqslant I(\alpha\beta)+1$，则 γ 与 β 之间的无向角至多为 $Ce^{I(\alpha\beta)-l(\beta)}$。

引理 9. 设 $\alpha\beta\gamma$ 是双曲平面上三条测地弧的连接，并令 $\theta_{\alpha\beta}$ 和 $\theta_{\beta\gamma}$ 为两个弯曲角。设 $\theta_{\alpha\beta}$、$\theta_{\beta\gamma}\leqslant 1.1$。则对于某个常数 $D_1>0$，有 $I(\alpha\beta\gamma)\leqslant D_1$。

4. Preliminaries on the theory of semirandom map

本节回顾半随机映射理论。优良裤子同调定理中的随机性条件等价于映射 Φ is $(R\epsilon^{-1})^m$-半随机这一表述。为验证所构造的映射 Φ 满足随机性条件，我们将在构造的每一步估计半随机范数。

4.1. 半随机映射的定义。对于任意集合 X，我们用 $\mathbb{R}X$ 表示由 X中的点构成的有限形式和所组成的向量空间。设$f\colon X\to\mathbb{R}Y$是一个映射，且 $f(x)=\sum_y f_x(y)y$。对于 X上的任意测度 m，我们如下定义 Y上的测度 $|f|_*m$

$$|f|_*m(V)=\int_X\left(\sum_{y\in V}|f_x(y)|\right)dm(x).$$

定义 6。设 X,Y是两个可测空间，分别配备测度类 Σ_X,Σ_Y。若对于任意测度 $\sigma_X\in\Sigma_X$，都存在一个测度 $\sigma_Y\in\Sigma_Y$ 使得，则映射 $f\colon X\to\mathbb{R}Y$是 K-半随机的

$$|f|_*\sigma_X\leqslant K\sigma_Y.$$

映射 f 的半随机范数定义为

$$||f||_{s.r.}=\inf\{K:\text{f is } K\text{-semirandom }\}$$

如果一个测度类包含其元素的所有凸组合，我们就称其为凸测度类。下面的两个命题是初等的。

命题 3。 如果 $f_i : X \to \mathbb{R}Y$ 相对于测度类 Σ_X 和 Σ_Y 是 K_i-半随机的，$i = 1,\ 2$，并且 Σ_Y 是凸的，那么对于 $\lambda_i \in \mathbb{R}$，映射 $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$: $X \to \mathbb{R}Y$ 相对于 Σ_X 和 Σ_Y 是 $(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2)$- 半随机的。

命题 4. 设 X, Y 和 Z 是三个空间，其测度类分别为 $\Sigma_X, \Sigma_Y, \Sigma_Z$。若 $f\colon X \to \mathbb{R}Y$ 关于 Σ_X 和 Σ_Y 是 K-半随机的，且 $g : Y \to \mathbb{R}Z$ 关于 Σ_Y 和 Σ_Z 是 L- 半随机的，则 $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}Z$ 关于 Σ_X 和 Σ_Z 是 KL-半随机的。

记号 （部分映射）。 后续各节中的映射均通过显式构造建立。我们采用如下约定，并将在后文频繁使用。设 X, Y 是两个空间，其测度类分别为 Σ_X, Σ_Y。考虑如下形式的陈述：“对于任何满足条件 A 的元素 $x \in X$ ，都存在一个满足条件 B 的元素$f(x) \in \mathbb{R}Y$ 。”我们称这定义了一个从 X 到 $\mathbb{R}Y$ 的部分映射 f ，也就是说，该映射定义在 X 中满足条件 A 的子集上。任何这样的部分映射都可以扩展为定义在 X 上的映射：对于不满足条件 A 的任何元素，将其值设为零。我们将该部分映射的半随机范数定义为扩展映射的半随机范数。

4.2. **自然测度类**。 本文中，我们考虑以下空间及其测度类：

1. 空间 $\{1\}$ 及其包含单个测度 $\sigma_1(1) = 1$的测度类。2. 所有测地弧 $Conn$ 构成的空间及其包含单个测度 σ_C 的测度类，其中该测度定义如下：

$$\sigma_C(A) = e^{-\mathbf{l}(A)}.$$

设 $u,\ v$ 是单位向量。我们将 $Conn_{\epsilon,\ R}(u,\ v)$ 视为 $Conn$ 的子集，并赋予其限制测度 σ_C。

3. 用 G 表示以 $*$为基点的 M 的基本群。群元素 A 对应于与 A 同伦且固定端点 $*$的测地弧。我们考虑基本群 G 及其包含单个测度 σ_G的测度类，其中该测度定义如下：

$$\sigma_G(A) = e^{-\mathbf{l}(A)}.$$

4. 良曲线的空间$\Gamma_{\epsilon,\ R}$，其测度类包含单个测度 σ_Γ ，该测度通过如下设定定义

$$\sigma_\Gamma(\gamma) = Re^{-2R}.$$

5. 优良裤子的空间 $\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$，其测度类包含单个测度 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$，该测度通过如下设定定义

$$\sigma_{\mathbf{\Pi}}(\Pi) = e^{-3R}.$$

注意，优良裤子同调定理中的随机性条件等价于映射

$$\Phi : \Gamma_{\epsilon,R} \to \mathbb{Q}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}$$

相对于测度类 σ_Γ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$，是 $(R\epsilon^{-1})^m$-半随机的。

4.3. **标准映射是半随机的**。在本小节中，我们估计一些标准映射的半随机范数。

命题 5。存在一个常数 $C = C(M)$，使得以下结论成立。设 u, v 是两个单位向量。对于任意 $R > 0$，遗忘映射

$$ft : Conn_{1,R}(u, v) \to \{1\}$$

将每条弧映射到元素 1 的映射是 C-半随机的。

证明。 根据经典计数结果 [4],，存在一个常数 C =$C(M)$，使得对于任意 u, v，我们有

$$\#Conn_{1,R}(u, v) \leqslant Ce^{R-1}$$

因此，我们有以下估计

$$|ft|_*\sigma_C(1) = \sum e^{-\mathbf{1}(A)} \leqslant \#Conn_{\epsilon,R}(u, v)e^{-R+1} \leqslant C = C\sigma_1(1)$$

其中，求和遍历所有 $A \in Conn_{1,\ R}(u,\ v)$。 □

命题 6. 边界映射

$$\partial : \mathbf{\Pi}_{1,R} \to \mathbb{Z}\Gamma_{1,R}$$

是某个常数 $C = C(M)$ 对应的 C-半随机映射。

证明。 给定 $\gamma \in \Gamma_{1,\ R}$。根据定理5的第一条性质，对于某个常数 $C = C(M)$, 至多有 CRe^R 个裤子曲面以 γ 为边界。因此，我们有以下估计

$$|\partial|_*\sigma_{\mathbf{\Pi}}(\gamma) = \sum_{\Pi} \sigma_{\mathbf{\Pi}}(\Pi) \leqslant \frac{CRe^R}{e^{3R}} = C\sigma_\Gamma(\gamma)$$

其中，对所有具有边界 γ的裤子曲面求和。这意味着边界映射是一个 C-半随机映射。□

回顾一下，对于任意闭曲线 γ 和任意第三连接 $\eta \in Conn_\gamma$，根据 $Thd(\gamma,\ \eta)$ 我们用该符号表示由第三联络构造构造出的裤子曲面。我们考虑 $\Gamma \times Conn$的子集

$$\mathcal{F}\Gamma_{1,R} = \{(\gamma,\eta) : \gamma \in \Gamma_{1,R}, \eta \in Conn_\gamma, Thd(\gamma,\eta) \in \mathbf{\Pi}_{1,R}\}$$

配备限制测度 $\sigma_\Gamma \times \sigma_C$。

命题 7。 第三连接映射

$$Thd : \mathcal{F}\Gamma_{1,R} \to \mathbf{\Pi}_{1,R}$$

相对于测度类 $\sigma_\Gamma \times \sigma_C$和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$，对于某个普适常数 C，是 CR-半随机的。

证明。 对于任意 $\Pi \in \mathbf{\Pi}_{1,\ R}$，令 γ_1，γ_2，γ_3 为 Π 的三个边界，并令η_1，η_2，η_3 分别为测地第三联络。由于 $\mathbf{l}(\eta_i) \geqslant R - C_1$ 对于某个普适常数 C_1成立，故有

$$|Thd|_*\sigma_\Gamma \times \sigma_C(\Pi) = \sum_i \sigma_\Gamma(\gamma_i)\sigma_C(\eta_i) \leqslant 3e^{C_1}Re^{-3R} = 3e^{C_1}R\ \sigma_{\mathbf{\Pi}}(\Pi)$$

这意味着第三连接映射是 $3e^{C_1}R$-半随机的。 □

4.4. 随机化方法。 在本小节中，我们将介绍随机化方法。

设 X, Y, Z 是分别配备测度类 $\Sigma_X, \Sigma_Y, \Sigma_Z$ 的空间。考虑映射 $f^*\colon X \times Y \to \mathbb{R}Z$，其中 $X \times Y$ 配备乘积测度类 $\Sigma_X \times \Sigma_Y$。给定元素 $B_Y \in \mathbb{R}Y$。我们将 f^* 关于 B_Y 的随机化定义为映射$f\colon X \to \mathbb{R}Z$，其定义为$f(x) = f^*(x, B_{\underline{Y}})$。随机映射 f 的半随机范数可估计为

$$||f||_{s.r.} \leqslant ||f^*||_{s.r.} \cdot ||\underline{B}_Y||_{s.r.},$$

其中，元素的半随机范数定义如下。

定义 7（元素的半随机范数）。 设 Y 是配备测度类 Σ_Y 的空间。若元素 $B \in \mathbb{R}Y$ 所对应的映射 $\{1\} \to \mathbb{R}Y$（将 **1** 映射为该元素 B）相对于测度类 σ_1 和 Σ_Y 是 K-半随机的，则称该元素为 K-半随机。我们用 $||B||_{s.r.}$ 表示此映射的半随机范数。

特别是，当 $f : X \times Y \to \mathbb{Z}Z$ 是一个整数值映射，且 $B_Y \in \frac{\mathbb{Z}}{N}Y$ 具有整数分母 N时。随机映射的系数可由以下内容有效控制

$$f : X \to \frac{\mathbb{Z}}{N}Z.$$

下面的命题证明了一个随机元素的存在性，其系数的分母可以得到有效控制。

引理 10 (随机元素). 设 $X = Conn_{\epsilon,L}(u,v)$。假设$2R \geqslant L \geqslant L(\epsilon)$，其中

$$L(\epsilon) = \max\{-q_0^{-1}\log\epsilon, -\log\epsilon, L_0\}$$

是连接引理中定义的常数。于是存在一个元素 $B_X \in {}^{\mathbb{Z}^+}_{\lfloor e^{2R}\rfloor} X$ ，使得

$$\sum_{x\in X} \underline{B}_X(x) = 1,$$

且 $||\underline{B_X}||_{s.r.} \leqslant C\epsilon^{-3}$，其中常数 C仅取决于 M。这样的元素称为 X中的 (ϵ, R)-有效随机元素。

