arXiv:2601.02741v1 [math.AG] 6 Jan 2026

STACKS OF p-ADIC SHTUKAS AND 空间金伯利岩。

IAN GLEASON

摘要。本文的主要目的，是证明从 p-adic shtuka 的栈到 Fargues–Fontaine 曲线上的 G-向量丛栈的特殊牛顿多边形映射在钻石中是可表的，并且对于上同调考量足够良好（即有限维完全交）。第二个目的是证明特殊牛顿多边形映射的$\mathbb{F}_p$-纤维表现得类似于形式概形，尤其是相对于其约化轨迹满足亨泽尔性。这两项目标是本文所实现的成果，也是我们与 Hamman、Ivanov、Lourenço 和 Zou 合作构造该等价关系时所使用的关键要素之一；该等价关系比较了 Zhu 和 Fargues–Scholze 的概形局部朗兰兹范畴与解析局部朗兰兹范畴。为实现这些目标，我们引入并研究空间金伯利岩；这是作者此前发展的理论的一个行为更佳的变体。

目录

1. 引言 1
2. 记号 7
3. Kimberlite 理论 7
4. 空间金伯利岩 23
5. 空间金伯利岩的例子 33
6. 真空间金伯利岩的 Hensel 性质 38
7. shtuka 栈。 41
参考文献 48

1. 引言

自 Drinfeld 引入以来，shtuka 模空间在我们理解特征 p全局域 [Dri77、Laf02、Laf18]方面的 Langlands纲领中一直扮演着重要角色。shtuka 本身似乎也与 Grothendieck 关于动机的愿景有着密切联系，在某种程度上，这正是它们被发现的方式。事实上，Drinfeld 模的概念 [Dri74]，是 shtuka 概念的前身，它源于 Drinfeld 构造模曲线这一类似物的愿望；在 Langlands纲领中，我们喜欢将模曲线视为与椭圆曲线相关联的动机模空间。尽管我们距离实现 Grothendieck 关于动机的愿景还相当遥远，也尚未学会如何使

在数学上理解动机分类空间，但志村 簇和 shtuka叠是这些人们所寻求的分类空间的化身；时至今日，它们仍持续引导着我们在 Langlands纲领中的研究。正是沿着这一思路，通过一系列类比，并依托p-进 Hodge 理论和完美空间几何的深刻发展，Scholze 得以给出 p-进 shtuka 栈的定义，我们将其记作

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}$$

在本文中。

粗略地说， p-adic Hodge 理论旨在理解 p-adic 动机的理论。尽管学界已经认识到 Drinfeld shtuka 与出现在 p-adic Hodge 理论中的结构之间存在强烈的类比，并以此为指导，但直到引入完美空间以及 Scholze 对倾斜对应的重新诠释之后，才有人能够写出 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}$ ，使其与 Drinfeld的shtuka 处于完全相同的地位；这正是[SW20]的主要目标之一。[1]

尽管 Scholze 对 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}$ 作为 p-adic 动机分类空间的定义远非最终版本，而且我们对 p-adic Hodge 理论的理解也在逐年加深，但本文作者认为， ℓ对于研究这类栈的 $\ell \neq p$-adic étale 上同调（在 [SW20] 中出现的版本已经是值得研究的正确几何对象。

1.1. 我们为什么研究 $\mathcal{D}_{\acute{e}t}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}})$? 关于局部 Shimura 簇的 étale 上同调及其与局部朗兰兹对应之间关系的研究有着悠久的传统。这一研究始于 Drinfeld 的工作 [Dri76] ，该工作研究了所谓的 Drinfeld上半空间 Ω^d_E。Drinfeld 猜想，其上同调实现了 $\mathrm{GL}_d(E)$ 的所有超尖点表示；Carayol 后来使这一猜想得以精确表述 [Car90]，他将其表述为乘积群$W_E \times D^\times \times \mathrm{GL}_d(E)$ 的作用，从而同时实现局部朗兰兹对应和 Jacquet–Langlands对应。Kottwitz 沿着 Carayol、Faltings、Genestier 和 Harris 的开创性工作，提出了一项猜想 [Rap95, Con- jecture 5.1] ，这项猜想已成为该领域的里程碑。在他们的著作 [RZ96],中，Rapoport–Zink 系统地构造并研究了一族如今称为 Rapoport–Zink 空间的空间。促使 Rapoport 和 Zink 着手这项工作的主要原因之一，是构造 Kottwitz 猜想所涉及的几何空间。Rapoport–Zink 空间是带有附加结构的 p- 可除群的模空间；其理论十分丰富

[1]严格来说，在 [SW20], 对$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}$ 的定义中，它只间接出现。事实上，尽管第23节的引言似乎旨在帮助读者理解$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}$ 的定义，但其中唯一给出的定义是 [SW20，定义23.1。1] 原因我们不得而知。据作者所知，v-叠$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}$ 首次在文献中作为几何对象出现，是在 [GIZ25，Zha23] 尽管此前已有许多文献研究该栈的点函子。

自其问世以来直至今日，对这些空间的研究一直是算术几何中十分活跃的领域。

大约十年前，随着 Scholze 引入完美空间 [Sch12]，Fargues–Fontaine 通过曲线 [FF18]，重新表述 p-进 Hodge 理论，以及 Scholze–Weinstein 提出完美 Dieudonné 理论 [SW13]，这一理论经历了一场重大变革。这些进展促使 Rapoport 和 Viehmann 撰写了 [RV14]，其中他们提出了局部 Shimura 簇的一种初步表述，使其脱离与 p-可除群的联系。此后不久，Scholze 在其伯克利讲座 [SW20]，中引入了 p-进 shtuka，并通过将局部 Shimura 簇重新诠释为 p-进 shtuka（又称 p-进动机）的模空间，阐释了局部 Shimura 簇的一般构造。最后一项变革性进展来自 Fargues，他将局部朗兰兹对应重新诠释为“Fargues–Fontaine 曲线上的几何朗兰兹”。事实上，在 [Far16] 中，Fargues 解释了 Kottwitz 猜想如何可由特征层的存在性推出（特征层是几何朗兰兹中与特征形式相对应的对象）；而几何朗兰兹此前一直在研究传统曲线上的这类对象。Fargues 的洞见最终体现在 Fargues–Scholze 的鸿篇巨著 [FS21] 中，其中提出了范畴化局部朗兰兹猜想（CLLC），并奠定了该领域现代发展的基础。在这一框架下，Fargues 和 Scholze 描述了与元组 (G, b, μ, K) 相关的局部 Shimura 簇的上同调，指出它计算的是将 μ-Hecke 算子作用于 K-紧诱导的平凡表示后所得对象的 b-纤维 [FS21, §IX.3]。

总之，从现代视角来看，我们研究 $\mathcal{D}_{ét}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}})$，或者更确切地说，研究映射

$$\sigma_! : \mathcal{D}_{ét}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}) \to \mathcal{D}_{ét}(\mathrm{Bun}_G)$$

以计算 Hecke 算子并理解范畴局部 Langlands 猜想——几十年来，我们一直在暗中做这件事，却并未完全意识到。

在这一框架中，栈 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}$（更准确地说，其有界版本 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}$）将所有整局部 Shimura 簇“粘合”成一个映射，我们称之为特殊牛顿多边形映射，并记作

$$\sigma : \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Bun}_G.$$

事实上，给定整局部 Shimura 数据 $(G, \mathcal{G}, b, \mu)$，存在唯一的映射 b: $\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Bun}_G$（在同构意义下）$^{-}$ $^{-}$，且其 $\mathbb{F}_p$-纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Spd}(\bar{\mathbb{F}}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_G \end{array}$$

是与 $(G, \mathcal{G}, b, \mu)$ 相关的整局部 Shimura 簇。

让我们为这个问题再补充一个答案：为什么我们应该尝试理解$\mathcal{D}_{ét}$(Sht$_{\mathcal{G}}$) 以及 $\sigma_!$? 。

近年来，几何朗兰兹学界提出这样一种观点：范畴化局部朗兰兹猜想应当可以通过一种形式化过程（以更高范畴的意义取弗罗贝尼乌斯的迹），从2-范畴化几何局部朗兰兹猜想推出。这一观点的温和部分已由 Zhu 在近期工作中提出 [Zhu25]。

乍看之下，来自几何朗兰兹的范畴化局部朗兰兹猜想与 Fargues–Scholze 的表述之间并无关联。然而，我们研究

$$\sigma_! : \mathcal{D}_{ét}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}) \to \mathcal{D}_{ét}(\mathrm{Bun}_G)$$

的主要动机在于，这个映射搭起了连接两种表述的桥梁。事实上，过去几年里，我们一直致力于奠定基础，以准确阐明局部几何朗兰兹如何与 Fargues–Scholze 对 CLLC 的表述相关。该计划中相当大一部分已在 [GIZ25],我们的即将发表的合作工作 [GHI+25]以及本文中完成。今后我们将继续沿着这一思路开展工作。

1.2. 主要结果。我们固定一些记号。设 p 和 ℓ 为满足 $p \neq \ell$ 的素数。设 Λ 为一个 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-代数。设 E 为一个 p-进局部域，其整数环为 O_E，一致化元为 $\pi \in O_E$，剩余域为 $\mathbb{F}_q = O_E/\pi$。设 $\mathcal{G}$ 为 O_E 上的抛物型群概形，其约化一般纤维为 G。设 μ: $\mathbb{G}_m \to G^{\check{}}$ 为一个几何余特征共轭类，其定义域为 F。令 F 表示 F 的最大非分歧扩张的完备化。令 Sht$_{\mathcal{G},\mu}$ →Spd $O_{\breve{F}}$ 表示修改由 μ 限定的局部 shtuka 栈（见 §7 ）。令 Bun$_G$ 表示 Fargues–Fontaine 曲线 [FS21, Definition I.2.4] 上的 G-丛栈。令 $b \in B(G)$ 为 Kottwitz 集的一个元素。它定义了一个G-丛 $\mathcal{E}_b \in \bar{\mathrm{B}}\mathrm{un}_G(\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_q)$。考虑特殊牛顿多边形映射

$$\sigma : \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \to \mathrm{Bun}_G.$$

我们令 Sht$_{\mathcal{G},\ \mu}(b)$:= Sht$_{\mathcal{G},\ \mu}$ ×$_{\mathrm{Bun}_G,\ \mathcal{E}_b}$*。

定理 1.1。*(定理 7.1)* 以下陈述成立。

(1) 映射 σ :Sht$_{\mathcal{G},\ \mu}$ → Bun$_G$ 在局部空间钻石中可表（更准确地说，它是有限维完全交，定义见 [Man22，定义 5。4]）。特别是，

$$\sigma_! : \mathcal{D}_{ét}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}, \Lambda) \to \mathcal{D}_{ét}(\mathrm{Bun}_G, \Lambda)$$

exist
s.(2) *v*-叠 Sht$_{\mathcal{G},\ \mu}$ 是一个 ***Artin*** *v*-叠（见 [FS21，定义 IV.1.1]）。(3) *v*-层 Sht$_{\mathcal{G},\ \mu}(b)$ 是一个局部空间金伯利岩[2]，其约化特殊纤维是仿射 ***Deligne–Lusztig*** 簇 $X_{\mathcal{G},\ \mu}(b)$ ≃Sht$_{\mathcal{G},\ \mu}(b)^{\mathrm{red}}$。

[2]参见下文引言中的 §1.3，其中解释了这个术语。

注 1.2. 提出并证明定理 1.1.(3) 是作者最初的博士论文目标。一个较弱的结论已在 [Gle24]. 中得到证明。

注记 1.3. 映射 σ :$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \to \mathrm{Bun}_G$ 是有限维完全交（定理 1.1.(1)），在我们的合作研究 [GHI+25] 中发挥着决定性作用；我们在其中定义了一个比较函子

$$: \mathrm{Shv}^!(\mathcal{B}(G), \Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\acute{e}t}(\mathrm{Bun}_G, \Lambda). \tag{1.1}$$

这里，左侧是 Zhu [Zhu25], 定义并深入研究的概形局部朗兰兹范畴，右侧则是 Fargues 和 Scholze [FS21] 定义并深入研究的解析局部朗兰兹范畴。该函子定义为一类函子的、具有适当函子性的余极限 $\sigma_!$，这些函子先与一个解析化函子复合。要精确定义这个余极限，是 [GHI+25]. 中要解决的挑战之一。

1.3. **方法**。 我们通过一系列蕴含关系证明定理 1.1 ：

$$(3) \implies (1) \implies (2),$$

随后我们证明(3)。蕴含关系 $(1) \implies (2)$直接由[FS21，命题 IV.1.8.(iii)] 以及 [FS21，定理 IV.119]得出。蕴含关系$(3) \implies (1)$ 由 [Sch17，引理 135] 以及局部空间金伯利岩之间的映射在局部空间钻石中总是可表这一事实得出（见定理 4.13）。我们的工作大多致力于表述并证明 (3) （即发展空间金伯利岩理论）。

金伯利岩由作者在 [Gle24] 中引入，用于计算局部 Shimura 簇和 Shtuka 模空间的连通分支 [Gle21]。金伯利岩是 Scholze 的钻石与 v-层理论中形式概形的类似物 [Sch17]。

Kimberlite 理论在回答局部和整体 Shimura 簇理论中的问题方面已取得显著成效 [Gle21], [GL24], [AGLR22], [GLX25], [PR21], [PR24] [Tak25]。原因之一是，在 p-adic Hodge 理论中，许多构造在将测试范畴限制为完美空间范畴时往往更容易理解。这自然会在完美空间的 site 上产生钻石、v-层和 v-叠。其中一些 v-层通常是金伯利岩的自然例子。

在许多场合， [Gle24], [AGLR22], [GL24] 和 [GIZ25] 中已发展的金伯利岩理论提供了足够的抽象工具。特别是，当只需处理“π-adic”几何对象时，情况便是如此。

遗憾的是，金伯利岩理论无法回答一些基础性问题，除 π-adic 情形之外（见定理 3.49）。从局部 Shimura 簇理论、Rapoport–Zink 空间以及局部 shtuka 模空间的整模型的角度来看，这是个问题，因为这些对象很少是 π-adic。

空间金伯利岩（定理 4.4）弥补了金伯利岩理论的许多不足。例如，我们可以证明，空间金伯利岩的形式完备化仍是空间金伯利岩（见定理 4.12），且空间金伯利岩范畴在有限极限下稳定（见定理 4.16）。正如我们此前提到的，空间金伯利岩之间的每个映射在局部空间钻石中都自动可表（见定理 4.13）。这也表明，空间金伯利岩自动是 Artin v-层。空间金伯利岩范畴在这类自然构造下保持稳定，这一点对于证明每个 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 都是局部空间金伯利岩起着决定性作用。事实上，我们利用这些类型的自然构造来展开 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 的几何结构，因此必须知道在每一步中，（局部）空间金伯利岩这一性质都得以保留。为展开 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 的几何结构，我们依赖 [FS21]¡AGLR22], [Gle21], [Gü24], 和 [GIZ25]中的结果。

1.4. 空间金伯利岩与上同调。 尽管本文的主要目标是证明映射的存在

$$\sigma_! : \mathcal{D}_{\acute{e}t}(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}, \Lambda) \to \mathcal{D}_{\acute{e}t}(\mathrm{Bun}_G, \Lambda),$$

我们还证明了一个定理，对这一运算给出了充分的控制；这就是我们的第二个主要定理。直观地说，该定理表明，空间金伯利岩与形式概形类似，具有亨泽尔性质。下面来说明这是什么意思。

设 X 是一个空间金伯利岩，并假设其约化轨迹 X^{red} (见[Gle24，定义 3。12]) 可表为某个概形的完美化，且该概形在 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ 上是真且完美有限表示的。令 $* = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$。令$\pi : X \to *$ 表示结构映射，并令 $j : X^{\mathrm{an}} \to X$ 表示解析轨迹的包含映射。假设 $X^{\mathrm{an}} \to *$ 具有 $\mathrm{tr.deg.} < \infty$。我们的结果大致表明，上述 X 沿 X^{red}满足两种亨泽尔性质。更准确地说，结果如下。

定理 1.4. （定理 *6.2*）沿用上述记号。对所有 $A \in \mathcal{D}_{\acute{e}t}(X^{\mathrm{an}}, \Lambda)$，我们有

$$\pi_! j_* A \simeq 0 \simeq \pi_* j_! A.$$

注 1.5. 定理 1.4 结合定理1.1.(3) 是研究 $\sigma_!$ 的纤维的主要上同调工具之一，并提供了 [GHI+25] 中使用的主要计算技巧之一，用以证明该函子是等价。

致谢。 本文写于我们访问马克斯·普朗克数学研究所、波恩大学和新加坡国立大学期间，感谢这些机构的热情接待。本项目获得了德国研究联合会通过 Peter Scholze 的莱布尼茨奖提供的资助，以及新加坡国立大学 PYP 资助计划的资助。我们感谢 Peter Scholze 和 Pol van Hoften 与我们就本研究进行的讨论。

2. 符号约定

我们先固定背景。在本文余下部分中，固定一个素数 $p \in \mathbb{Z}$。我们固定一个特征为 p的完美域 k，有时会明确限定在 $\mathbb{F}_p$ 或 $\mathbb{F}_p$的情形。我们在 k [上的完美空间范畴中工作 §3]Sch17, [，该范畴赋有 v-拓扑1], Sch17，定义 8。我们将其记为 Perf。记 PSch 为 k 上的完美概形范畴，该范畴赋有概形 v 拓扑 [BS17]。我们的几何对象均为 Perf 上的小 v-叠 [Sch17, §12]，或 PSch 上的小概形论 v-叠。我们分别将这些$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$范畴记为 Perf 和 PSch。终对象分别为 Spd(k, k) 和 Spec k，所有构造均相对于这个底进行。我们用符号 $*$ 表示这些终对象。此后，我们在记号中省略 k。

