arXiv:2601.02719v1 [math.AG] 6 Jan 2026

SYMM对称箭图簇与临界稳定包络

Yalong Cao、Andrei Okounkov、Yehao Zhou 和 Zijun Zhou

Abstract. 带势的对称箭图簇是 Nakajima 箭图簇的自然推广，其等变临界上同调为几何表示论和枚举几何提供了更加灵活的框架。在本文中，我们研究它们的几何性质，并证明它们的表现类似于普适变形的 Nakajima 箭图簇。在此基础上，我们为其上临界稳定包络的存在性给出一种新的证明。沿用 Nakajima 的思想，我们通过对称箭图簇的仿射化上的双曲限制，给出临界稳定包络的层论诠释。双曲限制的结合律蕴含了临界稳定包络的三角引理。

1. Introduction

Maulik 和 Okounkov 在 Nakajima 箭图簇的上同调中引入了稳定包络 [MO]。它们在几何表示论和枚举几何中有着重要应用。在 [COZZ1], 中，作者开始发展临界轨迹上的稳定包络理论，涵盖临界上同调和临界 K-理论。文献 [COZZ2, COZZ3]探讨了它们在临界轨迹上的移位量子群研究和曲线计数中的应用。更具体地说，我们的临界轨迹由带有环面作用的光滑簇 X 以及一个 T-不变正则函数定义

$$\mathsf{w}\colon X \to \mathbb{C}.$$

类似于 Nakajima 簇 [Nak2], ，为明确起见，我们在此考虑 X 是箭图表示（无关系）的模空间这一情形。我们进一步要求 X 是对称的，即箭图及其框架都是对称的（见定义 2.2）。在这种情况下，我们称 X 为对称箭图簇。

读者不应将此处的箭图簇与中岛箭图簇混淆：前者定义时不对箭图施加任何关系，而后者是某些矩映射的零点集。事实上，中岛箭图簇可以实现为带有典范三次势函数的对称箭图簇的临界轨迹，相应的等变 Borel–Moore 同调和 K-理论可等同于等变临界上同调和临界 K-理论，例如见 [COZZ1，例 6.13，注 6.14]。从这个意义上说，带势的对称箭图簇为研究源自几何表示论和枚举几何的问题提供了更灵活的框架。

为了研究这些更一般情形中的问题，理解对称箭图簇的几何性质十分重要。本文的第一个定理表明，对称箭图簇的性质类似于普遍变形的中岛簇：后者配有到仿射空间的平坦态射，并具有一系列显著的几何性质。更确切地说，我们有：

定理 1.1. 设 X 为一个对称箭图簇。

(1) 存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{\tau}} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{H}/\Gamma\,, \end{array}$$

其中

- $\widetilde{X}$ 是一个向量空间与一个普遍变形的中岛簇的乘积，
- π_X 是真且泛有限的，
- $\widetilde{\tau}$ 是到仿射空间 $\mathcal{H}$ 的光滑态射，使得对于任意 $h \in \mathcal{H}$，纤维 $\widetilde{\tau}^{-1}(h)$ 都同构于一个中岛箭图簇，
- Γ 是对称群的乘积，即 $\Gamma \cong \prod_i \mathfrak{S}_{n_i}$，它自然地作用于 $\mathcal{H} \cong \prod_i \mathbb{C}^{n_i}$，而 p 是商映射（特别地，$\mathcal{H}/\Gamma \cong \prod_i S^{n_i}\mathbb{C}$ 是仿射空间），

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 14D20、16G20，次要分类 17B37。*Key words and phrases.* 对称箭图簇、临界稳定包络、双曲限制、三角形引理。

- τ 是一个平坦态射，使得对于任意 $h \in \mathcal{H}$，纤维 $\tau^{-1}(p(h))$ 是具有辛奇异性的不可约正规簇，并且 $\pi_X\colon \widetilde{\tau}^{-1}(h) \to \tau^{-1}(p(h))$ 是一个辛消解。

（2）存在一个 Γ-不变的仿射开子集 $\mathcal{H}^\circ \subset \mathcal{H}$（并记 $\widetilde{X}^\circ := \widetilde{\tau}^{-1}(\mathcal{H}^\circ)$ $X^\circ := \tau^{-1}(\mathcal{H}^\circ/\Gamma)$），使得 $\tau\colon X^\circ \to \mathcal{H}^\circ/\Gamma$ 是光滑且仿射的，并且以下诱导交换图是笛卡尔的。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}^\circ & \xrightarrow{\widetilde{\tau}} & \mathcal{H}^\circ \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & \square & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X^\circ & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{H}^\circ/\Gamma \end{array}$$

（3）仿射化 $\operatorname{Spec}\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 同构于 $\mathcal{M}_0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})$，且仿射化态射 $X \to \mathcal{M}_0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})$ 是真且双有理的。此外，$X \times_{\mathcal{M}_0(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})} X$ 的所有不可约分支，除对角线 Δ_X 外，其维数都严格小于 $\dim X$。

在 §2 中，我们回顾对称箭图簇及其风味群作用的定义。上述定理的证明见 §3。我们指出，定理 1.1 有许多应用；例如，在研究 [COZZ2] 中所研究的带势对称箭图簇上通过除子进行量子乘法的计算中，它是不可或缺的。它还可用于证明以下存在性结果[1]。

定理 1.2。(定理 4.3，注 4.2) 设 X 是一个带有环面 T-作用的对称箭图簇，$\mathsf{A} \subseteq \mathsf{T}$ 是一个自对偶子环面，$\mathfrak{C}$ 是 A-作用的一个室。对于任意 A-不动点轨迹 F，令 $\operatorname{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)$ 表示 $X \times F$ 中对角线 $\Delta_F \subset F \times F$ 的吸引集的闭包。那么 $\sum_{F \in \operatorname{Fix}_{\mathsf{A}}(X)} [\operatorname{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]$ 是一个稳定包络对应。特别地，对于任意 T-不变势函数 w，我们有诱导的临界稳定包络：

$$\operatorname{Stab}_{\mathfrak{C}}\colon H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X, \mathsf{w}).$$

受 Nakajima [Nak4]，的工作启发，我们通过对称箭图簇的仿射化 §5.2、§5.3 上的 Braden双曲限制函子 (5.2)，给出临界稳定包络的层论诠释。由双曲限制函子的结合律（命题 5.5），可推出临界稳定包络的三角引理，即：

定理 1.3. (定理 5.7) 设 $\mathfrak{C}'$ 是 $\mathfrak{C}$ 的一个面，且 $\mathsf{A}' \subset \mathsf{A}$ 是李代数由 $\mathfrak{C}'$张成的子环面。那么下图

$$\begin{array}{ccc} H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w}) & \xrightarrow{\operatorname{Stab}_{\mathfrak{C}}} & H^{\mathsf{T}}(X, \mathsf{w}), \\ & {\scriptstyle \text{稳定子}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \text{稳定子}_{\mathfrak{C}'}} & \\ & H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}'}, \mathsf{w}) & \end{array}$$

是可交换的。

致谢。 A.O.感谢 SIMIS 的热情款待。感谢 Kavli IPMU 让我们相聚。

2. Definitions of symmetric quiver varieties

一个箭图 Q 是两个有限集 $Q = (Q_0, Q_1)$ 以及两个映射 $h, t\colon Q_1 \to Q_0$组成的对象。我们将 Q_0 称为节点集，将 Q_1 称为箭集，而 h（分别地，t）将一条箭映射到其箭头（分别为箭尾）。如果 $a \in Q_1$，那么我们记作$t(a) \to h(a)$来表示箭 a。我们定义邻接矩阵

$$(\mathsf{Q}_{ij})_{i,j\in Q_0} = \#(i \to j)$$

和卡当矩阵

$$(\mathsf{C}_{ij})_{i,j\in Q_0} = 2\delta_{ij} - \mathsf{Q}_{ij} - \mathsf{Q}_{ji}.$$

取维数向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^{Q_0}$、$\mathbf{d} = (\mathbf{d}_{\text{in}}、\underline{\mathbf{d}}_{\text{out}}) \in \mathbb{N}^{Q_0} \times \mathbb{N}^{Q_0}$，具有 Q 的带框表示空间，其规范维数为$\mathbf{v}$，入射框架维数为$\mathbf{d}_{\text{in}}$，出射框架维数为$\mathbf{d}_{\text{out}}$，为

$$R(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}) := R(Q, \mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}}) = \bigoplus_{a\in Q_1} \underbrace{\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{t(a)}}, \mathbb{C}^{\mathbf{v}_{h(a)}})}_{X} \oplus \bigoplus_{i\in Q_0} \left(\underbrace{\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\text{in},i}}, \mathbb{C}^{\mathbf{v}_i})}_{A_i} \oplus \underbrace{\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i}, \mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\text{out},i}})}_{B_i} \right). \tag{2.1}$$

该加 $uge\,group$ $G = \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{v}_i)$ 通过与映射复合，自然地作用于 $R(Q, \mathbf{v}, \underline{\mathbf{d}})$。

[1]另一种采用不同思路的证明见 [COZZ1]。

选择一个稳定性条件 $\theta \in \mathbb{Q}^{Q_0}$，使得 θ-半稳定表示是 θ-稳定的：

$$R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})^{ss} = R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})^{s} \neq \emptyset,$$

并将箭图簇定义为以下几何不变理论商：

$$\mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}) := \mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}) := R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})/\!\!/_\theta G = R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})^s/G.$$

由于我们没有对箭图施加任何关系，上述空间是一个光滑拟射影簇。我们定义一个作用

$$G_{\mathrm{edge}} := \prod_{i,j\in Q_0} \mathrm{GL}(\mathsf{Q}_{ij}) \tag{2.2}$$

在 $R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}})$ 上：给定一对节点 $i,\ j \in Q_0$，从 i 到 j 的边所对应的部分为 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i},\ \mathbb{C}^{\mathbf{v}_j}) \otimes \mathbb{C}^{\mathsf{Q}_{ij}}$，那么因子 $\mathrm{GL}(\mathsf{Q}_{ij})$ 自然地作用在第二个分量上。

我们还考虑以下在 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的群作用：

$$G^{\mathrm{in}}_{\mathrm{fram}} = \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}) \curvearrowright \bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{in},i}},\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i}),\quad G^{\mathrm{out}}_{\mathrm{fram}} = \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}) \curvearrowright \bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_i},\mathbb{C}^{\mathbf{d}_{\mathrm{out},i}}). \tag{2.3}$$

我们定义味群

$$\mathsf{F} := G^{\mathrm{in}}_{\mathrm{fram}} \times G^{\mathrm{out}}_{\mathrm{fram}} \times G_{\mathrm{edge}}. \tag{2.4}$$

容易看出 $\mathsf{F} \cong \mathrm{Aut}_G(R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}))$。

定义 2.1。若框架 $\mathbf{d}$ 满足对称条件，则称其为对称的，即 $\mathbf{d}_{\mathrm{in}} = \mathbf{d}_{\mathrm{out}} = \mathbf{d}$。此时，我们将记号简化为

$$R(\mathbf{v},\mathbf{d}) = R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) = R(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}),\quad \mathcal{M}_\theta(\mathbf{v},\mathbf{d}) = \mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) = \mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\underline{\mathbf{d}}), \tag{2.5}$$

并将 G^{diag} 框架 $\subseteq \mathsf{F}$ 定义为 $G^{\mathrm{in}}_{\mathrm{fram}} \times G^{\mathrm{out}}_{\mathrm{fram}}$ 的对角子群。

定义 2.2。若 Q 的邻接矩阵 $(\mathsf{Q}_{ij})_{i,\ j\in Q_0}$ 是对称的，则称 Q 为对称的。对于对称箭图 Q，若框架是对称的，则称其对应的箭图簇对称箭图簇（SQV）。

定义 2.3。设 $(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是如上所述具有对称框架的对称箭图。假设存在环面 H，以及 H 在 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的线性作用。若环面 H 在 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的线性作用与规范群 G 的作用可交换，且 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是自对偶的 $(G\times\mathsf{H})$-表示，则称该线性作用为自对偶。

我们称对称箭图簇 $\mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的环面作用 H 为自对偶的，如果它是由 H 在 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的自对偶作用诱导的。

下面的引理是初等的，证明留给感兴趣的读者。

引理 2.4。设 $(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是一个具有上述对称框架的对称箭图。假设存在一个环面 H，以及它在 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 上的自对偶作用。那么，箭的集合 $Q_1 = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}^* \sqcup \mathcal{E}$ 存在一种分解，满足以下性质

(1) $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$之间存在一一对应，将箭 $a \in \mathcal{A}$ 映射为方向相反的箭 $a^* \in \mathcal{A}^*$，即 $t(a) = h(a^*)$ 且 $h(a) = t(a^*)$；(2) $\mathcal{E}$ 是边环的集合，即对所有 $\varepsilon \in \mathcal{E}$，$t(\varepsilon) = h(\varepsilon)$；(3) 考虑环面 $(\mathbb{C}^*)^{\mathcal{A}}$，它将 $(X_a,\ X_{a^*})_{a\in\mathcal{A}}$ 映射到 $(t_a X_a,\ t_a^{-1}X_{a^*})_{a\in\mathcal{A}}$，并在 $(X_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ 和 $(A_i,\ B_i)_{i\in Q_0}$ 上平凡作用；那么存在一个极大环面 $T_{\mathrm{fram}} \subseteq G^{\mathrm{diag}}$ 框架 以及一个元素 $g \in G_{\mathrm{edge}}$，使得 H-作用经由子群 $T_{\mathrm{fram}} \times g(\mathbb{C}^*)^{\mathcal{A}} g^{-1} \subseteq \mathsf{F}$ 分解。

对称箭图簇的 A-不动点集是对称箭图簇。

引理 2.5。[COZZ1，引理 A。7] 设 $X = \mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 是一个对称箭图簇，且 A 是在 X 上具有自对偶作用的环面。设 σ 是 A 的一个余特征，则 σ-不动点集 X^σ 是不交并的对称箭图簇。此外，A 在 X^σ 上诱导的作用是自对偶的。

3. Proof of Theorem 1.1

定理 1.1 的证明。</style}本节给出该定理的证明，具体如下：

(1) 结合命题 3.13、命题 3.16 和注 3.17 即得。(2) 由引理 3.14 和引理 3.15 得出。(3) 由引理 3.19 和命题 3.20 得出。

□

3.1. **光滑辛簇族**。

设定 3.1。 设 X 是一个带有环面 A-作用的光滑拟射影簇，且设 σ 是 A 的一个余特征。假设存在一个 A-不变二形式 $\omega \in \Omega^2(X)$，以及一个赋予平凡 A-作用的光滑连通簇 B，和一个光滑的 A-等变态射

$$\phi\colon X \to B,$$

使得 $\forall\, b \in B$， ω 在 $X_b := \phi^{-1}(b)$ 上的限制是非退化的，即 $\omega|_{X_b}$ 是一个辛结构。

满足条件的例子3.1来自等变辛解消 [MO, §3.7],的普适变形，例如下文回顾的中岛箭图簇的变形。

例 3.2。 考虑一个箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$。取 $\mathbf{v}, \mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，则 gauge dimension 为$\mathbf{v}$ 、入射框架维数为$\mathbf{d}$ 的 Q 带框表示空间为

$$M := R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}, \mathbf{0}) = \bigoplus_{a \in Q_1} \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{t(a)}}, \mathbb{C}^{\mathbf{v}_{h(a)}})}_{X_a} \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_i}, \mathbb{C}^{\mathbf{v}_i})}_{A_i}.$$

规范群 $G = \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{v}_i)$ 通过与映射复合，自然地作用于 M。这诱导出一个作用于余切丛 T^*M 上的哈密顿G作用，其矩映射为 $\mu\colon T^*M \to \mathfrak{g}^*$，其中 $\mathfrak{g}$ 是 G的李代数。定义线性子空间 $\mathfrak{Z} := (\mathfrak{g}^*)^G \subseteq \mathfrak{g}^*$。注意到

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^* \cong \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}_i.$$

