arXiv:2601.02733v1 [math.DG] 6 Jan 2026

几乎复全测地曲面，位于近凯¨勒$\mathbf{SL}(3,\mathbb{R})$ $\mathbb{R}\times\mathbf{SO}(2)$

MATEO ANARELLA、XIUXIU CHENG、MARIE D'HAENE、ZEJUN HU 和 LUC VRANCKEN

Abstract. 我们详细描述近凯¨勒 SL(3, $\mathbb{R}$) $\mathbb{R}\times$SO(2)，它是旗流形 $F(\mathbb{C}^3)$ 的伪黎曼对应空间之一。本文的主要结果是对该空间中全测地全复曲面的分类。

¯设 $(M,\ g)$ 是一个（伪）黎曼流形，其上配备了一个与 g 相容的几乎复结构 J。若 ∇J 是反对称的，其中 ∇ 是与 g 相关联的列维-奇维塔联络，则称 $(M,\ g,\ J)$ 为近凯¨勒流形。此外，若 ∇J^{-}非退化，则称 M 为严格近凯¨勒流形。1970年，Gray [5] 将许多关于凯¨勒流形拓扑和几何的著名定理与公式推广到了近凯¨勒流形。此后，近凯¨勒流形的研究引起了广泛关注 [4, 5, 6, 7, 12, 8, 10]。

二维和四维近凯勒流形总是凯勒流形。因此，对严格近凯勒流形的研究始于六维。Butruille [2] 证明，在黎曼情形下，六维中唯一完备、单连通的齐性严格近凯勒流形是 $\mathbb{S}^6$、$\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$、$\mathbb{C}P^3$ 和 $F(\mathbb{C}^3)$。然而，伪黎曼情形下的这类分类仍未解决。

Kath [8] 给出了旗流形 $F(\mathbb{C}^3)$ 的四种伪黎曼类比：

$$
\begin{array}{ll}
F(\mathbb{C}^3) \longrightarrow \dfrac{SU(2,\ 1)}{U(1)\times U(1)} & \text{近凯勒，} \\
\longrightarrow \dfrac{SU(2,1)}{SO(1,1)\times U(1)} & \text{近似 para-K¨ahler，} \\
\longrightarrow \dfrac{SL(3,\ \mathbb{R})}{\mathbb{R}\times SO(2)} & \text{近似 K¨ahler，} \\
\longrightarrow \dfrac{SL(3,\ \mathbb{R})}{(\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+})\cup(\mathbb{R}^{-}\times\mathbb{R}^{-})} & \text{近乎抛物K¨ahler。}
\end{array}
$$

注意，近乎抛物K¨ahler流形是一个（伪）黎曼流形（$M,\ g$），配备了一个（1，1）-张量 J，满足 $J^2=\mathrm{Id}$、$g(JX,\ JY)\ =\ -g(X,\ Y)$，且 $\bar{\nabla}J^{-}$是斜对称的，其中 ∇ 是与 g相关联的列维-奇维塔联络。

Cwiklinski 和 Vrancken [3] 研究了旗流形$F(\mathbb{C}^3)$ 上的近 K¨ahler 结构，以及其伪黎曼对应空间 $\mathrm{SU}(2,\ 1)\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)$，并对这两个空间中的全测地几乎复子流形进行了分类。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C42.*Key words and phrases.* 几乎复、全测地、近乎K¨ahler、齐性。M. Anarella部分受到FWO和FNRS通过EOS项目G0I2222N的资助。X. X. Cheng受到河南省自然科学基金（资助编号：252300421476）和中国国家自然科学基金（资助编号：12001494）的资助。M. D'haene受到Methusalem资助METH/21/03——佛兰德政府的长期结构性资助，以及FWO（佛兰德研究基金会）资助K217724N的支持。Z. J. Hu受到中国国家自然科学基金资助，资助编号：12171437。