除非明确说明，我们将 Spa(R, R^+) 的记号限定为表示一个仿射完美拟空间。对于更一般的 Huber 对 (A, A^+)，我们通常只考虑其对应的 v-层 Spd(A, A^+)（见 [SW20，定义 10.1.1]）。当 (A, A^+) 是满足 $A^+ = A^\circ$ 的 Huber 对时，我们写作 Spd A，而不写 Spd(A, A^+)，以表示与 (A, A^+) 相关联的 v-层。

设 B 是一个特征为 p 的完美拓扑环，并赋予由有限生成理想 $I \subseteq B$ 定义的 I- 进拓扑。我们称任何形如 Spd(B, B) 的 v- 层为一个仿射形式 v- 层。由于 $B = B^\circ$，按照上述约定，我们将写作 Spd B，而不写 Spd(B, B)。一个重要的例子是 (R, R^+) 为完美拟 Huber 对的情形。在这种情况下，Spd R^+ 是与拓扑环 R^+ 相关联的仿射形式 v- 层。

给定一个完美拟 Huber 对（R, R^+），我们将 $R^+{}_{\mathrm{red}}$ 记作（$R^+/R^{\circ\circ}$），并将其视为赋有离散拓扑的环。可以验证，这是一个完美的 k-代数。

3. Kimberlite 理论

本文旨在引入并研究空间金伯利岩。这一概念细化了 [Gle24] 中引入的预金伯利岩和金伯利岩的概念。本节回顾金伯利岩的一些基本理论。为求完整起见，我们还列出一些虽易于推导、但 [Gle24] 中未明确陈述的结论。我们回顾预金伯利岩、赋值预金伯利岩和金伯利岩，最后讨论空间金伯利岩。

3.1. **预金伯利岩。** 回顾一下，规则 Spec $A \mapsto$ Spd(A, A) 扩展为一个全忠实$\widetilde{\qquad}$函子 $\diamond$: PSch $\to$ Perf [SW20，命题 18.3。1] [Gle24，§3]，并且$\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$这个函子唯一地扩展为一个连续函子 $\diamond$: PSch $\to$Perf。此外，$\diamond$ 有一个右伴随函子 [Gle24，定义 3。12]

$$\mathrm{red} : \widetilde{\mathrm{Perf}} \to \widetilde{\mathrm{PSch}}.$$

我们令 $X^{\mathrm{Red}} = (X^{\mathrm{red}})^{\diamond}$，它带有一个由伴随给出的典范映射$X^{\mathrm{Red}} \to X$。

定义 3.1。 [Gle24，定义 3。20]映射 $X \to Y$ 是形式 *adic* 的，当且仅当下图是笛卡尔的

$$\begin{array}{ccc} Y^{\mathrm{Red}} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mathrm{Red}} & \longrightarrow & X. \end{array}$$

定义 3.2。 若 $f\colon X \to Y$ 是 v-层的闭浸入，我们称 X 是形式闭的，当且仅当 f 是形式 adic 的。

定义 3.3。 [Gle24，定义 3。27]一个 v-层是形式分离的，当且仅当对角映射是闭浸入且形式 adic 的（即形式闭浸入）。

下面是一个贯穿全文使用的关键引理 [Gle24]，遗憾的是其表述较为繁琐，见 同上引文（参见 [Gle24，引理 3。31]）。其要旨是，$\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 在$\mathrm{Spd}(R^+)$中形式稠密。

引理 3.4。 若$\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是一个完美拟空间，且 $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Spd}(R^+)$ 是一个包含$\mathrm{Spa}(R, R^+)$的形式闭子层，则 $\mathcal{F} = \mathrm{Spd}(R^+)$。

证明。 由于该映射是闭浸入，因此它是拟紧拟分离的，只需证明它在几何点上满射（见 [Sch17，引理 12。11]）。根据假设，$\mathcal{F}$ 包含开子集 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \subseteq \mathrm{Spd}(R^+)$，因此只需证明$\mathcal{F}^{\mathrm{Red}} \to \mathrm{Spd}(R^{+\,\mathrm{red}})$，而这正是 [Gle24，引理 3。31]。 □

定义 3.5。 [Gle24，定义 4。6] 给定一个 v-层 X 以及一个映射 $f\colon \mathrm{Spa}(R, R^+) \to X$ 我们称 X 将 f 形式化，如果存在一个虚线箭头，使得下方的交换图得以补全

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spa}(R, R^+) & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathrm{Spd}\, R^+. & & \end{array}$$

任何这样的箭头都称为 f 的形式化 。如果对于任意如上所述的 f，都存在一个 v 覆盖 $g\colon \mathrm{Spa}(R', R'^+) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$，使得 X将 $g \circ f$ 形式化，那么我们称 X 是*v*-形式化的 。

每当 X 是形式分离的，且 $f\colon \mathrm{Spa}(R, R^+) \to X$ 是一个映射时， f的形式化（若存在）是唯一的 [Gle24，命题 4。9]。

定义 3.6。 [Gle24，定义 4。11] 我们称 X 是特化的，如果它是形式分离的并且是 v-形式化的。

如 [Gle24命题 4 所示，14] 若 X 是特化 v-层，则它具有连续的特化映射 $\mathrm{sp}\colon |X| \to |X^{\mathrm{red}}|$，但对于一般的特化 v-层，我们无法给出更多结论。

定义 3.7。 [Gle24，定义 4。15] 若 X 是特化 v-层，我们称 $\widetilde{\quad}$ 它是一个预金伯利岩，如果 $X^{\mathrm{red}} \in$PSch 可由完美概形表示，且$X^{\mathrm{Red}} \to X$ 是闭浸入。我们记 $X^{\mathrm{an}} := X \setminus X^{\mathrm{Red}}$ 并称其为解析轨迹，属于 X。

定义 3.8。 设 X 是一个预金伯利岩。

(1) 若 X 是仿射概形，则称其为仿射前 ***kimberlite*** 。(2) 若 $|X^{\mathrm{red}}|$有一个元素，则称 X 为带点预***Kimberlite*** 。

命题 3.9。 预金伯利岩范畴和仿射预金伯利岩范畴在纤维积下封闭，且包含 $*$。特别地，这些范畴在有限极限下封闭。

证明。 设 X， Y和 Z 是预金伯利岩，并设 $W = X \times_Y Z$。根据 [Gle24，命题 4.10]，，特化的 v-层范畴在纤维积下封闭。此外，由于约化函子与极限交换，显然，只要 X^{red}、Y^{red} 和 Z^{red} 是概形（分别是仿射概形），那么 W^{red}就是概形（分别是仿射概形）。我们将 W写作映射 $X \times Z \to Y \times Y$沿着 Y的对角映射作基变换所得的结果。由于 Y 是形式分离的，映射 $W \to X \times Z$ 是形式 adic 的，因此只需证明 $X^{\mathrm{Red}} \times Z^{\mathrm{Red}} \to X \times Z$ 是闭浸入；这显然成立，因为$X^{\mathrm{Red}} \to X$ 和 $Z^{\mathrm{Red}} \to Z$ 都是如此。 □

对于预金伯利岩，可以构造一个 v-层理论的特化映射（或称 Heuer 特化映射）。给定 $S \in$ PSch ，可以通过对以下公式进行 v-层化来构造一个 v-层 $S^{\diamond/\circ\circ}$[Gle24，定义 4。23][3], [Heu24，定义 5。1] 。

$$S^{\diamond/\circ\circ_{\mathrm{pre}}} : \mathrm{Spa}(R, R^+) \mapsto S(\mathrm{Spec}\, R^+_{\mathrm{red}}).$$

事实证明，只需针对解析拓扑进行层化 [Heu24，引理 5。2]。当 X 是一个预金伯利岩时，我们令 $X^{\mathrm{H}} := (X^{\mathrm{red}})^{\diamond/\circ\circ}$。我们有一个 v-层理论的特化映射 [Gle24， §4.4]

$$\mathrm{SP}_X : X \to X^{\mathrm{H}},$$

其定义如下。

定义 3.10。 v-层理论中的特化映射按如下方式构造。若 $\alpha \in X(R, R^+)$ 且 α 可形式化，我们令 $\tilde{\alpha} \in X(\mathrm{Spd}\ R^+)$ 为其唯一的形式化。应用约化函子得到 $\tilde{\alpha}^{\mathrm{red}} \in X^{\mathrm{red}}(\mathrm{Spec}\, R^+{}_{\mathrm{red}})$，它是预层 $(X^{\mathrm{red}})^{(\diamond/\circ\circ)_{\mathrm{pre}}}(R, R^+)$ 中的一个元素。这定义了映射 $\mathrm{SP}_{X,\mathrm{pre}} : X^{\mathrm{frml}} \to (X^{\mathrm{red}})^{(\diamond/\circ\circ)_{\mathrm{pre}}}$，其源是 X 中由可形式化映射构成的子预层。现在，SP_X 是 $\mathrm{SP}_{X,\mathrm{pre}}$ 的层化。除非需要明确指出 Heuer 特化映射是相对于哪个空间取的，否则我们会在记号中省略 X ，直接写作 SP。

[3]符号 $\diamond/\circ\circ$暗示了与 $\diamond$ 函子相似，只是要对拓扑幂零元空间取商。在 [Gle24]中，我们最初采用了极简记号 $\diamond/\circ$ ，而非 $\diamond/\circ\circ$。

注 3.11。 读者或许会注意到，定理 3.10 的构造可以应用于任意特化 v-层。但关于相对于解析拓扑进行层化的说明（即 [Heu24，引理 5。2]）在这种一般情形下不再成立。

我们有如下引理。尽管它没有直接提及定理3.10，却暗中用到了该定理。它本质上说明，对于特化层而言，成为预金伯利岩是一个扎里斯基局部条件。

引理 3.12。 [Gle21，引理 2。32] 设 X 是一个特化 *v*-层，并设 $Y = X^{\mathrm{red}}$。假设 Y 可由一个完美概形表示。设 $U \subseteq Y$ 是一个开子集，并设 V 表示 X 中唯一满足 $|V| = \mathrm{sp}^{-1}(|U|)$的开子层。则有以下结论。

(1) V是一个特化 *v*-层，且 $V_{\mathrm{red}} = U$。(2) 映射 $V \to X$ 是形式 *adic*。

此外，若存在一个开覆盖 $\{U_i \to Y\}_{i\in I}$，使得 $V_i := \mathrm{sp}_X^{-1}(U_i)$ 是一个预金伯利岩，则 X 是一个预金伯利岩。

若 X 是一个预金伯利岩，且 $Z \subseteq X^{\mathrm{red}}$ 是一个局部闭子集，则可定义一个预金伯利岩 $\widehat{X}_{/Z}$ [Gle24，命题 4。21] 使得 $Z = (\widehat{X}_{/Z})^{\mathrm{red}}$ 并且它属于以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}_{/Z} & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{SP}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{SP}} \\ Z^{\diamond/\circ\circ} & \longrightarrow & X^{\mathrm{H}}. \end{array} \tag{3.1}$$

当 Z 是可构造的时，映射 $X_{/Z} \to X$ 是一个开浸入 [Gle24，命题 4。22]，但它通常**并非**形式 adic。直观地说，规则 $X \mapsto X_{/Z}$对应于沿着 X 对 Z进行完备化。

定义 3.13。 [Gle24，定义 4.18，4。38] 由图式（3.1）得到的预金伯利岩称为形式邻域，即 X 沿 Z的形式邻域。v-层$X^{\circledcirc}_{/Z} := X^{\mathrm{an}} \cap \widehat{X}_{/Z}$ 称为管状邻域，即 X 沿 Z的管状邻域。

若 X 是一个预金伯利岩，且 $U \to X^{\mathrm{red}}$ 是分离概形之间的 étale 映射，我们可以构造另一个预金伯利岩 $\widehat{X}_{/U}$，使得 $U = (\widehat{X}_{/U})^{\mathrm{red}}$，并且它适合以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}_{/U} & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{SP}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{SP}} \\ U^{\diamond/\circ\circ} & \longrightarrow & X^{\mathrm{H}}. \end{array} \tag{3.2}$$

该映射 $X_{/U} \to X$ 总是形式 adic 且 étale。此外，[Gle24，定理 4。27] 内在地刻画了所有以这种方式构造的 v-层。事实上，若 Y 是一个预金伯利岩，配有一个到 X的形式 adic 且 étale 映射，则$Y^{\mathrm{red}} \to X^{\mathrm{red}}$ 是概形之间的 étale 分离映射，并且 [Gle24，定理 4。27]表明

$$Y \simeq \widehat{X}_{/Y^{\mathrm{red}}}.$$

可以将 [Gle24，定理 4。27] 视为 étale 位点在幂零加厚下不变性的一个类似结果。

定义 3.14。[Gle24，定义 4。26]由图表 $X_{/U}$ （3.2）得到的预金伯利岩称为沿着 X 的 Uétale 形式邻域。

注 3.15。可以用 [Gle24，定义 4。26] 的 étale 形式邻域范畴来定义朴素邻近环函子 [Gle24，注 4。29]，该函子已在 [GL24] 中研究并成功应用。

以下陈述比作者最初预想的更为棘手。所幸，Kim 定理简化了这一情形（见 [Kim24，定理 1。3]）。

命题 3.16。若 X 是一个预金伯利岩，且 $f\colon Y \to X$ 是 *v*-层之间的有限 *étale* 映射，则以下陈述成立。

(1) Y 是一个预金伯利岩。(2) f 是形式 *adic* 的。(3) $Y = X_{/Y^{\mathrm{red}}}$（即 Y 是 X的 *étale* 形式邻域）。

证明。设 $Z = Y \times_X X^{\mathrm{Red}}$。由于根据假设，$X^{\mathrm{Red}}$ 可由一个概形表示，由 [Kim24, Theorem 1.3]可知，Z 也可由一个概形表示。更确切地说，$Z = T^\diamond$ 对应于 $T \to X$ 的一个有限 étale 态射。由 [Gle24, Lemma 3.32], 可知，$f\colon Y \to X$ 是形式 adic 的，并且 $T = Y^{\mathrm{red}}$（这已经处理了 Theorem 3.16.(2)）。由于 $Y \to X$ 是分离的，且 $X \to *$是分离的，因此 $\Delta_Y\colon Y \to Y \times Y$ 是一个闭浸入。由 [Gle24, Lemma 3.30]可知，Δ_Y 是形式 adic 的。由此得出，Y 是形式分离的。由于伴随映射 YRed $\to Y$是一个闭浸入，且 Y^{red} 是一个概形，要证明 Y 是一个预金伯利岩，只需证明 Y 是 v-形式化的。一旦知道 Y 是一个预金伯利岩，由 [Gle24, Theorem 4.27] 可知，必然 $Y \simeq X_{/Y^{\mathrm{red}}}$。

我们证明 Y 是 v-形式化的。首先进行一些约化。设 $g\colon$ Spa$(R, R^+) \to Y$ 是一个映射。不妨设 X形式化 $f \circ g$，并且由于点的乘积构成 v-拓扑的一个基（参见 [Gle24，备注 1.3]），我们可以假设 Spa(R, R^+) 是点的乘积。只需证明任意映射 Spa$(R, R^+) \to Y \times_X$ Spd(R^+, R^+) 都是可形式化的；换言之，不妨且确实设 $X =$ Spd(R^+, R^+)。由于有限 étale 映射 f的次数函数是局部常值的，将 X 分解为开

集与闭集之并后，我们可以约化到 f 具有某个 $n \in \mathbb{N}$下的常值次数 n 的情形。我们将 Y_1 视为 X上的 v-层 Y 与基数为 n 的常值层之间的同构所构成的 v-层。于是 $Y_1 \to X$ 是一个有限 étaleS_n-挠子。任意截面 $X \to Y_1$ 都给出一个同构 $Y \simeq X \times \{1, \dots, n\}$，并且可以显式地为此类形式的 Y 构造形式化。换言之，我们已将问题约化为证明 $X = \mathrm{Spd}(R^+, R^+)$ 上的任意 S_n-挠子都是平凡的。