固定一个稳定性条件 $\theta \in \mathbb{Q}^{Q_0}$，我们将普适变形Nakajima箭图簇 定义为以下几何不变理论商：

$$\widetilde{\mathcal{N}}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) := \mu^{-1}(\mathfrak{Z}) /\!\!/_\theta G. \tag{3.1}$$

~我们假设 θ 是一般的，使得 θ-半稳定表示是 θ-稳定的。假设 $\mathcal{N}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 非空，则根据 MO，命题 2.2.2], $\overline{\mu}$ 的像包含 $\mathfrak{Z}$。令 $\mu^{-1}(\mathfrak{Z})^s$ 为 θ-稳定轨迹，则 μ 在 $\mu^{-1}(\mathfrak{Z})^s$ 处光滑，并且根据 Gin，引理 4.1.7]， G 在 $\mu^{-1}(\mathfrak{Z})^s$ 上自由作用。

考虑态射

$$\phi\colon \widetilde{\mathcal{N}}_\theta(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathfrak{Z},$$

由 $\mu|_{\mu^{-1}(\mathfrak{Z})^s}\colon\ \mu^{-1}(\mathfrak{Z})^s \to \mathfrak{Z}$ 诱导。则 ϕ 光滑、满射且

$$\phi^{-1}(\lambda) \cong \mathcal{N}_{\theta,\lambda}(\overline{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) := \mu^{-1}(\lambda) /\!\!/_\theta G$$

对任意 $\lambda \in \mathfrak{Z}$。定义开子集

$$\mathfrak{Z}^\circ := \mathfrak{Z} \setminus \bigcup_{\mathbf{u}} H_{\mathbf{u}}, \tag{3.2}$$

其中 $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ 且 $\mathbf{u}_i \leqslant \mathbf{v}_i$ 对所有 $i \in Q_0$ 均成立，并且 $\mathbf{u} \neq 0$，且

$$H_{\mathbf{u}} = \{\lambda \in \mathfrak{Z}\colon \sum_{i \in Q_0} \lambda_i \mathbf{u}_i = 0\}.$$

$\mathfrak{Z}^\circ$ 是超平面的并集的补集，因此非空。根据 [CB 定理 1.3], ，$\mu^{-1}(\mathfrak{Z}^\circ)$ 中的每个元素都是简单箭图表示，因此对于任意 $\theta \in \mathbb{Q}^{Q_0}$，$\mu^{-1}(\mathfrak{Z}^\circ)$ 中的每个元素都是 θ-稳定的。因此， $\phi^{-1}(\mathfrak{Z}^\circ) \cong \mu^{-1}(\mathfrak{Z}^\circ) /\!\!/ G$ 是一个仿射簇，故 $\phi|_{\phi^{-1}(\mathfrak{Z}^\circ)}$ 是一个仿射态射。

令 $(\mathbb{C}^*)^{Q_1}$ 为作用于 R 的环面，其作用为

$$t_a \cdot (X_a, A_i) = (t_a X_a, A_i).$$

定义 $G_{\mathrm{fram}} = \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{d}_i)$，它自然地作用于框架向量空间 $W = \bigoplus_{i \in Q_0} \mathbb{C}^{\mathbf{d}_i}$。于是，$(G_{\mathrm{fram}} \times (\mathbb{C}^*)^{Q_1})$ 在 M 上的作用诱导出 $(G_{\mathrm{fram}} \times (\mathbb{C}^*)^{Q_1})$ 在 T^*M 上的自然作用，并且该作用保持辛结构。此外，矩映射 $\mu\colon T^*M \to \mathfrak{g}^*$ 是 $\big(G_{\mathrm{fram}} \times (\mathbb{C}^*)^{Q_1}\big)$-不变的。记 $T_{\mathrm{fram}} \subseteq G_{\mathrm{fram}}$ 为一个极大环面，并定义

$$\mathsf{A} = T_{\mathrm{fram}} \times (\mathbb{C}^*)^{Q_1}.$$

众所周知， ω_{T^*M} 在 T^*M [上存在一个（$G \times \mathsf{A}$）-不变辛形式CB，第§1]节。于是， ω_{T^*M} 诱导出 $\mathcal{N}_\theta(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$上的一个二-~形式 ω，按构造它是A-不变的。将 ω 限制到每个纤维 $\mathcal{N}_{\theta,\ \lambda}(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$上所得的形式是非退化的 [Gin，引理4.1。7]。

总之， $\widetilde{\mathcal{N}}_\theta(Q、\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$、$\mathsf{A} = T_{\mathrm{fram}} \times (\mathbb{C}^*)^{Q_1}$, $B = \mathfrak{Z}$ 和 $B^\circ = \mathfrak{Z}^\circ$ 满足设定 3。 1.

引理 3.3。 在设定 3.1 中，假设存在一个开稠密子集 $B^\circ \subseteq B$，使得 $\phi|_{X^\circ}\colon\ X^\circ \to B^\circ$ 是一个仿射态射，其中 $X^\circ := \phi^{-1}(B^\circ)$。那么 $\phi|_{X^\sigma}\colon X^\sigma \to B$ 是光滑的，并且对于任意 $b \in B$， ω 到 $X_b^\sigma := (\phi|_{X^\sigma})^{-1}(b)$ 的限制是非退化的，且 $\phi|_{X^\sigma}\colon X^\sigma \cap X^\circ \to B^\circ$ 是仿射的。

证明。 对于每个 $x \in X^\sigma$，切映射 $d\phi_x\colon\ T_xX \to T_{\phi(x)}B$ 是满射，这是因为根据假设， $\phi\colon\ X \to B$ 是光滑的。由于 ϕ 是 σ- 等变的， $d\phi_x$ 也具有 σ- 等变性。因此， $d\phi_x$ 将 $T_xX^\sigma = (T_xX)^\sigma$ 满射地映到 $T_{\phi(x)}B$；由此， ϕ 到 σ- 不动点轨迹 $\phi|_{X^\sigma}\colon\ X^\sigma \to B$ 的限制也光滑。由于 $X^\sigma \cap X^\circ$ 是 X° 的闭子簇，映射 $\phi|_{X^\sigma}\colon\ X^\sigma \cap X^\circ \to B^\circ$ 是仿射的。□

3.2. **对称箭图簇的 Grothendieck-Springer 型解消**。 在本节中，我们取 Q 为对称箭图，并取 $\mathbf{v},\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，使得对所有 $i \in Q_0$ 都有 $\mathbf{v}_i \neq 0$ （否则，我们删去任何满足 $\mathbf{v}_i = 0$ 的节点i），并且 $\mathbf{d} \neq 0$。如定义 2.2 所示，我们有对称框架表示空间$R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$，其带有线性 $G = \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{v}_i)$ 作用，以及箭图簇

$$X := \mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) = R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})/\!\!/_\theta G.$$

我们固定一个分解 $\mathrm{p}_{位置}$的箭的集合 $Q_1 = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}^* \sqcup \mathcal{E}$，然后取 $\mathsf{A} = T_{\mathrm{fram}} \times (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{A}}$，如引理 2.4 中所述 .

让我们以一种类似于中岛箭图簇构造的方式重写表示空间 $R(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$。考虑以下两个新的箭图

(1) Q^{add} 通过向每个节点添加一个环得到，因此 $Q_0^{\mathrm{add}} = Q_0$, $Q_1^{\mathrm{add}} = Q_1 \sqcup Q_0$;

(2) Q^{rem} 通过从集合 $\mathcal{E}$ 中移除所有环而得到，其中每个节点对应于 Q，因此 $Q_0^{\mathrm{rem}} = Q_0$, $Q_1^{\mathrm{rem}} = Q_1 \setminus \mathcal{E}$。我们将箭的集合 $Q_1^{\mathrm{add}} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{A}^* \sqcup \mathcal{E}^{\mathrm{add}}$分解为，其中 $\mathcal{E}^{\mathrm{add}} := \mathcal{E} \sqcup Q_0$ 是原始环的集合$\mathcal{E}$ 与所有新添加的环的并。于是表示空间为

$$R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) = R(Q^{\mathrm{rem}},\mathbf{v},\mathbf{d}) \oplus \bigoplus_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}} \mathfrak{gl}(\mathbf{v}_{h(\varepsilon)})^*. \tag{3.3}$$

注意， $R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d}) \cong T^*M$ 其中

$$M = \bigoplus_{a\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{t(a)}}, \mathbb{C}^{\mathbf{v}_{h(a)}}) \oplus \bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{\mathbf{d}_i}, \mathbb{C}^{\mathbf{v}_i}).$$

特别地， $R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 带有自然的余切丛辛结构。注意， $\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)^*$带有基里洛夫–科斯坦特–苏里奥泊松结构。因此， $R(Q^{\mathrm{add}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 带有自然的泊松结构，该结构定义为各直和项上泊松结构的直和。

群 $(G \times \mathsf{A})$ 通过与映射复合，自然地作用于 $R(Q^{\mathrm{add}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 和 $R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$。于是，$G$-作用在 $R(Q^{\mathrm{add}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上是哈密顿的，其矩映射为

$$\mu^{\mathrm{add}}\colon R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) \to \mathfrak{g}^*, \quad \mu^{\mathrm{add}} = (\mu^{\mathrm{rem}}, \mathrm{pr}),$$

其中 $\mu^{\mathrm{rem}}\colon\ R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d}) \to \mathfrak{g}^*$ 是 $R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 的矩映射，而 pr 将每个 $\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)^*$ 恒等地映射到其自身。

引理 3.4. 存在 $(G \times \mathsf{A})$-等变同构 $R(Q,\ \mathbf{v},\ \mathbf{d}) \cong (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)$。

证明。通过写出

$$R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) = R(Q^{\mathrm{rem}},\mathbf{v},\mathbf{d}) \oplus \bigoplus_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \mathfrak{gl}(\mathbf{v}_{h(\varepsilon)})^*,$$

$R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 配备了自然的泊松结构，且 $(G \times \mathsf{A})$-作用是哈密顿的，其矩映射为$\mu\colon\ R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) \to \mathfrak{g}^*$。那么，相对于分解

$$R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) = R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) \oplus \bigoplus_{i\in Q_0} \mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)^* = R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) \oplus \mathfrak{g}^*,$$

$$\mu^{\mathrm{add}}(x,y) = \mu(x) + y.$$

方程 $\mu^{\mathrm{add}} = 0$ 消去了 $R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})$ 中的 $\mathfrak{g}^*$ 分量，留下 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$，即 $R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) \cong (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)$。这个同构显然是 $(G \times \mathsf{A})$-等变的。□

设 L 是一个复约化群，并固定一个博雷尔子群 B 及其极大环面 $H \subseteq B$。令 L 的韦伊群为 W。记相应的李代数为 $\mathfrak{l} := \mathrm{Lie}(L)$ $\mathfrak{b} := \mathrm{Lie}(B)$ $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$。我们有如下交换图（[CG, (3.2.6)]）：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathfrak{l}}^* := L \times^B \mathfrak{b}^* & \xrightarrow{\nu_{\mathfrak{l}}} & \mathfrak{h}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{l}}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathfrak{l}}} \\ \mathfrak{l}^* & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{l}}} & \mathfrak{h}^*/W \cong \mathfrak{l}^*/L. \end{array} \tag{3.4}$$

这里 $p_{\mathfrak{l}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{l}}$ 是商映射，而 $\pi_{\mathfrak{l}}$ 将 $(g,\ b) \in L\times^B \mathfrak{b}^*$ 映射到 $g\cdot b\in \mathfrak{l}^*$，$\nu_{\mathfrak{l}}$ 则将 $(g,\ b)\in L\times^B \mathfrak{b}^*$ 映射到 $b|_{\mathfrak{h}}\in \mathfrak{h}^*$。注意，$\pi_{\mathfrak{l}}$ 关于自然的 L-作用是等变的。

定理 3.5 ([Slo, §II 4.7]). 在上述交换图中

(1) $\nu_{\mathfrak{l}}$ 是光滑态射；(2) $p_{\mathfrak{l}}$ 是有限且满射态射；(3) $\pi_{\mathfrak{l}}$ 是真且满射态射；(4) $\rho_{\mathfrak{l}}$ 是平坦态射；(5) $\forall\, t\in\mathfrak{h}^*$，诱导态射 $\nu_{\mathfrak{l}}^{-1}(t)\to\rho_{\mathfrak{l}}^{-1}(p_{\mathfrak{l}}(t))$ 是奇点消解。

在上文中，$\pi_{\mathfrak{l}}\colon \mathfrak{l}^*\to\mathfrak{l}^*$ 称为 $\mathfrak{l}^*$ 的*Grothendieck-Springer* 消解。我们将此消解应用于 $R(Q^{\mathrm{add}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 中的每个 $\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_i)^*$ 因子，即定义

$$\widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) = R(Q^{\mathrm{rem}},\mathbf{v},\mathbf{d})\times \prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}} \widetilde{\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_{h(\varepsilon)})}^{\,*}. \tag{3.5}$$

于是我们得到一个 $(G\times \mathsf{A})$-等变、真、满射且泛有限的态射

$$\pi_R\colon \widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})\to R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}).$$

因此，诱导得到的商空间之间的态射：

$$\pi_X\colon \widetilde{X} := \pi_R^{-1}\left(\left((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)\right)^s\right)/\!\!/G\to \left((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)\right)^s/\!\!/G\cong \mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) = X$$

是一个 A-等变、真且满射的态射。

此外，$\pi_X\colon \widetilde{X}\to X$ 适合以下由 A-等变态射构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\ \widetilde{\tau}\ } & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\ \tau\ } & \mathcal{H}/\Gamma\,. \end{array} \tag{3.6}$$

这里，$\mathcal{H}=\prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{h(\varepsilon)}}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathbf{v}^{h(\varepsilon)})$ 的卡当子代数的对偶空间的直和，$\Gamma=\prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mathfrak{S}_{\mathbf{v}_{h(\varepsilon)}}$ 是韦伊群的乘积，p: $\mathcal{H}\to\mathcal{H}/\Gamma$ 是商映射，$\widetilde{\tau}$ 和 τ 由下图中的水平映射的复合诱导而来

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) & \longrightarrow & \prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\widetilde{\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_{h(\varepsilon)})}^{\,*} & \xrightarrow{\ \nu\ } & \prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{h(\varepsilon)}} \\ {\scriptstyle \pi_R}\downarrow & \square & {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) & \longrightarrow & \prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mathfrak{gl}(\mathbf{v}_{h(\varepsilon)})^* & \xrightarrow{\ \rho\ } & \prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mathbb{C}^{\mathbf{v}_{h(\varepsilon)}}/\mathfrak{S}_{\mathbf{v}_{h(\varepsilon)}}\,, \end{array} \tag{3.7}$$

其中左侧方块是笛卡尔的，且其中的水平映射是到各分量的投影；右侧方块则是关于 $\mathfrak{l}=\bigoplus_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mathfrak{gl}(\mathbf{v}^{h(\varepsilon)})$ 的图表 (3.4)。

我们的下一个目标是证明 $\widetilde{\tau}\colon\ X\to\mathcal{H}$ 满足设定 3.1 中的条件，方法是将 X 与一个普适变形的中岛箭图簇联系起来，见命题 3.13。特别地，这将说明 X 是光滑的，而从其定义并不能显然看出这一点。

3.3. 一个辅助箭图。 我们通过以下步骤构造一个新的箭图 Q^{aux} 及新的维数向量$\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}}$，它们由（$Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}$）得到。对于每个环 $\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}$，并令 $n=\mathbf{v}^{h(\varepsilon)}$，我们将 ε 替换为一个加倍的 A_{n-1} 箭图：

$$\text{(n)}\circlearrowright\varepsilon \quad\rightsquigarrow\quad \text{(n)}\rightleftarrows\text{(n-1)}\rightleftarrows\cdots\rightleftarrows\text{(1)}\,. \tag{3.8}$$

$\mathbf{v}^{\mathrm{aux}}$ 由上述替换确定，我们定义$\mathbf{d}^{\mathrm{aux}}$ 为原节点 Q^{add} 上的$\mathbf{d}$ ，并将其延拓到新添加的节点上，取值为零。注意到

$$R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}}) = R(Q^{\mathrm{rem}},\mathbf{v},\mathbf{d})\oplus T^*M^{\mathrm{leg}}, \tag{3.9}$$