证明。令 $\underline{B_X} \in {}^{\mathbb{Z}^+}_{\lceil e^{2R}\rceil} X$ 为一个几乎使权重达到平均值的元素，使得

$$\sum_{x\in X} \underline{B}_X(x) = 1,$$

and

$$\left|\underline{B}_X(x) - \frac{1}{\#X}\right| \leqslant \frac{1}{\lfloor e^{2R}\rfloor}. \text{ Thus, } \quad \left|\underline{B}_X(x)\right| \leqslant \frac{1}{\#X} + \frac{1}{\lfloor e^{2R}\rfloor}.$$

根据经典计数结果 [4], ，对于某个常数 $C_1 = C_1(M)$, $Conn_{\epsilon、L}(u、v)$中至多有 C_1e^L 条测地弧。因此$C_1^{-1}\#X \leqslant e^L \leqslant e^{2R}$。结合上述估计可得

$$\left|\underline{B}_X(x)\right| \leqslant \frac{1}{\#X} + \frac{1}{C_1^{-1}\#X} \leqslant \frac{1+C_1}{C_2}\epsilon^{-3}e^{-L},$$

其中 $C_2 = C_2(M)$ 是连接引理中的常数。令$C = {}^{1+C_1}_{C_2}$。根据定义，$||B_X||_{s.r.} \leqslant C\epsilon^{-3}$。证明完毕。□

5. The replacement map and the itemization theorems

本节将阐述优良裤子同调定理证明中技术性最强的部分，其结构仿照了 [3, 第 5-7] 节中的相应构造（但有所简化）。

本节定义替换映射。简言之，令$u \in T^1M$为 M中的一个单位向量，替换映射 $\mathcal{R}$将一个适当的元素 $A \in Conn_{\epsilon^2,<\infty}(-u,u)$ 映射为一条多曲线

$$\mathcal{R}(A) = \frac{1}{2}\left([A\underline{B}_A] - [\bar{A}\underline{B}_A]\right),$$

其中，$\underline{B}_A$ 是$Conn_{\epsilon^2、<\infty}(u、-u)$中的一个合适的随机元素，使得$\mathcal{R}(A)$是一条良好的多曲线，并且与 A具有相同的同调类。

同样，我们可以用一条多曲线$\mathcal{R}(B)$替换$B \in Conn_{\epsilon^2、<\infty}(u、 -u)$ 。

接下来，在两部分分项定理中，对于任意合适的元素$A \in Conn_{\epsilon^2,\ <\infty}(-u,\ u)$和$B \in Conn_{\epsilon^2,\ <\infty}(u,\ -u)$，只要 $[AB]$是一条良曲线，我们就构造一组良多裤子 $Item_2$ ，使得

$$[AB] = \partial Item_2(A, B) + \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B).$$

我们还想更进一步，证明对于任意合适的A_1， A_2， B_1， B_2，存在一组良多裤子 $Item_4$，使得

$$[A_1B_1A_2B_2] = \partial Item_4(A_1, A_2, B_1, B_2)+ \mathcal{R}(A_1) + \mathcal{R}(A_2) + \mathcal{R}(B_1) + \mathcal{R}(B_2),$$

这在四部分条目化定理中得到了证明。

5.1. 窄连接与替换映射。 在本小节中，我们构造替换映射。替换映射定义在窄连接集合上。我们首先介绍窄连接的概念。

定义 8（窄连接集）。 给定 ϵ， $R > 0$。设 u 是 M上的一个单位向量。我们定义

$$LN_{\epsilon,R}(u) = \{A \in Conn_{\epsilon^2,<\infty}(-u, u) : 2R - L(\epsilon^2) \geqslant \mathbf{l}(A) \geqslant L(\epsilon^2)\},$$

其中 $L(\epsilon^2)$ 是随机元素引理中的常数。集合 $LN_{\epsilon,\ R}(u)$ 称为关于 u 的左窄连接集。若连接 $A \in LN_{\epsilon,\ R}(u)$ 是关于 u 的左窄测地弧，则称之为左窄测地弧。类似地，我们定义

$$RN_{\epsilon,R}(u) = \{B \in Conn_{\epsilon^2,<\infty}(u, -u) : 2R - L(\epsilon^2) \geqslant \mathbf{l}(B) \geqslant L(\epsilon^2)\},$$

称为关于 u 的右窄连接集。

现在我们将构造替换映射 $\mathcal{R}$。对于任意 $A \in LN_{\epsilon,\ R}(u)$，令

$$\mathcal{F}(A) = Conn_{\epsilon^2,2R-\mathbf{l}(A)}(u, -u),$$

并令 B_A 为 $\mathcal{F}(A)$ 中的一个 $(\epsilon^2,\ R)$-有效随机元素，其存在性由 A 的长度假设和随机元素引理保证。类似地，对于任意 $B \in RN_{\epsilon,\ R}(u)$，令

$$\mathcal{F}(B) = Conn_{\epsilon^2,2R-\mathbf{l}(B)}(-u, u),$$

并令 A_B 为 $\mathcal{F}(B)$ 中的一个 $(\epsilon^2,\ R)$-有效随机元素。注意

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(\overline{A}), \text{ and } \quad \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(\bar{B}).$$

因此，我们可以取 $B_A = B_{\overline{A}}$ 和 $A_B = A_{\bar{B}}$。

定义 9（替换映射）。 给定常数 ϵ， $R>0$。对于任意$A\in LN_{\epsilon,\ R}(u)$, 我们定义

$$\mathcal{R}(A)=\frac{1}{2}\left([A\underline{B}_A]-[\bar{A}\underline{B}_A]\right).$$

类似地，对于任意 $B\in RN_{\epsilon,\ R}(u)$ 我们定义

$$\mathcal{R}(B)=\frac{1}{2}\left([\underline{A}_BB]-[\underline{A}_B\bar{B}]\right).$$

命题 8. 存在仅依赖于M 的常数 ϵ_1， $R_1>0$ 使得对于任意 $R\geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1\geqslant\epsilon$ ，以下结论成立。对于任意$A\in LN_{\epsilon,\ R}(u)$，多曲线

$$\mathcal{R}(A)\in\frac{\mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,R}}{2\lfloor e^{2R}\rfloor},$$

and

$$\mathcal{R}(A)=-\mathcal{R}(\bar{A}).$$

证明。 $\mathcal{R}(A)$的系数属于 $(2\lfloor e^{2R}\rfloor)^{-1}\mathbb{Z}$，因为 B_A 的系数属于 $(\lfloor e^{2R}\rfloor)^{-1}\mathbb{Z}$。由于 $B_A=B_{\bar{A}}$，我们有

$$\mathcal{R}(A)=\frac{1}{2}\left([A\underline{B}_{\bar{A}}]-[\bar{A}\underline{B}_{\bar{A}}]\right)=-\frac{1}{2}\left([\bar{A}\underline{B}_{\bar{A}}]-[A\underline{B}_{\bar{A}}]\right)=-\mathcal{R}(\bar{A}).$$

只需证明，对于任意 $B\in\mathcal{F}(A)$ ，曲线$[AB]\in\Gamma_{\epsilon,\ R}$。这由链引理得出。□

下面的命题是后续小节中引理的预备结果。它还蕴含了替换映射的半随机性，尽管这一事实并非我们的主要结果所必需。我们在此证明该命题，并省略半随机性的验证。

命题 9. 存在一个常数 $C=C(M)$ ，使得以下结论成立。对于任意闭测地曲线 $\gamma\in\Gamma_{1,\ R}$，至多存在 CR^2 对元素

$$(A,B)\in Conn_{1,<\infty}(-u,u)\times Conn_{1,<\infty}(u,-u)$$

使得 $\gamma=[AB]$。

证明。 对于任意曲线 $\gamma\in\Gamma_{\epsilon,R}$，设 $g_\gamma\in\pi_1(M)$ 是一个与 γ同伦的群元素。设 $\mathbb{T}_\gamma\to M$ 是相对于子群$\langle g_\gamma\rangle<\pi_1(M)$ 的一个覆盖，使得任意满足$[AB]=\gamma$ 的分段测地曲线 AB 都可以提升到覆盖 $\mathbb{T}_\gamma$。反过来，弧对(A,B) 完全由 $\mathbb{T}_\gamma$中提升后的分段测地线的两个角点决定，记为 c_1,c_2。设 $\gamma\subset\mathbb{T}_\gamma$ 是 γ 自身的提升。根据引理 7，这两个角点位于距离

K 邻域内，其中普适常数为 K。我们将该邻域记为 $\mathbb{T}_{\gamma,K}$。应用富比尼定理，可得

$$Vol(\mathbb{T}_{\gamma,K}) = C(K)\mathbf{l}(\gamma)$$

令 $(A',\ B')$ 为满足 $[A'B'] = \gamma$ 的另一对测地弧。我们将 $A'B'$ 的两个提升角点记为 c_1'，c_2'。假设对于任意 $i = 1,\ 2,\ c_i$ 和 c_i' 都是 $I/2$-闭的，其中 I 是 M 的单射半径。于是有 $A' = A$ 和 $B' = B$。因此，我们有

$$\#\{(A,B) : \gamma = [AB]\} \leqslant \left(\frac{Vol(\mathbb{T}_{\gamma,K})}{Vol(\text{radius } I \text{ ball})}\right)^2 = CR^2$$

对某个 $C = C(M)$ 成立。证明完毕。 □

5.2. 正方形引理。本小节包含一个技术性引理，它解决了优良裤子同调定理的一个特殊情形，称为正方形引理。

在陈述正方形引理之前，我们回顾测度论中的 $\boxtimes$ 算子。设 X_1 是一个配备测度 σ_1 的空间，X_2 是一个配备测度 σ_2 的空间。我们用 $\sigma_1 \boxtimes \sigma_2$ 表示 $X_1 \times X_2$ 上的测度类，其中包含所有满足以下条件的测度 σ：对于任意 $i = 1,\ 2$，均有 $(\pi_i)_*\sigma \leqslant \sigma_i$；这里 π_i 是从 $X_1 \times X_2$ 到 X_i 的投影映射。

引理 11 (正方形引理)。存在常数 ϵ_1、R_1、$q_1 > 0$，它们仅取决于 M，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，以下结论成立。设 u 是 M 中的一个单位向量。对于任意

$$A_1, A_2 \in Conn_{\epsilon^2, L_a}(-u, u)$$
$$B_1, B_2 \in Conn_{\epsilon^2, L_b}(u, -u)$$

满足 $L_a + L_b = 2R$ 和 L_a、$L_b \geqslant 2L(\epsilon^2)$ 的对象，都存在一个多裤子

$$Sq(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \frac{\mathbb{Z}}{\lfloor e^{2R} \rfloor^4} \mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}$$

使得

$$\partial Sq(A_1, A_2, B_1, B_2) = \sum_{i,j=1,2} (-1)^{i+j} [A_i B_j],$$

并且部分映射 Sq 关于测度类 $\sigma_C^{\boxtimes 2}(A_1,\ A_2) \times \sigma_C^{\boxtimes 2}(B_1,\ B_2)$ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $(R\epsilon^{-1})^{24}$-半随机的。