由于映射 $Y_1 \to X$ 也是有限 étale 的，因此只需证明任意指向 X 的有限 étale 映射都存在一个截面。为简化记号，令 $Y = Y_1$。我们将问题归约到如下情形：$X = \mathrm{Spd}(C^+, C^+)$，其中 C^+ 是一个分式域代数闭的赋值环。具体如下。考虑 $\mathrm{Spd}(R^+[\![t]\!], R^+[\![t]\!])$，并考虑其解析~轨迹 $X := \mathrm{Spd}(R^+[\![t]\!], R^+[\![t]\!]) \setminus V(t, \varpi)$，其中 $\varpi \in R^+$ 是一个伪一致化元。不难看出，X 是一个拟紧拟分离完美拟空间，且映射 $X^{\mathrm{an}} \to X$ 是一个上同调光滑满射（参见 [Sch17, §23]），其纤维几何连通。固定 $x \in \pi_0(X)$；对于任意包含~x且开闭的 $U \subseteq \pi_0(X)$，我们有空间 $X_U = \mathrm{Spd}(R_U^+, R_U^+)$、$Y_U := X_U \times_X Y$、$X_U := X_U \times_X X$以及~$Y_U := X_U \times_X Y$，它们是通过沿相应的幂等元截取得到的。取~极限后，我们也得到空间 $X_x = \mathrm{Spd}(C_x^+, C_x^+)$、$Y_x$、$X_x$ 和 Y_x。这里，C_x^+是一个非阿基米德分式域代数闭的赋值环。假设~我们已知 $Y_x \to X_x$ 存在一个截面。那么 $Y_x \to X_x$ 存在一个截面，并且~根据 [Sch17, 引理 12.17]，此截面延拓为某个 U上的截面 $X_U \to Y_U$。~由于映射 $X_U \to Y_U$ 是有限 étale 的，其像是一个开闭子集$\tilde{T} \subseteq \tilde{Y_U}$。此外，若令 h表示映射 $h\colon \tilde{Y_U} \to Y_U$，则 $T = h^{-1}(h(T))$。~事实上，h 的纤维是连通的，而 T 在 Y_U中已经是开闭的。我们~可以将 T 下降为一个开闭子集 $T \subseteq Y_U$，使其沿 h 的基变换为~T。那么 $T \to X_U$ 是一个同构，因为它在基变换后成为同构。我们已经证明，只要 $Y_x \to X_x$ 存在一个截面，该截面就延拓为某个开闭子集 $U \subseteq \pi_0(X)$上的 $Y_U \to X_U$ 的截面，由此完成了归约步骤。

最后，我们证明任意有限 étale 映射 $f\colon Y \to X$ 在 $X = \mathrm{Spd}(C^+, C^+)$ 时都会分裂，其中 C^+ 是一个分式域为代数闭分式域的赋值环。我们证明，若 $Y \to X$ 的次数为 n，则 Y 具有 n 个连通分支。取其中一个连通分支 Y_0，得到一个映射 $Y_0 \to X$，它是次数为 1 的有限 étale 映射，因此根据 [Sch17，引理 12.5]，它必为同构。现在，我们可以将 $\mathrm{H}^0(Y, \mathbb{F}_\ell)$ 计算为 $H^0(X, f_*\mathbb{F}_\ell)$。此外，我们有一个正合三角

$$j_! f_*^{\mathrm{an}} \mathbb{F}_\ell \to f_* \mathbb{F}_\ell \to i_* f_*^{\mathrm{Red}} \mathbb{F}_\ell \tag{3.3}$$

来自切除。这里 $i\colon X^{\mathrm{Red}} \to X$ 是来自伴随的闭浸入，$j\colon X^{\mathrm{an}} \to X$ 是 i 的开补集，而映射 $f^{\mathrm{an}}\colon Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ 和 $f^{\mathrm{Red}}\colon Y^{\mathrm{Red}} \to X^{\mathrm{Red}}$ 由 $f\colon Y \to X$ 通过基变换以及（如上所见）f 是形式 adic 这一事实诱导。

根据 [GL24，引理 4.3], $R\Gamma(X, j_! f_*^{\mathrm{an}} \mathbb{F}_\ell)$ 消失。这表明 Y的连通分支数量与 Y^{Red}相同。再次利用 Kim 定理（[Kim24，定理 1.3]），我们看到，只要 f的次数为 n，就有 $Y_{\text{约化}} \simeq X^{\mathrm{Red}} \times \{1, \dots, n\}$。由于 $X^{\mathrm{Red}} = \mathrm{Spec}\,(C^+_{\text{约化}})^\diamond$，且 $C^+_{\text{约化}}$是一个分式域代数闭的赋值环，因而是严格亨泽尔的。□

注记 3.17。 可以不使用 [Kim24，定理 1。3]而代价是使定理 3.16中的论证大幅加长。这类论证归结为分析如下形式的 v-层上的有限 étale 映射$\mathrm{Spd}(k^+, k^+)$ 其中 k^+ 是赋有离散拓扑的赋值环。可以采用与式（3.3）中类似的方法，利用恰当三角和逼近论证来进行这项分析。在 [Kim24，定理 1。3] 尚未问世之前，我们曾考虑过这种方法。尽管如此，我们认为 [Kim24，定理 1。3] 及其证明方法是更好的处理方式。

3.2。**赋值预金伯利岩**。 我们回顾以下定义 [Sch17，定义 18。4]。

定义 3.18。 如果对于任意形如以下形式的交换图，v-层的映射 $X \to Y$ 满足部分真性的赋值判据，我们就称其满足该判据

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spa}(R, R^\circ) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(R, R^+) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

且 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 为仿射完美空间，则存在唯一的映射 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \to X$使上述图交换。若 $X \to Y$ 是分离的并满足部分真性的赋值判据，则称其为部分真。

预金伯利岩的特化映射 $\mathrm{SP} : X \to X^{\mathrm{H}}$ 始终是分离的。事实上，包含映射 $X \times_{X^{\mathrm{H}}} X \subseteq X \times X$ 是分离态射，并且由于 X 是形式分离的，$\Delta : X \to X \times X$ 是闭浸入。因此，$X \to X \times_{X^{\mathrm{H}}} X$ 也是如此。

定义 3.19。 [Gle24，定义 4。30] 我们称预金伯利岩 X 是赋值的，如果$\mathrm{SP}: X \to X^{\mathrm{H}}$ 是部分真。

对于赋值预金伯利岩，拓扑专化映射

$$\mathrm{sp} : |X| \to |X^{\mathrm{red}}|,$$

是特化的 [Gle24，命题 4。33]此外，赋值性质在进行形式邻域或 étale 形式邻域等自然构造时保持稳定 [Gle24，命题 4。34]我们将证明赋值性质的更多稳定性。

命题 3.20. 假设 X 是赋值预金伯利岩，且 $Z \to X$ 是形式 *adic* 闭浸入。那么 Z 是赋值预金伯利岩。

证明. 由 [Gle24, 命题 4.41.(2)] Z 是预金伯利岩。映射 $Z^{\mathrm{H}} \to X^{\mathrm{H}}$是分离的，因为它是单射。映射 $Z \to X^{\mathrm{H}}$ 是部分真；由消去可知， $Z \to Z^{\mathrm{H}}$ 是部分真的。 □

命题 3.21。 赋值预金伯利岩的范畴在纤维积下稳定。

证明。 如果 $X = Z \times_W Y$我们可以将其改写为 $Z \times Y \to W \times W$沿着 $W \to W \times W$ 的基变换，其中后者是一个形式绝对闭浸入。由定理 3.20，只需证明 $Z \times Y$具有赋值性质。现在，映射 $Z \times Y \to Z^{\mathrm{H}} \times Y$是部分真的，而映射 $Z^{\mathrm{H}} \times Y \to Z^{\mathrm{H}} \times Y_{\mathrm{H}}$ 也是如此，因此它们的复合映射同样是部分真的。 □

研究预金伯利岩的赋值性质时，一个技术上的微妙之处在于，在大多数情况下，如果 S 是一个分离概形，那么 $S^{\diamond/\circ\circ}$ 远非分离 v-层。尽管如此，它们仍满足较弱形式的分离性。

定义 3.22。 设 $X \to Y$ 是小 v-层之间的一个映射。

(1) 如果 $X \to Y$ 的对角映射 $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ 是部分真的，我们就称 $X \to Y$ 为弱分离。当 $Y = *$ 时，我们简称 X 为弱分离 v-层。(2) 如果 $X \to Y$ 弱分离且满足部分真性的赋值判据，我们就称 $X \to Y$ 为弱部分真。当 $Y = *$ 时，我们简称 X 为弱部分真 v-层。

注记 3.23。 注意，映射 $X \to Y$ 是分离的（分别地，部分真的），当且仅当它是弱分离且拟分离的（分别地，弱部分真且拟分离的）。

命题 3.24。 设 $f\colon X \to Y$ 是 v-层的一个映射，且 $g\colon Z \to Y$ 是一个 v 覆盖 $\tilde{}$ $\tilde{}$，其基变换映射为 $f\colon X \times_Y Z \to Z$。如果 f 满足部分真性的赋值判据，那么 f 也满足部分真性的赋值判据。特别地，如果$\tilde{}$ f 是部分真的，那么 f 也是部分真的。

证明。 分离性是 v-局部的，这正是 [Sch17，命题 10.11.(ii)] 的内容。因此，我们立即只需证明第一个陈述。

假设给定一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spa}(R, R^{\circ}) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(R, R^{+}) & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

根据假设，存在一个 v 覆盖 $\mathrm{Spa}(R_0, R_0^+) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$，使得我们可以构造如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spa}(R_0,\ R_0^\circ) & \longrightarrow & X \times_Y Z & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(R_0,\ R_0^+) & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

根据假设，我们可以找到一个提升 $\mathrm{Spa}(R_0, R_0^+) \to X \times_Y Z$，因而得到一个映射 $\mathrm{Spa}(R_0, R_0^+) \to X$。此外，根据假设，这个映射是唯一的。唯一性使我们能够将其下降为如下形式的映射 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \to X$，并使其与原交换图相容。□

命题 3.25. 设 $Z \to X$ 是概形的一个闭浸入，则$Z^{\diamond/\circ\circ} \to X^{\diamond/\circ\circ}$ 是部分真单射。特别地，若 $X \to Y$ 是概形的分离态射，则 $X^{\diamond/\circ\circ} \to Y^{\diamond/\circ\circ}$ 是弱分离的。

证明。 定理3.24 指出，部分真这一性质在目标上是 v-局部的。若$U \to X$ 是概形的一个开覆盖，则 $U^{\diamond/\circ\circ} \to X^{\diamond/\circ\circ}$ 也是一个开覆盖，因此我们可以假设 $X = \mathrm{Spec}\ A$ 且 $Z = \mathrm{Spec}\, B$。映射 $\mathrm{Spa}(R,\ R^\circ) \to Z^{\diamond/\circ\circ}$ 等同于环映射 $B \to R^\circ_{\mathrm{red}}$，而映射 $\mathrm{Spa}(R,\ R^+) \to X^{\diamond/\circ\circ}$ 等同于环映射 $A \to R^+{}_{\mathrm{red}}$。但我们有环的包含 $R^\circ_{\mathrm{red}} \supseteq R^+{}_{\mathrm{red}}$，以及环的满射 $A \to B$。由此构造出唯一的提升 $B \to R^+{}_{\mathrm{red}}$。□

例 3.26. 当 $X = \mathbb{A}^1$ 时， $X^{\diamond/\circ\circ}$ 在 $*$ 上不是分离的。事实上，设 Y构成如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\diamond/\circ\circ} & \longrightarrow & X^{\diamond/\circ\circ} \times X^{\diamond/\circ\circ}. \end{array}$$

那么 Y是沿对角映射的 $X \times X$ 的形式邻域。这是 $X \times X$ 的一个部分真的开子层，但不是闭子层。

引理 3.27. 设 $A \subseteq K$ 是满足以下性质的环：$\mathrm{Spec}\, A$ 的每个局部环都是赋值环，并且与 $\mathrm{Spec}\, K$ 有非空交集；再设映射 $\mathrm{Spec}\ K \to \mathrm{Spec}\, A$ 是原开的。设 $X \to Y$ 是概形之间的一个真映射，则下列交换图中的虚线箭头有唯一的补法

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ K & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ A & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

证明。由分离性可知唯一性成立，因为根据假设 $A \subseteq K$，且$\mathrm{Spec}\, K$在 $\mathrm{Spec}\ A$中扎里斯基稠密。 不失一般性，我们可以假设$Y = \mathrm{Spec}\, A$。令 $Z \subseteq X$ 为 f [Sta21，标签 01R7]的概形像。 $|Z|$ 中的点是那些可由 $f(\mathrm{Spec}\ K)$ [Sta21中的某个点特化得到的点，

标签 02JQ]。对于每个 $x \in \operatorname{Spec} A$，我们考虑以下映射序列

$$\operatorname{Spec} \operatorname{Frac}(A_x) \to \operatorname{Spec} K_x \to Z_x \to X_x \to \operatorname{Spec} A_x,$$

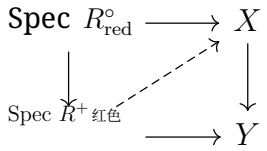
由在 x 的局部环处局部化得到 Z_x 仍然是 $\operatorname{SpecFrac}(K_x) \to X_x$ [Sta21，标记 081I] 的概形像。根据概形论像的定义，对于每个 $z \in |Z|$ 映射到 x的对象，我们得到局部环的单射

$$A_x \to \mathcal{O}_{Z_x,z} \to K_x \to \operatorname{Frac}(A_x).$$

映射 $A_x \to \mathcal{O}_{Z_x,\ z}$ 必然是同构，因为 A_x 是赋值环，而 $\mathcal{O}_{Z_x,\ z} \subseteq \operatorname{Frac}(A_x)$支配 A_x。该同构的逆映射提供了 $\operatorname{Spec} A_x \to Z_x \to X_x$ 的提升，并且由提升的唯一性可知，恰好存在一个点 $z \in |Z_x|$，其像为 x。这表明 $|Z| \to |\operatorname{Spec} A|$ 是一个同胚，并诱导局部环的同构。这足以证明 $Z \to \operatorname{Spec} A$ 是概形同构。□

命题 3.28。设 $f\colon\ X \to Y$ 是完美概形之间的完美有限表示真映射。那么 $X^{\diamond/\circ\circ} \to Y^{\diamond/\circ\circ}$ 是弱部分真。

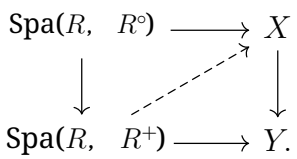
证明。部分真性的赋值判据在目标上是 v-局部的（见定理 3.24），因此我们可以假设 $Y = \operatorname{Spec} A$ 是仿射的。此外，只需在 v-拓扑的一个基上检验该判据。令 $\operatorname{Spa}(R,\ R^+)$ 为一个严格全不连通空间。现在，$X^{\diamond/\circ\circ}(R,\ R^+) = X(\operatorname{Spec} R^{+}{}_{\mathrm{red}})$，因为 $\operatorname{Spa}(R,\ R^+)$ 将所有开覆盖分裂。类似地，$Y^{\diamond/\circ\circ}(R,\ R^+) = Y(\operatorname{Spec} R^{+}{}_{\mathrm{red}})$。固定一个图表



由定理3.27可知，上方的虚线箭头存在唯一的解。事实上，$\operatorname{Spec} R^{+}{}_{\mathrm{red}}$ 的连通分支都是赋值环的谱，而 $\operatorname{Spec} R^{\circ}_{\mathrm{red}} \subseteq \operatorname{Spec} R^{+}{}_{\mathrm{red}}$ 是原开的，并且与每个连通分支都相交。□

弱分离映射几乎按照定义就满足分离性的赋值判据。

命题 3.29。设 $X \to Y$ 是一个小 v-层的弱分离映射，并考虑如下交换图



使图表交换的虚线箭头至多存在一个。

证明。 假设存在一个映射 (f_1, f_2) : Spa(R, R^+) $\to X \times_Y X$ ，使得 Spa(R, R°) $\to X \times_Y X$ 经由相对对角线 $\Delta_{X/Y}$: $X \to X \times_Y X$ 分解。由于对角映射是部分真的，存在唯一的映射 Spa(R, R^+) $\to X$，它延拓映射 Spa(R, R°)，且其与 $\Delta_{X/Y}$ 的复合为 (f_1, f_2)。这就证明了 $f_1 = f_2$。 □

命题 3.30。 设 f： $X \to Y$、 g： $Y \to Z$ 以及 q： $Y \to Y$ 是 v-层的映射。设 $h = g \circ f$，令 f： $X \to Y$ 为沿 q 对 f 的基变换。则有以下结论。

（1）如果 f 和 g 是弱分离的，那么 h 是弱分离的。（2）如果 f 是弱分离的，那么 f 是弱分离的。（3）如果 q 是 v 覆盖且 f 是弱分离的，那么 f 是弱分离的。（4）如果 h 是弱分离的且 g 是弱分离的，那么 f 是弱分离的。

证明。回顾一下，部分真性在基变换和复合下保持，并且可以在目标上 v 局部地验证。

对于第一个陈述，考虑映射 $X \to X \times_Y X \to X \times_Z X$，只需证明 $X \times_Y X \to X \times_Z X$ 是部分真的；但它来自沿着部分真的 $Y \to Y \times_Z Y$ 对 $X \times_Z X \to Y \times_Z Y$ 的基变换。

对于第二个陈述，注意到 Y 的基变换 $X \to X \times_Y X$ 另见定理 3.24。

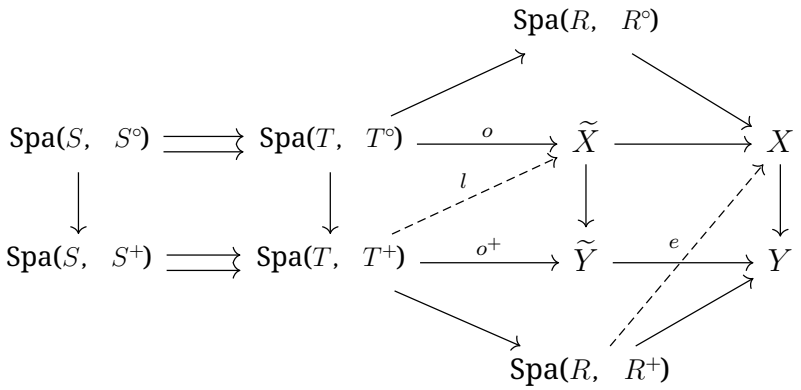
对于第三个陈述，注意到 $X \times_Y X \to X \times_Z X$ 是单射的，因而是分离的。由于假设 $X \to X \times_Z X$ 是部分真的，根据消去， $X \to X \times_Y X$ 也同样是部分真的。□