其中，M^{leg} 是对应于（3.8）右侧中指向左方的箭的线性映射空间；特别地，$R(Q^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 是一个辛向量空间。事实上，Q^{aux} 是箭图 Q' 的双重化 Q' 。

我们将 $R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上的 A-作用延拓到 $R(Q^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$，并要求 A 在 T^*M^{leg} 上平凡作用。$(Q^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 的规范群为 $G^{\mathrm{aux}}=\prod_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}}\mathrm{GL}(\mathbf{v}_i^{\mathrm{aux}})$，其李代数记为 $\mathfrak{g}^{\mathrm{aux}}$。$R(Q^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\ \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 上的自然G^{aux}-作用是哈密顿的，其矩映射为

$$\mu^{\mathrm{aux}}\colon R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}})\to(\mathfrak{g}^{\mathrm{aux}})^*.$$

注意，$\mathfrak{g}^{\mathrm{aux}}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^{\mathrm{leg}}$，其中 $\mathfrak{g}^{\mathrm{leg}}$ 是与新添加节点对应的规范群的李代数 es:

$$G^{\mathrm{leg}}=\prod_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\mathrm{GL}(\mathbf{v}_i^{\mathrm{aux}}).$$

于是我们可以将 μ^{aux} 写成分量形式 $\mu^{\mathrm{aux}}=(\mu^{\mathrm{aux}}_{\mathrm{res}},\ \mu^{\mathrm{leg}})$，其中

$$\mu^{\mathrm{aux}}_{\mathrm{res}}\colon R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}})\to\mathfrak{g}^*,\quad \mu^{\mathrm{leg}}\colon R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}})\to(\mathfrak{g}^{\mathrm{leg}})^*$$

是相应的分量。

定义线性子空间

$$\mathfrak{Z}:=(\mathfrak{g}^*)^G\subseteq\mathfrak{g}^*,\quad \mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}}:=((\mathfrak{g}^{\mathrm{leg}})^*)^G\subseteq(\mathfrak{g}^{\mathrm{leg}})^*,\quad \mathfrak{Z}^{\mathrm{aux}}:=\mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}}\subseteq(\mathfrak{g}^{\mathrm{aux}})^*.$$

我们注意到 $\mathfrak{Z}\cong\bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{C}\cdot\mathrm{Id}_i$ 和 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}}\cong\bigoplus_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\mathbb{C}\cdot\mathrm{Id}_i$。

定义 3.6. 我们定义一个态射

$$\mathfrak{p}\colon R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}})\times\mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\to R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) \tag{3.10}$$

如下。根据分解 (3.3) 和 (3.9)，令 $\mathfrak{p}$ 为分量 $R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$ 上的恒等映射；对于每个环 $\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}$，令 $\mathfrak{p}$ 按如下方式映射相应的 A_{n-1} 腿：

$$\left(\text{n}\ \underset{C^{\varepsilon}_{n-1}}{\overset{D^{\varepsilon}_{n-1}}{\rightleftarrows}}\ \text{n-1}\ \underset{C^{\varepsilon}_{n-2}}{\overset{D^{\varepsilon}_{n-2}}{\rightleftarrows}}\cdots\underset{C^{\varepsilon}_{1}}{\overset{D^{\varepsilon}_{1}}{\rightleftarrows}}\ 1\ ,\ t_\varepsilon\in\mathbb{C}\right)\ \longmapsto\ \text{n}\circlearrowright X_\varepsilon:=C^{\varepsilon}_{n-1}D^{\varepsilon}_{n-1}+t_\varepsilon\cdot\mathrm{id}\ . \tag{3.11}$$

我们还定义

$$\overline{\mathfrak{p}}:(\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})\times\mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\to R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) \tag{3.12}$$

为 $\mathfrak{p}$ 在子簇 $(\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})\times\mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}$上的限制。

我们注意到 $\mathfrak{p}$ 是 $(G^{\mathrm{aux}}\times\mathrm{A})$-等变的，其中 $(G^{\mathrm{aux}}\times\mathrm{A})$ 通过投影到 $G\times\mathrm{A}$ 上作用于 $R(Q^{\mathrm{add}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})$。

引理 3.7. 存在一个 $(G^{\mathrm{aux}}\times\mathrm{A})$-等变同构

$$\mathfrak{p}^{-1}((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0))\cong(\mu^{\mathrm{aux}}_{\mathrm{res}})^{-1}(\mathfrak{Z})\times\mathcal{L},$$

其中

$$\mathcal{L}:=\ker\left(\mathrm{sum}\colon\mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\to\mathfrak{Z}\right) \tag{3.13}$$

是 $\mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}$ 的 Q_0-分次线性子空间，定义为以下满射的核：

$$\mathrm{sum}\colon\mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\to\mathfrak{Z},\quad (t_\varepsilon)_{\epsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mapsto\left(\sum_{h(\varepsilon)=i}t_\varepsilon\right)_{i\in Q_0}.$$

证明。固定一个节点 $i\in Q_0$，则方程 $\mu_i^{\mathrm{add}}\circ\mathfrak{p}=0$ 等价于

$$\mu_i^{\mathrm{rem}}+\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}},h(\varepsilon)=i}(C^{\varepsilon}_{n-1}D^{\varepsilon}_{n-1}+t_\epsilon\cdot\mathrm{id})=0.$$

注意到

$$\mu^{\mathrm{aux}}_{\mathrm{res},i}=\mu_i^{\mathrm{rem}}+\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}},h(\varepsilon)=i}C^{\varepsilon}_{n-1}D^{\varepsilon}_{n-1},$$

因此，方程 $\mu_i^{\mathrm{add}}\circ\mathfrak{p}=0$ 可改写为

$$\mu^{\mathrm{aux}}_{\mathrm{res},i}+\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}},h(\varepsilon)=i}t_\epsilon\cdot\mathrm{id}=0,$$

于是引理得证。 □

定义 3.8。 如果表示 $x \in R(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 满足（3.8）右侧所有对应于向左箭头的线性映射都是单射，则称其为腿稳定 表示。所有腿稳定表示构成的子集记为 $R(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})^{\text{leg-}s}$.[2]

引入腿稳定性条件的动机是为了陈述引理 3.9。考虑箭图

$$Q^n: \qquad \boxed{n} \underset{C_{n-1}}{\overset{D_{n-1}}{\rightleftarrows}} \text{(n-1)} \underset{C_{n-2}}{\overset{D_{n-2}}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{C_1}{\overset{D_1}{\rightleftarrows}} \text{(1)},$$

其中规范与框架维数向量分别为 $\mathbf{v}^n$ （其中 $\mathbf{v}_i^n = n - i$），以及 $\mathbf{d}^n$ （其中 $\mathbf{d}_i^n = n \cdot \delta_{i,1}$）。在下文的讨论中，对于每个节点 i，我们均取稳定性条件 ζ 为 $\zeta_i = 1$。将上述箭图的矩映射记为 μ^n，并将箭图 Q^n 的空间 $\mathfrak{Z}$ 记为 $\mathfrak{Z}^n$。那么， μ^n （$\mathfrak{Z}^n$）中的一个点是 Q^n-表示，且其为 ζ-半稳定（等价地， ζ-稳定）的，当且仅当对所有 $1 \leqslant i \leqslant n-1$， C_i 都是单射。

考虑例 3.2 中的态射:

$$\phi\colon \widetilde{\mathcal{N}}_\zeta(Q^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{d}^n) \to \mathfrak{Z}^n,$$

其中 $\widetilde{\mathcal{N}}_\zeta$ （$Q^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{d}^n$）是普遍变形的中岛簇 (3.1)。对于 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathfrak{Z}^n$， ϕ^{-1}（λ）是模空间

$$\left\{ (\mathbb{C}^n = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{n-1} \supset V_n = 0),\, X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \;\middle|\; \begin{array}{c} V_i \text{ is a dim } n-i \text{ linear subspace, and } X(V_0) \subseteq V_1, \text{ and} \\ \text{for } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\, X(V_i) \subseteq V_i \text{ and } \overline{X}_i\colon V_i/V_{i+1} \to V_i/V_{i+1} \\ \text{equals to } \sum_{j=1}^{i} \lambda_j \cdot \mathrm{id} \end{array} \right\}.$$

引理 3.9. 设 $\nu\colon \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{h}^*$ 是 Grothendieck-Springer 消解 (3.4) 中对应于 $L = \mathrm{GL}(n)$ 的态射。则存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathfrak{gl}(n)}^* & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{h}^* \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \widetilde{\mathcal{N}}_\zeta(Q^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{d}^n) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\phi \times \mathrm{id}} & \mathfrak{Z}^n \times \mathbb{C}, \end{array}$$

其中竖直箭头均为同构。

证明. 记 $\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}^n$。我们注意到 $\nu^{-1}(r_1, \cdots, r_n)$ 是以下对象的模空间

$$\left\{ (\mathbb{C}^n = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{n-1} \supset V_n = 0), M \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \;\middle|\; \begin{array}{c} V_i \text{ is a dim } n-i \text{ linear subspace, and for } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ M(V_i) \subseteq V_i \text{ and } \overline{M}_i\colon V_i/V_{i+1} \to V_i/V_{i+1} \text{ equals to } r_{i+1} \cdot \mathrm{id} \end{array} \right\}.$$

我们定义一个线性同构

$$\mathfrak{Z}^n \times \mathbb{C} \cong \mathfrak{h}^*$$

$$((\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}), t) \mapsto (r_1, \cdots, r_n), \quad \text{where } r_i = t + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j.$$

那么所需的同构定义如下:

$$\widetilde{\mathcal{N}}_\zeta(Q^n, \mathbf{v}^n, \mathbf{d}^n) \times \mathbb{C} \cong \widetilde{\mathfrak{gl}(n)}^*, \quad (\{(V_i, X)\}, t) \mapsto \{(V_i, X + t \cdot \mathrm{id})\}. \qquad \square$$

对箭图 Q^{aux}中的每条支应用引理 3.9，便得到如下结果。

引理 3.10。 设 $\nu\colon \widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathcal{H}$ 为图（3.7）中顶部水平箭的复合。则存在一个（$G \times \mathbf{A}$）-等变态射的交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) & \xrightarrow{\overline{\nu}} & \mathcal{H} \\ & \swarrow^{\pi_R} & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ R(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) & & & & \\ & \nwarrow_{\mathfrak{p}'} & & & \\ & & \left((\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\text{leg-}s} /\!\!/ G^{\mathrm{leg}}\right) \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}} & \xrightarrow{\phi \times \mathrm{id}} & \mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}} \end{array},$$

带有垂直 cal 箭均为同构。这里， $\mathfrak{p}'$ 是通过对$\mathfrak{p}$ 取 G^{leg} 商诱导得到的。

[2]它是 $R(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 的 Zariski开子集。

定义 3.11. 对于一个稳定性条件 $\xi \in \mathbb{Q}^{Q_0}$ 和一个数 $\delta \in \mathbb{Q}$，我们定义 $\xi^\delta \in \mathbb{Q}^{Q_0^{\mathrm{aux}}}$ 如下

$$\xi_i^\delta = \begin{cases} \xi_i\,, & \text{if } i \in Q_0, \\ \delta\,, & \text{if } i \in Q_0^{\mathrm{aux}} \setminus Q_0. \end{cases}$$

引理 3　　.12. 对于每个 $\xi \in \mathbb{Q}^{Q_0}$，都存在 $\delta > 0$ 使得以下条件同时成立

$$\overline{\mathfrak{p}}^{-1}(R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})^{\xi\text{-}s}) \cap \left((\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\mathrm{leg}\text{-}s} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}}\right) \subseteq (\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\xi^\delta\text{-}s} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}}, \tag{3.14}$$

$$\overline{\mathfrak{p}}^{-1}(R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})^{\xi\text{-}ss}) \cap \left((\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\mathrm{leg}\text{-}s} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}}\right) \supseteq (\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\xi^\delta\text{-}ss} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}}. \tag{3.15}$$

证明。 不失一般性，以下设 $\xi \in \mathbb{Z}^{Q_0}$。初步观察是，对于任意 $\delta > 0$，我们都有包含关系

$$(\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\mathrm{leg}\text{-}s} \supseteq (\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\xi^\delta\text{-}ss}.$$

接下来，我们回顾 Crawley-Boevey技巧 [CB，§1，2024年4月补充的备注 2000]。我们向Q^{add} 添加一个新节点 ∞，并从 ∞ 到 $i \in Q_0$ 添加$\mathbf{d}_i$ 条箭，从 i 到 ∞添加$\mathbf{d}_i$ 条箭；对 Q^{aux}也进行同样的操作。我们将所得的无框架箭图记为 $Q_\bullet^{\mathrm{add}}$和 $Q_\bullet^{\mathrm{aux}}$。于是我们有

$$R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d}) \cong \mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{add}},\mathbf{v}_\bullet), \quad R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}}) \cong \mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}_\bullet^{\mathrm{aux}}), \tag{3.16}$$

其中，$\mathbf{v}_\bullet$ 到 Q_0 的限制为$\mathbf{v}$，以及$\mathbf{v}_{\bullet,\infty} = 1$；而$\mathbf{v}_\bullet^{\mathrm{aux}}$到 Q_0^{aux}的限制为$\mathbf{v}^{\mathrm{aux}}$ 和$\mathbf{v}_{\bullet,\infty}^{\mathrm{aux}} = 1$。此外，同构 (3.16) 以下述意义保持稳定性条件：

$$R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})^{\xi\text{-}s} \cong \mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{add}},\mathbf{v}_\bullet)^{\xi_\bullet\text{-}s}, \quad R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}})^{\xi^\delta\text{-}s} \cong \mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}_\bullet^{\mathrm{aux}})^{\xi_\bullet^\delta\text{-}s},$$
$$R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})^{\xi\text{-}ss} \cong \mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{add}},\mathbf{v}_\bullet)^{\xi_\bullet\text{-}ss}, \quad R(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}})^{\xi^\delta\text{-}ss} \cong \mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}_\bullet^{\mathrm{aux}})^{\xi_\bullet^\delta\text{-}ss},$$

其中，$\xi_\bullet$ 到 Q_0 的限制为 ξ，且$\xi_{\bullet,\infty} = -\sum_{i\in Q_0}\xi_i\mathbf{v}_i$；而 $\xi_\bullet^\delta$ 到 Q_0^{aux}的限制为 ξ^δ，且$\xi_{\bullet,\infty}^\delta = -\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}}\xi_i^\delta\mathbf{v}_i^{\mathrm{aux}}$。以下为方便起见，滥用记号，令 $\mathfrak{p}$ 为从 $\mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}_\bullet^{\mathrm{aux}})$到 $\mathrm{Rep}(Q_\bullet^{\mathrm{add}},\mathbf{v}_\bullet)$的一个态射。固定一个 $\delta \in \mathbb{Q}_{>0}$，使得

$$\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0} \delta\cdot\mathbf{v}_i^{\mathrm{aux}} < \frac{1}{2}. \tag{3.17}$$

我们声称 (3.14) 和 (3.15) 成立。为证明它们，引入如下记号：$(V_i)^{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{aux}}}$ 表示一个$Q_{\bullet,0}^{\mathrm{aux}}$-分次向量空间，它是一个 $Q_\bullet^{\mathrm{aux}}$-表示。它限制为一个 $Q_\bullet^{\mathrm{add}}$-表示 $(V_i)^{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{add}}}$。

我们先证明 (3.15)。取任意一点 $x \in (\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\xi^\delta\text{-}ss}$，并取任意的 $(t_\varepsilon \in \mathbb{C})_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}$。假设 $Q_\bullet^{\mathrm{add}}$-表示 $\mathfrak{p}(x,(t_\varepsilon))$ 不是 $\xi_\bullet$- 半稳定的，即存在一个真 $Q_{\bullet,0}^{\mathrm{add}}$- 分次子空间 $(S_i \subseteq V_i)^{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{add}}}$，它在 $\mathfrak{p}(x,(t_\varepsilon))$ 中的所有映射作用下保持不变，并且

$$\sum_{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{add}}} \xi_{\bullet,i}\dim S_i > 0.$$