本文聚焦于旗流形的另一个伪黎曼对偶，即 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})\ \mathbb{R}\times\mathrm{SO}(2)$。我们在第 2 节描述该空间的结构，随后在第 3 节对全测地几乎复曲面进行分类。这里，若子流形 Σ 的切空间在 J 作用下保持不变，即 $J(T\Sigma) \subseteq T\Sigma$，则称其为几乎复子流形。

在陈述主要定理之前，我们先引入以下记号。设 $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ 是带有度量的半欧几里得空间

$$\langle v, w\rangle_p = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i(p)w_i(p) + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} v_i(p)w_i(p), \quad \text{where } v = \sum_{i=1}^{n+1} v_i\partial_i,\ w = \sum_{i=1}^{n+1} w_i\partial_i,$$

其中 $\{\partial_i\}_{i=1}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ 的一个坐标标架。我们将 $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ 中半径为 $r>0$、指标为 ν 的伪球面记作

$$S^n_\nu(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu \mid \langle p, p\rangle = r^2\}.$$

定理 A. 设 $f : \Sigma \to \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})\ \mathbb{R}\times\mathrm{SO}(2)$ 是一个全测地近复曲面。则，

(1) Σ 局部等距于 $S^2_2(1\ 2)$，且 f 局部全等于例 *3.1* 中的浸入，即子群 $SL(2,\mathbb{R}) \subset SL(3,\mathbb{R})$ 的一个轨道，该轨道经过 $[Id]$；或 *(2)* Σ 局部等距于 $S^2(1)$，且 f 局部全等于例 *3.2* 中的浸入，即子群 $SO(3) \subset SL(3,\mathbb{R})$ 的一个轨道，该轨道经过 $[Id]$；或 *(3)* Σ 局部等距于 $S^2_2(1)$，且 f 局部全等于例 *3.3* 中的浸入，即子群 $SO^+(2,1) \subset SL(3,\mathbb{R})$ 的一个轨道，该轨道经过 $[Id]$；或 *(4)* Σ 局部等距于 $\mathbb{R}^2_2$，且 f 局部全等于例 *3.4* 中的浸入，即子群 $\mathbb{R}^2 \subset SL(3,\mathbb{R})$ 的一个轨道，该轨道经过 $[Id]$；或 *(5)* Σ 是一个退化曲面，且 f 局部全等于例 *3.5* 中的浸入，即子群 $\mathbb{R}^2 \subset SL(3,\mathbb{R})$ 的一个轨道，该轨道经过 $[Id]$。

1. Preliminaries

定义 1.1. 设 Σ 是几乎厄米流形 (M, g, J) 的一个子流形。若 J 保持切空间不变，即 $J(T\Sigma) \subseteq T\Sigma$，则称 Σ 为几乎复子流形。

定义 1.2. 设 Σ 是伪黎曼空间 $\tilde{M}$ 中的一个（退化）子流形，且该空间配备列维-奇维塔联络 ∇。若对于任意 $p \in \Sigma$ 和 $v \in T_pM$，初速度为 v 的测地线在初始阶段位于 Σ 中，则称 Σ 为全测地子流形。

引理 1.1. 以下命题等价：

(1) Σ 是全测地的。*(2)* 对于 $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$，$\nabla_X Y$ 属于 Σ 的切空间。

此外，若 Σ 非退化，则上述断言等价于以下命题：

(3) Σ 的测地线也是 M 的测地线。*(4)* Σ 的第二基本形式处处为零。

证明。若子流形是非退化的，则该命题可归结为 [11] 中的命题 4.13。因此，这里我们只证明 Σ 退化时 (1) 与 (2) 的等价性。

(2) $\Rightarrow$ (1) 假设 ∇ 在 Σ 上诱导出一个仿射联络，并具有对称性质，那么对于每个切向量 $v \in T_p\Sigma$，都存在一条唯一的测地线 γ 位于 Σ 中，其初速度为 v，且从 p 出发。根据唯一性，将 ∇ 分别视为 M 和 Σ 上的仿射联络时，所得到的测地线必定重合。

(1) $\Rightarrow$ (2)。假设 Σ 是全测地的。固定一个 $p \in \Sigma$，并在 p 的邻域 $U \subset \Sigma$ 中，选取 TM 内 TU 的一个光滑补空间 $\mathcal{N}$。我们记作 $(\nabla_X Y)^p =$