Pr命题 3.31。 沿用定理 *3.30*中的记号。以下结论成立。

(1) 如果 f 和 g 是弱部分真的，则 h 是弱部分真的。(2) 如果 f 是弱部分真的，则 f 是弱部分真的。(3) 如果 q 是 v 覆盖且 f 是弱部分真的，则 f 是弱部分真的。(4) 如果 h 是弱部分真的且 g 是弱分离的，则 f 是弱部分真的。

证明。 对于第一个陈述，固定相容映射 t ： Spa(R, R^+) $\to Z$ 和 Spa(R, R°) $\to X$，我们可以先将 t 提升到 Y，再提升到 X。第二个陈述由基变换的泛性质得出。

对于第三个陈述，我们固定相容映射 Spa(R, R°) $\to X$ 和 Spa(R, R^+) $\to Y$。我们固定一个 v 覆盖 Spa(T, T^+) $\to$ Spa(R, R^+)，使得映射 Spa(T, T^+) $\to Y$ 可提升到 Spa(T, T^+) $\to Y$，并令 Spa(S, S^+) $=$ Spa(R, R^+) $\times_{\mathrm{Spa}(T,T^+)}$ Spa(R, R^+)。我们考虑这个交换图。



标记为 e 的虚线箭头存在，是由标记为 l 的虚线箭头存在所推出的。事实上，由于 X 弱分离，且两个映射 $\mathrm{Spa}(S, S^\circ) \to X$ 相等，因此由 l 诱导的两个映射 $\mathrm{Spa}(S, S^+) \to X$ 也相等，并定义了一个映射 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \to X$ 的下降数据。

对于第四个陈述，注意到根据假设，$Y \to Z$ 是弱分离的，因此 $Y \to Y \times_Z Y$ 是部分真的，特别是弱部分真的。由消去可知，$X \to Y$ 必定是弱部分真的。□

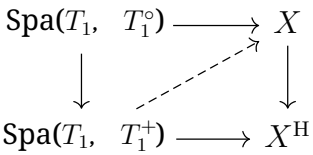
一般而言，无法通过 v 局部地验证赋值性。也就是说，存在预金伯利岩的映射 $f\colon Y \to X$，使得 Y 是赋值的，f 是一个 v 覆盖，但 X 不是赋值的。我们有以下特殊情形。

命题 3.32。设 $f\colon X \to Y$ 是预金伯利岩的一个映射。假设 Y 是赋值的，并且存在一个赋值预金伯利岩 Z 和一个 v 覆盖 $g\colon Z \to Y$，使得 $W = X \times_Z Y$ 是赋值的，那么 X 是赋值的。

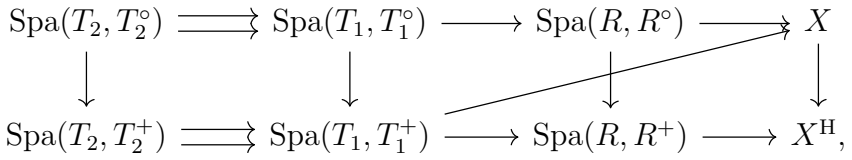
证明。我们固定一个交换图，并尝试求出虚线箭头

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spa}(R, R^\circ) & \xrightarrow{o_X} & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(R, R^+) & \xrightarrow{o_X^H} & X^{\mathrm{H}}. \end{array} \tag{3.4}$$

由于 Y 是赋值的，我们得到唯一的映射 $o_Y^+\colon \mathrm{Spa}(R, R^+) \to Y$，它提升了自然映射 $o_Y\colon \mathrm{Spa}(R, R^\circ) \to Y$。由于 $Z \to Y$ 是满射的，我们可以找到一个 v 覆盖 $c_1\colon \mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$，并且可以选择一个映射 $e_Z^+\colon \mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \to Z$，它提升了自然映射 $o_Y^+ \circ c_1\colon \mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \to Y$。此外，按照构造，我们还有一个映射 $o_X \circ c_1^\circ\colon \mathrm{Spa}(T_1, T_1^\circ) \to X$，其诱导映射 $f \circ o_X \circ c_1^\circ$ 与 $g \circ e_Z^+$ 在后一个映射限制到 $\mathrm{Spa}(T_1, T_1^\circ) \subseteq \mathrm{Spa}(T_1, T_1^+)$ 上时一致。这给出了一个映射 $\mathrm{Spa}(T_1, T_1^\circ) \to W$，并且由于 W 是赋值的，我们也得到一个映射 $\mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \to W$。事实上，映射 $\mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \to W\mathrm{H}$ 是良定义的，因为 $W\mathrm{H} = X^{\mathrm{H}} \times_{Z^{\mathrm{H}}} Y\mathrm{H}$。投影到 X 上，我们得到一个映射 $\mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \to X$，它提升了 $o_X \circ c_1^\circ$，并且与 $\mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \to X^{\mathrm{H}}$ 相容。由 $X \to X^{\mathrm{H}}$ 的分离性可知，该提升是唯一的，且不依赖于 e_Z^+ 的选择。这说明图中的虚线箭头



可以唯一地提升。此外，如果 $\mathrm{Spa}(T_2, T_2^+) = \mathrm{Spa}(T_1, T_1^+) \times_{\mathrm{Spa}(R,R^+)} \mathrm{Spa}(T_1, T_1^+)$，我们得到一个交换图



并且由于 $X(R, R^+) =$ 式.$(X(T_1, T_1^+) \rightrightarrows X(T_2, T_2^+))$，图（3.4）中的箭头可以唯一构造。□

正如分离 v-层存在典范紧化，这是一种将分离 v-层转化为部分真的方式 [Sch17，命题 18。6]，弱分离 v-层也有类似的结论。我们讨论 [Sch17， §18].

定义 3.33。 [Sch17，命题 18。6]假设 Y 是一个弱分离 v-层，我们令 Y 为公式的 v-层化

$$\overline{Y}^{\mathrm{pre}}(R, R^+) = Y(R, R^\circ).$$

我们称 $\overline{Y}$ 的 典范紧化 为 Y。

注 3.34。 注意，如果 Y 是一个分离 v-层，那么 Y 与 [Sch17 中通常的典范紧化一致 §18]。

命题 3.35。 如果 Y 是一个弱分离 v-层，且 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是全不连通的，那么 $Y(R, R^+) = Y_{\mathrm{pre}}(R, R^+)$。

证明。 与 [Sch17 中命题 18 的证明相同的证明6] 成立，只需将 [Sch17 中命题 10 10] （loc. cit.）替换为定理 3.29。□

注意，构造 $Y \mapsto Y^{\mathrm{pre}}$ 具有函子性，并且与 v-层的任意极限相交换。根据定理 3.35，对于 $Y \mapsto Y$ 也可以这样说。

命题 3.36。 如果 Y 是一个弱分离 v-层，那么 Y 是弱部分真，并且映射 $Y \to Y$ 是所有满足 Z 为弱部分真 v-层的映射 $Y \to Z$ 中的始对象。

证明。 对角映射 $Y \to Y \times Y$ 是单射，因此是分离的。要使弱分离映射满足部分真性的赋值判据，只需在 v-拓扑的一组基上验证。在全不连通空间 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 上，我们有 $Y_{\mathrm{pre}}(R, R^+) = Y(R, R^+) = Y(R, R^\circ)$。这使我们能够

直接验证，首先 Δ_Y，然后 $Y \to *$ 满足源为 $\overline{\mathrm{Spa}}(R, R^\circ) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 的映射的左提升性质。

此外，若 $Y \to Z$ 是一个映射且 Z 是弱部分真的，则可得一个映射 $Y \to Z = Z$。另一方面，给定一个映射 $Y \to Z$，可将其限制为一个映射 $\overline{Y} \to Z$。这两个操作互为逆运算。□

若 $Y \to Z$ 是弱分离 v-层之间的映射，则 $Y \to Z$ 是弱分离的，并且我们可以定义相对紧化 $\overline{Y}^{/Z} = Y \times_Z Z$。在此情形下，$Y \to \overline{Y}^{/Z} \to Z$ 是映射 $Y \to W \to Z$ 中的始对象，其中 $W \to Z$ 是弱部分真的。

定义 3.37。我们称 v-层的弱分离映射 $Y \to Z$ 为**弱可紧化的**，如果它可以分解为 $Y \to W \to Z$，其中 $W \to Z$ 是弱部分真的，且 $Y \to W$ 是开浸入。

注 3.38。注意，v-层的分离映射可紧化，当且仅当它弱可紧化。

命题 3.39. *弱分离 v-层的映射 $Y \to Z$ 可弱紧化，当且仅当 $Y \to \overline{Y}^{/Z}$ 是开浸入。*

证明. 设 $Y \to W \to Z$ 是一个分解。根据 $Y \to \overline{Y}^{/Z}$ 的泛性质，我们得到一个映射 $\overline{Y}^{/Z} \to \overline{W}$，我们断言它是单射。事实上，只需证明 $\overline{Y}^{/Z}(R, R^\circ) \to W(R, R^\circ)$ 是单射，因为 $\overline{Y}^{/Z} \to W$ 是弱部分分离的。但映射 $\overline{Y}^{/Z}(R, R^\circ) \to W(R, R^\circ)$ 与映射 $Y(R, R^\circ) \to W(\overline{R}, R^\circ)$ 相同，后者是单射。由于 $Y \to W$ 是开浸入，$\overline{Y} \to \overline{Y}^{/Z}$ 也是开浸入。□

命题 3.40. *设 $f\colon X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是弱分离 v-层之间的映射，并设 $h = g \circ f$。以下结论成立。*

(1) 如果 f 和 g 是弱可紧化的，那么 h 是弱可紧化的。(2) 如果 h 是弱可紧化的，那么 f 是弱可紧化的。

证明。 考虑以下带有笛卡尔方块的交换图

s

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{e_1} & \overline{X}^{/Y} & \longrightarrow & Y \\
& \searrow^{e_2} & \downarrow{\scriptstyle e_3} & & \downarrow{\scriptstyle e_4} \\
& & \overline{X}^{/Z} & \longrightarrow & \overline{Y}^{/Z} \longrightarrow Z \\
& & \downarrow & & \downarrow \quad\downarrow \\
& & \overline{X} & \longrightarrow & \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}.
\end{array}$$

如果 e_1 和 e_4 是开浸入，那么 e_3 和 e_2 是开浸入。反过来，如果 e_2 是开浸入，那么 e_1 也是开浸入，因为 e_3 是单射。□

推论 3.41。 如果 $f\colon\ X \to Y$ 是赋值预金伯利岩之间的一个映射，且 $X^{\mathrm{red}} \to Y^{\mathrm{red}}$ 是完全有限表示的且分离的，那么 $X \to Y$ 是可紧化的。

证明。 由定理 3.40，只需证明映射 $f^{\mathrm{H}}\colon\ X^{\mathrm{H}} \to Y_{\mathrm{H}}$ 是弱可紧化的。事实上，$f^{\mathrm{H}} \circ \mathrm{SP}_X$ 将是弱可紧化的；又由于 $f^{\mathrm{H}} \circ \mathrm{SP}_X = \mathrm{SP}_Y \circ f$，上面的定理 3.40 表明 f 也将是弱可紧化的。由于 f 已经是分离的，我们便可得出它是可紧化的。

现在，根据长田定理 [Sta21，标签 0F41、0ATT]，，我们可以找到一个完美有限表示的紧化 $X^{\mathrm{red}} \subseteq S \to Y^{\mathrm{red}}$。这诱导出一个开浸入 $X^{\mathrm{H}} \to S^{\diamond/\circ\circ}$，并由定理3.28 可得一个弱部分真映射$S^{\diamond/\circ\circ} \to Y^{\mathrm{H}}$。 □

3.3. **金伯利岩**。 在讨论了赋值预金伯利岩之后，现在我们来讨论金伯利岩。

定义 3.42。 [Gle24，备注 4.37，定义 4。35] 设 X 是一个赋值预金伯利岩。

(1) 若 X 是一个仿射金伯利岩，则称其为仿射金伯利岩；当且仅当 X^{red} 是一个仿射概形且 X^{an}是一个空间钻石。(2) 若 X 满足：对于所有开仿射子概形 $U \subseteq X^{\mathrm{red}}$、$\widehat{}$，其诱导的扎里斯基开形式邻域 $X_{/U}$ 是一个仿射金伯利岩，则称 X 是一个金伯利岩。

命题 3.43。 设 X 是一个赋值预金伯利岩。假设 X^{an} 是一个拟分离的[4] 局部空间钻石，并考虑拓扑专化映射 $\mathrm{sp}_{X^{\mathrm{an}}}\colon\ |X^{\mathrm{an}}| \to |X^{\mathrm{red}}|$。则以下结论成立。

(1) X 是一个金伯利岩，当且仅当 $\mathrm{sp}_{X^{\mathrm{an}}}$ 是拟紧的。(2) 若 X 是一个金伯利岩，则该映射是谱映射且为闭映射。

证明。 假设表明，二元组 $(X,\ X^{\mathrm{an}})$ 是如[Gle24定义 435]中所述的熔铸金伯利岩。根据 [Gle24定理 440]，，拓扑专化映射自动是特化的，并且是局部谱空间之间的谱映射。可以通过 $|X^{\mathrm{red}}|$的一个开覆盖来检验$\mathrm{sp}_{X^{\mathrm{an}}}$ 是否拟紧。固定一个由仿射子概形构成的 $|X^{\mathrm{red}}|$的开覆盖 X^{red} 。

$$\coprod_{i\in I} U_i \to X.$$

那么 $|(\widehat{X}_{/U_i})^{\mathrm{an}}| = \mathrm{sp}^{-1}_{X^{\mathrm{an}}}(U_i)$。若 X 是金伯利岩，则根据假设 $(\widehat{X}_{/U_i})^{\mathrm{an}}$ 是一个空间钻石，因此是拟紧的 [Sch17，命题 11.18.(i)]。$\widehat{}$反过来，若 $\mathrm{sp}_{X^{\mathrm{an}}}$ 是拟紧的，则 $|X_{/U_i})^{\mathrm{an}}| \subseteq |X^{\mathrm{an}}|$是一个拟紧且$\widehat{}$拟分离的拓扑空间。根据 [Sch17，命题 11.19.(iii)]，$(X_{/U_i})^{\mathrm{an}}$ 是一个

[4]如定理 3.46所示，拟分离性是自动满足的。我们保留这一点，是为了指出这是论证中隐含使用的一个微妙之处。

空间钻石，正如我们想要证明的。第二个陈述是 [Gle24，定理 4。40]。□

注记 3.44。 特化映射对通常拓扑和可构造拓扑都连续，这一点是计算仿射 Deligne–Lusztig 簇和 Shtuka 模空间的连通分支时的一项关键技术要素。 [Gle21], [GLX25]。

命题 3.45。 [Gle24，命题 4.41.(4)] 若 X 是金伯利岩，且 $Z \to X$是形式绝对闭浸入，则 Z 也为金伯利岩。

回顾一下，在 v-层理论中，拟分离性是一种绝对概念，与相对于终对象的拟分离这一相对概念并不一致。特别地，有许多 v-层在 $*$ 上是分离的，但从绝对意义上说并非拟分离。举例来说， $*$ 本身就不是拟分离的。根据定义，预金伯利岩在 $*$上是分离的。因此，预金伯利岩的解析轨迹总是拟分离的。

命题 3.46. 设 X 是一个预金伯利岩，则 X^{an} 是拟分离的。

证明. 设 $\mathrm{Spa}(R_1,R_1^+) \to X^{\mathrm{an}}$和 $\mathrm{Spa}(R_2,R_2^+) \to X^{\mathrm{an}}$是两个映射，且 $\mathrm{Spa}(R_i,R_i^+)$ ∈属于 Perf，我们必须证明

$$W := \mathrm{Spa}(R_1,R_1^+) \times_{X^{\mathrm{an}}} \mathrm{Spa}(R_2,R_2^+)$$

是拟紧的。将 R_1 和 R_2 替换为一个 v 覆盖后，我们可以找到形式阿迪克形式化 $\mathrm{Spd}\, R_1^+ \to X$和 $\mathrm{Spd}R_2^+ \to X$，并且可以将 W写作 V中的解析轨迹：$= \mathrm{Spd}R_1^+ \times_X \mathrm{Spd}R_2^+$。此外，我们可以将 V改写为映射 $\mathrm{Spd}\, R_1^+ \times \mathrm{Spd}\, R_2^+ \to X \times X$ 沿对角映射 $\Delta : X \to X \times X$的基变换。这样，我们得到一个形式绝对闭浸入 $V \to \mathrm{Spd}\ R_1^+ \times \mathrm{Spd}R_2^+$，其目标是一个形式 v-层。根据定理 3.45， V 是一个金伯利岩，且 $W = V^{\mathrm{an}}$ 是一个空间钻石。特别地，它是拟紧的。□