由于 $\xi_{\bullet,i} \in \mathbb{Z}$，我们必有

$$\sum_{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{add}}} \xi_{\bullet,i}\dim S_i \geqslant 1. \tag{3.18}$$

然后，我们通过令 S_j （对于 $j \notin Q_\bullet^{\mathrm{add}}$）为沿着从 i_0 到 j 的最短路径对 S_{i_0} 的像，其中 i_0 是 $Q_\bullet^{\mathrm{add}}$ 中到 j 的最短距离唯一的节点，将 $(S_i \subseteq V_i)^{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{add}}}$ 扩展为一个 $Q_{\bullet,0}^{\mathrm{aux}}$-分次子空间 $(S_i \subseteq V_i)^{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{aux}}}$。容易看出，表示 x 中的所有映射都保持 $(S_i \subseteq V_i)^{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{aux}}}$。根据 x 的 $\xi_\bullet^\delta$-半稳定性，我们有

$$\sum_{i\in Q_{\bullet,0}^{\mathrm{aux}}} \xi_{\bullet,i}^\delta\dim S_i \leqslant 0.$$

然而，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}\xi^{\delta}_{\bullet,i}\dim S_i &= \sum_{i\in Q_0}\xi_i\dim S_i+\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\delta\cdot\dim S_i+\xi^{\delta}_{\bullet,\infty}\dim S_\infty\\ &= \sum_{i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}}\xi_{\bullet,i}\dim S_i+\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\delta\cdot\dim S_i+(\xi^{\delta}_{\bullet,\infty}-\xi_{\bullet,\infty})\dim S_\infty\\ &= \sum_{i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}}\xi_{\bullet,i}\dim S_i+\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\delta\cdot\dim S_i-\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\dim S_\infty\cdot\delta\cdot\mathbf{v}_i^{\mathrm{aux}}\\ &\overset{\text{(by (3.17) and (3.18))}}{>}\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

由此得到矛盾，因此 $\mathfrak{p}(x,(t_\varepsilon))$ 必须是 $\xi_\bullet$-半稳定的。这就证明了 (3.15)。

证明 (3.14)。取任意点 $y\in(\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})$ 和任意 $(t_\varepsilon\in\mathbb{C})_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}$。假设 $Q^{\mathrm{add}}_\bullet$-表示 $\mathfrak{p}(y,(t_\varepsilon))$ 是 $\xi_\bullet$-稳定的，即 $(y,(t_\varepsilon))$ 属于 (3.14) 的左侧。假设 y 不是 $\xi^{\delta}_\bullet$-稳定的，则存在一个真 $Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}$-分次子空间 $(T_i\subseteq V_i)_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}$，它被 y 中的所有线性映射保持，且

$$\sum_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}\xi^{\delta}_{\bullet,i}\dim T_i\geqslant 0. \tag{3.19}$$

$Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}$-分次子空间 $(T_i\subseteq V_i)_{i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}}$ 被 $\mathfrak{p}(y,(t_\varepsilon))$ 中的所有映射保持。共有三种可能：1)$T_i=V_i$ 对所有 $i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}$ 均成立；2) $T_i=0$ 对所有 $i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}$ 均成立；3) $(T_i\subseteq V_i)_{i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}}$ 是一个真子空间。在情况 1) 中，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}\xi^{\delta}_{\bullet,i}\dim T_i &= -\sum_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}\xi^{\delta}_{\bullet,i}\dim V_i/T_i+\sum_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}\xi^{\delta}_{\bullet,i}\dim V_i\\ &= -\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\delta\cdot\dim V_i/T_i<0,\end{aligned}$$

这与 (3.19) 矛盾。在情形 2) 中，必定存在一个节点 $j\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0$，使得 $T_j\neq 0$。令 i_0 为 Q_0 中到 j 距离最短的唯一节点，则根据腿稳定性，从 j 到 i_0 的最短路径所对应的线性映射是单射。由于 $(T_i\subseteq V_i)_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}$ 在 y 中所有线性映射下保持不变，这意味着 $T_{i_0}\neq 0$，因此情形 2) 也不可能发生。在情形 3) 中，$\mathfrak{p}(y,(t_\varepsilon))$ 的 $\xi_\bullet$-稳定性意味着

$$\sum_{i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}}\xi_{\bullet,i}\dim T_i<0.$$

由于 $\xi_{\bullet,i}\in\mathbb{Z}$，我们必有

$$\sum_{i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}}\xi_{\bullet,i}\dim T_i\leqslant -1. \tag{3.20}$$

于是得到 (3.19) 左端的如下上界：

$$\begin{aligned}\sum_{i\in Q^{\mathrm{aux}}_{\bullet,0}}\xi^{\delta}_{\bullet,i}\dim T_i &= \sum_{i\in Q^{\mathrm{add}}_{\bullet,0}}\xi_{\bullet,i}\dim T_i+\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\delta\cdot\dim T_i-\sum_{i\in Q_0^{\mathrm{aux}}\setminus Q_0}\dim T_\infty\cdot\delta\cdot\mathbf{v}_i^{\mathrm{aux}}\\ &\overset{\text{(by (3.17) and (3.20))}}{<}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因此 y 必须是 $\xi^{\delta}_\bullet$-半稳定的。这证明了 (3.14)。 □

回顾一下，我们已经固定了一个 $\theta\in\mathbb{Q}^{Q_0}$，并假设它是一般的，即

$$R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})^{\theta\text{-}ss}=R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})^{\theta\text{-}s}.$$

结合引理 3.7 和引理 3.12，我们得到以下等式

$$\bar{\mathfrak{p}}^{-1}\left(((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s})\right)\cap\left((\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\text{leg-}s}\times\mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}}\right)=(\mu^{\mathrm{aux}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{aux}})^{\theta^{\delta}\text{-}s}\times\mathcal{L}=(\mu^{\mathrm{aux}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{aux}})^{\theta^{\delta}\text{-}ss}\times\mathcal{L}, \tag{3.21}$$

对于充分 充分小的正数 δ。现在我们结合引理 3.10 与 (3.21)，得到如下 .

命题 3.13。 对于充分小的正数 δ，存在如下由 A-等变态射构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{\tau}} & \mathcal{H} \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \widetilde{\mathcal{N}}_{\theta^\delta}(Q^{\mathrm{aux}},\mathbf{v}^{\mathrm{aux}},\mathbf{d}^{\mathrm{aux}})\times\mathcal{L} & \xrightarrow{\phi\times\mathrm{id}} & \mathfrak{Z}^{\mathrm{aux}}\times\mathcal{L}, \end{array} \tag{3.22}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是一个向量 $\widetilde{}$空间由 (3.13) 给出。特别地， X 是光滑的，且 (3.6) 中的 $\widetilde{\tau}$ 是一个光滑态射 .

3.4. 关于图式(3.6)的更多性质。考虑交换图 (3.6):

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{\tau}} & \mathcal{H} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{H}/\Gamma, \end{array}$$

以及同构 (3.22)，我们定义 $\mathcal{H}$ 中一个 Γ-不变开子集如下

$$\mathcal{H}^\circ := \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\gamma\left((\mathfrak{Z}^{\mathrm{aux}})^\circ\times\mathcal{L}\right) \tag{3.23}$$

其中 $(\mathfrak{Z}^{\mathrm{aux}})^\circ$ 是辅助箭图 Q^{aux} 在 (3.2) 中的开子集。令

$$X^\circ := \tau^{-1}(\mathcal{H}^\circ/\Gamma),\quad \widetilde{X}^\circ := \widetilde{\tau}^{-1}(\mathcal{H}^\circ),$$

于是我们有 $\widetilde{X}^\circ = \pi_X^{-1}(X^\circ)$。

引理 3.14. 下图是笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}^\circ & \xrightarrow{\widetilde{\tau}} & \mathcal{H}^\circ \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X^\circ & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{H}^\circ/\Gamma. \end{array} \tag{3.24}$$

证明. 在引理 3.9 中的同构 $\mathfrak{h}^*\cong\mathfrak{Z}^n\times\mathbb{C}$ 下，开子集 $(\mathfrak{Z}^n)^\circ\times\mathbb{C}$ 同构于

$$\mathfrak{h}^*\Big\backslash \bigcup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^{n-1}\backslash\{0\}\\ 0\leqslant\mathbf{u}_i\leqslant i}}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{u}_i\check{\alpha}_i\right)^\perp,$$

其中 $\check{}\alpha_i$ 是第 i 个单余根；对于 $\lambda\in\mathfrak{h}$， $\lambda^\perp$ 是超平面 $\{v\in\mathfrak{h}^*\colon\ \lambda(v)=0\}$。特别地，$(\mathfrak{Z}^n)^\circ\times\mathbb{C}$ 包含于余根超平面并集的补集中：

$$(\mathfrak{Z}^n)^\circ\times\mathbb{C}\subset\mathring{\mathfrak{h}}^* := \mathfrak{h}^*\Big\backslash\bigcup_{\check{\alpha}\in\mathrm{coroots}}\check{\alpha}^\perp.$$

$^\circ$ $^\circ$由此可得 $\mathcal{H}^\circ\subset\prod_{\varepsilon\in\mathcal{E}^{\mathrm{add}}}\mathfrak{h}_\varepsilon^*$，其中 $\mathfrak{h}_\varepsilon^*$ 是 $\mathfrak{gl}$ 的卡当子代数的对偶空间中余根超平面并集的补集(**v** $_{h(\varepsilon)}$)。

$^\circ$众所周知，交换图 (3.4) 经基变换到 $\mathfrak{h}^*/W$ 后成为笛卡尔图，具体而言，下图是笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \nu^{-1}(\mathring{\mathfrak{h}}^*) & \xrightarrow{\nu_{\mathfrak{l}}} & \mathring{\mathfrak{h}}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{l}}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathfrak{l}}} \\ \rho^{-1}(\mathring{\mathfrak{h}}^*/W) & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{l}}} & \mathring{\mathfrak{h}}^*/W. \end{array}$$

因此，交换图（3.7）在基变换到 $\mathcal{H}^\circ/\Gamma$后变为笛卡尔图，即得到以下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})^\circ & \longrightarrow & \mathcal{H}^\circ \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_R} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ R(Q^{\mathrm{add}},\mathbf{v},\mathbf{d})^\circ & \longrightarrow & \mathcal{H}^\circ/\Gamma, \end{array}$$

其中 $R(Q^{\mathrm{add}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})^\circ = R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d}) \times \rho^{-1}(\mathcal{H}^\circ/\Gamma)$，而 $\widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d})^\circ = R(Q^{\mathrm{rem}},\ \mathbf{v},\ \mathbf{d}) \times \nu^{-1}(\mathcal{H}^\circ)$。进行哈密顿约化后，即得到笛卡尔图（3.24）。□

引理 3.15. X° 是一个仿射簇。

证明。 注意到 $\widetilde{\tau}$：如例 3.2 中所述，$X^\circ \to \mathcal{H}^\circ$ 是一个仿射态射；特别地，X° 是一个仿射簇。根据引理 3.14，$\pi_X\colon\ X^\circ \to X^\circ$ 是有限且满射的。因此，根据 Chevalley 仿射性定理 [GW, Thm. 12，X° 是一个仿射簇。39]。□

命题 3.16. 在交换图 (3.6) 中，我们有：

(1) 态射 $\tau\colon\ X \to \mathcal{H}/\Gamma$ 是平坦的。(2) 设 $h \in \mathcal{H}$ 是任意一点，则 $\widetilde{X}_h := \widetilde{\tau}^{-1}(h)$ 是光滑且连通的，$X_{p(h)} := \tau^{-1}(p(h))$ 是不可约且正规的，而 $\pi_X\colon\ X_h \to X_{p(h)}$ 是一个奇点消解。

证明。 我们将交换图 (3.7) 中水平态射的复合分别记为 ν 和 ρ。根据定理 3.5(5)，态射 $\pi_R\colon\ \nu^{-1}(h) \to \rho^{-1}(p(h))$ 是真且满射的，并且存在一个开子概形 $U \subseteq \rho^{-1}(p(h))$，使得 $\pi_R^{-1}(U)$ 是 $\nu^{-1}(h)$ 中使 π_R 拟有限的最大开子概形。事实上，π_R 在 $\pi_R^{-1}(U)$ 与 U 之间诱导出同构。因此，态射

$$\overline{\nu}^{-1}(h) \cap \pi_R^{-1}((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}) \to \overline{\rho}^{-1}(p(h)) \cap (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}$$

是一个真且满射的态射，并且 $\pi_R^{-1}(U \cap (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s})$ 是 $\nu^{-1}(h) \cap \pi_R^{-1}((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s})$ 中使该态射拟有限的最大开子概形。此外，π_R 在 $\pi_R^{-1}(U \cap (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s})$ 与 $U \cap (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}$ 之间诱导出同构。值得一提的是，$U \cap (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}$ 可能为空，但我们很快就会看到这种情况不会发生。

对 G 取商，得到以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \overline{\nu}^{-1}(h) \cap \pi_R^{-1}((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}) & \xrightarrow{\pi_R} & \overline{\rho}^{-1}(p(h)) \cap (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s} \\ \downarrow{\scriptstyle \cdot /\!\!/ G} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot /\!\!/ G} \\ \widetilde{X}_h & \xrightarrow{\pi_X} & X_{p(h)}\,, \end{array}$$

由于 θ-稳定轨迹上的 G 作用是自由的，因此该图是笛卡尔图。特别地，$\pi_X\colon\ X_h \to X_{p(h)}$ 是真且满射的。由 U 的极大性可知，U 是 G-不变的。记 $V := \left(U \cap (\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}\right) /\!\!/ G$。那么 $\pi_X^{-1}(V)$ 是 $\widetilde{X}_h$ 中使 π_X 拟有限的最大开子概形，并且 π_X 在 $\pi_X^{-1}(V)$ 与 V 之间诱导同构。

注意到，X_h 同构于 Nakajima 箭图簇

$$\mathcal{N}_{\theta^\delta,\bar{h}}(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}}) = (\mu^{\mathrm{aux}})^{-1}(\bar{h})^{\theta^\delta\text{-}ss} /\!\!/ G^{\mathrm{aux}},$$

其中 $\bar{h}$ 是 h 在向量空间 $\mathcal{H} \to \mathfrak{Z}^{\mathrm{aux}}$ 的投影下的像。特别地，$\widetilde{X}_h$ 是不可约的[3]。这意味着 $X_{p(h)}$ 不可约，且 $\dim X_{p(h)} \leqslant \dim X_h$。由 [GW, Cor. 14.95] 可得

$$\dim X_{p(h)} \geqslant \dim X - \dim \mathcal{H}/\Gamma.$$

由 $\widetilde{\tau}$的光滑性，我们有

$$\dim \widetilde{X}_h = \dim \widetilde{X} - \dim \mathcal{H}.$$

由于 π_X是泛有限的，我们有 $\dim X = \dim X$，因此得到另一个不等式 $\dim X_{p(h)} \geqslant \dim X_h$。这迫使等式 $\dim X_{p(h)} = \dim X_h$ 成立。特别地，$\pi_X\colon\ X_h \to X_{p(h)}$ 是泛有限的。这意味着 V 非空。特别地，$\pi_X\colon\ X_h \to X_{p(h),\ \mathrm{red}}$ 是一个适当双有理态射。

由上述论证，$\dim X_{p(h)} = \dim X - \dim \mathcal{H}/\Gamma$。注意到，$\mathcal{H}/\Gamma$ 是光滑的，因为它是若干 n 对应的 $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ 的乘积，且每个 $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ 都光滑。于是，根据 [GW 定理 14.126]，τ 是平坦的。这就证明了 (1)。