$\tau_p(X,\ Y)+\nu_p(X,\ Y)$，其中 τ取值于 TU，而 ν取值于 $\mathcal{N}$。与非退化情形一样， τ 是 U 上的仿射联络，而 ν 是双线性对称张量。任取$v\in T_pU$，令 γ_v 为 M 上初速度为 v的测地线。由于 γ 起初始终处于Σ中，我们可以将 τ_p分解为 $(v,\ \gamma_v')+\nu_p(v,\ v)=\nabla_v\gamma_v'=0$。因此，对于所有 $v\in T_pU$，都有 $\nu_p(v,\ v)=0$。由于 ν 是对称的，可得 $\nu=0$。□

2. The nearly Kähler structure on $\frac{\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})}{\mathbb{R}\times\mathrm{SO}(2)}$

回顾一下，$\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})=\{a\in\mathrm{GL}(3,\ \mathbb{R})\mid\det a=1\}$，其对应的李代数为 $\mathfrak{sl}(3,\ \mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{3\times3}\mid\mathrm{Tr}\,A=0\}$。我们用 $H\cong\mathbb{R}\times\mathrm{SO}(2)$ 表示 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})$ 的李子群，该子群由满足以下条件的元素组成

$$\begin{pmatrix} e^t\cos s & e^t\sin s & 0\\ -e^t\sin s & e^t\cos s & 0\\ 0 & 0 & e^{-2t}\end{pmatrix},\tag{2.1}$$

其中 $t\in\mathbb{R}$ 和 $s\in[0,2\pi)$。

李代数 $\mathfrak{sl}(3,\ \mathbb{R})$ 的一组基由以下矩阵给出：

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$e_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\sqrt{2}&0&0\end{pmatrix},\quad e_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix},$$

$$e_7=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&\frac{-2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad e_8=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

我们用 $\mathfrak{h}$、分别用 $\mathfrak{m}_1$、$\mathfrak{m}_2$、$\mathfrak{m}_3$ 表示由 $\{e_7,e_8\}$、分别由 $\{e_1,e_2\}$、$\{e_3,e_4\}$、$\{e_5,e_6\}$ 张成的向量空间，注意，$\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数。由于 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2\oplus\mathfrak{m}_3$ 在 $\mathrm{Ad}(H)$ 下不变，且 $\mathfrak{sl}(3,\ \mathbb{R})=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$，齐性空间 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})/H$ 是约化的。更具体地说，H 在 $\mathfrak{m}$上的伴随作用如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(h)(e_1,e_2)&=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}\cos2s&\sin2s\\-\sin2s&\cos2s\end{pmatrix},\\ \mathrm{Ad}(h)(e_3,e_4)&=(e_3,e_4)\begin{pmatrix}\cos s&\sin s\\-\sin s&\cos s\end{pmatrix}e^{3t},\\ \mathrm{Ad}(h)(e_5,e_6)&=(e_5,e_6)\begin{pmatrix}\cos s&\sin s\\-\sin s&\cos s\end{pmatrix}e^{-3t},\end{aligned}$$

其中 $h\in H$ 具有形式 (2.1)。注意，每个 $\mathfrak{m}_i$ 都是 $\mathrm{Ad}(H)$-不变的。因此，通过左平移 $\mathfrak{m}_i(i=1,\ 2,\ 3)$，我们可以在 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})/H$ 上定义三个秩为二的分布 V_1、V_2和 V_3，它们在 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})$作用下不变。

现在，我们在 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})$上定义一个双不变度量：$\langle dL_aX,\ dL_aY\rangle=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(XY)$，其中 $X,\ Y\in\mathfrak{sl}(3,\ \mathbb{R})$。在单位元处，相对于 $\{e_1,\dots,e_8\}$，该度量的非零分量为

$$\langle e_1,e_1\rangle=\langle e_2,e_2\rangle=\langle e_7,e_7\rangle=-1,\quad \langle e_3,e_5\rangle=\langle e_4,e_6\rangle=\langle e_8,e_8\rangle=1.$$