我们有以下稳定性。

命题 3.47。 [Gle24，命题 4。42] 若 X 是一个金伯利岩，且 $Y \to X$ 是一个 *étale* 形式邻域，则 Y 是一个金伯利岩。

我们还有以下有用的引理，它在 [AGLR22，命题 2 中34]被隐含地证明了。为方便读者，我们在此重述证明，因为这里的设定略有不同。

引理 3.48。 设 X 是一个仿射金伯利岩。记 $Z \subseteq X^{\mathrm{red}}$ 为满足 $|Z| = \mathrm{sp}(X^{\mathrm{an}})$ 的闭子概形。假设 $f : \mathrm{Spa}(R, R^+) \to X^{\mathrm{an}}$ 是一个 v 覆盖，且 X形式化了 f。则 $|\mathrm{Spd}\ R^+{}_{\mathrm{red}}| \to |Z^\diamond|$ 是满射。特别地，$\mathrm{Spd}\, R^+{}_{\mathrm{red}} \to Z^\diamond$ 是一个 v 覆盖。

证明。 设 $X^{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}\ A$，并令 $z \in |Z^\diamond| \subseteq |X^{\mathrm{Red}}| = |\mathrm{Spd}(A,\ A)|$。对于 z，我们可以附上一个支撑理想 $\mathfrak{p}_z$ 和一个特化理想 $\mathfrak{q}_z$， 使得 $\mathfrak{p}_z \subseteq \mathfrak{q}_z \subseteq A$ 并且

$\mathfrak{p}_z$， $\mathfrak{q}_z \in Z$ [Gle24，定义 2。4]。存在一个完美赋值环 V，以及一个映射$\operatorname{Spec} V \to Z$，其特殊点映射到 $\mathfrak{q}_z$，其一般点映射到 $\mathfrak{p}_z$。此外， z 属于诱导映射 $|\operatorname{Spec} V^\diamond| \to |Z^\diamond|$的像。

由于 $|Z| = \mathrm{sp}(X^{\mathrm{an}})$，存在一个可形式化几何点 $\mathrm{Spa}(C, C^+) \to X^{\mathrm{an}}$，使得 $\operatorname{Spec} C^+$ red 的闭点在映射 $(\mathrm{Spd}\ C^+)^{\mathrm{red}} \to X^{\mathrm{red}}$ 下映射到 $\mathfrak{p}_z$。由于 $\operatorname{Spec} C^+$ red 的闭点映射到与 $\operatorname{Spec} V$ 的一般点相同的点，我们可以复合这些赋值得到一个赋值环 C^+ red$_V \subseteq C^+$ red，以及一个映射 $\operatorname{Spec} C^+$ red$_V \to \operatorname{Spec}\ A$，使得 $\operatorname{Spec}\ C^+$ red $_V/\mathfrak{p}_z \to \operatorname{Spec}\ A$ 可通过 $\operatorname{Spec} V$分解，并给出带有 $(\operatorname{Spec} C_V^+$,red$)_{(\mathfrak{p}_z)} = \operatorname{Spec} C^+$ red 的赋值环扩张。令 $C_V^+ \subseteq C^+$ 表示包含 $C^{\circ\circ}$ 且满足 $(C_V^+)^{\mathrm{red}} = C_V^+$,red 的唯一赋值子环。我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spa}(C, C^+) & \longrightarrow & X^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & & & \downarrow \mathrm{SP} \\ \mathrm{Spa}(C, C_V^+) & & \longrightarrow & & X^{\mathrm{H}}. \end{array}$$

由 X 的赋值性，这提升为一个映射 $\mathrm{Spa}(C, C_V^+) \to X^{\mathrm{an}}$。将 (C, C^+) 替换为一个 v 覆盖后，我们可以假设该映射分解为映射 $\mathrm{Spa}(C, C_V^+) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$。形式化 $\mathrm{Spd}\, C_V^+ \to X$ 诱导出映射 $\operatorname{Spec}^{C_V^+}$,red $\to Z$，它分解经过（且满射到）$\operatorname{Spec} V$。特别地， z 位于 $|\mathrm{Spd}\, C_V^+$,red$| \to |\mathrm{Spd}\, R^+$ red$| \to |X|$ 的像中。这表明 $|\mathrm{Spd}\ R^+$ red$| \to |Z^\diamond|$ 是满射。最后一个结论由 [Gle24, 引理 2.26] 与 [Sch17, 引理 12.11] 联合推出。□

Kimberlite 理论在 [Gle24], [GL24], [AGLR22] 和 [GIZ25] 中发展起来，足以满足许多用途。然而，它仍不足以回答以下自然的基础性问题。[5] 空间金伯利岩解决了这些问题。

问题 3.49. 设 X 为金伯利岩，且 Y 为金伯利岩。

(1) $X \to *$ 在局部空间钻石中是否可表？(2) $X \times Y$ 是否为金伯利岩？(3) X 是否为 *pro-étale*局部形式化？(4) 如果 $S \subseteq X^{\mathrm{red}}$ 可构造， $\widehat{X}_{/S}$ 是否为金伯利岩？

我们定义空间金伯利岩的动机，是为了从更强的公理推出定理 3.49，尤其是定理 3.49.(4)。

4. 空间金伯利岩

定义 4.1. 如果仿射金伯利岩 X 满足以下条件，我们就称其为空间的 。

[5]我们尚未找到定理 3.49中各项陈述的证明或反例。我们猜想在所有情况下都应存在反例。

(1) X 将几何点形式化。(2) 存在一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖 $f: Y \to X$，其中 Y 是一个仿射形式 v-层（即对于 B 一个 I-adic 环，$Y = \mathrm{Spd}\, B$）。

下面的命题说明了定理4.1(1)中公理的相关性。

命题 4.2。设 X 是一个形式化几何点的预金伯利岩。若$S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是一个严格全不连通完美空间，且 $f: S \to X$是一个映射，则 X 形式化 f。

证明。由于严格全不连通完美空间会将开覆盖分裂，我们可以假设 X 是一个仿射前 kimberlite。考虑图态射$S \to X \times \mathrm{Spd}(R^+)$。设 $S' := \mathrm{Spa}(R', R'^+) \to S$ 是一个在X上形式化的 v 覆盖，并令 $\mathcal{F}$表示映射 $\mathrm{Spd}(R'^+) \to X \times \mathrm{Spd}\ R^+$的层论像。我们可以选取 S' 使其也是严格全不连通的。我们要证明投影映射 $\mathcal{F} \to \mathrm{Spd}(R^+)$是一个同构。考虑下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} S' & \longrightarrow & \mathrm{Spd}\, R'^+ & \longrightarrow & X \times \mathrm{Spd}\, R'^+ & \longrightarrow & \mathrm{Spd}\, R'^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & X \times \mathrm{Spd}\, R^+ & \longrightarrow & \mathrm{Spd}\, R^+ \end{array} \tag{4.1}$$

由于映射 $\mathrm{Spd}\ R'^+ \to \mathrm{Spd}\, R^+$ 是满射，映射 $\mathcal{F} \to \mathrm{Spd}\ R^+$ 也同样是满射。现在我们证明它还是单射。首先，映射 $\mathrm{Spd}\, R^+ \times X \to \mathrm{Spd}\, R^+$ 是拟分离的，因为 $X \to *$ 是分离的，且由于 $\mathcal{F} \subseteq X \times \mathrm{Spd}\, R^+$，所以 $\mathcal{F}$ 在 $\mathrm{Spd}\, R^+$ 上也拟分离。此外，映射 $\mathrm{Spd}\, R'^+ \to \mathrm{Spd}\, R^+$ 是拟紧拟分离的，这意味着 $\mathcal{F}$ 在 $\mathrm{Spd}\, R^+$ 上也是拟紧拟分离的。根据 [Sch17，引理 12.5]，，我们可以通过检查 $\mathcal{F} \to \mathrm{Spd}\, R^+$ 在几何点上的双射性来验证这一点。任意几何点都经由 $\mathrm{Spd}\, R^+$ 的一个连通分支分解。令 $x \in \pi_0(\mathrm{Spd}\ R^+)$。那么，$\mathcal{F}_x$ 是映射 $\mathrm{Spd}\, R_x'^+ \to X \times \mathrm{Spd}\, C_x^+$ 的层论像，且所有对象都在 $\mathrm{Spd}\ C_x^+$ 上。这里 $\mathrm{Spd}\ R_x'^+ = \mathrm{Spd}\ R'^+ \times_{\mathrm{Spd}\, R^+} \mathrm{Spd}\ C_x^+$。这就得到了下面的交换图；该图只是沿着闭浸入 $\mathrm{Spd}\, C_x^+ \to \mathrm{Spd}\, R_x^+$ 对 (4.1) 作基变换所得。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Spa}(R_x', R_x'^+) & \longrightarrow & \mathrm{Spd}\, R_x'^+ & \longrightarrow & X \times \mathrm{Spd}\, R_x'^+ & \longrightarrow & \mathrm{Spd}\, R_x'^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(C_x, C_x^+) & \longrightarrow & \mathcal{F}_x & \longrightarrow & X \times \mathrm{Spd}\, C_x^+ & \longrightarrow & \mathrm{Spd}\, C_x^+ \end{array} \tag{4.2}$$

根据假设，第二个投影映射 $X \times \mathrm{Spd}\, C_x^+ \to \mathrm{Spd}\, C_x^+$ 具有唯一的截面 $\mathrm{Spd}\ C_x^+ \to X \times \mathrm{Spd}\, C_x^+$，且该截面与图映射 $\mathrm{Spd}\ C_x \to X \times$兼容

由 f 诱导的 Spd C_x。该截面诱导出一种形式化

$$\operatorname{Spd} R_x'^{+} \to \operatorname{Spd} C_x^{+} \to X \times \operatorname{Spd} C_x^{+}$$

映射 Spa(R_x', $R_x'^{+}$) $\to X \times$Spa C_x^{+}。由于在 $X \times$Spd C_x^{+}上的形式化是唯一的，我们得出映射 $\mathcal{F}_x \to X \times$ Spd C_x^{+}经过截面 Spd $C_x^{+} \to X \times$Spd C_x^{+}。这证明 $\mathcal{F}_x \to$Spd C_x^{+}是单射且满射，因此它在几何点之间诱导出一个双射。□

命题 4.3。设 X 是一个仿射空间金伯利岩，且 $U \subseteq X^{\mathrm{red}}$ 是一个仿射开子集，则 $X_{/U}$ 是一个仿射空间金伯利岩。

证明。根据假设，$X_{/U} \to X$ 是一个形式绝对开浸入。因此，映射 Spd $C^{+} \to X$经过 $X_{/U}$当且仅当 Spa(C, C^{+}) 经过它。在特别地，$X_{/U}$ 将几何点形式化。如果 Spd $B \to X$ 是一个拟紧拟分离形式绝对 v 覆盖，则 $X_{/U} \times_X$Spd B再次是一个仿射形式 v-层，并且 $X_{/U} \times_X$Spd $B \to \sim X_{/U}$ 再次是一个拟紧拟分离形式绝对 v 覆盖。□

定义 4.4。设 X 是一个金伯利岩。

(1) 若对所有仿射开邻域 $U \subseteq |X^{\mathrm{red}}|$ ，其对应的开形式邻域 $\widehat{X}_{/U}$ 都是仿射空间金伯利岩，则称 X 为局部空间金伯利岩 。(2) 若 X 是局部空间金伯利岩且$|X^{\mathrm{red}}|$拟紧拟分离，则称 X 为空间金伯利岩 。

由定理 4.3 可知，仿射空间金伯石是空间金伯利岩。下面的定理4.5 表明，我们可以通过一个仿射开覆盖来检验其是否为空间的。特别地，作为仿射预金伯利岩的空间金伯利岩恰好就是仿射空间金伯利岩。

命题 4.5。设 X 是一个仿射预金伯利岩，并且存在一个仿射开覆盖 $\coprod_{i\in I} U_i \to X^{\mathrm{red}}$，使得每个 $\widehat{X}_{/U_i}$ 都是仿射空间金伯利岩，则 X 是仿射空间金伯利岩。

证明。这 X 能形式化几何点是显然的，因为几何点经由 $\widehat{X}_{/U_i}$ 某个 $i \in I$ 分解，并在其上形式化。由于 X^{red} 是仿射的，我们可以假设 I 是有限的。根据 [Gle24，定理 4。27], 映射 $\coprod_{i=1}^{n} X_{/U_i} \to X$ 是一个准紧准分离形式 adic v 覆盖。根据假设，存在形式 adic 拟紧拟分离 v 覆盖Spd $B_i \to X_{/U_i}$，其中每个Spd B_i都是一个仿射形式 v-层。于是 $\coprod_{i=1}^{n}$Spd $B_i \to X$是一个准紧准分离形式 adic v 覆盖，且源仍然是一个仿射形式 v-层。□

4.1. **空间性是 étale 局部的**。

命题 4.6。设 $f : X \to Y$ 是预金伯利岩之间的映射。以下结论成立：(1) 若 f 是形式 *adic étale* 且 Y 是局部空间金伯利岩，则 X 是局部空间金伯利岩。

(2) 若 f 是形式 *adic étale* 覆盖且 X 是局部空间金伯利岩，则Y 是局部空间金伯利岩。

证明。赋值性质在形式 étale 邻域下稳定，并且可以在 étale 形式 v 覆盖之后检验，因此我们不妨假设 X 和 Y具有赋值性质。对于第一个陈述，由定理 4.5 可假设 X 是一个仿射预金伯利岩，且映射 $X \to Y$经由 $V = \widehat{Y}_{/V^{\mathrm{red}}}$ 因子分解，其中 Vred $\subseteq Y$red 是一个仿射开子集。由 [Gle24，命题 4.42.(2)]， $X = Y_{/X^{\mathrm{red}}}$ 是一个金伯利岩。令 Spd(C^+) $\to V$ 为一个几何点的形式化，且令 $P =$ Spd(C^+) $\times_V X$。由 [Gle24，推论 4.28]， P 具有如下形式： $\coprod_{i\in I}$Spd(C_i^+)，其中 $C_i^+ = C^+[\frac{1}{c}]$对某个元素 $c \in C^+$成立。这说明 X 形式化几何点，因为 $\widetilde{V}$确实如此。令 $W :=$ Spd(B) $\to V$为一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，并令 $W = W \times_V X$。映射 $W \to W$ 是形式 adic étale 的，且由 [Gle24，推论 4.28]， W 是一个$\widetilde{\text{仿}}$射形式 v-层。此外， $W \to X$ 仍然是一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，这说明 X 是一个仿射空间金伯利岩。

反过来，假设 f 是一个形式 adic étale 覆盖，且 X 局部是$\widehat{\text{空}}$间的。将 Y替换为一个仿射邻域，并将 X 替换为一个仿射覆盖 $\coprod_{i\in I} X_{/U_i}$，再从中选取有限子集，我们可以不失一般性地假设$X$ 是一个仿射空间金伯利岩，且 Y 是一个仿射前 kimberlite。

现在， Y^{an} 是一个空间钻石，因为它是拟分离的，且 $X^{\mathrm{an}} \to Y$一个是一个 étale 覆盖，其源是一个空间钻石。这说明 Y 是一个金伯利岩。此外，由于 $X^{\mathrm{red}} \to Y^{\mathrm{red}}$ 是一个拟紧拟分离 étale 映射，根据 [Gle24引理 4，25] $X \to Y$也是拟紧拟分离的。我们令 $\mathcal{F} \to X$ 为一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，其中 $\mathcal{F}$ 是一个仿射形式 v 层。于是 $\mathcal{F} \to Y$ 是一个源为形式 v-层的拟紧拟分离形式 adic v 覆盖。此外，任意映射$\mathrm{Spa}\, C \to Y$都提升为映射 $\mathrm{Spa}\ C \to X$，并在 X上形式化，因此也在 Y上形式化。由此完成Y 是一个仿射空间金伯利岩的证明。□

4.2. **厚-约化分解**。 根据定义可以验证，对于每个概形 $S \in$ PSch，v-层 $S^\diamond$ 都是空间金伯利岩，但其解析轨迹为空。我们可以将这种类型的空间金伯利岩称为约化的；它们通常源自约化函子伴随。以下是与之互补的概念，也是 Kimberlite 理论中更值得研究的对象。

定义 4.7。 如果空间金伯利岩 X 的特化映射 sp : $|X^{\mathrm{an}}| \to |X^{\mathrm{red}}|$ 是满射，我们就称其为厚的 。

如下文所示，每个空间金伯利岩都可以分解为一个厚空间金伯利岩和一个约化空间金伯利岩。我们先做一些准备，下面的引理与 [ČS24中的引理 2.2 完全类似。3]。

引理 4.8。 设 $Y = \mathrm{Spd}\, B$ 为一个仿射形式 *v*-层。则存在一族赋予离散拓扑的完美赋值环 $\{V_j\}_{j\in J_1}$ ，

以及一族代数闭非阿基米德域 $\{C_j\}_{j\in J_2}$ 及其开有界赋值子环 $\{C_j^+ \subseteq C_j\}_{j\in J_2}$，和一个拟紧拟分离形式 *adic* v 覆盖$\mathrm{Spd}(\prod_{j\in J_2} C_j^+) \coprod \mathrm{Spd}(\prod_{j\in J_1} V_j) \to \mathrm{Spd}\, B$。此外，若特化映射 $\mathrm{sp}\colon Y$一个$\to \mathrm{Spec}\ B_{\mathrm{red}}$ 已经是满射，则$\mathrm{Spd}(\prod_{j\in J_2} C_j^+) \to \mathrm{Spd}\, B$ 是一个 v 覆盖。