要证明 (2)，还需证明 $X_{p(h)}$ 是正规概形。由 $\tau\colon\ X \to \mathcal{H}/\Gamma$ 的平坦性以及 X 和 $\mathcal{H}/\Gamma$的光滑性可知，$X_{p(h)}$ 是局部完全交概形，因此特别地，$X_{p(h)}$ 是科恩-麦考利的。由于 π_X 诱导同构 $\pi_X^{-1}(V) \cong V$，且 $\pi_X^{-1}(V)$光滑，$X_{p(h)}$ 一般光滑。

我们断言 $X_{p(h)} \setminus V \subseteq X_{p(h)}$ 的余维为 > 1。假设该断言不成立，取 D 为余维为一的不可约分支。D 是 $X_{p(h)} \setminus V$，那么沿 D 的 π_X 纤维维数为正，因此

$$\dim \pi_X^{-1}(D) \geqslant \dim D + 1 = \dim \widetilde{X}_h.$$

[3]由于中岛箭图簇是光滑且连通的 [CB，§1]。

这由 $\widetilde{X}_h$ 的连通性迫使 $\widetilde{X}_h = \pi_X^{-1}(D)$ 成立，这与 $\widetilde{X}_h$ 满射到 $X_{p(h)}$ 的事实矛盾。这证明了我们的断言。因此，根据 Serre正规性判据， $X_{p(h)}$ 是正规概形 [Stacks，命题 0345]。□

注 3.17. X 具有自然的泊松结构，该结构由 §3.2 开头构造的 $R(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d})^{\sim}$上的泊松结构诱导而来。同样， X 具有自然的泊松结构，该结构由 $R(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$上的泊松结构诱导而来。定义 3.6 中的态射 $\mathfrak{p}$: $R(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}}) \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{add}}} \to R(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d})^{\sim}$ 是泊松态射，因此 π_X: $X \to X$ 也是泊松态射。此外，态射 τ: $X \to \mathcal{H}/\Gamma$ 和 $\widetilde{\tau}$: $X \to \mathcal{H}$ 都是泊松态射，其中目标空间赋予平凡泊松结构。因此， π_X: $X_h \to X_{p(h)}$ 是泊松态射。我们注意到， X_h 上诱导的泊松结构恰好是中岛箭图簇的自然辛结构；因此 π_X: $X_h \to X_{p(h)}$ 是辛消解。

τ 到环面不动分支的限制也是平坦的。

命题 3.18. 设 σ 是 A 的一个余特征，且 $F \in \mathrm{Fix}_\sigma(X)$ 是一个 σ-不动点轨迹。则态射$\tau|_F$: $F \to \mathcal{H}/\Gamma$是平坦的。此外，$(\tau|_F)^{-1}(0)$ 是不可约的。

证明。 F确定了 σ: $\mathbb{C}^* \to \mathrm{A}$ 沿投影 $G \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ 的一个提升 ξ: $\mathbb{C}^* \to G \times \mathrm{A}$。于是

$$F = \left((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s} \cap R(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d})^{\xi}\right) /\!\!/ G^{\xi}. \tag{3.25}$$

取 $F \in \mathrm{Fix}_\sigma(X)$，使得 $\pi_X(F) \subseteq F$。 F沿投影 $G^{\mathrm{aux}} \times \mathrm{A} \to G \times \mathrm{A}$ 确定了 ξ: $\mathbb{C}^* \to G \times \mathrm{A}$ 的另一个提升 ξ: $\mathbb{C}^* \to G^{\mathrm{aux}} \times \mathrm{A}$。由等式 (3.21) 可得一个同构

$$\widetilde{F} \cong \left(\overline{\mathfrak{p}}^{-1}((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}) \cap \left((\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\mathrm{leg}\text{-}s} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}}\right) \cap R(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})^{\widetilde{\xi}}\right) /\!\!/ (G^{\mathrm{aux}})^{\widetilde{\xi}}.$$

将 $G^{\mathrm{aux}} \times \mathrm{A}$ 分解为 $G \times \mathrm{A} \times G^{\mathrm{leg}}$，可将 $\widetilde{\xi} = (\xi, \xi^{\mathrm{leg}})$ 写成 ξ^{leg}: $\mathbb{C}^* \to G^{\mathrm{leg}}$，其中 $\widetilde{\xi}$ 的对应分支为 ξ^{leg}。于是有 $(G^{\mathrm{aux}})^{\widetilde{\xi}} = G^{\xi} \times (G^{\mathrm{leg}})^{\xi^{\mathrm{leg}}}$。鉴于下述同构

$$\widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \cong (\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\mathrm{leg}\text{-}s} /\!\!/ G^{\mathrm{leg}} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}} \tag{3.26}$$

根据引理 3.10，商 $\left(\left((\mu^{\mathrm{leg}})^{-1}(\mathfrak{Z}^{\mathrm{leg}})^{\mathrm{leg}\text{-}s} \times \mathbb{C}^{\mathcal{E}^{\mathrm{leg}}}\right) \cap R(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})^{\xi}\right) /\!\!/ (G^{\mathrm{leg}})^{\xi^{\mathrm{leg}}}$ 被识别为 ξ-不动的 $\widetilde{R}(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d})$ 的一个连通分支。将此分支记为 M。于是有

$$\widetilde{F} \cong \left(\pi_R^{-1}((\mu^{\mathrm{add}})^{-1}(0)^{\theta\text{-}s}) \cap M\right) /\!\!/ G^{\xi}.$$

对于复约化群 L 及余特征 λ: $\mathbb{C}^* \to L$，考虑图表 (3.4) 中的 Grothendieck–Springer态射 π: $\widetilde{\mathfrak{l}}^* \to \mathfrak{l}^*$。已知 π 将 $(\widetilde{\mathfrak{l}}^*)^{\lambda}$ 的每个连通分支满射到 $(\mathfrak{l}^*)^{\lambda}$ [4]。将上述事实应用于 $L = \prod_{\varepsilon \in \mathcal{E}^{\mathrm{add}}} \mathrm{GL}(\mathbf{v}^{h(\varepsilon)})$，并令 λ 为由 $\mathbb{C}^* \xrightarrow{\xi} G \hookrightarrow L$ 诱导的余特征，我们看到 π_R 将 M 满射到 $R(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d})^{\xi}$。比较 (3.25) 和 (3.26)，可见 π_X 将 F 满射到 F。注意，根据引理 3.3 的证明， $\widetilde{\tau}|_{\widetilde{F}}$: $F \to \mathcal{H}$ 是光滑的，因此 $F \cap X^{\circ}$ 非空，特别地， $\pi|_{\widetilde{F}}$: $F \to X$ 是泛有限的。因此，态射 $F \to F$ 是真、满射且泛有限。特别地，$\dim F = \dim F$。

对于 $h \in \mathcal{H}$，定义 $F_h := F \times_{\mathcal{H}} \{h\}$；对于 $b \in \mathcal{H}/\Gamma$，定义 $F_b := F \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\}$。由 $\widetilde{\tau}|_{\widetilde{F}}$: $F \to \mathcal{H}$ 的光滑性可得

$$\dim \widetilde{F}_h = \dim \widetilde{F} - \dim \mathcal{H}$$

对任意 $h \in \mathcal{H}$ 均成立。由于 $F \to F$ 是满射且 p: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Gamma$ 是有限的，因此有

$$\dim F_b \leqslant \max_{h \in p^{-1}(b)} \dim \widetilde{F}_h = \dim \widetilde{F} - \dim \mathcal{H} = \dim F - \dim \mathcal{H}/\Gamma$$

对任意 $b \in \mathcal{H}/\Gamma$ 均成立。由 [GW，推论 14.95]，可得

$$\dim F_b \geqslant \dim F - \dim \mathcal{H}/\Gamma.$$

这迫使 $F_b = \dim F - \dim \mathcal{H}/\Gamma$ 成立。于是，根据 [GW 定理 14.126， $\tau|_F$ 是平坦的].

[4]注意，将 π 限制到正则半单轨迹 $\pi^{-1}((\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}}) \to (\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}}$ 的原像上，得到一个有限的 étale 覆盖，因此 $\pi^{-1}((\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}})^{\lambda}$ 的每个连通分支都是 $\pi^{-1}((\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}} \cap (\mathfrak{l}^*)^{\lambda})$ 的一个连通分支。特别地，$\pi^{-1}((\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}})^{\lambda}$ 的每个连通分支都满射到 $(\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}} \cap (\mathfrak{l}^*)^{\lambda}$。注意，图表 (3.4) 中的态射 ν 在 $(\widetilde{\mathfrak{l}}^*)^{\lambda}$ 上的限制由引理 3.3 的证明中相同的论证可知是光滑的；因此，与开子集 $\pi^{-1}((\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}}) = \nu^{-1}((\mathfrak{h}^*)^{\mathrm{rs}})$ 取交，得到 $\mathrm{Fix}_\lambda(\widetilde{\mathfrak{l}}^*)$ 与 $\mathrm{Fix}_\lambda(\pi^{-1}((\mathfrak{l}^*)^{\mathrm{rs}}))$ 之间的一一对应。这意味着 $(\widetilde{\mathfrak{l}}^*)^{\lambda}$ 的每个连通分支都满射到 $(\mathfrak{l}^*)^{\lambda}$。

最后，F_0 满射到 F_0，因为 $0 \in \mathcal{H}$ 是态射 $\sim_{\sim_p}$ 下 $0 \in \mathcal{H}/\Gamma$ 的唯一原像。由于 F_0 同构于 Nakajima 箭图簇 $\mathcal{N}_{\theta^s}(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 的一个 σ-不动分支，F_0 本身就是一个 Nakajima 箭图簇。根据 [CB，第 1] 节，F_0 不可约。因此，F_0 不可约。□

3.5. **仿射化态射的小性。** Jordan-H¨older 态射

$$\mathsf{JH}\colon X = \mathcal{M}_\theta(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathcal{M}_0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}) = Y$$

将 θ-稳定箭图表示映射到其半单化，其中 $\mathcal{M}_0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}) = R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})/\!\!/G$ 是仿射商 $(G = \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}(\mathbf{v}_i))$。从几何上看，JH 是由开浸入 $R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})^{\theta\text{-}s} \hookrightarrow R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})$ 诱导而来，方法是在两侧分别取商。

引理 3.19. JH 是真且双有理的。此外，$\mathbb{C}[Y] = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$，即 Y 是 X 的仿射化。

证明。由几何不变式理论可知，JH 是真态射。将量子化定理 [HL，定理 3.29] 应用于叠 $[R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})/G]$ 的结构层的情形，我们看到自然映射

$$\mathbb{C}[Y] = H^0([R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})/G], \mathcal{O}_{[R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})/G]}) \to H^0(R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})^{\theta\text{-}s}/G, \mathcal{O}_{[R(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})/G]}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \tag{3.27}$$

是一个同构。由于 Y 是仿射的，(3.27) 蕴含自然映射 $\mathcal{O}_Y \to \mathsf{JH}_*\mathcal{O}_X$ 是一个同构。

由 (3.7) 底部诱导的映射 $R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \subset R(Q^{\mathrm{add}}, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathcal{H}/\Gamma$ 在 G作用下不变，并下降为一个态射 $\bar{\tau}\colon Y = \mathcal{M}_0(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d}) \to \mathcal{H}/\Gamma$。根据构造，我们有 $\tau = \bar{\tau} \circ \mathsf{JH}$。回顾在 (3.23) 中定义的开子集 $\mathcal{H}^\circ$，并定义 $Y^\circ := \bar{\tau}^{-1}(\mathcal{H}^\circ/\Gamma)$。那么 $\mathsf{JH}\colon X^\circ \to Y^\circ$ 是一个真且仿射的映射，因此是有限映射。由同构 $\mathcal{O}_Y \cong \mathsf{JH}_*\mathcal{O}_X$ 可知，$\mathsf{JH}\colon X^\circ \to Y^\circ$ 是一个同构。特别地，JH 是双有理的。□

本小节的主要结果如下。

命题 3.20. $X \times_Y X$ 的所有不可约分支中，除对角线 Δ_X 外，其维数都严格小于 $\dim X$。特别地，$\dim X \times_Y X = \dim X$，且 $\mathsf{JH}\colon X \to Y$ 是小的。

证明. 如引理 3.19 的证明中所见，JH 诱导同构 $X^\circ \cong Y^\circ$；因此

$$X \times_Y X \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \mathcal{H}^\circ/\Gamma \cong X^\circ \times_{Y^\circ} X^\circ = \Delta_{X^\circ}.$$

另一方面，我们断言，对于任意 $b \in \mathcal{H}/\Gamma$，纤维 $X \times_Y X \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\}$ 的维数等于 $\dim X_b$，其中 $X_b := \tau^{-1}(b)$。根据 τ 的平坦性（命题 3.16），只需证明

$$\dim X \times_Y X \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\} \leqslant \dim X_0.$$

考虑 $R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})$上的 $\mathbb{C}^*$ 作用，它以权 1 缩放整个向量空间。此 $\mathbb{C}^*$ 作用与 G作用相交换，因此它也在几何不变理论商 X 以及仿射商 Y上诱导出 $\mathbb{C}^*$ 作用。注意，$\mathbb{C}^*$ 在 Y上的作用将后者收缩到唯一的不动点 $\mathfrak{o}$，它是 $\{0\} \in R(Q, \mathbf{v}, \mathbf{d})$的像。由 JH：$X \to Y$, $\forall\, x \in X$的真性，$\lim_{t\to 0} t \cdot x$ 存在且属于 $\mathsf{JH}^{-1}(\mathfrak{o})$。此外，$\mathbb{C}^*$ 以正权作用于 $\mathcal{H}/\Gamma$，使得 $\tau\colon X \to \mathcal{H}/\Gamma$ 是 $\mathbb{C}^*$-等变的。这意味着 $\lim_{t\to 0} t \cdot x \in X_0$。

任取 W $X \times_Y X \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\}$ 的一个不可约分支，令 W' 为 W 在 $X \times_Y X$ 中的 $\mathbb{C}^*$ 轨道的闭包，即 $W' = \mathbb{C}^* \cdot W$。根据上述论证，$W_0' := W' \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{0\}$ 非空，且 $\dim W_0' \geqslant \dim W$，因为前者是特殊纤维，后者是一般纤维。由于 $Y_0 := \bar{\tau}^{-1}(0)$ 是仿射中岛箭图簇 $\mathcal{N}_0(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}}) = (\mu^{\mathrm{aux}})^{-1}(0)/\!\!/G^{\mathrm{aux}}$，且复合映射 $\mathsf{JH} \circ \pi_X\colon X_0 \to Y_0$ 与中岛箭图簇的 Jordan-H¨older 映射相对应：

$$\mathcal{N}_{\theta^s}(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}}) \to \mathcal{N}_0(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}}),$$

我们看到 $X_0 \to Y_0$ 是一个辛消解，并且是半小的 [Kal]。于是结论由此得出

$$\dim W \leqslant \dim W_0' \leqslant \dim X_0 \times_{Y_0} X_0 \leqslant \dim \widetilde{X}_0 \times_{Y_0} \widetilde{X}_0 = \dim \widetilde{X}_0 = \dim X_0\,.$$

设 $Z \subset X \times_Y X$ 是一个不同于对角线 Δ_X 的不可约分支。假设 $Z^\circ := Z \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \mathcal{H}^\circ/\Gamma$ 非空，则 Z 是 Z° 的闭包。由于 $X^\circ \times_{Y^\circ} X^\circ = \Delta_{X^\circ}$，$Z^\circ$ 包含于 Δ_{X° 中。这意味着 $Z \subseteq \Delta_X$，与 Z 的选取矛盾。因此 $Z^\circ = \emptyset$。由上述断言可得，$\dim Z \leqslant \dim X_b + \dim(\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}^\circ)/\Gamma = \dim X - 1$。□

JH 在环面不动分支上的限制也是一个双有理小态射，映至其像。

命题 3.21. 设 σ 是 A 的一个余特征，且 $F \in \mathrm{Fix}_\sigma(X)$。那么该态射

$$\mathsf{JH}|_F\colon F \to Y$$

到其像是双有理的。此外，$F \times_Y F$ 除对角线 Δ_F 外的所有不可约分支，其维数都严格小于 $\dim F$。特别地，$\dim F \times_Y F = \dim F$，且 $\mathsf{JH}\colon F \to Y$到其像是小的。