$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 在 $V_1\oplus V_2\oplus V_3$ 上的限制是一个符号差为 4 的不定度量，并且在 $\mathrm{Ad}(H)$作用下不变。因此，我们可以在商空间 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})/H$上定义一个 $\mathrm{SL}(3,\ \mathbb{R})$-不变度量 g。此外，注意到

$$\langle e_i,[e_j,e_k]\rangle=\langle[e_i,e_j],e_k\rangle,\quad (i,j,k\in\{1,\dots,6\})$$

因此，$(\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/H,g)$ 是一个自然的约化齐性空间。

我们可以在 $\mathfrak{m}$ 上定义两个线性复结构 J 和 J_1，它们由以下条件确定：

$$\begin{aligned} Je_1 &= -e_2, & Je_3 &= e_4, & Je_5 &= e_6 \\ J_1e_1 &= e_2, & J_1e_3 &= e_4, & J_1e_5 &= e_6. \end{aligned} \tag{2.2}$$

直接计算表明，J 和 J_1 与 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 相容，并且与 H 在 $\mathfrak{m}$上的伴随作用交换。通过将这些结构左延拓，我们在 SL(3，$\mathbb{R}$) 上得到两个 SL(3，$\mathbb{R}$)-不变的几乎复结构，它们与 g相容。事实上，J_1 是一个可积的复结构，而 J将 (SL(3，$\mathbb{R}$)$/H$，g，J) 变成一个近 K¨ahler 流形。

为了得到 (SL(3，$\mathbb{R}$)$/H$，g) 的曲率张量表达式，我们定义一个线性算子 F，称为 F-结构 [13],，其作用于 $\mathfrak{m}$如下：

$$Fe_1 = Fe_2 = 0, \quad Fe_3 = e_4, \quad Fe_4 = -e_3, \quad Fe_5 = -e_6, \quad Fe_6 = e_5. \tag{2.3}$$

直接计算表明，F 关于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$是对称的，与 H 在 $\mathfrak{m}$上的伴随作用交换，并且 $F^3 + F = 0$。因此，通过左延拓，我们可以在 SL(3，$\mathbb{R}$) 上定义一个 SL(3，$\mathbb{R}$)-不变的 (1,1) 型张量 F。此外，J、J_1和 F两两交换。

利用前面引入的结构，我们可以将 (SL(3,$\mathbb{R}$)$/H, g$) 的曲率张量表示如下：

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z = &\frac{5}{2}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right)) \\ &- \frac{3}{4}\left(g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ\right) \\ &+ \frac{9}{4}\left(g(Y,J_1JZ)J_1JX - g(X,J_1JZ)J_1JY\right) \\ &+ \frac{3}{4}\left(g(J_1JY,Z)X - g(J_1JX,Z)Y + g(Y,Z)J_1JX - g(X,Z)J_1JY\right)) \\ &- 3\left(g(Y,FZ)FX - g(X,FZ)FY\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Totally geodesic almost complex surfaces of SL(3,ℝ)ℝ× SO(2)

设 Σ是 (SL(3,$\mathbb{R}$)$/H, g, J$) 中的一个几乎复曲面，其中 J由 (2.2) 定义。注意，若 Σ 非退化，则诱导度量为正定或负定，因为对于任意 $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$，$g(JX, JX) = g(X, X)$ 且 $g(X, JX) = 0$。

3.1. 全测地几乎复曲面的例子。 为得到分类结果，我们在 SL(3,ℝ) ℝ×SO(2) 中引入五个曲面，并证明它们是全测地且几乎复的。为此，我们使用下面两个引理。