证明。对于任意

$$A \in Conn_{\epsilon^2, L_a}(-u, u), \text{ and } \quad B \in Conn_{\epsilon^2, L_b}(u, -u),$$

断言：存在一个仅取决于 A和 B的多裤子

$$P^* = P^*(A, B) \in \frac{\mathbb{Z}}{\lfloor e^{2R} \rfloor^4} \mathbf{\Pi}_{\epsilon,R},$$

一条仅取决于 A的多曲线 S_a^*，以及一条仅取决于 B 的多曲线 S_b^*，使得

$$\partial P^* = [AB] - S_a^* - S_b^*. \tag{8}$$

设 A_1，A_2 和 B_1，B_2 满足引理中的条件。令

$$Sq(A_1, A_2, B_1, B_2) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} P^*(A_i, B_j)$$

将方程 (8) 应用于多裤子 Sq，可得其满足所需性质。

断言的证明。给定 A，B。我们将构造 P^*，S_a^*和 S_b^*。设 A^-，A^+是 A 去掉 A 的中点后得到的两条线段，满足 $A = A^-A^+$。设 B^-，B^+ 是 B 去掉 B 的中点后得到的两条线段，满足 $B = B^-B^+$。设 v_0 为一个辅助单位向量。我们记

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(A) =& Conn_{\epsilon^2, L_b/2+\log 2}\left(\sqrt{-1}t(A^-), v_0\right)\\
\mathcal{C}(B) =& Conn_{\epsilon^2, L_a/2+\log 2}\left(\sqrt{-1}t(B^-), -v_0\right)\\
\mathcal{W}_1 =& Conn_{\epsilon^2, R+2\log 2}\left(-\sqrt{-1}u, \sqrt{-1}v_0\right)\\
\mathcal{W}_2 =& Conn_{\epsilon^2, R+2\log 2}\left(\sqrt{-1}u, -\sqrt{-1}v_0\right)
\end{aligned}$$

对于任意 $Z_a \in \mathcal{C}(A)$ 和 $Z_b \in \mathcal{C}(B)$，分段测地弧 Z_aZ_b 与曲线$\overline{\ }AB$的第三连接同伦。根据 $P_1(A, B, Z_a, Z_b)$，我们用通过第三连接构造得到的裤子曲面表示该曲面，使得 P_1 的另外两条边界为

$$\eta_1 = [B^+A^-Z_a\overline{Z}_b], \text{ and } \quad \eta_2 = [Z_b\overline{Z}_aA^+B^-]$$

同时，对于任意的 $W_1 \in \mathcal{W}_1$ 和 $W_2 \in \mathcal{W}_2$，令 $P_2(A, B, Z_a, Z_b, W_1, W_2)$为通过分别将第三连接 W_1 添加到 η_1 以及将第三连接 W_2 添加到 η_2所构造的两个裤子曲面的求和。将第三连接 W_1 添加到曲线 η_1后，我们得到一个具有另外两条边界的裤子曲面

$$\eta_3 = \left[A^-Z_a\overline{W_1}\right], \text{ and } \quad \eta_4 = \left[W_1\overline{Z_b}B^+\right]$$

将第三连接 W_2 添加到曲线 η_2后，我们得到一个具有另外两条边界的裤子曲面

$$\eta_5 = \left[\overline{Z_a}A^+W_2\right], \text{ and } \quad \eta_6 = \left[\overline{W_2}B^-Z_b\right]$$

令 $S_a = \eta_3 + \eta_5$、$S_b = \eta_4 + \eta_6$，并令 $P = P_1 + P_2$。因此，对于任意 Z_a，Z_b，W_1，W_2，我们得到 $\partial P = [AB] - S_a - S_b$。其长度

测地曲线 η_i 的长度可由直角链引理估计。存在一个普适常数 ϵ_0，使得若 $\epsilon_0 \geqslant \epsilon$，则 $\eta_i \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$对任意 $i = 1, \ldots, 6$ 均成立。这意味着 $P \in \mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$。

由于关于 L_a，L_b 和 ϵ，R 的假设，集合 $\mathcal{C}(A)$，$\mathcal{C}(B)$，$\mathcal{W}_1$，$\mathcal{W}_2$ 满足随机元素引理中的条件。令 Z_a，Z_b，W_1，W_2 分别为相应连接集中的一个 $(\epsilon^2,\ R)$-有效随机元素。我们定义

$$P^*(A,B) = P(A,B,\underline{Z}_a,\underline{Z}_b,\underline{W}_1,\underline{W}_2) \in \frac{\mathbb{Z}}{\lfloor e^{2R} \rfloor^4}\mathbf{\Pi}_{C\epsilon^2,R},$$

$S_a^*(A) = S_a(A,\ Z_a,\ W_1,\ W_2)$，以及 $S_b^*(B) = S_b(B,\ Z_b,\ W_1,\ W_2)$。 □

估计 Sq 的半随机范数。令 $\mathcal{C}(A)$，$\mathcal{C}(B)$ 和 $\mathcal{W}_1$，$\mathcal{W}_2$ 为配备测度 σ_C 的测度空间。根据定义，对于任意 $\Pi \in \mathbf{\Pi}_{1,\ R}$，我们有以下估计

$$|P_1|_*(\sigma_C^{\times 4})(\Pi) = \sum_{A,B,Z_a,Z_b} e^{-\mathbf{l}(A)-\mathbf{l}(B)-\mathbf{l}(Z_a)-\mathbf{l}(Z_b)} \leqslant C' \sum_{A,B,Z_a,Z_b} e^{-3R}$$

其中求和遍历所有满足以下条件的元素 $(A,\ B,\ Z_a,\ Z_b)$

$$P_1(A,B,Z_a,Z_b) = \Pi,$$

且 C' 是某个普适常数。根据命题 9，存在一个常数 $C'' = C''(M)$，使得元素对 (A,B) 至多有 $C''R^2$ 个，且曲线 $[AB]$ 是裤子曲面 Π 的边界。这进一步意味着，满足 $P_1(A,B,Z_a,Z_b) = \Pi$的元素四元组 (A,B,Z_a,Z_b) 至多有 $C''R^2$ 个，因为第三连接映射是单射。因此，令 $C_1 = C'C''$，映射 P_1 是 C_1R^2-半随机的。

裤子曲面 P_2 的构造方法是：先取 P_1的边界，再添加第三连接。因此，P_2的半随机范数有界于映射 P_1的半随机范数、边界映射和第三连接映射。根据命题 7 和命题 6，对于某个常数 $C_2 = C_2(M)$，我们得到映射 P 是 C_2R^3-半随机的。根据随机元素引理，随机元素的半随机范数有界于 ϵ^{-6}，因此映射 P^* 是一个 $C_3R^3\epsilon^{-24}$-半随机映射，其中 $C_3 = C_3(M)$为某个常数。

映射 Sq 是映射的复合

$$(A_1,A_2,B_1,B_2) \mapsto \sum_{ij}(-1)^{i+j}(A_i,B_j)$$

以及映射 P^*。由于前一个映射相对于测度类 $\sigma_C^{\boxtimes 2} \times \sigma_C^{\boxtimes 2}$ 和 $\sigma_C \times \sigma_C$是 4- 半随机的，我们得到

映射 Sq 是 $4C_3R^3\epsilon^{-24}$-半随机的。如果 $R \geqslant 4C_2$，那么映射 Sq 是$R^4\epsilon^{-24}$-半随机的。□

5.3. **两部分分项定理**。

定理 7 (两部分分项定理)。 存在常数ϵ_1、 R_1、 $q_1 > 0$， 它们仅取决于 M，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$， 以下结论成立。设 $A \in LN_{\epsilon,R}(u)$ 和 $B \in RN_{\epsilon,R}(u)$，且满足 $[AB] \in \Gamma_{\epsilon,R}$。那么存在一个多裤子

$$Item_2(A,B) \in \frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{2\lfloor \exp(2R)\rfloor^5}$$

使得以下结论成立

$$[AB] = \partial Item_2(A,B) + \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B),$$

并且部分映射 $Item_2$ 相对于测度类 σ_C^2 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $(R\epsilon^{-1})^{25}$-半随机的，其中 $m = m(M) > 0$。

证明。 由于 $\mathbf{l}(A), \mathbf{l}(B) \geqslant L(\epsilon^2)$ 且 $\mathbf{l}(A) + \mathbf{l}(B) \approx 2R$，替换映射在元素 A 和 B上定义良好。应用正方形引理，我们得到以下两个方程

$$\partial Sq(A, \bar{A}, B, \underline{B}_A) = \big([AB] - [\bar{A}B]\big) - \big([A\underline{B}_A] - [\bar{A}\underline{B}_A]\big)$$
$$\partial Sq(\bar{A}, \underline{A}_B, B, \bar{B}) = \big([\bar{A}B] - [\bar{A}\bar{B}]\big) - \big([\underline{A}_B B] - [\underline{A}_B \bar{B}]\big)$$

Let

$$Item_2(A,B) = \frac{1}{2}Sq(A, \bar{A}, B, \underline{B}_A) + \frac{1}{2}Sq(\bar{A}, \underline{A}_B, B, \bar{B}).$$

结合上述两个方程，我们得到

$$\partial Item_2(A,B) = [AB] - \mathcal{R}(A) - \mathcal{R}(B).$$

部分映射 $Item_2$ 的半随机性由 Sq 的半随机性推出。□

5.4. 交换引理。在本小节中，我们证明交换引理，它是四部分 Ite m 化定理的预备引理。交换引理通过反复应用正方形引理得以证明。

引理 12 (交换引理)。存在常数 ϵ_1、 R_1、 $q_1 > 0$，它们仅取决于 M， 使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，以下结论成立。假设 A_1、$A_2 \in LN_{\epsilon,R}(u)$ 和 B_1、$B_2 \in RN_{\epsilon,R}(u)$，满足 $[A_1B_1A_2B_2] \in \Gamma_{\epsilon,R}$。那么存在一个多裤子

$$Exch(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{2\lfloor e^{2R}\rfloor^4}$$

使得

$$\partial Exch = [A_1B_1A_2B_2] - [A_1B_2A_2B_1],$$

并且部分映射 $Exch$ 是相对于测度类 $\sigma_C^{\times 4}$ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$ 的 $(R\epsilon^{-1})^{26}$-半随机映射。