证明。由 $\tau|_F$ 的平坦性可知：$F \to \mathcal{H}/\Gamma$（命题 3.18），$F^\circ := F \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \mathcal{H}^\circ/\Gamma$ 非空。由于 JH：$X^\circ \to Y^\circ$是同构，F° 被同构地映射到其在 Y° 中的像上。特别地，$\mathrm{JH}|_F$：$F \to Y$到其像是双有理的。

设 $K \subset F \times_Y F$ 是一个不同于对角线 Δ_F 的不可约分支。由命题 3.20 的证明中的同一论证可知，$K \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \mathcal{H}^\circ/\Gamma$ 为空。因此我们有

$$\begin{aligned}\dim K &\leqslant \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \sup_{b\in\mathcal{H}/\Gamma} \dim F \times_Y F \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\}\\ &\overset{\text{by (3.28)}}{\leqslant} \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \frac{1}{2}(\dim F + \dim F) - \dim \mathcal{H}/\Gamma\\ &= \dim F - 1.\end{aligned}$$

□

3.6. **一些维数估计**。接下来，我们给出若干关于对称箭图簇的环面不动点轨迹之交的维数估计。这些估计将在 [COZZ2] 中使用。

引理 3.22. 设 σ 是 A 的一个余特征，且 $F_1, F_2 \in \mathrm{Fix}_\sigma(X)$。那么对任意 $b \in \mathcal{H}/\Gamma$，

$$\dim F_1 \times_Y F_2 \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\} \leqslant \frac{1}{2}(\dim F_1 + \dim F_2) - \dim \mathcal{H}/\Gamma. \tag{3.28}$$

证明。由命题 3.20 证明中的 $\mathbb{C}^*$ 收缩论证，

$$\dim F_1 \times_Y F_2 \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\} \leqslant \dim F_1 \times_Y F_2 \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{0\},$$

因此，只需证明 $b = 0$ 的 (3.28)。

~对于 $i = 1, 2$，令 F_i 为 X 的 σ-不动分支，且该分支支配 F_i（见命题 3.18 的证明）。由于 ~ ~$F_i \to F_i$是泛有限的，我们有 dim F_i =dim F_{i0}。定义 $F_{i,0}$:= $F_i \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{0\}$ 以及 $F_{i,0} := F_i \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{0\}$，其中~ ~$i = 1, 2$。由此自然诱导出一个真满射态射 $F_{1,0} \times_{Y_0} F_{2,0} \to F_{1,0} \times_{Y_0} F_{2,0}$</style}，因此

$$\dim F_{1,0} \times_{Y_0} F_{2,0} \leqslant \dim \widetilde{F}_{1,0} \times_{Y_0} \widetilde{F}_{2,0}.$$

~注意，σ 保持 Nakajima 箭图簇 $X_0 = \mathcal{N}_{\theta^\delta}(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 上的辛形式 Ω，因此 Ω 在 σ-不动分支 $F_{1,0}$ 和 $F_{2,0}$ 上的~ ~ ~限制是非退化的。我们赋予 $F_{1,0} \times F_{2,0}$ 辛~ ~ ~ ~结构 $\Omega_{12} := \Omega|_{\widetilde{F}_{1,0}} \boxminus \Omega|_{\widetilde{F}_{2,0}}$。接下来我们断言，子簇 $F_{1,0} \times_{Y_0} F_{2,0} \subset F_{1,0} \times F_{2,0}$ 关于 Ω_{12}是各向同性的~。正如我们在命题 3.20 的证明中所见，$\mathrm{JH} \circ \pi_X$：$X_0 \to Y_0$ 是一个辛消解。令~ ~W 为 $F_{1,0} \times_{Y_0} F_{2,0}$ 的任意不可约分支，赋予其约化概形结构。令 η_1 为复合~ ~ ~ ~$W \to F_{1,0} \to X_0$，并令 η_2 为复合 $W \to F_{2,0} \to X_0$，则

$$\mathrm{JH} \circ \pi_X \circ \eta_1 = \mathrm{JH} \circ \pi_X \circ \eta_2.$$

将 V记为 q 的像：$W \to Y_0$ 其中 $q = \mathrm{JH} \circ \pi_X \circ \eta_1$，并且我们仍将态射 $W \to V$记为 q。根据 [Kal，引理 2.9]，，我们可以分别用开子簇 U 和 Z 替换 V 和 W，使得 U 和 Z 光滑，且 q：$Z \to U$ 光滑，并且 $\eta_1^*\Omega = q^*\Omega_U$，1 和 $\eta_2^*\Omega = q^*\Omega_U$,2，其中 Ω_U,1、Ω_U,2 $\in \Omega^2(U)$。根据 [Kal，引理 2.9]，的证明中的构造，对于 $i = 1, 2$，$\Omega_{U,i}$ 仅取决于态射 $U \to Y_0$，而不取决于 η_i，因此我们有 $\Omega_{U,1} = \Omega_U$,2。由此可知，Ω_{12} 在 Z 上的限制等于 $\eta_1^*\Omega - \eta_2^*\Omega = 0$。这~ ~意味着 W 是各向同性的，因此 $F_{1,0} \times_{Y_0} F_{2,0}$ 是各向同性的。

根据各向同性性质，$\dim \widetilde{F}_{1,0} \times_{Y_0} \widetilde{F}_{2,0} \leqslant \frac{1}{2} \dim \widetilde{F}_{1,0} \times \widetilde{F}_{2,0}$。因此，

$$\begin{aligned}\dim F_{1,0} \times_{Y_0} F_{2,0} \leqslant \dim \widetilde{F}_{1,0} \times_{Y_0} \widetilde{F}_{2,0} &\leqslant \frac{1}{2} \dim \widetilde{F}_{1,0} \times \widetilde{F}_{2,0}\\ &\overset{(\text{by the smoothness of } \widetilde{F}_{i,0} \to \mathcal{H})}{=} \frac{1}{2}(\dim \widetilde{F}_1 + \dim \widetilde{F}_2) - \dim \mathcal{H}\\ &= \frac{1}{2}(\dim F_1 + \dim F_2) - \dim \mathcal{H}/\Gamma.\end{aligned}$$

□

命题 3.23。设 σ 是 A 的一个余特征，且 $F_1, F_2 \in \mathrm{Fix}_\sigma(X)$。设 $Z \subset X \times_Y X$ 是一个不同于对角线 Δ_X 的不可约分支。那么

$$\dim(F_1 \times F_2) \cap Z \leqslant \frac{1}{2}(\dim F_1 + \dim F_2) - 1. \tag{3.29}$$

证明。设 T 是 $(F_1 \times F_2)$ 中维数最大的不可约分支，并记 $T_b := T \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\}$ 对任意 $b \in \mathcal{H}/\Gamma$。由于 $T_b \subseteq F_1 \times_Y F_2 \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\}$，由引理 3.22 可得 dim $T_b \leqslant \frac{1}{2}$(dim F_1 +dim F_2) − dim $\mathcal{H}/\Gamma$。

在命题 3.20 的证明中，我们已经证明 $Z \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \mathcal{H}^\circ/\Gamma$ 为空，因此

$$\dim(F_1 \times F_2) \cap Z \leqslant \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \sup_{b \in \mathcal{H}/\Gamma} \dim T_b \leqslant \frac{1}{2}(\dim F_1 + \dim F_2) - 1. \qquad \square$$

注 3.24. 若 $F_1 \neq F_2$，则 $(F_1 \times F_2) \cap \Delta_X = \emptyset$，由命题 3.23 可得

$$\dim F_1 \times_Y F_2 \leqslant \frac{1}{2}(\dim F_1 + \dim F_2) - 1. \tag{3.30}$$

4. Stable envelope correspondences for symmetric quiver varieties

4.1. 定义。 我们称余特征 $\sigma\colon \mathbb{C}^* \to \mathsf{A}$ 为一般的，如果 $X^\sigma = X^{\mathsf{A}}$。回顾一下 COZZ 中对 $\mathrm{Lie}(\mathsf{A})_{\mathbb{R}}$ 所描述的墙与室结构 [1]，，使得 σ 一般当且仅当它属于某个室。

环面根 是出现在 X^{A} 的正规丛中的 A-权 $\{\alpha\}$ 所构成的集合。有限个根超平面之并的补集的一个连通分支称为室，即

$$\mathrm{Lie}(\mathsf{A})_{\mathbb{R}} \Big\backslash \bigcup_{\alpha \in \mathrm{roots}} \alpha^\perp = \bigsqcup_j \mathfrak{C}_j,$$

其中 $\mathfrak{C}_j$ 是室。F

或一个 a lgebraic 变量iety M 具有 A-作用，并取余特征 σ，令 S 为 M^σ的子集，即吸引集 is

$$\mathrm{Attr}_\sigma(S) := \{x \in M \mid \lim_{t \to 0} \sigma(t) \cdot x \in S\}.$$

设 $\mathfrak{C}$ 为上述的一个室，我们定义

$$\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(S) := \mathrm{Attr}_\xi(S)$$

对于一个 子集 $S \subseteq X^{\mathsf{A}}$ 以及 $\xi \in \mathfrak{C}$。注意，该定义不依赖于所选的 ξ.

设 $F \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$ 是 A-不动点轨迹的一个连通分支，则 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)$ 是 X 中的一个局部闭子概形，且吸引映射

$$\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F) \to F, \quad x \mapsto \lim_{t \to 0} \xi(t) \cdot x,$$

根据 Bialynicki–Birula [BB] 的结果，它是一个仿射纤维化。

F 在 X 中的正规丛分解为 A-特征子丛：

$$N_{F/X} = \bigoplus_\alpha N^\alpha_{F/X},$$

使得 A 以权 α作用于 $N^\alpha_{F/X}$。定义

$$N^+_{F/X} = \bigoplus_{\alpha(\xi)>0} N^\alpha_{F/X}, \quad N^-_{F/X} = \bigoplus_{\alpha(\xi)<0} N^\alpha_{F/X},$$

对于某个 $\xi \in \mathfrak{C}$（等价地，对于所有 $\xi \in \mathfrak{C}$）。

Cons在 $\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$ 上考虑一个偏序，它是以下关系的传递闭包 ：

$$F_i \preceq F_j \quad \text{if} \quad F_j \cap \overline{\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F_i)} \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

完全吸引集定义为

$$\mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}(F) := \bigcup_{F \preceq F'} \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F').$$

我们将 $\mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}$ 记为 $X \times X^{\mathsf{A}}$ 的最小 A-不变闭子集，使得 $\mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}$ 包含对角线 $\Delta \subseteq X^{\mathsf{A}} \times X^{\mathsf{A}}$ 并且

$$(x', y) \in \mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}} \text{ and } \lim_{t \to 0} \sigma(t) \cdot x = x' \text{ implies } (x, y) \in \mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}.$$

根据定义，$\mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}$ 是一个 子集 $\bigcup_{F \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)} \mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}(F) \times F \subseteq X \times X^{\mathsf{A}}$。另请注意，$\mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}} \cap (F \times F) = \Delta_F$.

定义 4.1。 固定如上所述的一个室 $\mathfrak{C}$。稳定包络对应是一个由 $\mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}$ 支撑的 T-等变 Borel–Moore 同调类：

$$[\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}] \in H^{\mathsf{T}}(X \times X^{\mathsf{A}})_{\mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}}$$

其满足以下两个公理：

(i) 对于任意固定 的分量 $F \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$, $[\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}]\big|_{F \times F} = e^{\mathsf{T}}(N^-_{F/X}) \cdot [\Delta_F]$ 对于对角线 $\Delta_F \subseteq F \times F$;

(ii) 对任意 $F' \neq F$，不等式 $\deg_{\mathsf{A}}[\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}]\big|_{F' \times F} < \deg_{\mathsf{A}} e^{\mathsf{T}}(N^-_{F'/X})$ 成立。

注 4.2. (i) 根据定义可知，稳定包络对应若存在则唯一 [COZZ1，命题 3.21]。(ii) 如 [COZZ1，命题 3.31], 所述，对任意 T-不变正则函数 w: $X \to \mathbb{C}$，应用典范映射 [COZZ1，公式 (2.8)]:

$$\mathrm{can}\colon H^{\mathsf{T}}(X \times X^{\mathsf{A}})_{\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}^{f}} \to H^{\mathsf{T}}(X \times X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w} \boxminus \mathsf{w})_{\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}^{f}} \tag{4.2}$$

通过稳定包络对应 [$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}$]并使用卷积，我们得到临界稳定包络

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}\colon H^{\mathsf{T}}(X^{\mathsf{A}}, \mathsf{w}) \to H^{\mathsf{T}}(X, \mathsf{w}).$$

4.2. **稳定包络对应的存在性**。

定理 4.3。 设 $\overline{\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)}$ 为 $X \times F$ 中对角线 $\Delta_F \subset F \times F$ 的吸引集的闭包。那么 $\sum_{F \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)} [\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]$ 是一个稳定包络对应。

证明。 只需证明，对于每个 $F \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$, $[\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]$ 满足定义 4.1 中的公理 (i) 和 (ii)。公理 (i) 是显然的。对于公理 (ii), 类 $(F' \times F \hookrightarrow X \times F)^*[\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]$ 支持在子簇 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) \cap (F' \times F)$ 上，其维数根据下面的引理 4.4 严格小于 $\frac{1}{2}(\dim F + \dim F')$。因此

$$\begin{aligned}
\deg_{\mathsf{A}}(F' \times F \hookrightarrow X \times F)^*[\overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)] &\leqslant \dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) \cap (F' \times F) - \big(\dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) + \dim(F' \times F) - \dim(X \times F)\big) \\
&< \frac{1}{2}(\dim F + \dim F') - \big(\dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) + \dim(F' \times F) - \dim(X \times F)\big) \\
&= \mathrm{rk}\, N^-_{F'/X} = \deg_{\mathsf{A}} e^{\mathsf{T}}(N^-_{F'/X}).
\end{aligned}$$

这验证了公理 (ii)。 □

在定理 4.3 的证明中，我们用到了以下结论。

引理 4.4。 设 $F, F' \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$ 是两个不同的不动分支。那么

$$\dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) \cap (F' \times F) < \frac{1}{2}(\dim F + \dim F').$$

证明。 设 $\widetilde{F}', \widetilde{F} \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(\widetilde{X})$ 是 $\widetilde{X}^{\mathsf{A}}$ 的连通分支，使得 $\pi_X|_{\widetilde{F}}\colon \widetilde{F} \to F$ 和 $\pi_X|_{\widetilde{F}'}\colon \widetilde{F}' \to F'$ 适当、满射且泛有限；它们的存在性已在命题 3.18 的证明中得到证明。那么我们有一个诱导的适当且满射映射

$$\overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}}) \cap (\widetilde{F}' \times \widetilde{F}) \to \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) \cap (F' \times F)$$

其中 $\overline{\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}}(\Delta_{\widetilde{F}})$ 是 $\widetilde{X}$ 对角线 $\Delta_{\widetilde{F}} \subset F \times F$ 在 $X \times F$ 中的吸引集的闭包。特别地，我们有

$$\dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) \cap (F' \times F) \leqslant \dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}}) \cap (\widetilde{F}' \times \widetilde{F}).$$

令 Z 为 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}}) \cap (F' \times F)$ 的一个不可约分支。对于一个态射 $M \to \mathcal{H}$，定义 $M^\circ = M \times_{\mathcal{H}} \mathcal{H}^\circ$ 和 $M_h = M \times_{\mathcal{H}} \{h\}$，其中 $h \in \mathcal{H}$。由于 X° 是一个仿射簇（见例 3.2），$\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}^\circ})$ 在 $X^\circ \times F^\circ$ 中是闭的。因此，$\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}}) \cap (F'^\circ \times F^\circ) = \emptyset$，特别地，$Z^\circ = \emptyset$。

我们断言，$\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})_0$ 是 $X_0 \times F_0$ 的一个各向同性子簇，其中后者赋有辛形式 $\Omega' = \Omega \boxminus \Omega|_{\widetilde{F}_0}$（$\Omega$ 是 Nakajima 箭图簇 $X_0 = \mathcal{N}_{\theta^\delta}(Q^{\mathrm{aux}}, \mathbf{v}^{\mathrm{aux}}, \mathbf{d}^{\mathrm{aux}})$ 上的辛形式）。考虑例 3.2 中构造的二形式 $\omega \in \Omega^2(\widetilde{X})$，它具有如下性质：$\omega|_{\widetilde{X}_0} = \Omega$。定义

$$\omega' = \omega \boxminus \omega|_{\widetilde{F}} \in \Omega^2(\widetilde{X} \times \widetilde{F}).$$

显然，ω' 在 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})$ 上的限制为零。因此，由连续性可知，ω' 在 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})$的光滑轨迹上的限制为零。令 W 为 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})_0 = \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}}) \cap (X_0 \times F_0)$ 的一个不可约分支。对于一般的点 $w \in W$，存在一列点 $x_1, x_2, \cdots$，它们位于 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})$ 的光滑轨迹中并趋近于 w，使得 $T_{x_i}\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})$ 的极限存在，记作 $i \to \infty$，且包含切空间 $T_w W$ [5]。由于 ω' 在 $T_{x_i}\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})$ 上的限制为零，故得证。

[5] 这可以 通过为 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})$ 选择一个 Whitney分层来实现，其中 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}})_0$ 是若干分 ata.