对于非退化曲面，我们将引理 2.1] 推广到伪黎曼环境空间；对于退化曲面，则使用一个类似于定理 4.3]的结果。

引理 3.1. 设 G/H 是一个自然约化伪黎曼齐性空间，其约化分解为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$。设 $K \subset G$ 是一个李子群，且其轨道 $K \cdot o$ 是一个非退化子流形，其中 $o = [\mathrm{Id}]$。分别记 $K \cdot o$ 在 o 处的切空间和法空间为 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}$ 和 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$（视为 $\mathfrak{m}$ 的子空间）。那么，$K \cdot o$ 在 o 处的第二基本形式为

$$h(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}^{\perp}},$$

其中 X、$Y \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{m}}$。

如果 $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m})$，则称子代数 $\mathfrak{k}$ 为规范嵌入于 $\mathfrak{g}$ 中的子代数。

引理 3.2。设 Σ 是自然约化伪黎曼流形 G/H 的退化子流形，且对于具有规范嵌入于 $\mathfrak{g}$ 中的李代数 $\mathfrak{k}$ 的李子群 K，有 $\Sigma = K \cdot [\mathrm{Id}],$。则 Σ 是全测地子流形。

例 3.1. 对于 $u \in \mathbb{R}$ 和 $v \in [0, 2\pi)$，考虑

$$f_1(u,v) = \pi \circ \exp(u(\cos v\, e_1 + \sin v\, e_2)) = \left[\begin{pmatrix} \cosh u + \cos v \sinh u & \sin v \sinh u & 0 \\ \sin v \sinh u & \cosh u - \cos v \sinh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

f_1 的像的切空间为 V_1，因此在 J作用下保持不变。因此，该曲面是几乎复的。此外，它是一个负定曲面，具有常截面曲率 4，并且是子群 $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \subset \mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 经过 $[\mathrm{Id}]$ 的轨道。因此，f_1的像与 $S^2_2(1/2)$等距。最后，由于 $[e_1, e_2]$ 包含于 $\mathfrak{h}$，由引理 3.1可知，该曲面是全测地的。

例 3.2. 设 $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_5)$。对于 $u \in \mathbb{R}$ 和 $v \in [0, 2\pi)$，考虑

$$f_2(u,v) = \pi \circ \exp\left(2u(\cos v\, X + \sin v\, JX)\right) = \left[\begin{pmatrix} \cos^2 u - \cos 2v \sin^2 u & -\sin^2 u \sin 2v & \cos v \sin 2u \\ -\sin^2 u \sin 2v & \cos^2 u + \cos 2v \sin^2 u & \sin 2u \sin v \\ -\cos v \sin 2u & -\sin 2u \sin v & \cos 2u \end{pmatrix} \right].$$

f_2 的像是一个截面曲率为 1 的近复曲面。此外，它是李子群 $\mathsf{SO}(3) \subset \mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 经过 $[\mathrm{Id}]$ 的轨道。因此，f_2 的像与球面 $S^2(1)$ 等距。最后，由于 $[X, JX]$ 包含于 $\mathfrak{h}$，由引理 3.1 可知，该曲面是全测地的。

例 3.3。设 $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_5)$。对于 $u \in \mathbb{R}$ 和 $v \in [0, 2\pi)$，考虑

$$f_3(u,v) = \pi \circ \exp(2u(\cos v\, X + \sin v\, JX)) = \left[\begin{pmatrix} \cosh^2 u + \cos 2v \sinh^2 u & \sin 2v \sinh^2 u & \cos v \sinh 2u \\ \sin 2v \sinh^2 u & \cosh^2 u - \cos 2v \sinh^2 u & \sin v \sinh 2u \\ \cos v \sinh 2u & \sin v \sinh 2u & \cosh 2u \end{pmatrix} \right].$$

f_3 的像是一个截面曲率为 1 的负定近复曲面。此外，它是李子群 $\mathsf{SO}^+(2,1) \subset \mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 经过点 $[\mathrm{Id}]$ 的轨道。因此，该曲面与 $S^2_2(1)$ 等距。最后，由于 $[X, JX]$ 包含于 $\mathfrak{h}$，由引理 3.1 可知，该曲面是全测地的。