证明。 令 $I \subseteq B$ 为定义 B 上拓扑的理想，并令 $\{i_1, \dots, i_n, p\} \subseteq I$ 为一组生成元。对于每个点 $x \in \mathrm{Spd}\, B$ ，我们都可以找到一个几何点 $\mathrm{Spa}(C_x, C_x^+) \to \mathrm{Spd}\ B$。这给出了一个环的映射（不带拓扑）$B \to \prod_x C_x^+$。我们断言，作为一个环，$\prod_x C_x^+$ 是 I-adic 完备的。事实上，$(\prod_x C_x^+)/I^n = \prod_x (C_x^+/I^n)$，因为 I 是有限生成的。此外，乘积与极限可交换，且每个 C_x^+ 都是 I-adic 完备的，因此结论成立。

我们赋予 $R^+ := \prod_x C_x^+$以 I-adic 拓扑，于是根据 [Gle24，引理 2，23] 映射 $\mathrm{Spd}\, R^+ \to \mathrm{Spd}\ B$是一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，因为按构造$|\mathrm{Spd}\ R^+| \to |\mathrm{Spd}\ B|$ 是满射。我们可以将乘积分成两个因子$R^+ = R_1^+ \times R_2^+$ 其中 R_1^+ 对应于满足以下条件的因子：$I = 0$ 而 R_2^+ 对应于至少有一个生成元 i_j 是 C_x^+ 中的非零因子的因子。于是 $R_1^+ = \prod_{j\in J_1} V_j$ 且 $R_2^+ = \prod_{j\in J_2} C_j^+$ 。

现在，对于第二个陈述，注意到 $(\mathrm{Spd}\ R^+)^{\mathrm{an}} = (\mathrm{Spd} R_2^+)^{\mathrm{an}}$ 并且映射 $\mathrm{Spd}\ R_2^+ \to \mathrm{Spd}\, B$ 是形式 adic 且拟紧拟分离的。由定理 3.48 可知，映射$|\mathrm{Spd} R_2^+| \to |\mathrm{Spd}\ B|$ 是满射，因此是一个 v 覆盖。□

引理 4.9。 若 X 是厚空间 *kimberlite*，则存在一个普遍开拟 *pro-étale* 映射 $f\colon \mathrm{Spa}(R, R^+) \to X^{\mathrm{an}}$，使得 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是严格全不连通空间，且 f 可形式化。此外，形式化$\mathrm{Spd}\, R^+ \to X$ 是一个拟紧拟分离 v-覆盖。

证明。 不妨假设 X 是仿射空间金伯利岩。令 $\mathrm{Spd}\, B \to X$ 为一个形式 adic 拟紧拟分离 v-覆盖。由定理 4.8，不妨假设 $\mathrm{Spd}\, B = \mathrm{Spd}\ R_1^+ \coprod \mathrm{Spd}\ R_2^+$，其中 $\mathrm{Spa}(R_1, R_1^+)$ 是点的乘积。

由于 X^{an} 是一个空间钻石，因此存在一个普遍开的准原 étale v 覆盖 f : Spa(R, R^+) $\to X^{\mathrm{an}}$ （见 [Sch17，命题 11.24]）。根据定理 4.2，f 是可形式化的。我们断言 $\mathrm{Spd}\, R_1^+ \to X$ 可通过映射 $\mathrm{Spd}\, R_1^+ \to \mathrm{Spd}\, R^+$进行分解。根据形式化的唯一性，只需证明这一点在解析轨迹上成立。考虑 $W = \mathrm{Spa}(R, R^+) \times_{X^{\mathrm{an}}} \mathrm{Spa}(R_1, R_1^+)$，只需为映射 $W \to \mathrm{Spa}(R_1, R_1^+)$找到一个截面；但这是一个准原 étale 覆盖，而 $\mathrm{Spa}(R_1, R_1^+)$是极端不连通的，因此它存在一个截面。

现在，$\mathrm{Spd}\ R_1^+ \to \mathrm{Spd}\, B$ 是形式 adic 的，因而是拟紧拟分离的。这表明$\mathrm{Spd}\ R_1^+ \to X$ 是拟紧拟分离的，并且由于 $|\mathrm{Spd}\ R_1^+| \to |X|$ 根据定理 3.48 是满射的，因此它也是一个 v 覆盖。这说明$\mathrm{Spd}\, R^+ \to X$ 也是一个 v 覆盖。□

定义 4.10. 设 X 为一个空间金伯利岩。我们用 $X^{\mathrm{th}} \subseteq X$ 表示满足以下性质的最小子层：若 Y 是一个厚空间 kimberlite，且$f : Y \to X$ 是一个形式 adic 映射，则 f 经由 X^{th}分解。

命题 4.11. 设 X 为一个空间金伯利岩。则 $X^{\mathrm{th}} \to X$ 是一个空间金伯利岩，且映射 $X^{\mathrm{th}} \to X$ 是一个形式绝对闭浸入。特别地，$X^{\mathrm{Red}} \coprod X^{\mathrm{th}} \to X$ 是一个 v 覆盖，并且 X 由 X^{Red} 和 X^{th} 沿其交集粘合而得。

证明。令 Z 表示 $\mathrm{sp}(X^{\mathrm{an}}) \subseteq X^{\mathrm{red}}$。由定理 4.9 可知，若 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \to X^{\mathrm{an}}$ 是一个可形式化 v覆盖，则形式化 $\mathrm{Spd}\, R^+ \to X$ 形式 adic、拟紧拟分离，且 X^{th} 是其层论像。取约化后，得到图表 $\mathrm{Spd}\, R^+ \,\mathrm{red} \to X^{\mathrm{th}} \times_X X^{\mathrm{Red}} \to X^{\mathrm{Red}}$，而 $\mathrm{Spd}\, R^+ \,\mathrm{red} \to X^{\mathrm{Red}}$ 的层论像是 $Z^\diamond$，因此 $X^{\mathrm{th}} \times_X X^{\mathrm{Red}} = Z^\diamond$。这意味着 X^{th} 是一个预金伯莱岩，$X^{\mathrm{th}} \to X$ 是拟紧拟分离、形式 adic 的，并且 $(X^{\mathrm{th}})^{\mathrm{red}} = Z$。为证明 $X^{\mathrm{th}} \to X$ 是闭的，我们可以应用 Sch17 命题 18.3] 中的赋值判别准则 [。但是 |(X^{th})| $= |X^{\mathrm{an}}| \cup |Z^\diamond|$，且映射 $X^{\mathrm{an}} \to X$ 和 $Z^\diamond \to X$ 是部分真的。

根据定理 3.20，X 是赋值预金伯利岩，并且由于 $(X^{\mathrm{th}})^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}}$ 它也是金伯利岩。由于 X 形式化了几何点，而 $X^{\mathrm{th}} \subseteq X$ 是形式 adic 且闭的，X^{th} 也具有此性质。由于 $\mathrm{Spd}\, R^+ \to X^{\mathrm{th}}$ 是一个拟紧拟分离的形式 adic 满射，X^{th} 所以它是空间的。至此完成了第一个断言的证明。

现在，映射 $X^{\mathrm{Red}} \coprod X^{\mathrm{th}} \to X$ 是拟紧拟分离且满射的，因此它是一个 v 覆盖。在任意拓扑斯中，如果 $Y \to X$ 是一个满射，那么

$$X = \mathrm{co.eq}(R \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y)$$

其中 $R = Y \times_X Y$。由于 X^{th} 和 X^{Red} 都是闭浸入，$X^{\mathrm{th}} \cap X^{\mathrm{Red}}$ 也是一个闭浸入，而 R 恰好定义了沿着$X^{\mathrm{th}} \cap X^{\mathrm{Red}}$将 X^{th} 与 X^{Red} 进行数据粘合。□

4.3. 空间性在形式邻域下保持不变。 以下陈述是我们定义空间金伯利岩的主要动机。

命题 4.12。 设 X 是一个仿射空间金伯利岩，且 $Z \subseteq X^{\mathrm{red}}$ 是一个可构造的 *Zariski* 闭子集，则 $X_{/Z}$ 是一个仿射空间金伯利岩。

证明。令 $S = X^{\mathrm{Red}}$。由 [Gle24, 命题 4.21, 4.34], $\widehat{X}_{/Z}$ 是一个仿射赋值预金伯利岩，且 $(\widehat{X}_{/Z})^{\mathrm{red}} = Z$。现在我们证明 $(\widehat{X}_{/Z})^{\mathrm{an}}$ 是一个空间 v-层（见[Sch17, 定义 12.12]）。由定理 3.46，它是拟分离的。考虑定理 4.11 的覆盖 $S \coprod X^{\mathrm{th}} \to X$，利用定理 4.9，我们可以将其细化为一个 v 覆盖 $W = S \coprod \mathrm{Spd}\, R^+ \to X$；更准确地说，我们得到一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖 f: $W \to X$，使得 $W\mathrm{an} \to X^{\mathrm{an}}$是普遍开的。令 $Z_W := f^{-1}(Z) \subseteq W\mathrm{red}$，并令 $S_W = W^{\mathrm{Red}} \subseteq W$。由 [Gle24, 命题 4.20],，我们得到一个拟紧拟分离形式 adic $\widehat{W}$ v 覆盖 $\widehat{W}_{/Z_W} \to \widehat{X}_{/Z}$。由 [Gle24, 命题 4.19], $W\mathrm{an}_{/Z_W}$是一个空间钻石。由于 $(\widehat{W}_{/Z_W})^{\mathrm{an}}$ 在 $(\widehat{X}_{/Z})^{\mathrm{an}}$上是拟紧拟分离且满射的，因此 $(\widehat{X}_{/Z})^{\mathrm{an}}$也是拟紧拟分离的。我们现在证明，$(\widehat{X}_{/Z})^{\mathrm{an}}$ 的每个点都有一个由拟紧开邻域组成的基

$\widehat{}$ $\widehat{}$之上$(X_{/Z})^{\mathrm{an}}$。这对 $x \in X^{\mathrm{an}} \cap (X_{/Z})$ 显然成立，因为它是一个空间钻石的开子集（见 [Gle24, 命题 4.22]）。

设$X_{/Z}$为$\widehat{}$个包含x的开子集。由于$\widehat{}$ $\frown S \cap (X_{/Z}) = S_{/Z}$是一个金伯利岩（甚至是一个形式 v-层），存在一个包含 x 的开子集$V \subseteq U$，使得 $V \cap S$在 $(\widehat{S}_{/Z})^{\mathrm{an}}$ 上拟紧。令 $V_W = f^{-1}(V) \subseteq \frown$ $\frown W_{\diamond/Z}$。注意到 $V_W \cap S_W$在 S_{W/Z_W} 上拟紧。我们可以找到一个拟紧开子集 $\frown$ $\frown V'_W \subseteq V_W \subseteq W^{\mathrm{an}}_{/Z}$，使得 $V'_W \cap S_W = V_W \cap S_W$。事实上，由于 $W_{\diamond/Z}$是一个空间钻石，且 V_W 是一个开子集，我们可以用一族开拟紧开子集覆盖 V_W。从这个先验上可能无限的族中，我们可以找到有限多个开集，其在 S_W 上的限制覆盖 $V_W \cap S_W$。令 $V' \subseteq V$ 表示 $V'_W \to V$ 的层论像；我们断言 V' 是一个包含 x 且包含于 U 的拟紧开子层。包含于 U 可由

$$|V'| = f(|V'_W|) \subseteq f(|V_W|) = |V| \subseteq |U|,$$

$\widehat{}$因此，只需证明 $|V'_W| \to |V|$的像是开集。事实上，$V'_W \to (X_{/Z})^{\mathrm{an}}$是拟紧映射的复合，因此它满射到其拓扑像上。由于 $|V|$ 沿映射 $|V_W| \to |V|$具有商拓扑，只需证明 $f^{-1}(f(|V'_W|)) \subseteq |V_W|$是开集。

注意，根据构造，$S_W \cap V'_W = S_W \cap f^{-1}(f(|V'_W|)) = S_W \cap V_W$。特别地，如果 $x \in S_W \cap f^{-1}(f(|V'_W|))$，则存在一个包含 x且包含于 $f^{-1}(f(|V'_W|))$ 的开子集，即 V'_W。另一方面，$W_{\diamond} \cap f^{-1}(f(|V'_W|)) = f^{-1}(f(W_{\diamond} \cap V'_W))$，并且由于映射 $f\colon W_{\diamond} \to X^{\mathrm{an}}$是普遍开的，$f(V'_W \cap W_{\diamond}) \subseteq V \cap X^{\mathrm{an}}$是一个开子集。因此，$W_{\diamond} \cap f^{-1}(f(|V'_W|))$ 也是开集。至此证明了 $|V'| \subseteq |V|$ 是开集。

现在，由于 V' 被 V'_W覆盖，它是拟紧的，并由此产生一个包含于 U中的 x的拟紧邻域。由于 U 是任意的，我们已证明 x存在一组拟紧拟分离$\widehat{}$开邻域基。至此，证明 $(X_{/Z})^{\mathrm{an}}$ 是空间 v- 层的工作就完成了。

$\widehat{}$根据 [Sch17 定理 12.18]，，要证明 $X^{\mathrm{an}}_{/Z}$ 是空间钻石，只需 $\widehat{}$ $\widehat{}$为每个 $x \in X^{\mathrm{an}}_{/Z}$ 找到一个拟 pro-étale 映射 $\iota_x : \mathrm{Spa}(C_x, C_x^+) \to X^{\mathrm{an}}_{/Z}$ 映至$\frown x$。在 $X^{\mathrm{an}} \cap X^{\mathrm{an}}_{/Z}$ 上这是可行的，因为根据假设，X^{an} 是空间钻石。$\widehat{}$ $\widehat{}$另一方面，在 $S \cap X^{\mathrm{an}}_{/Z}$上这是可行的，因为 $S^{\mathrm{an}}_{/Z}$是空间钻石，且$\widehat{}$ $\widehat{}$映射 $S^{\mathrm{an}}_{/Z} \to X^{\mathrm{an}}_{/Z}$ 是闭浸入，因而是拟 pro-étale。这就完成了$\widehat{}$证明 $X_{/Z}$ 是仿射金伯利岩。现在，它是仿射空间金伯利岩$\widehat{\frown}$ $\widehat{}$ $\widehat{\frown}$，因为映射 $W_{/Z} \to X_{/Z}$ 是一个 adic 拟紧拟分离 v-覆盖，而 $W_{/Z}$ 是一个仿射形式$\widehat{}$v-层。此外，根据假设，$X_{/Z}$ 的几何点在 X 中形式化，并且根据$\frown$ $\frown$[Gle24 命题 4.20]，任何此类形式化都经过 $X_{/Z}$，因此 $X_{/Z}$也形式化几何点。□

4.4. **空间金伯利岩与空间钻石。**

命题 4.13. 设 X 是一个形式化几何点的仿射金伯利岩，则 X 是空间的，当且仅当 $X \to *$ 在局部空间钻石范畴中可表。

证明。我们证明第一个断言。假设 X 是一个仿射空间金伯利岩。令 $U = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 为一个严格全不连通完美空间，由 [Sch17，命题 11.24，注 11.25]，只需证明 $X \times U$ 是一个局部空间钻石。令 $S = (\mathrm{Spec}\, R^+)^\diamond$ 并考虑 $W := X \times S$。我们断言 W 是一个仿射空间金伯利岩。由定理 3.21，W 是一个仿射赋值预金伯利岩。注意，投影映射 $\pi_1 : W \to X$ 是形式 adic 的，因此 $W^{\mathrm{an}} = \pi^{-1}(X^{\mathrm{an}}) = X^{\mathrm{an}} \times S$。由于 $S \to *$ 在空间钻石中可表，W^{an} 仍是一个空间钻石。这说明 W 是一个金伯利岩。

令 $\mathrm{Spd}\, B \to X$ 为一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，其中 B 是一个特征为 p 的环，$I \subseteq B$ 是一个定义理想。于是 $\mathrm{Spd}\, B \times S \to X \times S$ 是一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，而 $\mathrm{Spd}\ B \times S$ 是一个仿射形式 v-层，对应于 $R^+ \otimes_{\mathbb{F}_p} B$ 的 I-adic 完备化。现在，W 将几何点形式化，因为 X 和 S 也如此；由此完成了对 W 是一个仿射空间金伯利岩的证明。

令 $\varpi \in R^+$ 为一个伪一致化元。这定义了一个可构造扎里斯基闭子集 $Z \subseteq \mathrm{Spec}\ R^+$，属于 S^{red}，以及 $Z_W \subseteq X^{\mathrm{red}} \times S^{\mathrm{red}} = X^{\mathrm{red}} \times \mathrm{Spec}\ R^+$，属于 W^{red}。根据定理 4.12，W_{Z_W} 是一个仿射空间金伯利岩，特别地 $W^{\mathrm{an}}_{Z_W}$ 是一个空间钻石。但 $X \times U$ 是 $W^{\mathrm{an}}_{Z_W}$ 中满足 $\varpi \neq 0$ 的开子集，而空间钻石的任意开子层都是局部空间钻石。