于是，由 [MO，引理 3.4.1]，$\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}}) \cap (F_0' \times F_0)$ 是 $F_0' \times F_0$ 的一个各向同性子簇。因此，

$$\begin{aligned}
\dim Z \leqslant \dim \mathcal{H} - 1 + \sup_{h\in\mathcal{H}} \dim Z_h &\leqslant \dim \mathcal{H} - 1 + \dim Z_0 \\
&\leqslant \dim \mathcal{H} - 1 + \dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\widetilde{F}}) \cap (\widetilde{F}_0' \times \widetilde{F}_0) \\
&\leqslant \dim \mathcal{H} - 1 + \frac{1}{2}(\dim \widetilde{F}_0 + \dim \widetilde{F}_0') \\
\text{(by the smoothness of } \widetilde{F}' \to \mathcal{H} \text{ and } \widetilde{F} \to \mathcal{H}) \quad &= \frac{1}{2}(\dim \widetilde{F} + \dim \widetilde{F}') - 1 \\
&= \frac{1}{2}(\dim F + \dim F') - 1
\end{aligned}$$

□

5. Sheaf theoretic analysis of critical stable envelopes

Nakajima[Nak4, §5]研究了辛解消的稳定包络与双曲限制之间的联系。本节将这一联系推广到带势的对称箭图簇的临界稳定包络与双曲限制之间。作为应用，我们利用双曲限制的结合律，为对称箭图簇给出三角引理 [COZZ1, Thm. 4.16] 的另一种证明。

5.1. 一种 Steinberg 型簇及其同调。

考虑 §3.5 中的 Jordan-Hölder 态射：

$$\mathsf{JH}\colon X = \mathcal{M}_\theta(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) \to \mathcal{M}_0(Q,\mathbf{v},\mathbf{d}) = Y.$$

设 $\mathfrak{C} \subset \mathrm{Lie}(\mathsf{A})_{\mathbb{R}}$ 是一个室，σ 是 $\mathfrak{C}$ 中的一般余特征，并且

$$\mathcal{A}_Y = \{y \in Y\colon \lim_{t\to 0} \sigma(t)\cdot y \text{ exists}\}$$

是 Y 的吸引子簇，连同吸引映射和闭浸入：

$$\mathsf{a}\colon \mathcal{A}_Y \to Y^{\mathsf{A}}, \quad i\colon \mathcal{A}_Y \hookrightarrow Y. \tag{5.1}$$

注意，由于 Y 是仿射的，$\mathcal{A}_Y$ 是 Y 的闭子簇。

令 $\mathrm{D}_c^b(-)$ 表示可构造层的有界导出范畴，并考虑双曲限制函子 [Br]：

$$\mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} = \mathsf{a}_* i^!\colon \mathrm{D}_c^b(Y) \to \mathrm{D}_c^b(Y^{\mathsf{A}}). \tag{5.2}$$

定义闭子簇

$$\mathcal{A}_X := X \times_Y \mathcal{A}_Y \subset X. \tag{5.3}$$

注意，$\mathcal{A}_X$ 按 X 上不动分支的吸引子簇分层，特别地，

$$\mathcal{A}_X \overset{\text{as set}}{=\!=} \bigcup_{F\in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)} \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F). \tag{5.4}$$

将投影 $\mathcal{A}_X \to \mathcal{A}_Y$ 与吸引映射 (5.1) 复合，我们得到映射 $\mathcal{A}_X \to Y^{\mathsf{A}}$。利用这一点，我们定义

$$\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}_X \times_{Y^{\mathsf{A}}} X^{\mathsf{A}} \subset X \times X^{\mathsf{A}}. \tag{5.5}$$

令 $\mathbb{C}_M$ 表示簇 M 上的常值层。若 M 光滑且连通，则令

$$\mathcal{C}_M := \mathbb{C}_M[\dim M]$$

为平移常值偏 perversity 层；对于光滑且不连通的 M，我们将 $\mathcal{C}_M$ 定义为各连通分支上的平移常值偏 perversity 层。

命题 5.1（参见 [Nak3，引理 4]）。我们有一个自然同构

$$H_*(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}}) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathrm{D}_c^b(Y^{\mathsf{A}})}(\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \mathcal{C}_{X^{\mathsf{A}}}, \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \mathcal{C}_X), \tag{5.6}$$

其中 $H_*(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}})$ 是 $\mathsf{Z}_{\mathcal{A}}$ 的 Borel–Moore 同调，$\mathsf{JH}^{\mathsf{A}} = \mathsf{JH}|_{X^{\mathsf{A}}}$，$\mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}}$ 是双曲限制函子 (5.2)。对于一个连通分支 $F \subset X^{\mathsf{A}}$，(5.6) 写作

$$H_{\dim X + \dim F - i}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{D}_c^b(Y^{\mathsf{A}})}(\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \mathcal{C}_F, \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \mathcal{C}_X).$$

特别地，我们有

$$H_{\dim X + \dim F}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_c^b(Y^{\mathsf{A}})}(\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \mathcal{C}_F, \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \mathcal{C}_X). \tag{5.7}$$

引理 5.2. $\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)$ 包含一个不可约分支 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)$。此外，

$$\dim \mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F) = \dim \overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F) = \frac{1}{2}(\dim X + \dim F),$$

并且 $\overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)$ 是 $\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)$ 的唯一最高维分支。特别地，我们有

$$H_{\dim X + \dim F}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)) = \mathbb{C} \cdot [\overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]. \tag{5.8}$$

证明。显然，$\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)$ 包含 $\overline{\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)}$，且后者的维数为 $\frac{1}{2}(\dim X + \dim F)$。令 $\mathsf{Z}^{\circ}_{\mathcal{A}} = \mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \mathcal{H}^{\circ}/\Gamma$，它是 $\mathsf{Z}_{\mathcal{A}}$ 中的开子集。由于 JH: $X^{\circ} \to Y^{\circ}$ 是同构，我们有

$$\mathsf{Z}^{\circ}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F) = \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{F^{\circ}}).$$

特别地，$\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\overline{\Delta_F})$ 包含 $\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)$ 的一个开子集，因此 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)$ 是 $\overline{\mathsf{Z}_{\mathcal{A}}} \cap (X \times F)$ 的一个不可约分支。

令 W 为 $\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)$ 的一个不可约分支，且不同于 $\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)$。令 $W^{\circ} = W \cap \overline{\times_{\mathcal{H}/\Gamma}} \mathcal{H}^{\circ}/\Gamma$ 和 $W_b = W \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{b\}$ 对于 $b \in \mathcal{H}/\Gamma$。那么，命题 3.20 的证明中所用的同一论证表明，W° 为空且 W_0 非空，因此我们有

$$\dim W \leqslant \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \sup_{b \in \mathcal{H}/\Gamma} \dim W_b \leqslant \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \dim W_0.$$

设 $\mathsf{Z}_{\mathcal{A},0} = \mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \times_{\mathcal{H}/\Gamma} \{0\}$。定义 $\mathcal{A}_{\widetilde{X}_0} = \widetilde{X}_0 \times_Y \mathcal{A}_Y \subset \widetilde{X}_0$，并且 $\widetilde{\mathsf{Z}}_{\mathcal{A},0} = \mathcal{A}_{\widetilde{X}_0} \times_{Y_0^{\mathsf{A}}} \widetilde{X}_0^{\mathsf{A}}$。于是存在一个自然的真满射态射 $\widetilde{\mathsf{Z}}_{\mathcal{A},0} \to \mathsf{Z}_{\mathcal{A},0}$。令 $F \in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$ 为一个在命题 3.18 的证明中支配 F 的不动分支。根据 [Nak4，命题 4.5，$\mathsf{Z}_{\mathcal{A},0} \cap (X_0 \times F_0)$ 是 $X_0 \times F_0$ 中的一个拉格朗日子簇2]。特别地，$\dim \widetilde{\mathsf{Z}}_{\mathcal{A},0} \cap (\widetilde{X}_0 \times \widetilde{F}_0) = \frac{1}{2} \dim \widetilde{X}_0 \times \widetilde{F}_0$。由此可得

$$\begin{aligned}
\dim W \leqslant \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \dim \mathsf{Z}_{\mathcal{A},0} \cap (X_0 \times F_0) &\leqslant \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \dim \widetilde{\mathsf{Z}}_{\mathcal{A},0} \cap (\widetilde{X}_0 \times \widetilde{F}_0) \\
&= \dim \mathcal{H}/\Gamma - 1 + \frac{1}{2} \dim \widetilde{X}_0 \times \widetilde{F}_0 \\
\text{(by the smoothness of } \widetilde{X} \to \mathcal{H} \text{ and } \widetilde{F} \to \mathcal{H}) \quad &= \frac{1}{2}\left(\dim \widetilde{X} + \dim \widetilde{F}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2}(\dim X + \dim F) - 1
\end{aligned}$$

□

5.2. **与 c 的联系** **临界稳定包络**。$\mathcal{A}_Y$、$\mathcal{A}_X$ 和 $\mathsf{Z}_{\mathcal{A}}$ 的构造是 T-等变的，因此

$$H^{\mathsf{T}}_{\dim X + \dim F}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b_{c,\mathsf{T}}(Y^{\mathsf{A}})}(\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \mathcal{C}_F, \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \mathcal{C}_X),$$

其中 $\mathrm{D}^b_{c,\mathsf{T}}(Y^{\mathsf{A}})$ 表示 T-等变可构造复形的导出范畴。由引理 5.2，得

$$H^{\mathsf{T}}_{\dim X + \dim F}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}} \cap (X \times F)) = \mathbb{C} \cdot [\overline{\mathrm{Attr}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)].$$

特别地，基本类 $[\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]$ 给出一不典范映射

$$\mathsf{S}_F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b_{c,\mathsf{T}}(Y^{\mathsf{A}})}(\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \mathcal{C}_F, \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \mathcal{C}_X). \tag{5.9}$$

现在设 w: $X \to \mathbb{A}^1$ 是一个 T-不变正则函数。那么它限制在 X^{A} 上仍是一个 T-不变正则函数，并下降为 Y 和 Y^{A} 上的 T-不变正则函数。我们滥用记号，仍用 w 表示它们。令与 w 相关的消失循环函子为 φ_{w}。由于消失循环函子与真推前和双曲限制可交换，例如参见 [Nak4, 命题 5.4.1], ，映射 (5.9) 诱导出一个映射

$$\varphi_{\mathsf{w}}(\mathsf{S}_F)\colon \mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_F \cong \varphi_{\mathsf{w}} \mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \mathcal{C}_F \xrightarrow{\varphi_{\mathsf{w}}(\mathsf{S}_F)} \varphi_{\mathsf{w}} \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \mathcal{C}_X \cong \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_X. \tag{5.10}$$

对式 (5.10) 两边取 T-等变超上同调，我们得到

$$\begin{aligned}
H_{\mathsf{T}}(F, \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_F) \cong H_{\mathsf{T}}(Y^{\mathsf{A}}, \mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_* \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_F) &\xrightarrow{H_{\mathsf{T}}(Y^{\mathsf{A}}, -) \circ \varphi_{\mathsf{w}}(\mathsf{S}_F)} H_{\mathsf{T}}(Y^{\mathsf{A}}, \mathrm{Res}^Y_{Y^{\mathsf{A}}} \mathsf{JH}_* \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_X) \cong H_{\mathsf{T}}(\mathcal{A}_Y, i^! \mathsf{JH}_* \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_X) \\
&\xrightarrow[i_* = i_!]{i_! i^! \to \mathrm{id}} H_{\mathsf{T}}(Y, \mathsf{JH}_* \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_X) \cong H_{\mathsf{T}}(X, \varphi_{\mathsf{w}} \mathcal{C}_X),
\end{aligned}$$

这与由 $\mathrm{can}([\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]) \in H^{\mathsf{T}}(X\times F,\ \mathsf{w}\boxminus\mathsf{w})_{\mathsf{z}_{\mathcal{A}}\cap(X\times F)}$ 诱导的临界卷积映射相同，其中 can 是典范映射 (4.2)。综上，我们得到临界稳定包络

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C}}\colon H^{\mathsf{T}}(F,\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w}).^{6}$$

5.3. **仿射对称箭图簇上的周 perversity 层**。令 IC_Y 表示与定义在 $Y=\mathcal{M}_0(Q,\mathbf{v},\mathbf{d})$ 的 Zariski 开稠密子集（可取为 Y°）上的平凡一维局部系统相对应的交叉上同调复形。由于 JH 是真、双有理且小的（定理 1.1），存在自然同构:

$$\mathsf{JH}_*\,\mathcal{C}_X\cong \mathrm{IC}_Y\,.$$

类似地，根据命题 3.21，JH^{A} 是真、双有理且小的，因此

$$\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*\,\mathcal{C}_{X^{\mathsf{A}}}\cong \mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}\,.$$

于是，(5.7) 可改写为

$$H_{\mathrm{top}}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}})\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(Y^{\mathsf{A}})}(\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}},\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y),$$

其中 $H_{\mathrm{top}}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}})=\bigoplus_{F\in\text{不动}_{\mathsf{A}}(X)}H_{\dim X+\text{维数 }F}(\mathsf{Z}_{\mathcal{A}}\cap(X\times F))$ 表示按分支计的最高次数同调。

对于一个光滑 A-簇 V，若其切丛与余切丛之间存在 A-等变同构 $T_V\cong T^*_V$，则对任意不动分支 F，有 $\dim\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)=\frac{1}{2}(\dim V+\dim F)$。由此可得自然同构

$$\mathrm{Res}^{V}_{F}\,\mathcal{C}_V=(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)\to F)_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)\to V)^!\mathcal{C}_V\cong(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)\to F)_*\mathbb{C}_{\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)}[\dim F]\cong\mathcal{C}_F. \tag{5.11}$$

将上述讨论应用于 $V=Y^\circ$，可得到一个自然同构

$$\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}\cong\big(\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y\big)\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}. \tag{5.12}$$

命题 5.3。存在一个同构

$$\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}\cong\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y\,.$$

此外，$\mathsf{S}=\sum_{F\in\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)}\mathsf{S}_F\colon \mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}\to\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y$ (5.9) 是将同构（5.12）从 $Y^{\circ\mathsf{A}}$ 延拓至 Y^{A}的唯一同构。

证明。设 $j\colon \mathcal{A}_X\hookrightarrow X$ 为闭浸入，则由适当基变换有 $i^!\mathsf{JH}_*=\mathsf{JH}_*\,j^!$，其中第二个 JH 来自 $\mathcal{A}_X$ 到 $\mathcal{A}_Y$。利用分层（5.4），我们定义

$$K_{\succeq I}:=\mathsf{JH}_*\,j_{\succeq I*}j^!_{\succeq I}\mathcal{C}_X,$$

其中 $I\subset\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$ 是不动分支的集合，并且

$$j_{\succeq I}\colon\bigcup_{\substack{F'\in\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)\\ \exists F\in I,F'\succeq F}}\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F')\hookrightarrow X$$