例 3.4. 令 $X = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 + e_3 = \frac{1}{3} e_5$。对于 $u, v \in \mathbb{R}$，考虑

$$f_4(u,v) = \pi \circ \exp(u\, X + v\, JX) = \left[e^{-\frac{u}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-v}\left(1 + e^{2v} + 4e^{u+v}\right) & -\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh v & -\frac{e^{-v}\left(1+e^{2v}-2e^{u+v}\right)}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh v & \cosh v & \sqrt{2}\sinh v \\ -\frac{e^{-v}}{3\sqrt{6}}\left(1 + e^{2v} - 2e^{u+v}\right) & \frac{\sqrt{2}}{3}\sinh v & \frac{1}{3}e^{-v}\left(1 + e^{2v} + e^{u+v}\right) \end{pmatrix} \right].$$

f_4 的像是一个负定平坦近复曲面。此外，它是李子群 $\mathbb{R}^2 \subset \mathsf{SL}(3,\mathbb{R})$ 经过 $[\mathrm{Id}]$ 的轨道，其李代数为 $\mathsf{span}\{X, JX\}$。因此，该曲面与 $\mathbb{R}^2_2$ 等距。最后，由于 $\mathsf{span}\{X, JX\}$ 是阿贝尔的，根据引理 3.1 可知该曲面是全测地的。

例 3.5. 对于 $u,\ v \in \mathbb{R}$，考虑

$$f_5(u,v) = \pi \circ \exp\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(ue_3 + ve_4)\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

f_5 的像的切空间为 V_2，因此在 J作用下保持不变。因此，该曲面是几乎复的。此外，它是一个退化曲面，并且是子群 $\mathbb{R}^2 \subset$ SL(3，$\mathbb{R}$)经过 [Id] 的轨道。最后，由于李代数 span$\{e_3, e_4\}$包含于 $\mathfrak{m}$中，根据引理 3.2可知，该曲面是全测地的。

3.2. **定理 A 的证明**。 设 X 为一个单位切向量。注意，当 Σ 上的诱导度量为负定时，我们取长度为 -1的 X 。经过可能的限制，取一个开稠密子集后，我们可以假设局部上以下情况之一成立：

(1) X ，从而 $T\Sigma$也包含于单个分布 V_i中；(2) X ，从而 $T\Sigma$也包含于两个分布 $V_i \oplus V_j$的直和中；(3) X ，从而 $T\Sigma$也包含于全部三个分布的直和中。

注意，映射 φ: SL(3, $\mathbb{R}$)/H $\to$SL(3, $\mathbb{R}$)/H：$[A] \mapsto [(A^t)^{-1}]$ 是一个不属于 SL(3, $\mathbb{R}$) 的等距变换，后者是 SL(3, $\mathbb{R}$)/H的等距变换群的单位分支。直接计算可知， φ_* 保持 V_1 不变——也就是说，$(V_1)^p$ 经 φ_*映射后包含于$(V_1)^{\varphi(p)}$ 中——并且 φ_* 将$(V_2)^p$ 映入$(V_3)^{\varphi(p)}$ ，反之亦然。因此， X 包含于 $V_1 \oplus V_2$ 和 $V_1 \oplus V_3$ 中的情形，可通过环境空间的一个等距变换相互关联。此外，由于 M 几乎复， TM 由 X 和 JX 张成，因此我们可以取 X 与 JX之间长度为 ± 1 的任意线性组合作为基元素。最后，我们还可以对 H 施加伴随作用以简化 X，而不改变曲面 Σ。

综合以上论证，在假设曲面非退化的前提下，我们将问题归结为以下情形：

(1) $X = e_1$，(2) $X = \varepsilon e_1 + e_5$ ，其中 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$；(3) $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + \varepsilon e_5)$，其中 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$；(4) $X = ae_1 + e_3 + \frac{1}{2}(a^2 + \varepsilon)e_5 + be_6$，其中 $a > 0$ 且 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

如果允许曲面退化，则还会得到另一种情形：

(5) $X = e_3$.