证明。我们先固定一些记号。给定 A_1, $A_2 \in LN_{\epsilon,\ R}(u)$。对于任意两条测地弧 C, $D \in RN_{\epsilon,\ R}(u)$, 我们记

$$\{C, D\} = [A_1CA_2D] - [A_1DA_2C].$$

两对右窄连接 $(C_1,\ D_1)$ 和 $(C_2,\ D_2)$ 称为相邻, 如果对于任意 $i \in \{1, 2\}$ 和 $j \in \{1,\ 2\}$, 以下结论成立

$$[A_1C_iA_2D_j], [A_1D_jA_2C_i] \ \in \Gamma_{\epsilon,R}.$$

设 $(C_1,\ D_1)$, $(C_2,\ D_2)$ 相邻。那么, 应用正方形引理可得以下两个方程

$$\partial Sq(A_1C_1A_2, A_2C_1A_1, D_1, D_2) = \{C_1, D_1\} - \{C_1, D_2\}$$
$$\partial Sq(A_2D_2A_1, A_1D_2A_2, C_1, C_2) = \{C_1, D_2\} - \{C_2, D_2\}$$

令

$$\begin{aligned} P(A_1, A_2, C_1, C_2, D_1, D_2) = &Sq(A_1C_1A_2, A_2C_1A_1, D_1, D_2) \\ &+ Sq(A_2D_2A_1, A_1D_2A_2, C_1, C_2), \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\partial P(A_1, A_2, C_1, C_2, D_1, D_2) = \{C_1, D_1\} - \{C_2, D_2\}. \tag{9}$$

构造 $Exch$。设 A_1, A_2, B_1, B_2 是满足引理中条件的元素。记 $L_1 = \mathbf{l}(B_1)$, $L_2 = \mathbf{l}(B_2)$。令 $n = \lfloor R\epsilon^{-2} \rfloor$ 和 $\delta = (L_1 - L_2)/n$。对于任意 $k = 1, \ldots, n-1$, 我们取一对测地弧

$$(C_k, D_k) \in Conn_{\epsilon^2, L_1 + k\delta}(u, -u) \times Conn_{\epsilon^2, L_2 - k\delta}(u, -u),$$

并令 $(C_0,\ D_0) = (B_1,\ B_2)$, $(C_n,\ D_n) = (B_2,\ B_1)$。因此, 对于任意 $k = 0, \cdots, n-1$, 两对测地弧 $(C_k,\ D_k)$ 和 $(C_{k+1},\ D_{k+1})$相邻。令

$$Exch(A_1, A_2, B_1, B_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(A_1, A_2, C_k, C_{k+1}, D_k, D_{k+1}).$$

应用方程（9），我们得到

$$\begin{aligned} \partial Exch(A_1, A_2, B_1, B_2) &= \frac{1}{2}(\{C_0, D_0\} - \{C_n, D_n\}) = \{B_1, B_2\} \\ &= [A_1B_1A_2B_2] - [A_1B_2A_2B_1]. \end{aligned}$$

因此, 多裤子 $Exch$满足所需性质。

估计 $Exch$ **的半随机范数。** 根据正方形引理，映射 P 相对于测度类 $\sigma_C^{\times 2}(A) \times \sigma_C^{\boxtimes 2}(C) \times \sigma_C^{\boxtimes 2}(D)$ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $(R\epsilon^{-1})^{24}$-半随机的。同时，映射

$$(B_1, B_2) \mapsto (C_k, C_{k+1}, D_k, D_{k+1})$$

相对于测度类 $\sigma_C^{\times 2}(B)$ and $\sigma_C^{\boxtimes 2}(C) \times \sigma_C^{\boxtimes 2}(D)$ 是 4-半随机的。因此，我们有

$$||Exch||_{s.r.} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} ||P(A_1, A_2, C_k, C_{k+1}, D_k, D_{k+1})||_{s.r.} \leqslant 4n||P||_{s.r.}$$

由于 $n \approx R\epsilon^{-2}$，映射 $Exch$ 是 $(R\epsilon^{-1})^{26}$-半随机的。 □

5.5. **四部分条目化定理。**

定理 8 (四部分条目化定理**)。** 存在常数ϵ_1、R_1、$q_1 > 0$，它们仅取决于 M，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和$\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，以下结论成立。假设 A_1、$A_2 \in LN_{\epsilon,\ R}(u)$ 和B_1、$B_2 \in RN_{\epsilon,\ R}(u)$，使得 $[A_1B_1A_2B_2] \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$。那么存在一个多裤子

$$Item_4(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{2\lfloor \exp(2R) \rfloor^5}$$

使得以下结论成立

$$\begin{aligned}[A_1B_1A_2B_2] = \partial Item_4(A_1, A_2, B_1, B_2) + \\ \mathcal{R}(A_1) + \mathcal{R}(A_2) + \mathcal{R}(B_1) + \mathcal{R}(B_2),\end{aligned}$$

并且，部分映射 $Item_4$ 相对于测度类 $\sigma_C^{\times 4}$ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$是 $(R\epsilon^{-1})^{30}$-半随机的。

证明。 多裤子 $Item$ 的构造过程如下。

$$\begin{aligned}2Item(A_1, A_2, B_1, B_2) = & Sq\left(A_1, \bar{A}_1,\ B_1A_2B_2,\ \underline{B}_{A_1}\right) \\ & + Sq\left(A_2B_2\bar{A}_1, \underline{A}_{B_1}, B_1, \bar{B}_1\right) \\ & + Sq\left(A_2, \bar{A}_2,\ B_2\bar{A}_1\ \bar{B}_1,\ \underline{B}_{A_2}\right) \\ & + Sq\left(\bar{A}_1\ \bar{B}_1\bar{A}_2,\ \underline{A}_{B_2}, B_2, \bar{B}_2\right) \\ & - Exch(A_1, A_2, B_1, B_2)\end{aligned}$$

应用正方形引理，可得以下四个方程成立

$$\begin{aligned}\partial Sq\left(A_1, \bar{A}_1,\ B_1A_2B_2,\ \underline{B}_{A_1}\right) &= [A_1B_1A_2B_2] - [\bar{A}_1B_1A_2B_2] - 2\mathcal{R}(A_1) \\ \partial Sq\left(A_2B_2\bar{A}_1, \underline{A}_{B_1}, B_1, \bar{B}_1\right) &= [\bar{A}_1B_1A_2B_2] - [\bar{A}_1\bar{B}_1A_2B_2] - 2\mathcal{R}(B_1) \\ \partial Sq\left(A_2, \bar{A}_2,\ B_2\bar{A}_1\ \bar{B}_1,\ \underline{B}_{A_2}\right) &= [\bar{A}_1\bar{B}_1A_2B_2] - [\bar{A}_1\bar{B}_1\ \bar{A}_2B_2] - 2\mathcal{R}(A_2) \\ \partial Sq\left(\bar{A}_1\ \bar{B}_1\bar{A}_2,\ \underline{A}_{B_2}, B_2, \bar{B}_2\right) &= [\bar{A}_1\bar{B}_1\ \bar{A}_2B_2] - [\bar{A}_1\bar{B}_1\ \bar{A}_2\bar{B}_2] - 2\mathcal{R}(B_2)\end{aligned}$$

应用交换引理，可得以下方程成立

$$\partial Exch = [A_1B_1A_2B_2] - [A_1B_2A_2B_1].$$

由于

$$\left[\bar{A}_1\bar{B}_1\ \bar{A}_2\bar{B}_2\right] = -\left[A_1B_2A_2B_1\right],$$

将上述六个方程求和，我们得到多裤子 $Item$ 满足

$$\partial Item(A_1, A_2, B_1, B_2) = \\ [A_1B_1A_2B_2] - \big(\mathcal{R}(A_1) + \mathcal{R}(A_2) + \mathcal{R}(B_1) + \mathcal{R}(B_2)\big)$$

映射 $Item$ 的半随机范数由映射 $Exch$ 和映射 Sq 的半随机范数所界。这意味着映射 $Item$ 是 $(R\epsilon^{-1})^{30}$-半随机的。□

6. 从群同调到优质裤子

本节安排如下。在小节 6.1 和 6.2 中，我们引入窄三角形的概念，并证明窄三角形替换引理。从技术上说，这两个小节是上一节的延续。接着，在小节 6.3 和 6.4 中，我们引入有界群同调的概念，并证明群到裤子定理。

简而言之，设 $*$ 为一个基点，并设 $G = \pi_1(M, *)$ 为曲面 M 的基本群。群同调中的边界映射定义如下：

$$\partial : G \times G \to \mathbb{Z}G \quad (X, Y) \mapsto X + Y - XY.$$

对于任意有界群元素 $A \in G$，我们要构造一个多重曲线 $\mathcal{R}_G(A)$。对于任意有界三角形 $(X, Y) \in G \times G$，我们要构造一个多裤子 $\mathcal{R}_{G\times G}(X, Y)$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mathcal{R}_{G\times G}} & \frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{N} \\ \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ G & \xrightarrow{\mathcal{R}_G} & \frac{\mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,R}}{N} \end{array}$$

6.1. 窄三角形与一些预备知识。 本节及后续小节旨在证明窄三角形替换引理。

我们首先引入窄三角形的概念。

定义 10（窄三角形）。设 u是一个单位向量，并设$\epsilon, R > 0$。若元素 $(A_1, A_2) \in LN_{\epsilon,R}(u) \times LN_{\epsilon,R}(u)$ 满足以下条件，则称其为窄三角形：

1. $A_3 = [\cdot A_2 A_1 \cdot] \in LN_{\epsilon, R}(u)$.
2. $\Delta(A_1, A_2) \leqslant 1.5R$，其中

$$\Delta(A_1, A_2) = \max\Big\{\mathbf{l}(A_1) + \mathbf{l}(A_2) - \mathbf{l}(A_3), \mathbf{l}(A_1) + \mathbf{l}(A_3) - \mathbf{l}(A_2), \mathbf{l}(A_2) + \mathbf{l}(A_3) - \mathbf{l}(A_1)\Big\}.$$

令 $(LN \times LN)_{\epsilon, R}(u)$ 为由所有窄三角形组成的集合。

在本小节的其余部分，我们将为后续小节证明一些预备知识。

命题10。令 (A_1, A_2) 为一个窄三角形。存在唯一的三条测地弧 (P_1, P_2, P_3)，它们具有相同的起点和相同的终点，并满足

1. $i(P_1) = -i(P_2)$ and $i(P_3) \perp i(P_1)$.
2. $A_1 = [\cdot \bar{P}_2 P_3 \cdot], A_2 = [\cdot \bar{P}_3 P_1 \cdot]$ and $A_3 = [\cdot \bar{P}_1 P_2 \cdot]$.