是吸引子簇并集的闭浸入。于是 $K_{\succeq\emptyset}=0$ 和 $K_{\succeq\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)}=\mathsf{JH}_*\,j^!\mathcal{C}_X$，并且对于一对 $I\subset I'$，存在一个自然映射 $K_{\succeq I}\to K_{\succeq I'}$。设 $I\subset I'$ 是 $\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$ 的两个子集，满足 $I'\setminus I=\{F\}$，则有一个恰当三角

$$K_{\succeq I}\to K_{\succeq I'}\to\mathsf{JH}_*k_{F*}k_F^!\mathcal{C}_X\to K_{\succeq I}[1],$$

其中 $k_F\colon\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)\hookrightarrow X$ 是吸引子簇到 X中的浸入。沿吸引映射 $\mathsf{a}\colon\mathcal{A}_Y\to Y^{\mathsf{A}}$ 进行推前并作用于上述三角，得到一个恰当三角

$$\mathsf{a}_*K_{\succeq I}\to\mathsf{a}_*K_{\succeq I'}\to\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*\mathcal{C}_F\to\mathsf{a}_*K_{\succeq I}[1],$$

其中我们用到了

$$\mathsf{a}_*\mathsf{JH}_*k_{F*}k_F^!\cong\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(F)\to F)_*k_F^!=\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*\,\mathrm{Res}^{X}_{F},$$

以及 $\mathrm{Res}^{X}_{F}\,\mathcal{C}_X\cong\mathcal{C}_F$（对于 $V=X$，即 (5.11)）。注意，$\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*\mathcal{C}_F\cong\mathrm{IC}_{\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}(F)}$。对 $I\subset\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)$ 作归纳可知，对于所有 I，$\mathsf{a}_*K_{\succeq I}\in\mathrm{Perv}(Y^{\mathsf{A}})$；特别地，$\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y\cong\mathsf{a}_*K_{\succeq\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)}$ 是一个偏 perversity 层。此外，$\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y$具有一个由 $\mathsf{a}_*K_{\succeq I}$ 给出的滤过，其关联分次（记为 $\mathrm{gr}\,\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y$）同构于$\bigoplus_{F\in\mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)}\mathrm{IC}_{\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}(F)}=\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}$。若一开始将 IC_Y设为权重零，则 $\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y$是权重零的纯对象 $[\mathrm{Br}],$，因此 $\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y$同构于其简单构成因子的直和，即 $\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y\cong\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}$。

[6]根据定义 [COZZ1, (2.3)], $H_i^{\mathsf{T}}(X,\mathsf{w})=H^{-i}\,\tau\,(X,\varphi_{\mathsf{w}}\,\omega_X)$, 其中 $\omega_X=\mathcal{C}_X[\dim X]$ 是 X上的对偶化复形。因此，稳定包络映射 $H_i^{\mathsf{T}}(F,\mathsf{w})\to H^{\mathsf{T}}_{i+\dim X-\dim F}(X,\mathsf{w})$中的次数平移，恰好由 $\omega_X=\mathcal{C}_X[\dim X]$ 和 $\omega_F=\mathcal{C}_F[\dim F]$中的次数平移所补偿。

我们注意到，同构 (5.11) 的逆映射由基本类 $[\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_F)]$ 给出。由于 S_F 到 F° 的限制是由基本类 $[\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{F^\circ})]$, 诱导的，因此 $\mathsf{S}|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}$ =(5.12)。由于 $\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}} = \bigoplus_{F\in \mathrm{Fix}_{\mathsf{A}}(X)} \mathrm{IC}_{\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}(F)}$ 的每个简单构成成分的支撑都与 $Y^{\circ\mathsf{A}}$ 有非平凡的交，限制映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b_c(Y^{\mathsf{A}})}(\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}, \mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b_c(Y^{\circ\mathsf{A}})}\left(\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}, \left(\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y\right)\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}\right) \tag{5.13}$$

是一个同构。因此，S 是唯一延拓同构 (5.12) 的同态。特别地，S 是一个同构。□

注 5.4. 考虑相反室 $-\mathfrak{C}$，并将由此得到的同构记为

$$\mathsf{S}^-\colon \mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*\mathcal{C}_{X^{\mathsf{A}}} \cong \mathsf{a}^-_* i^{-!}\mathsf{JH}_*\mathcal{C}_X,$$

其中 $i^-\colon \mathcal{A}^-_Y = \{y\in Y\colon \lim_{t\to\infty}\sigma(t)\cdot y \text{exists}\} \hookrightarrow Y$是 $-\mathfrak{C}$吸引集的闭浸入（σ是 $\mathfrak{C}$中的一般余特征），且 $\mathsf{a}^-\colon \mathcal{A}^-_Y \to Y^{\mathsf{A}}$是吸引映射。

令 $(\mathsf{S}^-)^{\mathrm{t}}$ 为 S^-的转置，即对两边应用 Verdier 对偶:

$$(\mathsf{S}^-)^{\mathrm{t}}\colon \mathbb{D}\mathsf{a}^-_* i^{-!}\mathsf{JH}_*\mathcal{C}_X \cong \mathbb{D}\mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*\mathcal{C}_{X^{\mathsf{A}}}.$$

由 JH 和 JH^{A} 的真性，以及 $\mathcal{C}_X$ 和 $\mathcal{C}_{X^{\mathsf{A}}}$的自对偶性，$(\mathsf{S}^-)^{\mathrm{t}}$ 诱导出一个自然同构

$$\mathsf{a}^-_! i^{-*}\mathsf{JH}_*\mathcal{C}_X \cong \mathsf{JH}^{\mathsf{A}}_*\mathcal{C}_{X^{\mathsf{A}}}.$$

利用函子的自然同构 $\mathsf{a}^-{}_! i^{-*} \cong \mathsf{a}_* i^!$ [Br], , 我们有

$$(\mathsf{S}^-)^{\mathrm{t}}\colon \mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{IC}_Y \cong \mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}}.$$

此外，容易看出 $(\mathsf{S}^-)^{\mathrm{t}}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}$ 是 $\mathsf{S}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}$ 的逆。由同构 (5.13) 可得

$$(\mathsf{S}^-)^{\mathrm{t}}\circ\mathsf{S} = \mathrm{id}, \quad \mathsf{S}\circ(\mathsf{S}^-)^{\mathrm{t}} = \mathrm{id}. \tag{5.14}$$

我们将 参见 [COZZ1，第 3.29] 条引理，其中给出了在更一般情形下 (5.14) 的对应版本 .

5.4. 层论三角引理。 设 $\mathfrak{C}'$ 是 $\mathfrak{C}$ 的一个面，$\mathsf{A}'\subset\mathsf{A}$ 是其李代数由 $\mathfrak{C}'$ 张成的子环面。设 $Y_{\mathsf{A}'}$ 是 Y 的 A'-不动点轨迹，则我们有沿$\mathfrak{C}'$-吸引方向从 Y 到 $Y^{\mathsf{A}'}$ 的双曲限制

$$\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}'}} = (\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}'})\to Y^{\mathsf{A}'})_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}'})\to Y)^!\colon \mathrm{D}^b_c(Y)\to \mathrm{D}^b_c(Y^{\mathsf{A}'}),$$

以及沿 $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$-吸引方向从 $Y^{\mathsf{A}'}$ 到 Y_{A} 的双曲限制

$$\mathrm{Res}^{Y^{\mathsf{A}'}}_{Y^{\mathsf{A}}} = (\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}})\to Y^{\mathsf{A}})_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}})\to Y^{\mathsf{A}'})^!\colon \mathrm{D}^b_c(Y^{\mathsf{A}'})\to \mathrm{D}^b_c(Y^{\mathsf{A}}).$$

注意到存在一个笛卡尔图[7]:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(Y^{\mathsf{A}}) & \hookrightarrow & \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}}) & \hookrightarrow & Y^{\mathsf{A}'}, \end{array} \tag{5.15}$$

其中，水平箭是闭浸入，竖直箭是沿 $\mathfrak{C}'$方向的吸引。对 (5.15) 应用基变换，得到

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}})\to Y^{\mathsf{A}})_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}})\to Y^{\mathsf{A}'})^!(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}'})\to Y^{\mathsf{A}'})_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}'})\to Y)^! \\ \cong&(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}})\to Y^{\mathsf{A}})_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(Y^{\mathsf{A}})\to \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}}))_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(Y^{\mathsf{A}})\to \mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}'}))^!(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}'}(Y^{\mathsf{A}'})\to Y)^! \\ \cong&(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(Y^{\mathsf{A}})\to Y^{\mathsf{A}})_*(\mathrm{Attr}_{\mathfrak{C}}(Y^{\mathsf{A}})\to Y)^!, \end{aligned}$$

从而得到如下结论。

命题 5.5. 我们有函子之间的自然同构

$$\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}} \cong \mathrm{Res}^{Y^{\mathsf{A}'}}_{Y^{\mathsf{A}}}\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}'}}. \tag{5.16}$$

[7]为证明这一点，我们注意到，若 Y 是 A 的线性表示，则这样的笛卡尔图存在。一般而言，我们可以将 Y 嵌入 A 的一个线性表示 V 中，并将针对 V 的图限制到 Y。

将 (A $\mathfrak{C}$) 对应的命题 5.3 中的同构记为

$$\mathsf{S}_{\mathfrak{C}}\colon\ \mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}} \cong \mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\,\mathrm{IC}_{Y}\,.$$

R将 (A $\mathfrak{C}$) 分别替换为 (A′, $\mathfrak{C}'$) 和 (A/A′, $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$)，我们得到一个同构

$$\mathsf{S}_{\mathfrak{C}'}\colon\ \mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}'}} \cong \mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}'}}\,\mathrm{IC}_{Y},\quad \mathsf{S}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}\colon\ \mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}} \cong \mathrm{Res}\,Y^{\mathsf{A}'}_{Y^{\mathsf{A}}}\,\mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}'}}\,.$$

命题 5.6。我们有

$$\mathrm{Res}^{Y^{\mathsf{A}'}}_{Y^{\mathsf{A}}}(\mathsf{S}_{\mathfrak{C}'})\circ\mathsf{S}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'} = \mathsf{S}_{\mathfrak{C}}\colon\ \mathrm{IC}_{Y^{\mathsf{A}}} \to \mathrm{Res}^{Y^{\mathsf{A}'}}_{Y^{\mathsf{A}}}\,\mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}'}}\,\mathrm{IC}_{Y} \underset{(5.16)}{\cong} \mathrm{Res}^{Y}_{Y^{\mathsf{A}}}\,\mathrm{IC}_{Y}\,. \tag{5.17}$$

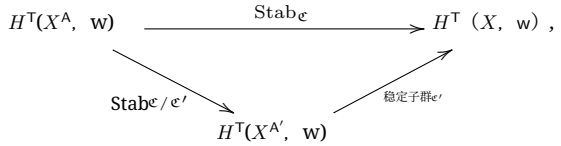
证明。如上所述，$\mathsf{S}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}$ 与将自然同构 (5.11) 应用于带有环面 A/A′ 作用和室 $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'$ 的 $V = Y^{\circ\mathsf{A}'}$ 所得的结果一致；$\mathsf{S}_{\mathfrak{C}'}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}'}}$ 与将自然同构 (5.11) 应用于带有环面 A′ 作用和室 $\mathfrak{C}'$ 的 $V = Y^{\circ}$所得的结果一致。由构造可知

$$\text{复合 } \mathcal{C}_{Y^{\circ\mathsf{A}}} \underset{(5.11)}{\cong} \mathrm{Res}^{Y^{\circ}{}'}_{Y^{\circ}{}^{\mathsf{AA}}}\,\mathcal{C}_{Y^{\circ\mathsf{A}'}} \underset{(5.11)}{\cong} \mathrm{Res}^{Y^{\circ}{}'}_{Y^{\circ}{}^{\mathsf{AA}}}\mathrm{Res}^{Y^{\circ}}_{Y^{\circ\mathsf{A}'}}\,\mathcal{C}_{Y} \underset{(5.16)}{\cong} \mathrm{Res}^{Y^{\circ}}_{Y^{\circ\mathsf{A}}}\,\mathcal{C}_{Y} \text{ 等于 } \mathcal{C}_{Y^{\circ\mathsf{A}}} \underset{(5.11)}{\cong} \mathrm{Res}^{Y^{\circ}}_{Y^{\circ\mathsf{A}}}\,\mathcal{C}_{Y},$$

因此我们有 $\mathrm{Res}^{Y^{\circ}{}'}_{Y^{\circ}{}^{\mathsf{AA}}}(\mathsf{S}_{\mathfrak{C}'}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}'}})\circ\mathsf{S}_{\mathfrak{C}/\mathfrak{C}'}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}} = \mathsf{S}_{\mathfrak{C}}\big|_{Y^{\circ\mathsf{A}}}$。于是，由 Hom 空间到 $Y^{\circ\mathsf{A}}$ 的限制映射 (5.13) 是同构这一事实可得该命题。□

将消失循环函子 φ_{w} 应用于 (5.17)，然后取 T-等变超上同调，我们得到以下三角引理（参见 [COZZ1，定理 4.16]）。

定理 5.7。以下图表



是交换的。

References

[BB] A. Bialynicki-Birula, *Some Theorems on Actions of Algebraic Groups*, 《数学年刊》第 98 卷，第 3 期（1973），480–497。[Br] T. Braden, *Hyperbolic localization of intersection cohomology*, 《变换群》8，第 3 期（2003）：209–216。[COZZ1] Y. Cao、A. Okounkov、Y. Zhou 和 Z. Zhou, *Stable envelopes on critical loci*, arXiv:2512.23929。[COZZ2] Y. Cao、A. Okounkov、Y. Zhou 和 Z. Zhou, *Shifted quantum groups via critical stable envelopes*, arXiv:2601.01518。[COZZ3] Y. Cao、A. Okounkov、Y. Zhou 和 Z. Zhou, *in preparation*。[CG] N. Chriss 和 V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, 《现代伯克豪瑟经典丛书》（2010）。[CB] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, 《组合数学》126，第 3 期（2001）：257–293。[Gin] V. Ginzburg, *Lectures on Nakajima's quiver varieties*, arXiv:0905.0686。[GW] U. G¨ortz 和 T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I: Schemes*, Vieweg+ Teubner, 2010。[HL] D. Halpern-Leistner, *The derived category of a GIT quotient*, 《美国数学会杂志》28（2014），第 3 期，871–912。[Kal] D. Kaledin, *Symplectic singularities from the Poisson point of view*, 《纯粹与应用数学杂志》600（2006）：135–156。[MO] D. Maulik 和 A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, Ast´erisque 408（2019），ix+209。[Nak1] H. Nakajima。*Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, 《杜克数学杂志》76（2）：365–416，1994。[Nak2] H. Nakajima。*Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, 《杜克数学杂志》91（3）：515–560，1998。[Nak3] H. Nakajima, *Quiver varieties and tensor products, II*，收录于《对称性、可积系统与表示》，第 403–428 页。伦敦：伦敦施普林格，2013。[Nak4] H. Nakajima, *Lectures on perverse sheaves on instanton moduli spaces*, IAS/帕克城数学丛书（2017）：381–436。[Slo] P. Slodowy, *Simple singularities and simple algebraic groups*, 《数学讲义》第 815 卷，施普林格，1980。[Stacks] *The Stacks project*, https://stacks.math.columbia.edu，2024。

Morningside Center of Mathematics, Institute of Mathematics & State Key Laboratory of Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China*Email address*: yalongcao@amss.ac.cn

Department of Mathematics, Columbia University, New York, U.S.A.
Email address: okounkov@math.columbia.edu

Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China
Shanghai Institute for Mathematics and Interdisciplinary Sciences (SIMIS), Shanghai 200433, China*Email address*: yehao.zhou@simis.cn

School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China
Email address: zijun.zhou@sjtu.edu.cn