注意，环境空间的曲率张量必须保持全测地曲面的切空间不变，无论该曲面是退化还是非退化。由此我们推得情形（2）不可能出现。事实上，利用曲率公式（2.4），我们得到 $R(X, JX)JX = -4\varepsilon e_1 + 2e_5$，它不属于 span$\{X, JX\}$。类似地，在情形（4）中，通过计算 $\bar{R}(X, JX)JX$，我们推得 $\varepsilon = -1$、 $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $b = 0$。

由于根据假设， Σ 是全测地且几乎复的，因此我们知道 Σ必然是 span$\{X, JX\}$ 的黎曼指数映射。然而，由于环境空间是自然约化的，在 o 处对向量 $Y \in \mathfrak{m}$ 取黎曼指数映射，与 exp(Y) $\cdot\, o$一致，其中 exp 表示李群指数映射 [1, 定理 5.1。2]因此可立即得出，情形（1）对应于例 3.1，情形（3）对应于例 3.2 和 3.3，情形（4）对应于例 3.4，而情形（5）对应于例 3.5。

References

[1] V. Berestovskii 和 Y. Nikonorov。 *Riemannian manifolds and homogeneous geodesics*。Springer 数学专著。Springer，Cham， [2020] ©2020。[2] J.-B. Butruille。齐性近复 K ¨ *Handbook of pseudo-Riemannian geom-* ahler 流 *etry and supersymmetry* 16, 399 423 ¨ 2010 形。载于 , 第 卷，页码 – 。Eur. Math. Soc. Zurich, .[3] K. Cwiklinski 和 L. Vrancken。近复旗流形中的几乎复曲面。 , ( ): Paper No. . [4] A. Gray。流形上的向量叉积。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 141 465 504, 1969 : – 。[5] A. Gray。近复 K¨ahler 流形。 *Journal of Differential Geometry*, 4(3): 283–309, 1970.

[6] A. Gray。具有
3 *Journal of Differential Geom-* 阶测地对称的黎
etry 7 3 4 343 369, 1972
曼流形。, (-): – 。[7] A. Gray。近复 k¨ahler 流形的结构。 *Mathematische Annalen*, 223(3): 233–248, 1976。[8] I. Kath。紧黎曼齐性空间的伪黎曼
T *Transform.* -对偶。, ( ): – 。
Groups 5 2 157 179, 2000
[9] J. M. Lorenzo-Naveiro 和 A. Rodr´ıguez-V´azquez。齐性近复 K¨ahler 六流形的全测地子流形及其 G_2-锥。
ArXiv preprint arXiv:2411.11261, 2025。[10] P.-A. Nagy。近复 K
¨ 6 3 481 504, ahler 几何与黎曼
2002
叶状结构。 *Asian J. Math.*, ( ): – 。[11] B. O'Neill。 *Semi-Riemannian geometry, Pure and Applied Mathematics* 卷 103。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, 出版社], 纽约, 1983年。及其在相对论中的应用。[12] L. Sch ¨ *Nearly pseudo-Kähler manifolds and related special holonomies* 2201 *Lecture* afer。, 卷 ,
Notes in Mathematics 2017
属于。Springer, Cham, 。[13] K. Yano 和 M. Kon。 *Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics*卷 3。世界科学出版社, 新加坡, 1984年。

M. Anarella, Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University, Kita 10,Nishi 8, Kita-Ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0810, Japan*Email address*: mateo.anarella@math.sci.hokudai.ac.jpX. X. Cheng, School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001

,

People's Republic of China*Email address*: xxc19@zzu.edu.cnM. D'haene, Department of Mathematics, KU Leuven, Celestijnenlaan 200B, Box 2400, 3001Leuven, Belgium*Email address*: marie.dhaene@kuleuven.beZ. J. Hu, School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, People's Republic of China*Email address*: huzj@zzu.edu.cnL. Vrancken, Ceramaths, Université Polytechnique Hauts-de-France, F-59313 Valenci-ennes, France; Ceramaths, INSA Hauts de France, F-59313 Valenciennes, France; Departmentof Mathematics, KU Leuven, Celestijnenlaan 200B, Box 2400, 3001 Leuven, Belgium*Email address*: luc.vrancken@uphf.fr