P_1, P_2, P_3的并集称为该窄三角形的 T-图。

证明。对于任意两点 $p, q \in \mathbb{H}$，我们用 $[pq]$ 表示从点 p到点 q 的有向测地弧。连续的测地弧 A_1, A_2, A_3 可以提升到双曲平面 $\mathbb{H}$ 中，形成一条分段测地曲线，它在 $\mathbb{H}$中围成一个双曲三角形。我们用 a_1, a_2, a_3表示该三角形的三个顶点，使得 $[a_1a_2], [a_2a_3], [a_3a_1]$分别是 A_3, A_1, A_2 的提升。由于该三角形是薄三角形，存在唯一一点 $p \in [a_1a_2]$，使得 $[a_3p]$ 在点 p处垂直于 $[a_1a_3]$。对于任意 $i = 1, 2, 3$，令 P_i 为测地弧 $[pa_i]$在 M中的像。□

定义 11。若向量组 $(i(P_1), i(P_2), i(P_3))$ 在 $T^1M_p \approx S^1$中按正向循环排列，则称窄三角形具有正向定向；否则，称窄三角形具有负定向。注意，对于任意窄三角形，(A_1, A_2) 与 (A_2, A_1)具有相反定向。

命题 11（小窄三角形）。存在常数 $C > 0$和 $\epsilon_1, R_1, q_1 > 0$，它们仅取决于 M，使得对于任意 $R \geqslant R_1$和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，以下结论成立。存在一个窄三角形$(A_1^0, A_2^0) \in LN_{\epsilon,R}(u) \times LN_{\epsilon,R}(u)$，使得对于任意$i = 1,2,3$，$\mathbf{l}(A_i^0) \leqslant -C \log \epsilon$。

证明。 设 v_0 为一个辅助单位向量，并令

$$\begin{aligned} P_1 \in & Conn_{\epsilon^3, L(\epsilon^3)}(\sqrt{-1}v_0, u), \\ P_2 \in & Conn_{\epsilon^3, L(\epsilon^3)}(-\sqrt{-1}v_0, u), \\ P_3 \in & Conn_{\epsilon^3, L(\epsilon^3)}(v_0, u). \end{aligned}$$

我们定义 $A_1^0 = [\cdot \bar{P}_2 P_3 \cdot]$， $A_2^0 = [\cdot \bar{P}_3 P_1 \cdot]$ 和 $A_3^0 = [\cdot \bar{P}_1 P_2 \cdot]$。 □

6.2. **窄三角形替换引理**。 在本小节中，我们通过应用四部分条目化定理来证明窄三角形替换引理。

引理 13 (窄三角形替换引理**)**。 存在仅依赖于 M 的常数 ϵ_1、 R_1、 $q_1 > 0$，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，以下结论成立。假设 $(A_1$、 $A_2) \in (LN \times LN)_{\epsilon,\ R}(u)$ 是一个窄三角形。那么存在一个多裤子

$$\mathcal{RT}(A_1, A_2) \in \frac{\mathbb{Z}}{8\lfloor e^{2R} \rfloor^8} \mathbf{\Pi}_{\epsilon, R}$$

使得

$$\partial \mathcal{RT}(A_1, A_2) = \mathcal{R}(\partial(A_1, A_2)),$$

并且，对于某个 $m = m(M) > 0$，部分映射 $\mathcal{RT}$ 相对于测度类 $\sigma_C^{\times 2}$ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $(R\epsilon^{-1})^m$-半随机的。

证明。 **断言：** 假设 (A_1, A_2) 和 (A_1', A_2') 是两个定向相反的窄三角形，且 $\Delta(A_1, A_2) + \Delta(A_1', A_2') \leqslant 1.6R$。那么存在一个多裤子

$$Rot(A_1, A_2, A_1', A_2') \in \frac{\mathbb{Z}}{4\lfloor e^{2R} \rfloor^8} \mathbf{\Pi}_{\epsilon, R}$$

使得

$$\partial Rot(A_1, A_2, A_1', A_2') = \mathcal{R}(\partial(A_1, A_2)) - \mathcal{R}(\partial(A_1', A_2')).$$

首先假设该断言成立，构造映射 $\mathcal{RT}$。令 (A_1^0, A_2^0)为命题 **11** 中的小窄三角形。不失一般性，我们可以假设 (A_1, A_2) 和 (A_1^0, A_2^0) 的定向相反 （否则，我们将 (A_1^0, A_2^0) 替换为 (A_2^0, A_1^0)）。同时，我们有

$$\Delta(A_1^0, A_2^0) \leqslant -C \log \epsilon \leqslant 0.1R$$

从而得到 $\epsilon \geqslant e^{-\frac{R}{10C}}$。因此，两对窄三角形 (A_1, A_2, A_1^0, A_2^0) 和 $(A_1^0, A_2^0, A_2^0, A_1^0)$ 都满足该断言的条件。我们定义

$$\mathcal{RT}(A_1, A_2) = Rot(A_1, A_2, A_1^0, A_2^0) + \frac{1}{2} Rot(A_1^0, A_2^0, \bar{A}_2^0, \bar{A}_1^0).$$

根据断言， $\mathcal{RT}(A_1,\ A_2)$ 满足所需的性质。

断言的证明。设 $r_1,\ r_2,\ r_3$ 为由以下方程定义的常数

$$\begin{aligned} r_1+r_2 &= 2R-\mathbf{l}(A_3)-\mathbf{l}(A_3') \\ r_2+r_3 &= 2R-\mathbf{l}(A_1)-\mathbf{l}(A_1') \\ r_1+r_3 &= 2R-\mathbf{l}(A_2)-\mathbf{l}(A_2') \end{aligned}$$

设 $\mathcal{F}_i = Conn_{\epsilon^2,\ r_i}(u,\ -u)$。由于 $\Delta(A_1,\ A_2)+\Delta(A_1',\ A_2') \leqslant 1.6R$，因此对任意 $i=1,\ 2,\ 3,$ 均有 $r_i \geqslant 0.2R$。

设 $(R_1,\ R_2,\ R_3)$ 是 $(A_1,\ A_2)$ 的 T-图，并设 $(S_1,\ S_2,\ S_3)$ 是 $(A_1',\ A_2')$ 的 T-图。由于两个 T-图具有相反定向，对于任意三个元素 $B=\{B_i\in\mathcal{F}_i\}_{i=1,\ 2,\ 3}$，这三条测地弧的并

$$[\cdot R_1B_1\overline{S}_1\cdot]\cup[\cdot R_2B_2\overline{S}_2\cdot]\cup[\cdot R_3B_3\overline{S}_3\cdot]$$

是一个 θ-图。我们将由 θ-图构造的浸入裤子曲面记为 $P(A_1,\ A_2,\ A_1',\ A_2',\ B)$。裤子曲面 P具有如下边界

$$\partial P(A_1,A_2,A_1',A_2',B)=\left[A_3B_2\bar{A}_3'\bar{B}_1\right]+\left[A_1B_3\bar{A}_1'\bar{B}_2\right]+\left[A_2B_3\bar{A}_2'\bar{B}_1\right].$$

应用链引理可知，上述三条测地曲线都是良曲线。因此，$P\in\mathbf{\Pi}_{\epsilon,\ R}$。令

$$\begin{aligned} Rot^*(A_1,A_2,A_1',A_2',B) = P(A_1,A_2,A_1',A_2',B) &- Item(A_3,B_2,\bar{A}_3',\bar{B}_1) \\ -Item(A_1,B_3,\bar{A}_1',\bar{B}_2) &- Item(A_2,B_3,\bar{A}_2',\bar{B}_1), \end{aligned}$$

应用四部分条目化定理，对任意 $B\in\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2\times\mathcal{F}_3$，以下结论成立

$$\begin{aligned} \partial Rot^*(A_1,A_2,A_1',A_2',B) &= \sum_{i=1}^{3}\mathcal{R}(A_i)+\sum_{i=1}^{3}\mathcal{R}(\bar{A}_i') \\ &= \mathcal{R}\big(\partial(A_1,A_2)\big)-\mathcal{R}\big(\partial(A_1',A_2')\big). \end{aligned}$$

设 $\underline{B_i}$ $(\epsilon^2,\ R)$-有效随机元素属于 $\mathcal{F}_i$，并设 $B=(B_1,\ B_2,\ B_3)$。令

$$Rot(A_1,A_2,A_1',A_2') = Rot^*(A_1,A_2,A_1',A_2',\underline{B}),$$

这就完成了断言的证明。 □

估计半随机范数。我们先估计映射 Rot 的半随机范数。根据定义，有

$$|P|_*(\sigma_C^{\times 7})(\Pi)=\sum_{A_1,A_2,A_1',A_2',B} e^{-\mathbf{l}(A_1)-\mathbf{l}(A_2)-\mathbf{l}(A_1')-\mathbf{l}(A_2')-\sum_i r_i} \tag{10}$$

其中求和遍及所有满足条件 $(A_1,\ A_2,\ A_1',\ A_2',\ B)$ 的元素$P(A_1,\ A_2,\ A_1',\ A_2',\ B)=\Pi$。仿照命题 9，至多有

对于某个 $C_1 = C_1(M) > 0$，求和中至多有 C_1R^8 个元素 $(A_1,\ A_2,\ A_1',\ A_2',\ B)$。根据 r_i 的定义，我们有

$$\sum_i r_i \geqslant 3R - \mathbf{l}(X) - \mathbf{l}(Y) - \mathbf{l}(Z) - \mathbf{l}(W). \tag{11}$$

将其与估计式 **(10)** 结合，我们得到 $||P||_{s.r.} \leqslant C_1R^8$。由于 $||Rot^*||_{s.r.}$ 由映射 P 和映射 $Item$ 的半随机范数所界定，因此有 $||Rot^*||_{s.r.} \leqslant (R\epsilon^{-1})^{30}$。随机映射 Rot 是一个 $(R\epsilon^{-1})^{40}$-半随机映射。

映射 $\mathcal{RT}$ 是映射 Rot 与映射

$$(A_1, A_2) \mapsto (A_1, A_2, A_1^0, A_2^0) - \frac{1}{2}(A_1^0, A_2^0, \bar{A}_2^0, \bar{A}_1^0).$$

由于 $(A_1^0,\ A_2^0)$ 是一个小窄三角形，并且对于任意 $i = 1,\ 2$，都有 $\mathbf{l}(A_i^0) \leqslant -C\log\epsilon$，我们得到后一个映射是 ϵ^{-4C}-半随机的，其中 $C = C(M)$ 是命题 **11** 中的常数。这意味着对于某个 $m = m(M) > 0$，有 $||\mathcal{RT}||_{s.r.} \leqslant (R\epsilon^{-1})^m$，从而完成证明。□

6.3. 有界群元素与有界三角形。 在本小节中，给定 $\epsilon,\ R > 0$ 和一个单位向量 v，我们定义有界群元素和有界三角形的概念。

设 $*$ 为基点，$G = \pi_1(M,\ *)$ 为曲面 M 的基本群。群元素 $A \in G$ 与从 $*$ 到其自身、属于 A 同伦类的测地弧相对应。设 $v \in T^1M_*$ 为支撑在 $*$ 上的单位向量。对于任意 $l > 0$，我们用 e^{-lv} 表示初始向量为 $-v$、长度为 l 的测地弧。对于任意 $A \in G$，我们记

$$A^{lv} = [\cdot\overline{e^{-lv}}Ae^{-lv}\cdot].$$

定义 12（拉伸映射）。对于任意 $A \in G$，我们定义

$$Str(A) := A^{L(\epsilon^3)v},$$

其中

$$L(\epsilon^3) = \max\{-q_0^{-1}\log\epsilon^3, -\log\epsilon^3, L_0\}$$

是连接引理中的常数。对于任意 $(X,\ Y) \in G \times G$，我们定义 $Str(X,\ Y) = (Str(X),\ Str(Y))$。

从现在起，我们用 u 表示测地弧 $e^{-L(\epsilon^3)v}$ 的终端单位向量。我们将有界群元素的集合定义为相对于向量 u的左窄连接的原像。

定义 13. 如果群元素 $A \in G$ 满足 $(\epsilon,\ R,\ v)$-有界条件$Str(A) \in LN_{\epsilon,\ R}(u)$，则称其为 $(\epsilon,\ R,\ v)$-有界。若元素 $(X,\ Y) \in G \times G$ 满足 $(\epsilon,\ R,\ v)$-有界三角形的条件 $Str(X,\ Y) \in (LN \times LN)_{\epsilon,\ R}(u)$，则称其为 $(\epsilon,\ R,\ v)$-有界三角形。