反过来，假设 X 是一个形式化几何点的仿射金伯利岩，并且 $X \to *$ 在局部空间钻石中可表。令 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \to X^{\mathrm{an}}$ 为一个由严格全不连通空间给出的泛开拟 proétale 覆盖，并令 $W = \mathrm{Spd}\ R^+ \coprod X^{\mathrm{Red}}$。根据定理 4.2，我们有一个映射 $f : W \to X$，并断言 $W \to X$ 是一个形式 adic 拟紧拟分离 v-覆盖。现在，$(X \times \mathrm{Spd}\ \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}$ 是一个空间钻石。事实上，由于 $\mathrm{Spd}\, \mathbb{F}_p[\![t]\!] \to *$ 在局部空间钻石中可表，且根据假设 X^{an} 是一个空间钻石，因此 $X^{\mathrm{an}} \times \mathrm{Spd}\, \mathbb{F}_p[\![t]\!]$ 是一个局部空间钻石；同理，$X \times \mathrm{Spd}\, \mathbb{F}_p((t))$ 也是一个局部空间钻石。此外，这两个开子层覆盖了 $(X \times \mathrm{Spd}\, \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}$。此外，根据定理 3.46，$(X \times \mathrm{Spd}\ \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}$ 是拟分离的。因此，映射 f：$|(W \times \mathrm{Spd}\ \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}| \to |(X \times \mathrm{Spd}\ \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}|$ 是局部谱空间之间的满射谱映射，且这些空间均为拟分离的。此外，$|(W \times \mathrm{Spd}\ \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}|$ 是拟紧的，因此 $|(X \times \mathrm{Spd}\ \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}|$ 也是拟紧的。由 [Sch17，命题 11.19.(iii)]，可知，$(X \times \mathrm{Spd}\, \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}$ 是一个空间钻石。

论证还表明，f 是一个拟紧拟分离 v 覆盖。事实上，我们有一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} (W \times \mathrm{Spd}\, \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}} & \xrightarrow{g} & (X \times \mathrm{Spd}\, \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\quad f \quad} & X, \end{array}$$

且 g 是一个拟紧拟分离 v 覆盖，因为它是空间钻石之间的一个映射，并且在拓扑空间上满射。由于 $X \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p((t)) \to X$ 并且经由 $(X \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}$ 因而可由 [Sch17，命题 10。11] 推出，映射 $W \to X$ 也既是拟紧拟分离的，也是一个 v 覆盖。□

推论 4.14. 任意局部空间金伯利岩之间的映射，$X \to Y$，在局部空间钻石中都是可表的。

证明。该断言在源和目标上都是局部的，因此我们可以假设 X 和 Y 是仿射空间金伯利岩。由于映射 $X, Y \to *$ 在局部空间钻石中都是可表的，该断言便可由 [Sch17，推论 11。29]轻易推出。□

命题 4.15. 设 $f : Z \to X$ 是 ν-层的形式绝对闭浸入，且 X 是仿射空间金伯利岩，则 Z 是仿射空间金伯利岩。

证明。由 [Gle24，命题 4.41.(4)]，Z 是一个仿射金伯利岩。我们来证明 Z 将几何点形式化。设 $\operatorname{Spa}(C, C^+) \to Z$ 是一个几何点，由于 X 是空间的，诱导的几何点形式化为一个映射 $\operatorname{Spd} C^+ \to X$。基变换 $\operatorname{Spd} C^+ \times_X Z$ 是 $\operatorname{Spd} C^+$ 的一个形式闭子层，且包含 $\operatorname{Spa}(C, C^+)$，因此它必定与 $\operatorname{Spd} C^+$ 一致（见定理 3.4）。由定理 4.13，只需证明 $Z \to *$ 在局部空间钻石中可表；而$Z \to X$ 是（见 [Sch17，命题 11.20]），$X \to *$ 也如此。这表明$Z \to *$ 在局部空间钻石中可表。□

命题 4.16。 空间金伯利岩（分别地，局部空间金伯利岩、仿射空间金伯利岩）的范畴在纤维积下稳定，且包含 $*$。

证明。我们只证明仿射空间金伯利岩的情形，因为其他断言很容易由此推出。设 X，Y和 Z 都是仿射空间金伯利岩，且 $W = X \times_Y Z$。我们可以将 W 写成映射 $X \times Z \to Y \times Y$沿对角映射 $Y \to Y \times Y$的基变换。根据定理 4.15，只需证明 $X \times Z$是空间金伯利岩。令 $\operatorname{Spd} B_X \to X$ 和 $\operatorname{Spd} B_Z \to Z$ 为拟紧拟分离形式绝对 v 覆盖。

根据定理 3.21，$X \times Z$ 是赋值预金伯利岩，并且

$$(X \times Z)^{\mathrm{an}} = (X^{\mathrm{an}} \times Z) \cup (X \times Z^{\mathrm{an}}).$$

此外，根据定理 4.13，$X \to *$ 和 $Z \to *$ 在局部空间钻石中是可表的；由于 X^{an} 和 Z^{an} 是空间钻石，因此 $(X \times Z)^{\mathrm{an}}$ 是一个拟紧且分离的局部空间菱形。此外，由于 $(\operatorname{Spd} B_X \times \operatorname{Spd} B_Z)^{\mathrm{an}} \to (X \times Z)^{\mathrm{an}}$ 是一个 v 覆盖，且源是拟紧的，我们得出 $(X \times Z)^{\mathrm{an}}$ 是一个空间钻石，并且 $X \times Z$是一个金伯利岩。此外，映射 $(\operatorname{Spd} B_X \times \operatorname{Spd} B_Z) \to (X \times Z)$ 是一个准紧准分离形式绝对 v 覆盖，而 $\operatorname{Spd} B_X \times \operatorname{Spd} B_Z$是一个仿射形式 v-层。最后，它形式化了几何点，因为 X 和 Z 二者都形式化了几何点。□

4.5. 拟紧 = 形式 adic。

命题 4.17。 设 $f\colon X \to Y$ 是空间金伯利岩之间的一个映射。那么，当且仅当 f 是拟紧的时，它才是形式 *adic* 的。

证明。只要使用拟紧拟分离形式绝对 v 覆盖，形式 adic 和拟紧这两个性质在源和目标上都是局部的。特别地，我们可以假设 X 和 Y 都是仿射形式 v 层（即 $X = \operatorname{Spd} B$，并且 $Y = \operatorname{Spd} A$）。由 [Gle24，引理 2，23], 若映射 $X \to Y$ 是形式 adic 的，则它是拟紧的。

假设 $X \to Y$ 是拟紧的，并令 $Z = X \times_Y Y^{\mathrm{Red}}$，根据定理 4.16，这是一个仿射空间金伯利岩。假设存在秩 1 的 $z \in Z^{\mathrm{an}}$。经由 z 的点所构成的子层是一个空间钻石，因为 X^{an} 是空间钻石；它可以由一个几何点 $\operatorname{Spa}(C, O_C) \to z$ 覆盖。我们可以将此形式化为一个映射 $\operatorname{Spd} O_C \to Z$，它是拟紧的，因为它是形式 adic 的。根据假设，复合映射 $\operatorname{Spd} O_C \to Z \to Y_{\mathrm{Red}} \to *$ 再次是拟紧的。但 $\operatorname{Spd} O_C \to *$ 并非拟紧。这个矛盾表明 $Z^{\mathrm{an}} = \emptyset$，因此 f 是形式 adic 的。□

讨论空间金伯利岩的例子时，我们将需要以下引理。

引理 4.18. 设 X 是一个空间金伯利岩，Y 是一个金伯利岩，且 $f\colon X \to Y$ 是一个形式 *adic* 映射。以下结论成立：

(1) 若 f 是一个 v 覆盖，则它是拟紧拟分离的。(2) 若 $|f|$ 是满射且 $Y \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p[\![t]\!]$ 是一个金伯利岩，则 f 是一个形式绝对覆盖。

证明。注意到 f 自动是拟分离的，因为这两个 v-层在 $*$ 上都是分离的。先假设 f 是 v-满射。现在，拟紧性可以在 v 局部地检验，因此只需证明 $X \times_Y X \to X$ 是拟紧的。由于 $X \times_Y X$ 是 $X \times X \to Y \times Y$ 沿对角映射 Δ_Y 作基变换所得，根据定理 4.15 和定理 4.16，可得出 $X \times_Y X$ 是一个空间金伯利岩。此外，映射 $X \times X \to Y \times Y$ 是形式 adic 的，因为 $X \to Y$ 是形式 adic 的。这意味着 $X \times_Y X \to Y$ 是形式 adic 的，因此 $X \times_Y X \to X$ 也具有形式 adic 性质。现在可以应用定理 4.17 证明 $X \times_Y X \to X$ 是拟紧的。第一项断言得证。

对于第二个断言，我们考虑映射 $X \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p[\![t]\!] \to Y \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p[\![t]\!]$。根据假设，它是形式 adic 的，且在拓扑空间层面上满射。于是我们得到一个空间钻石的映射 $(X \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}} \to (Y \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p[\![t]\!])^{\mathrm{an}}$，它在拓扑空间层面上满射，因此是 v-满射。现在可知，映射 $X \times \operatorname{Spd} \mathbb{F}_p(\!(t)\!) \to Y$ 是 v-满射；又由于它经由 f 分解，因此 f 也是 v-满射。□

5. 空间金伯利岩的例子

本节中，令 E 为一个局部域， $O_E \subseteq E$ 为其整数环， $\varpi \in O_E$ 为一个一致化元， $k = \mathbb{F}_q$ 为其剩余域。令 E 表示 E的最大非分歧扩张的 π-进完备化。固定一个抛物型群概形 $\mathcal{G}$ ，它定义在 Spec O_E 上，且其约化一般纤维 G 定义在 E上。我们还固定μ ：一个几何余特征的共轭类，其反身域为 F。对于特征为 p 的任意完美环 A ，令 $\mathbb{W}(A)$表示 O_E-Witt 向量环。更确切地说，若 E 的特征为 0，则 $\mathbb{W}A := \mathcal{W}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_E$，其中 $\mathcal{W}(A)$表示 p-典型 Witt 向量；若 E 的特征为 p，则 $\mathbb{W}A = A \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} O_E \cong A[[\pi]]$。

若 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$，我们用 $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R^+)$ 表示赋予（$\pi, [\varpi]$）进拓扑的 $\mathbb{W}(R^+)$，其中 ϖ 表示 R^+ 的一个伪一致化元。我们将 Spa $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R^+)$ 中满足 $[\varpi] \neq 0$（对某个伪一致化元 $\varpi \in R^+$）的点组成的轨迹记为 $\mathcal{Y}_S$ ，并将 Spa $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R^+)$ 中满足 $\pi \cdot [\varpi] \neq 0$ 的点组成的轨迹记为 Y_S。根据 FS21，命题 II.1.1]，这些是亚完美类绝对空间。

5.1. 正绝对 Banach–Colmez 空间。回顾一下，给定一个 $\lambda > 0$ ，可以将绝对 Banach–Colmez 空间 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))$ 视为一个 v-层 [（FS21，II.2.2]）。此外， $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))$ 有唯一的非解析点 0 : $* \to \mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))$，且 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda)) \setminus \{0\}$ 是一个空间钻石。我们将证明，v-层 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda)) \setminus \{0\}$ 是空间金伯利岩。

定理 5.1。 设 D 是一个等晶体，满足 $\mathcal{E}_D = \oplus_{\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}} \mathcal{O}(\lambda)^{m_\lambda}$，则以下结论成立：

(1) $\mathcal{BC}(D)$是一个局部空间金伯利岩，且

$$\mathcal{BC}(D)^{\mathrm{Red}} \cong \mathcal{BC}(\mathcal{O}^{m_0}) = \underline{E}^{m_0}.$$

(2) 如果 $m_0 = 0$ ，那么 $\mathcal{BC}(D)$ 是一个带基点的空间金伯利岩。

备注 5.2。 自然会问，负 Banach–Colmez 空间是否也是空间金伯利岩。答案是**否**，因为这些空间不是 v 局部形式的。事实上，它们唯一的非解析点具有亚纯极限，而非形式极限。

证明。由于 $\mathcal{BC}(\oplus_{\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}} \mathcal{O}(\lambda)^{m_\lambda}) = \mathcal{BC}(\mathcal{O}^{m_0}) \times \prod_{\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))$，我们可以由第二个陈述以及 [FS21, Proposition II.2.5.(ii)] 推出第一个陈述。此外，根据定理 4.16，我们可以将问题归结为这样的情形： $m_\lambda = 1$ ，其中 λ 是选定的，且 $m_\lambda = 0$ 否则。从现在起， D 具有 $D = \mathcal{O}(\lambda)$ 的形式，其中 $\lambda > 0$，且 $\lambda = \frac{n}{m}$ 满足 n ，并且 m 互素。我们来证明 $\mathcal{BC}(D)$ 是形式分离的。关于分离性的论证见 [FS21, Proposition II.2.16]。根据 [GIZ25, Corollary 3.20]， $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))^{\mathrm{red}} = *$ ，且伴随映射是到原点的包含映射。对角映射 $\Delta\colon \mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda)) \to \mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))^2$ 是形式 adic 的，因为只有原点映射到原点。由此可知 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))$ 是形式分离的。

为了证明 $\mathcal{BC}(D)$ 是 v 局部形式的，我们先做一些准备。回顾一下，对于任意仿射完美空间 $S = \mathrm{Spa}(R,\ R^+)$ 以及一个伪一致化元$\varpi \in R^+$的选取，我们可以考虑环 $B^S_{[1,\infty]} = \Gamma(Y_{S,\ [1,\infty]},\ \mathcal{O})$。令 $R^+{}_{\mathrm{red}} = (R^+/\varpi)^{\mathrm{perf}}$，并令 $R^\circ_{\mathrm{red}} = (R^\circ/\varpi)^{\mathrm{perf}}$。

引理 5.3. 设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$。下面的环图是笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} B^S_{[1,\infty]} & \longrightarrow & \mathbb{W}(R^+_{\mathrm{red}})[\frac{1}{\pi}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^S_{[1,\infty]} & \longrightarrow & \mathbb{W}(R^\circ_{\mathrm{red}})[\frac{1}{\pi}] \end{array}$$

证明。 我们分步进行。注意，下面的图是笛卡尔图，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}(R^+)[T]/(\pi\cdot T - [\varpi], \pi^n) & \longrightarrow & \mathbb{W}(R^+_{\mathrm{red}})[T]/(\pi\cdot T, \pi^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{W}(R^\circ)[T]/(\pi\cdot T - [\varpi], \pi^n) & \longrightarrow & \mathbb{W}(R^\circ_{\mathrm{red}})[T]/(\pi\cdot T, \pi^n). \end{array}$$

事实上，一般而言，只要

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

是一个环的笛卡尔图，其中 $C \to D$ 满射，且 $I \subseteq A$ 是一个理想，使得 $A/I \to C/I$ 是单射，那么

$$\begin{array}{ccc} A/I & \longrightarrow & B/I \\ \downarrow & & \downarrow \\ C/I & \longrightarrow & D/I \end{array}$$

也同样是笛卡尔图。

具体而言，取 $[c] \in C/I$ 和映射到 D/I中同一元素的 $[b] \in B/I$ 。我们有 $c - (a_1d_1 + \ldots a_nd_n)$ 在 D 中 $= b$，并且可以将每个 d_i 提升为元素c_i，从而用 $c - (a_1c_1 + \ldots a_nc_n)$ 替换 c 后，可以使 $c = b$ 位于 D 中，同时不改变类 $[c] \in C/I$。特别地，我们可以提升到一个元素$a \in A$，它诱导出一个映射到 $[b]$ 和 $[c]$的元素 $[a] \in A/I$。这证明了$A/I \to C/I \times_{D/I} B/I$ 是满射。由于根据假设 $A/I \to C/I$ 是单射，我们对到 $A/I \to C/I \times_{D/I} B/I$ 的映射也可以作同样的论断，因此它是一个同构。

现在，对 $n \to \infty$ 取极限，并利用极限与笛卡尔图交换这一事实，我们得到如下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}(R^+)\langle T\rangle/(\pi\cdot T-[\varpi]) & \longrightarrow & \mathbb{W}(R^+_{\mathrm{red}})\langle T\rangle/(\pi\cdot T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{W}(R^\circ)\langle T\rangle/(\pi\cdot T-[\varpi]) & \longrightarrow & \mathbb{W}(R^\circ_{\mathrm{red}})\langle T\rangle/(\pi\cdot T) \end{array}$$

命题中的图由上面的图对 π取逆构造而成，并且仍然是笛卡尔的。事实上，我们可以将该局部化实现为沿着由乘以 π给出的过渡态射的滤过余极限，即 π。由于滤过余极限与有限极限交换，剩下的图仍然是笛卡尔的。□

现在我们证明， $\mathcal{BC}(D)$ 形式化了所有来自仿射完美胚（R, R^+）的映射。特别地，它是 v-形式化的。设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$，并设$S_0 = \mathrm{Spa}(R, R^\circ)$。回顾一下，沿映射 $Y_{S_0,[1,\infty)} \to Y_{S_0,[1,\infty]}$ 的限制会诱导 φ-等变向量丛范畴之间的全忠实函子（参见 [PR21，命题 2.1.4]）。利用 [GIZ25，定理 3.17]，我们可以重新阐释刚才提到的全忠实性结论，从而证明包含映射 $\mathrm{Spa}(R, R^\circ) \to \mathrm{Spd}(R^\circ, R^\circ)$ 诱导一个群同构

$$\mathcal{BC}(D)(\mathrm{Spd}(R^\circ)) \to \mathcal{BC}(D)(\mathrm{Spa}(R, R^\circ)).$$