拉伸长度经过精心选择，使得拉伸映射的半随机范数不会太大（见命题 12），并且拉伸后元素 $Str(A)$ 的几何性质可以通过 A 的低效度得到有效控制（见引理 14）。

命题 12。令 q_0 为连接原理中的常数。存在一个仅依赖于 M 的常数 $\epsilon_1 > 0$，使得对于任意 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon > 0$，拉伸映射 Str 关于测度类 σ_G 和 σ_C 对于 $m = 6(q_0^{-1} + 1)$是 ϵ^{-m}-半随机的。

证明。由于拉伸映射 Str 是单射，以下结论成立

$$|Str|_*(\sigma_G)(Str(A)) = \sigma_G(A) = \frac{e^{\mathbf{l}(Str(A))}}{e^{\mathbf{l}(A)}}\sigma_C(Str(A)).$$

应用三角不等式，我们得到

$$\mathbf{l}(Str(A)) \leqslant \mathbf{l}(A) + 2L(\epsilon^3).$$

因此，令 $\epsilon_1 = e^{-L_0/3},$，我们得到 $||Str||_{s.r.} \leqslant e^{2L(\epsilon^3)} \leqslant \epsilon^{-m}$。 □

对于任意群元素 $A \in G$，我们将 A 关于 v 的低效度定义为

$$I_v(A) = \lim_{l\to\infty} I\left(\overline{e^{-lv}}Ae^{-lv}\right).$$

下面的命题表明，低效度有界的群元素是一致有界的。

引理 14. 存在仅依赖于曲面 M 和常数 $D > 0$ 的常数 ϵ_1、R_1、$q_1 > 0$，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，下述结论成立。设 $A \in G$ 满足 $\boldsymbol{l}(A) \leqslant 1.5R$ 和 $I_v(A) \leqslant D$。那么 A 是一个 $(\epsilon、R、v)$-有界群元素。

此外，设 $(X、Y) \in G \times G$ 满足 $X、Y、XY \in G$ 是 $(\epsilon、R、v)$-有界的，且 $\Delta(X、Y) \leqslant 1.4R$，那么 $(X、Y)$ 是一个 $(\epsilon、R、v)$-有界三角形。

证明. 由于对于任意 $l > 0$

$$I\left(\overline{e^{-lv}}Ae^{-lv}\right) \leqslant I_v(A) \leqslant D,$$

根据低效度的定义，我们有

$$\mathbf{l}(A) + 2l - \mathbf{l}(A^{lv}) = I\left(\overline{e^{-lv}}Ae^{-lv}\right) \leqslant D.$$

结合三角不等式，对于任意 $l > 0$，我们得到

$$\mathbf{l}(A) + 2l - D \leqslant \mathbf{l}(A^{lv}) \leqslant \mathbf{l}(A) + 2l.$$

特别地，我们得到以下长度估计

$$2L(\epsilon^3)-D\leqslant \mathbf{l}(Str(A))\leqslant 1.5R+2L(\epsilon^3). \tag{12}$$

应用引理 8，可得对任意 $l>D+1$，以下角度估计成立：

$$\Theta\left(i\left(A^{lv}\right),t\left(\overline{e^{-lv}}\right)\right),\Theta\left(t\left(A^{lv}\right),t\left(e^{-lv}\right)\right)\leqslant Ce^{-l},$$

其中某个常数为 $C=C(D)>0$。特别地，我们得到

$$Str(A)\in Conn_{C\epsilon^3,<\infty}(-u,u). \tag{13}$$

设 $\epsilon_1,R_1,q_1>0$ 为常数，使得对任意 $R\geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1\geqslant\epsilon\geqslant e^{-q_1R}$，都有

$$L(\epsilon^2)\leqslant 2L(\epsilon^3)-D,$$
$$1.5R+2L(\epsilon^3)\leqslant 2R-L(\epsilon^2),$$

and

$$C\epsilon^3\leqslant\epsilon^2.$$

结合这些假设与方程 (12) 和 (13)，我们得到 $Str(A)\in LN_{\epsilon,R}(u)$。这意味着 A 是 (ϵ,R,v)-有界。为了证明此外的部分，只需证明 $\Delta(Str(X,Y))\leqslant 1.5R$。这可由以下估计得证

$$\Delta(Str(X),Str(Y))\leqslant\Delta(X,Y)+6L(\epsilon^3).$$

□

6.4.有界群同调与群到裤子定理。 回忆一下，群同调中的边界映射定义为

$$\partial:G\times G\to\mathbb{Z}G\quad(X,Y)\mapsto X+Y-XY.$$

我们用 $G_{\epsilon,\ R}(v)$ 表示所有 $(\epsilon,\ R,\ v)$-有界群元素组成的集合。我们用 $(G\times G)_{\epsilon,\ R}(v)$ 表示所有 $(\epsilon,\ R,\ v)$-有界三角形组成的集合。标准群同调的这一限制称为有界群同调

$$\partial:(G\times G)_{\epsilon,R}(v)\to\mathbb{Z}G_{\epsilon,R}(v).$$

本节的主要目的是证明以下定理，该定理建立了有界群同调与良裤子同调之间的联络。因此，这个定理被称为群到裤子定理。

定理 9 (群到裤子定理**)**。 存在常数 $R_1, \epsilon_1, q_1 > 0$ ， 它们仅取决于曲面 M ， 使得对于任意的 $R \geqslant R_1$ 和$\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$ ， 以下结论成立。令 v 为 $T^1 M_*$ 中的任意单位向量。存在映射

$$\mathcal{R}_G : G_{\epsilon,R}(v) \to \frac{\mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,R}}{8\lfloor e^{2R} \rfloor^8},$$

and

$$\mathcal{R}_{G\times G} : (G \times G)_{\epsilon,R}(v) \to \frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{8\lfloor e^{2R} \rfloor^8},$$

使得对于任意 $(X、Y) \in (G \times G)_{\epsilon,\ R}(v)$ ， 我们有

$$\partial \mathcal{R}_{G\times G}(X, Y) = \mathcal{R}_G\big(\partial(X, Y)\big),$$

并且映射 $\mathcal{R}_{G\times G}$ 关于测度类 $\sigma_G \times \sigma_G$ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $(R\epsilon^{-1})^m$-半随机的， 其中某个 $m = m(M) > 0$。

证明。 根据有界群同调的定义，下图中的左方形自然交换。

$$\begin{array}{ccccc}
(G \times G)_{\epsilon,R}(v) & \xrightarrow{Str} & (LN \times LN)_{\epsilon,R}(u) & \xrightarrow{\mathcal{RT}} & \frac{\mathbb{Z}\mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}}{8\lfloor e^{2R} \rfloor^8} \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
G_{\epsilon,R}(v) & \xrightarrow{Str} & LN_{\epsilon,R}(u) & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \frac{\mathbb{Z}\Gamma_{\epsilon,R}}{8\lfloor e^{2R} \rfloor^8}
\end{array}$$

根据窄三角形替换引理，存在一个映射 $\mathcal{RT}$，使得上述图中的右方形交换。我们定义

$$\mathcal{R}_G = \mathcal{R} \circ Str,$$

and

$$\mathcal{R}_{G\times G} = \mathcal{RT} \circ Str.$$

我们得到映射 $\mathcal{R}_{G\times G}$ 满足所需性质

$$\partial \mathcal{R}_{G\times G}(X, Y) = \mathcal{R}\big(Str\ \partial(X, Y)\big) = \mathcal{R}_G\big(\partial(X, Y)\big).$$

映射 $\mathcal{R}_{G\times G}$ 的半随机范数受映射 Str 和映射 $\mathcal{RT}$的半随机范数有界。因此，根据窄三角形替换引理和命题 12，映射 $\mathcal{R}_{G\times G}$ 是 $(R\epsilon^{-1})^m$-半随机的，其中某个 $m = m(M) > 0$。证明至此完成。

□

7. Proof of the Good Pants Homology Theorem

本节中，我们证明优良裤子同调定理。为了构造修正映射 Φ，对于任意良曲线 γ，我们需要构造多裤子 $\Phi(\gamma)$。构造的思路是先将良曲线 γ 编码为群元素，然后应用群到裤子定理。

7.1. 良曲线的二分。 在本小节中，通过应用二分论证，我们将任意良曲线 γ 编码为两个有界群元素 X，$Y \in G$ 使得 $\gamma = [XY]$。这种二分取决于单位向量 $v \in T^1 M_*$的选择，该向量将在有界群同调引理中固定。

定义 14。 给定 ϵ，$R > 0$ 以及一个单位向量 $v \in T^1 M_*$。对于任意良曲线 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$。设 a，$b \in \gamma$ 为两个对径点。记 γ_{ab} 为从 a 到 b 的 γ 的子弧。记 γ_{ba} 为从 b 到 a的 γ的子弧。我们取一对测地弧

$$S_a \in Conn_{\epsilon^3, \frac{R}{2}-\frac{\mathbf{l}(\gamma)}{4}+L(\epsilon^3)+\log 2}\left(v, \sqrt{-1}\gamma'(a)\right)$$

$$S_b \in Conn_{\epsilon^3, \frac{R}{2}-\frac{\mathbf{l}(\gamma)}{4}+L(\epsilon^3)+\log 2}\left(v, \sqrt{-1}\gamma'(b)\right),$$

其中 $L(\epsilon^3)$是连接引理中的常数。我们定义

$$X(\gamma) = \left[\cdot S_a \gamma_{ab} \overline{S}_b \cdot\right], \text{ and } \quad Y(\gamma) = \left[\cdot S_b \gamma_{ba} \overline{S}_a \cdot\right].$$

是曲线 γ 的二分法。显然，$[XY] = \gamma$。

备注 2. 由于

$$\frac{R}{2} - \frac{\mathbf{l}(\gamma)}{4} + L(\epsilon^3) + \log 2 \approx L(\epsilon^3) + \log 2,$$

根据连接引理，上述两个连接集均非空。这保证了 S_a，S_b 的存在。

命题 13. 存在仅依赖于M 的常数 ϵ_1，$R_1 > 0$，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon > 0$，以下结论成立。对于任意 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$，我们有

$$X, Y \in Conn_{\epsilon^2, R+2L(\epsilon^3)}(v, -v).$$

证明。 将直角链引理应用于连续的测地弧 S_a、γ_{ab}、S_b，可得以下估计

$$|\mathbf{l}(X) - R - 2L(\epsilon^3)| \leqslant C\epsilon^3$$
$$\Theta(i(X), v), \Theta(t(X), -v) \leqslant C\epsilon^3$$

其中某个普适常数为 C。对 Y 也有相同的估计。令$\epsilon_1 = C^{-1}$。因此，我们有

$$X, Y \in Conn_{\epsilon^2, R+2L(\epsilon^3)}(v, -v).$$

□

因此，根据命题 13 和引理 9，二分元素 $X(\gamma)$ 和 $Y(\gamma)$ 的低效度有界，即

$$I_v(X(\gamma)), I_v(Y(\gamma)) \leqslant D_1,$$

其中 D_1 是引理 9 中的普适常数。因此，由引理 14 可知，二分元素是（ϵ、R、v)-有界群元素。

二分构造定义了两个映射

$$X : \Gamma_{\epsilon,R} \to G_{\epsilon,R}(v),$$

and

$$Y : \Gamma_{\epsilon,R} \to G_{\epsilon,R}(v).$$

下面的命题估计 X、Y的半随机范数。

命题 14。 存在仅依赖于M 的常数 ϵ_1、$R_1 > 0$，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon > 0$，以下结论成立。对于某个常数 $m = m(M) > 0$，映射 $\gamma \mapsto X(\gamma)$ 和 $\gamma \mapsto Y(\gamma)$ 关于测度类 σ_Γ 和 σ_G 是 $(R\epsilon^{-1})^m$-半随机的。

证明。 我们首先证明该映射

$$\gamma \mapsto \big(X(\gamma), Y(\gamma)\big)$$

是 $(R\epsilon^{-1})^n$-半随机的。以下估计成立

$$\begin{aligned} |(X,Y)|_*\sigma_\Gamma(X,Y) = \mathbf{l}(\gamma)e^{-\mathbf{l}(\gamma)} &\leqslant \mathbf{l}(\gamma)e^{-\mathbf{l}(X)-\mathbf{l}(Y)+2\mathbf{l}(S_a)+2\mathbf{l}(S_b)} \\ &= \mathbf{l}(\gamma)e^{2\mathbf{l}(S_a)+2\mathbf{l}(S_b)}\sigma_G^{\times 2}(X,Y) \\ &\leqslant CRe^{4L(\epsilon^3)}\sigma_G^{\times 2}(X,Y) \end{aligned}$$

其中 C 是一个普适常数。上述估计中的第一个不等式来自三角不等式，第二个不等式则来自关于 γ，S_a，S_b的长度估计。令 n 充分大，使得 $CRe^{2L(\epsilon^3)} \leqslant (R\epsilon^{-1})^n$。根据命题 5，遗忘偏映射

$$\big(X(\gamma), Y(\gamma)\big) \mapsto X(\gamma)$$

对于某个常数 $C' = C'(M) > 0$，其为 $C'R$-半随机的。这意味着当 $R_1 \geqslant C'$ 时，映射 $\gamma \mapsto X(\gamma)$ 为 $(R\epsilon^{-1})^{n+2}$- 半随机的。对于 $\gamma \mapsto Y(\gamma)$，相同的估计也成立。证明完毕。□

7.2. 曲线到群引理。 在本小节中，我们证明曲线到群引理。

引理15 (曲线到群**)。** 存在仅依赖于 M 的常数 ϵ_1、R_1、$q_1 > 0$，使得对于任意 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，以下结论成立。对于任意$\gamma \in \Gamma_{\epsilon,\ R}$，存在一个多裤子

$$\mathcal{RC}(\gamma) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\lfloor e^{2R} \rfloor^6} \mathbf{\Pi}_{\epsilon,R}$$

使得

$$\partial \mathcal{RC}(\gamma) = \mathcal{R}_G\big(X(\gamma)\big) + \mathcal{R}_G\big(Y(\gamma)\big) - \gamma,$$

并且映射 $\mathcal{RC}$ 相对于测度类 σ_Γ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $(Re^{-1})^m$-半随机的，其中某个常数为 $m = m(M) > 0$。

证明。 令$\mathcal{F} = Conn_{\epsilon^2,\ R-2L(\epsilon^3)-2\mathfrak{l}(T)}(u,\ -u)$ 为右窄连接集的一个子集，使得对于任意 $B \in \mathcal{F}$，测地弧的并集

$$[\cdot \overline{S}_a T B \overline{T} S_b \cdot] \cup \gamma_{ab} \cup \gamma_{ba}$$

是一个 θ-图。我们用 $P(\gamma,\ B)$ 表示由该图构造的裤子曲面。因此，我们得到

$$\partial P(\gamma, B) = -\gamma + [Str(X)B] + [Str(Y)\bar{B}]. \tag{14}$$

应用两部分分项定理，我们得到

$$\begin{aligned} [Str(X)B] &= \partial Item_2(Str(X), B) + \mathcal{R}(Str(X)) + \mathcal{R}(B), \\ [Str(Y)\bar{B}] &= \partial Item_2(Str(Y), \bar{B}) + \mathcal{R}(Str(Y)) + \mathcal{R}(\bar{B}). \end{aligned} \tag{15}$$

令

$$\mathcal{RC}^*(\gamma, B) = P(\gamma, B) - Item_2(Str(X), B) - Item_2(Str(Y), \bar{B}).$$

对任意 $B \in \mathcal{F}$，将方程 **(14)** 和 **(15)** 求和，我们得到

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{RC}^*(\gamma, B) &= -\gamma + \mathcal{R}(Str(X)) + \mathcal{R}(Str(Y)) \\ &= -\gamma + \mathcal{R}_G(X) + \mathcal{R}_G(Y). \end{aligned}$$

令 $\underline{B}$ 为 $(\epsilon^2,\ R)$-有效随机元素，属于 $\mathcal{F}$。我们定义

$$\mathcal{RC}(\gamma) = \mathcal{RC}^*(\gamma, \underline{B}).$$

多裤子 $\mathcal{RC}(\gamma)$满足引理中的条件。

$\mathcal{RC}$的半随机范数。 映射 P 关于测度类 $\sigma_\Gamma \times \sigma_C$ 和 $\sigma_{\mathbf{\Pi}}$是 $Re^{4L(\epsilon^3)}$-半随机的，这是因为

以下估计

$$|P|_*\,(\sigma_\Gamma\times\sigma_C)\big(P(\gamma,B)\big)=\sigma_\Gamma(\gamma)\sigma_C(B)$$
$$=\frac{R}{e^{2R}}\frac{1}{e^{R-4L(\epsilon^3)}}=Re^{4L(\epsilon^3)}\sigma_{\mathbf{\Pi}}\big(P(\gamma,B)\big),$$

其中，第一个等式源于映射 P 是单射这一事实。$\mathcal{RC}^*$ 的半随机范数有界于映射 P、映射 $Item_2$、伸缩映射 Str以及映射 X 和Y的半随机范数。由于这些映射的半随机范数是$R\epsilon^{-1}$的多项式，我们得到，对于某个 $n=n(M)>0$，映射 $\mathcal{RC}^*$ 是 $(R\epsilon^{-1})^n$-半随机的。因此，对于某个 $m=m(M)$，随机映射 $\mathcal{RC}$ 是 $(R\epsilon^{-1})^m$-半随机的。□

7.3. 群元素二分法。 在本小节中，通过应用二分论证，我们将群元素 A 分成两个群元素 $X,Y\in G$，使得 $A=XY$。这种二分取决于单位向量 $v\in T^1M_*$的选择，该向量将在有界群同调引理中固定。

定义15. 设 $v\in T^1M_*$ 为一个单位向量，并设 $K>0$ 为一个常数，使得对于任意 $v_1,v_2\in T^1M$，连接集 $Conn_{1,K}(v_1,v_2)$ 均非空。对于任意 $A\in G$，我们固定一条测地弧

$$L_A\in Conn_{1,K}\left(v,\sqrt{-1}A'\big(\mathbf{l}(A)/2\big)\right),$$

并将 A 的二分元素定义为

$$X(A)=[\cdot A|_{[0,\mathbf{l}(A)/2]}\bar{L}_A\cdot],\text{ and }\quad Y(A)=[\cdot L_AA|_{[\mathbf{l}(A)/2,\mathbf{l}(A)]}\cdot].$$

我们用 $\mathcal{D}^i(A)$ 表示由元素 A的i^{th} 二分法中出现的 2^i 个元素构成的集合。

下面的引理固定常数 K。从现在起，我们将K 视为仅依赖于曲面 M的常数。因此，群元素的二分法仅取决于单位向量 $v\in T^1M_*$ 的选择。

引理 16. 存在仅依赖于 M 的常数 ϵ_1、R_1、$q_1>0$ 和 $K>0$，使得对于任意 $R\geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1\geqslant\epsilon\geqslant e^{-q_1R}$，以下结论成立。对于任意群元素 $A\in G$，我们记 $m(A)=\lfloor\log_2\boldsymbol{l}(A)\rfloor-1$。设 $A\in Conn_{1,1.25R}(v,-v)$。那么

1. 对任意 $B\in\mathcal{D}^{m(A)}(A)$，我们有 $\boldsymbol{l}(B)\leqslant 3K$。
2. 对任意 $i<m(A)$ 和 $B\in\mathcal{D}^i(A)$，我们有
$$\big(X(B),Y(B)\big)\in(G\times G)_{\epsilon,R}(v).$$

证明。对于任意群元素 $A\in G$，我们记

$$\Theta(A)=\max\left\{\Theta\big(i(A),v\big),\Theta\big(t(A),-v\big)\right\}.$$

根据双曲三角学，对于任意 $A\in G$，以下估计成立

$$\left|\mathbf{l}\big(X(A)\big)-\frac{\mathbf{l}(A)}{2}-K\right|\leqslant C, \tag{16}$$

$$\Theta\big(X(A)\big)\leqslant\max\left\{1+Ce^{-K},\Theta(A)+Ce^{-\frac{\mathbf{l}(A)}{2}}\right\}$$

其中 C 是某个普适常数。对于 $Y(A)$，同样的估计也成立。由归纳法，对于任意 $B\in\mathcal{D}^i(A)$，我们有以下长度估计

$$\left|\mathbf{l}(B)-\left(\frac{\mathbf{l}(A)}{2^i}+\left(2-\frac{1}{2^{i-1}}\right)K\right)\right|\leqslant C_1 \tag{17}$$

其中 C_1 是某个普适常数，并且有以下角度估计

$$\begin{aligned}\Theta\big(B\big)&\leqslant\max\{1,\Theta(A)\}+Ce^{-K}+Ce^{-C_1}\left(\sum_{s=1}^{i}e^{-\frac{\mathbf{l}(A)}{2^s}-\left(2-\frac{1}{2^{s-1}}\right)K}\right)\\&\leqslant 1+C_2e^{-K}\left(1+\frac{e^{-\mathbf{l}(A)/2^i}}{1-e^{-\mathbf{l}(A)/2^i}}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

其中 C_2 是某个普适常数。应用估计（17），对于任意$B\in\mathcal{D}^{m(A)}(A)$，我们有 $\mathbf{l}(B)\leqslant 2K+C_1+1$。令 $K\geqslant C_1+1$，即可得到第一个性质。对于任意 $i\leqslant m(A)$，我们有

$$\frac{e^{-\mathbf{l}(A)/2^i}}{1-e^{-\mathbf{l}(A)/2^i}}\leqslant\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{2}}}.$$

结合估计（18），我们得到存在一个普适常数 $C_3>0$，使得对于任意 $K>C_3$ 和任意 $B\in\mathcal{D}^i(A)$，$i\leqslant m(A)$，都有 $\Theta(B,v)\leqslant 1.1$。由引理 9，存在一个常数 $D_1>0$，使得

$$I_v(B)\leqslant D_1$$

对于任意 $B\in\mathcal{D}^i(A)$ 和 $i\leqslant m(A)$。估计（17）还意味着

$$\Delta(X(A),Y(A))\leqslant\mathbf{l}(A)+2K+2C_1\leqslant 1.4R.$$

当 $R_1\geqslant 40K$ 时。应用引理 14，我们得到 $\big(X(B),Y(B)\big)\in(G\times G)_{\epsilon,R}(v)$。证明至此完成。□

7.4. 有界群同调引理。 在本小节中，我们证明有界群同调引理。

令 $\{h_1, \dots, h_{2g}\} \subset G$ 为曲面群 G 的一组生成元。因此，我们可以讨论群元素的字长。我们将同调群 $H_1(M, \mathbb{Z})$ 与 $\mathbb{Z}\{h_1, \dots, h_{2g}\} \subset \mathbb{Z}G$ 等同，并定义

$$H : G \to H_1(M, \mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}G$$

令 $H(A)$ 等于 A 的同调类。

引理 17 (有界群同调引理**)。** 存在一个单位向量 $v \in T^1 M_*$ 以及常数 ϵ_1、R_1、$q_1 > 0$，它们仅依赖于 M，使得对于任意的 $R \geqslant R_1$ 和 $\epsilon_1 \geqslant \epsilon \geqslant e^{-q_1 R}$，以下结论成立。假设 $A \in Conn_{1,\leqslant 1.25R}(v, -v)$。那么存在一个元素 $\phi(A) \in \mathbb{Z}(G \times G)_{\epsilon,R}(v)$，使得

$$\partial\phi(A) = A - H(A),$$

并且部分映射 ϕ 是一个 R^n-半随机映射，其中某个常数$n = n(M) > 0$ 对应测度类 σ_G 和 $\sigma_G \times \sigma_G$。

定义 16. 用 $D : G \to \mathbb{Z}G$ 表示由 $D(A) = X(A) + Y(A)$定义的映射。因此，$D^i(A)$ 是 $\mathcal{D}^i(A)$中所有元素的求和。用 $(X,\ Y) : G \to G \times G$ 表示映射 $(X, Y)(A) = (X(A),\ Y(A))$。对于任意群元素 $A \in G$，令 $m(A) = \lfloor \log_2 \mathbf{l}(A) \rfloor - 1$ 并定义

$$\phi_1(A) = -\sum_{i=0}^{m-1} (X, Y) D^i(A).$$

因此，$\partial\phi_1(A) = A - D^{m(A)}(A)$。

由引理 16 可知，上述定义定义了一个映射

$$\phi_1 : Conn_{1,\leqslant 1.25R}(v, -v) \to \mathbb{Z}(G \times G)_{\epsilon,R}(v).$$

命题15. 存在一个常数 $n = n(M) > 0$，使得映射 ϕ_1 相对于测度类 σ_C 和$\sigma_G^{\times 2}$ 是 R^n-半随机的。

证明. 通过以下计算，映射 $(X,\ Y)$ 是 e^{2K}-半随机的

$$|(X, Y)|_* \sigma_G(X, Y) = e^{-\mathbf{l}(XY)} \leqslant e^{-\mathbf{l}(X)-\mathbf{l}(Y)+2K} = e^{2K} \sigma_G \times \sigma_G\,(X, Y)\,.$$

根据以下计算，映射 D 是 $C_3 e^{2K}$-半随机的，其中某个常数 C_3 取决于 M

$$|D|_*(\sigma_G)(X) = \sum_Y \frac{1}{e^{\mathbf{l}(XY)}} \leqslant \sum_Y \frac{1}{e^{\mathbf{l}(X)+\mathbf{l}(Y)-2K}} \leqslant \frac{C_3 e^{2K}}{e^{\mathbf{l}(X)}} = C_3 e^{2K} \sigma_G(X),$$

其中，对所有元素 Y 求和满足估计式 (16)。上述估计中的第一个不等式来自三角不等式，第二个不等式则来自至多有 $C_3e^{\mathrm{l}(Y)}$ 个 Y 满足长度估计 (16) 这一事实。因此，

$$||\phi_2||_{s.r.} \leqslant \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 R \rfloor} ||(X,Y)D^i||_{s.r.} \leqslant \sum_{i=1}^{\lfloor \log_2 R \rfloor+1} e^{2K}(C_3e^{2K})^i \leqslant R^n$$

对某个常数 $n = n(C_3,\ K) = n(M)$。 □

有界群同调引理的证明。我们先固定单位向量 v 和常数 D。令 N 为满足以下条件的最小自然数：任意字长为 B 且满足 $\mathrm{l}(B) \leqslant 3K$的群元素，其字长都小于 N。用 $G(N)$表示所有字长小于 N的群元素构成的集合。存在一个单位向量 v和一个常数D，使得对于任意 $B \in G(N)$，都有 $I_v(B) \leqslant D_0$。令 $D =$为 $\max\{D_0,\ D_1\}$，其中 D_1 是引理 16 中的常数。应用引理 14 可知，每个$(X,\ Y) \in G(N) \times G(N)$都是 $(\epsilon,\ R,\ v)$-有界的。

对于由 $B = a_1 \cdots a_s$表示的任意 $B \in G(N)$，我们定义

$$\phi_2(B) = -\sum_{i=1}^{s-1} (a_i, a_{i+1} \cdots a_s)$$

使得下列方程成立

$$\partial\phi_2(B) = a_1 \cdots a_s - \sum_i a_i = B - H(B).$$

令 $\phi(A) = \phi_1(A) + \phi_2(D^m(A))$，我们得到

$$\partial\phi(A) = A - H(A).$$

由于 ϕ_2 仅在有限多个短元素上有定义，ϕ 的半随机性由 ϕ_1 有界。这就完成了证明。□

7.5. 优良裤子同调定理的证明。在本小节中，我们证明优良裤子同调定理。

设 $R_1, \epsilon_1, q_1 > 0$ 为常数，使得在满足 $R \geqslant R_1$ 且 $\epsilon_1 \geqslant\epsilon \geqslant e^{-q_1R}$ 的条件下，这些常数 ϵ, R 满足曲线到群引理、群到裤子定理以及有界群同调引理中的所有假设。令 v 为有界群同调引理中的单位向量。对于任意定向闭曲线 $\gamma \in \Gamma_{\epsilon,R}$，所需的多裤子 $\Phi(\gamma)$ 构造如下：

1. 令 X, Y 为在第 7.1 小节中构造的 γ 的两个二分元素。应用曲线到群引理，我们得到

$$\gamma = -\partial\mathcal{RC}(\gamma) + \mathcal{R}_G(X) + \mathcal{R}_G(Y).$$

良曲线由两个有界群元素编码。

2. 应用有界群同调引理，我们得到

$$X = \partial\phi(X) + H(X),$$

and

$$Y = \partial\phi(Y) + H(Y).$$

此外，应用群到裤子定理，我们得到

$$\mathcal{R}_G(X) = \partial\mathcal{R}_{G\times G}(\phi(X)) + \mathcal{R}_G(H(X))$$

and

$$\mathcal{R}_G(Y) = \partial\mathcal{R}_{G\times G}(\phi(Y)) + \mathcal{R}_G(H(Y)).$$

3. 令

$$\Phi(\gamma) = -\mathcal{RC}(\gamma) + \mathcal{R}_{G\times G}(\phi(X)) + \mathcal{R}_{G\times G}(\phi(Y)),$$

并令 Ψ 为映射 $\mathcal{R}_G$ 在集合上的限制

$$H_1(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\{h_1,\ldots,h_{2g}\} \subset \mathbb{Z}G.$$

结合步骤 1 和步骤 2 中的方程，我们得到

$$\gamma = \partial\Phi(\gamma) + \mathcal{R}_G(H(X)) + \mathcal{R}_G(H(Y)).$$

由于 $H(\gamma) = H(X) + H(Y)$，这意味着映射 Φ 和Ψ满足同调条件。

映射 Φ 的半随机范数有界于映射 $\mathcal{RC}$，$\mathcal{R}_{G\times G}$ 和 ϕ的半随机范数，而这些范数都是 $R\epsilon^{-1}$的多项式，且仅取决于曲面 M。这意味着随机性条件成立，并完成了证明。

References

[1] L. V. Ahlfors，《拟共形映射讲义》，Van Nostrand 数学研究丛书，第10号，D. Van Nostrand Co., Inc.，多伦多，安大略省—纽约—伦敦，1966；MR0200442[2] J. A. Kahn 和 V. Markovi´c，《在闭双曲三维流形中浸入近测地曲面》，《数学年刊》（第二辑）（2012），第3期，1127–1190；MR2912704[3] J. A. Kahn 和 V. Markovi´c，《良裤子同调与 Ehrenpreis 猜想》，《数学年刊》（第二辑）（2015），第1期，1–72；MR3374956[4] G. A. Margulis，《遍历理论在研究负曲率流形中的若干应用》，Funkcional. Anal. i Prilo˘zen.（1969），第4期，89–90；MR0257933[5] Cayo D´oria，Nara Paiva，《通过短曲线确定曲面及其应用》，arXiv:2402.18676v2[6] C. C. Moore，《测地流相关系数的指数衰减》，载于《群表示、遍历理论、算子代数与数学物理》（加利福尼亚州伯克利，1984），163–181，数学科学研究所出版物，第6卷，Springer，纽约；MR0880376

[7] S. A. Wolpert, 《长度谱作为紧黎曼曲面的模空间参数》, 载于《黎曼曲面及相关主题：*1978*年石溪会议论文集（纽约州立大学，纽约州石溪，*1978*）》, 第515–517页, 《数学年刊研究丛书》第97号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；MR0624836[8] Epstein, D. B. A., A. Marden 和 V. Markovic. “拟共形同胚与凸包边界。”《数学年刊》159，第1期（2004）：305–36。[9] K. Takeuchi, 《算术福克斯群的刻画》, 《日本数学会杂志》**27** （1975）, 第4期, 600–612；MR0398991[10]C. Maclachlan 和 A. W. Reid, 《双曲三维流形的算术》, 《数学研究生教材》第219卷，Springer，纽约，2003；MR1937957