事实上，$Y_{\mathrm{Spd}(R^\circ)} = Y_{S_0,(0,\infty]}$，如 [GIZ25，注 3.14]所述。由于斜率为正，Banach–Colmez 空间定义为整体截面空间。一个元素 $\alpha \in \mathcal{BC}(D)(\mathrm{Spd}(R^\circ, R^\circ))$ 可解释为 $\alpha \in (B^{S_0}_{[1,\infty]})^m$ 中的一个元素，它满足适当的 φ-等变性，且其中 $m = \mathrm{rank}(\mathcal{E}_D)$。此外，这会诱导一个映射 $\mathrm{Spd}(R^\circ_{\mathrm{red}}, R^\circ_{\mathrm{red}}) \to \mathcal{BC}(D)$，该映射必然是零映射，这表明 $\alpha = 0$ 属于 $\mathbb{W}(R^\circ_{\mathrm{red}})^m$。根据定理 5.3，$\alpha \in B^S_{[1,\infty]}$，它产生一个映射 $\mathrm{Spd}(R^+, R^+) \to \mathcal{BC}(D)$，再次应用 [GIZ25，定理 3.17] 和 [GIZ25，注 3.14]。

截至目前，我们已证明 $\mathcal{BC}(\mathcal{O}(\lambda))$是一个使点形式化的带点预Kimberlite。根据 [FS21，命题 II.2.16]，，它是一个赋值预金伯利岩。事实上，Heuer 特化映射可识别为结构态射$\mathcal{BC}(D) \to *$，而该态射是部分真的。根据 [FS21，命题 II.3.7.(i)] $\mathcal{BC}(D)^{\mathrm{an}}$是一个空间钻石，由此可知 $\mathcal{BC}(D)$是一个金伯利岩。根据定理 4.13，当 $\mathcal{BC}(D) \to *$在局部空间钻石中可表时，$\mathcal{BC}(D)$是空间的。这可由 [FS21，命题 II.2.16]推出。□

回忆一下， G 表示 E上的一个约化群。令 $B(G)$表示 Kottwitz 集，并令 $b \in B(G)$。回忆一下，对于每个 $S = \mathrm{Spa}\, R \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$，元素 b 定义了相对 Fargues–Fontaine 曲线 X_S上的一个 G-丛 $\mathcal{E}_b$，FF。这产生了一个位于 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{F}_p$ 上的~v-层，用以参数化 $\mathcal{E}_b$的自同构。它记作 G_b。~此外，我们可以像 [FS21，命题 III.5.1]中那样，将 $G_b = G_b^{>0} \rtimes G_b(E)$写出。

定理 5.4。 设记号如上，则以下结论成立。

(1) ~G_b 是局部空间金伯利岩。

(2) $\widetilde{G}_b^{>0}$是带基点的空间金伯利岩。

证明。设 $\rho: G \to \mathrm{GL}_n$ 是一个全忠实嵌入。我们断言， $G_b \to G_{\rho(b)}$ 是形式绝对闭浸入。设 $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$。我们有约化群概形 $\mathrm{Aut}_{X_S,\mathrm{FF}}(\mathcal{E}_b) \to \mathrm{Aut}_{X_S,\mathrm{FF}}(\mathcal{E}_{\rho(b)})$ 上方的闭浸入 $X_{S,\mathrm{FF}}$。此外， $\mathrm{Aut}_{X_S,\mathrm{FF}}(\mathcal{E}_{\rho(b)})$ 是 $\mathbb{V}(\mathcal{E}nd^2)$ 的 Zariski 闭子集，其中 $\mathbb{V}(\mathcal{E}nd^2)$ 表示端omorphism 向量丛 $\mathcal{E}nd^2 := \mathrm{End}_{X_S,\mathrm{FF}}(\mathcal{E}_{\rho(b)})^2$ 的总空间。设 $\mathcal{I}_S \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{E}nd^2)}$ 是将 $\mathrm{Aut}_{X_S,\mathrm{FF}}(\mathcal{E}_b)$ 定义为 $\mathbb{V}(\mathcal{E}nd^2)$ 的闭子概形的理想层。

任意 $\alpha \in \widetilde{G}_{\rho(b)}(R, R^+)$ 对应于一个截面

$$\Gamma_\alpha : X_{S,\mathrm{FF}} \to \mathrm{Aut}_{X_{S,\mathrm{FF}}}(\mathcal{E}_{\rho(b)}),$$

并且 $\Gamma_\alpha^{-1}(\mathcal{I}_S)$ 定义了 X_S 的 *Zariski* 闭子集， FF。根据 [FS21，引理 IV.4.23],这定义了 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 中的一个 Zariski 闭子集，它表示那些与 α 的复合经由 $\mathrm{Aut}_{X_S,\mathrm{FF}}(\mathcal{E}_b)$ 分解的点所构成的子层。这证明了 $\widetilde{G}_b \to \mathcal{BC}(\mathrm{End}_{X_S,\mathrm{FF}}(\mathcal{E}_{\rho(b)})^2)$ 是一个闭浸入。

我们可以根据 [GIZ25，定理 7.14], 将映射 $G_b(E) \to G_b$ 识别为约化伴随 $G_b^{\mathrm{Red}} \to G_b$。另一方面， $G_b(E)$ 是 $\mathcal{E}_b$ 的分次自同构的模空间（见 [FS21，命题 III.4.7]）。由于 $\rho: G \to \mathrm{GL}_n$ 是完全忠实的，可以在 $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}_{\rho(b)})$ 中检验是否为分次的。但 $\mathcal{BC}(\mathrm{End}(\mathcal{E}_{\rho(b)}))^{\mathrm{Red}}$ 也参数化分次端omorphism。这证明了 $G_b \to \mathcal{BC}(\mathrm{End}(\mathcal{E}_{\rho(b)})^2)$ 是形式 adic 的。根据定理 4.15 和定理 5.1， G_b 是局部空间金伯利岩。另一方面， $G_b = G_b^{>0} \times G_b(E)$ 在层论意义下（不带群结构），而 $\widetilde{G}_b^{\mathrm{red}} = G_b(E)$，这意味着 $(\widetilde{G}_b^{>0})^{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$，因此根据定理 4.16，它是一个带基点的空间金伯利岩。□

5.2. **Beilinson–Drinfled 仿射 Grassmanians**。 在我们的工作中 [AGLR22] 与 Anschütz、Lourenço 和 Richarz 一起，引入了平坦 π-adic 金伯利岩的概念，用于具有结构映射 $X \to \mathrm{Spd}\,O$ 和 O 局部域的整数环 [AGLR22，定义 2。30]。这一概念是本文所用厚空间金伯利岩概念的先导（见定理4.7）。为方便读者，下面列出定理 5.6 ，以便与 [AGLR22]中陈述的内容进行比较。

备注 5.5。 在 [AGLR22]撰写时，kimberlite 一词指的是一种弱化版本的对象，而本文及 [Gle24]的最新版本中，我们将其称为金伯利岩。事实上，在 [AGLR 22] 撰写时，用于特化 v-层的 Heuer 特化映射尚未被引入，我们也尚未找到赋值预金伯利岩的定义；当不要求真性时，这才是应当考虑的正确对象。此外，我们也低估了要求特化映射为拟紧映射的重要性。由于局部模型是真映射，最终得到的概念其实相同。我们将在下文对此作出说明。

命题 5.6。 设 O 是一个含有统一化元 $\pi \in O$ 的完备离散赋值环，且其上有 $\mathbb{Z}_p$ 。设 $\mathcal{F}$ 是一个预金伯利岩，带有一个形式 *adic* 映射 $\mathcal{F} \to \operatorname{Spd} O$。假设 $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ 是一个局部空间钻石。以下陈述成立。

(1) 若 $\mathcal{F} \to \operatorname{Spd} O$ 是正合的， $\mathcal{F}$ 是 π-平坦的（如 [AGLR22，定义 2.31]）且形式化几何点，则 $\mathcal{F}$ 是厚空间 *kimberlite*。(2) 若 $\mathcal{F}$ 是厚空间金伯利岩，则 $\mathcal{F}$ 是 π-平坦的。

证明。 让我们证明第一个结论。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \operatorname{Spd} O \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{SP}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{SP}} \\ \mathcal{F}^{\mathrm{H}} & \longrightarrow & * \end{array}$$

这表明 $\mathcal{F} \to *$ 是部分真的；又因为 $\mathcal{F}^{\mathrm{H}} \to *$ 是弱分离的，根据定理 3.31，$\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{H}}$ 是部分真的，因此它是赋值预金伯利岩。现在， $\mathcal{F}_{\text{红色}}$ 在 $\operatorname{Spec} O/\pi$ 上是真映射，且 $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ 是空间的。根据 [Gle24，定理 4.40]映射 sp： $|\mathcal{F}_{\text{一个}}| \to |\mathcal{F}^{\mathrm{red}}|$ 是局部谱空间之间的谱映射；但由于目标和源都是拟紧的，该映射是拟紧的。根据定理 3.43， $\mathcal{F}$ 是金伯利岩。

根据 π-平坦性的定义，参见 [AGLR22，定义 2.31]，我们有一个 v 覆盖 $\coprod_{i\in I} \operatorname{Spd} R^{+,\sharp}_i \to \mathcal{F}$ 其中映射 $\operatorname{Spd} R^{+,\sharp}_i \to \operatorname{Spd} O$ 是形式 adic 的，且（$R^{\sharp}_i$， $R^{+,\sharp}_i$）是一个完美拟 Huber 对。由于 $\mathcal{F}$ 是拟紧的，只需有限多个 $i \in I$，且 $\coprod_{i=1}^{n} \operatorname{Spd} R^{+,\sharp}_i \to \mathcal{F}$ 是一个拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，因此 $\mathcal{F}$ 是一个空间金伯利岩。由于对于 $\operatorname{Spd} R^{+,\sharp}_i$ 特化映射是满射的，因而对于 $\mathcal{F}$ 也是如此，所以它是厚的。这就完成了第一个陈述的证明。

对于第二个陈述，假设 $\mathcal{F}$ 是一个厚空间金伯利岩。令 $\operatorname{Spa}(R, R^{+}) \to \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ 是一个可形式化 v 覆盖。根据定理 3.48 和定理 4.17， $\operatorname{Spd} R^{+} \to \mathcal{F}$ 是一个形式 adic v 覆盖。由于映射 $\mathcal{F} \to \operatorname{Spd} O$ 被假设为形式 adic 的，因此映射 $\operatorname{Spd} R^{+} \to \operatorname{Spd} O$ 是形式 adic 的，并且给定为映射 $\operatorname{Spa}(R^{\sharp}, R^{\sharp,+}) \to \operatorname{Spa} C$ 的形式化，其中 $R^{\sharp}$ 是 R 的一个非倾斜体（可能处于特征 p 中）。□

回顾一下，存在一个 Beilinson–Drinfeld仿射Grassmannian

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}} \to \operatorname{Spd} O_E$$

，它是 Scholze 的 B_{dR}-Grassmannian 的一个整模型 v-层，并且存在一个局部模型 $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\mu} \to \operatorname{Spd} O_F$，它是 μ [AGLR22 所定义的 Schubert簇的一个整模型， §4]。

下面的定理 5.7将 [AGLR22]中的基本 kimberlite理论结构性结果翻译为

定理5.7 ([AGLR22])。 采用上述记号，$\mathcal{M}_{\mathcal{G},\mu}$ 是一个厚的空间 *kimberlite*，在 $\operatorname{Spd} O_F$ 上真且形式 *adic*。

Pr证明。 这直接由定理 5.6和 [AGLR22，命题4。14] .
□

6. 适当空间金伯利岩的 Hensel 性质

我们通过说明空间金伯利岩这一条件对于研究 v-层的 étale 上同调是有用且相关的，来结束本节。

本节中，我们令 k 为特征 p的代数闭域，并在 $* = \mathrm{Spd}(k, k)$上的 v-层范畴中工作。我们固定一个系数环 Λ ，它是一个挠环，且 $n \cdot \Lambda = 0$ 对 n 互素 p。我们采用 Scholze 的6-函子形式体系 [Sch17]。我们使用导出记号，即所有函子均为导出的。

设 X 是一个空间金伯利岩，设 $Y = X^{\mathrm{an}}$，设 $Z = X^{\mathrm{Red}}$ ，并记$j : Y \to X$ 和 $i : Z \to X$ 为互补的开浸入和闭浸入。令 $\pi_X : X \to *$表示到 $*$的结构态射， π_Y 和π_Z也类似。我们假设 X^{red} 在 Spec k上局部完全有限表示，且在其上完全适当。我们假设 dim.trg $\pi_Y < \infty$，且 sp : $|Y| \to |X^{\mathrm{red}}|$ 是满射（即 X 是一个厚空间 kimberlite）。在上述假设下，我们证明 X 沿着 $Z \to X$满足两个 Hensel 性质。

引理 6.1。 映射 π_X 在局部空间钻石中是可表的、可拟紧化的，并且具有 维数.trg $\pi_X < \infty$ （即 π_X 是有限维完全交）。特别地，

$$\pi_{X,!} : \mathcal{D}_{\acute{e}t}(X, \Lambda) \to \mathcal{D}_{\acute{e}t}(*, \Lambda)$$

存在且有一个右伴随 $\pi_X^!$。此外， Y 是空间钻石，而 $Y \to *$是部分真。

证明。根据定理 4.13，该映射在局部空间钻石中是可表的。映射 $\mathrm{SP}_X : X \to X^{\mathrm{H}}$ 是部分真的，因为 X 是赋值的；根据定理 3.28，映射 $X^{\mathrm{H}} \to *$是弱部分真的，因为假设 X^{red} 在 Spec k上是真。由于 π_X 经过这些映射分解，因此它是弱部分真的；但它也是分离的，所以它是部分真的。根据假设，维数. trg $\pi_Y < \infty$，并且由于 X^{red} 是有限表示的局部性质，我们还有维数. trg $\pi_Z < \infty$。这足以推出维数. trg $\pi_X < \infty$。第二个断言由 [Sch17，定义 22.18] 以及 [Sch17，定理 23.1]得到。

第三个断言由空间金伯利岩的定义可得，因为 $Y = X^{\mathrm{an}}$。包含映射 $Y \to X$ 是部分真的，这一点也显而易见。事实上，任何闭补集可由 v-层表示的开子层都必定是部分真的。□

定理 6.2。 设背景如本节开头所述。设 $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{\acute{e}t}(Y, \Lambda)$ 满足以下条件：

(1) $\Gamma(X, j_!\mathcal{F}) = 0$。
(2) $\Gamma_c(X, j_*\mathcal{F}) = 0$。

备注 6.3. 在我们与 Lourenço 的合作中（参见 [GL24]），我们已经证明了该函子

$$\Gamma(Y, j_!-) : \mathcal{D}_{ét}(Y, \Lambda) \to \mathcal{D}_{ét}(*, \Lambda)$$

消失（即它同构于常值 0 函子）。

证明。第一个断言在更一般的情形下成立，这正是[GL24，引理 4 的内容。3] （见定理 6.3）。第二个断言则更为微妙。我们希望证明 $\pi_{X,\,!} j_*$： $\mathcal{D}_{ét}(Y,\ \Lambda) \to \mathcal{D}_{ét}(*,\ \Lambda)$ 是 0-函子。

令 $S = \mathrm{Spd}\, k((t))$，并令 s： $\mathrm{Spd}\, k((t)) \to *$ 为结构映射，则它是 ℓ-上同调光滑的，且 s^* 是保守的。只需证明 $s^*\pi_{X,\,!} j_*$是 0-函子。由光滑与 proper 基变换，只需证明对于自然映射 j_s： $Y \times S \subseteq X \times S$ 和 π_s： $X \times S \to S$，有 $\pi_{s,\,!} \circ j_{s,\,*} \cong 0$。

设 $T \to Y$ 是一个泛开拟 pro-étale 覆盖，其中 $T = \mathrm{Spa}(R,\ R^+)$ 是一个全不连通完美空间。固定一个 $\varpi \in R$ 伪一致化元。存在一个连续映射

$$\kappa : |(\mathrm{Spd}\, R^+ \times \mathrm{Spd}\, k[\![t]\!])^{\mathrm{an}}| \to [0, \infty]$$

用于测量 t 相对于 ϖ 的相对值；对于每个区间 $I \subseteq [0, \infty]$，我们令 $U_{T,\,I}$ 表示与 $\kappa^{-1}(I)$ 的内部相关联的开子集。例如，$T \times \mathrm{Spd}\, k[\![t]\!] = U_{T,\,[0,\infty)}$。现在，对于所有 $I \subseteq (0,\ \infty)$，我们令 $U_I \subseteq Y \times S$ 表示 $U_{T,\,I} \to Y \times S$ 的像所对应的开子集。注意，如果 $I \subseteq (0,\ \infty)$ 是紧的，那么 U_I 是一个空间钻石。此外，我们声称 $|U_{[a,\infty)}| \cup |Z \times S| \subseteq |X \times S|$ 定义了一个拟紧开子集，特别地，它导出一个我们记作 $U_{[a,\infty]} \subseteq X \times S$ 的空间钻石。我们如下证明这一点：存在一个空间钻石之间的映射

$$U_{T,[0,\infty]} = (\mathrm{Spd}\, R^+ \times \mathrm{Spd}\, k[\![t]\!])^{\mathrm{an}} \to (X \times \mathrm{Spd}\, k[\![t]\!])^{\mathrm{an}}$$

来自空间金伯利岩的形式 adic 映射

$$\mathrm{Spd}\, R^+ \times \mathrm{Spd}\, k[\![t]\!] \to X \times \mathrm{Spd}\, k[\![t]\!].$$

一般而言，

$$f : |U_{T,[0,\infty]}| \to |(X \times \mathrm{Spd}\, k[\![t]\!])^{\mathrm{an}}|$$

可能不是开集映射，但它仍然是商映射。轨迹 $|U_{[a,\infty)}| \cup |Z \times S|$恰好对应于 $U_{T,\,[a,\infty]}$ 的像，而该像是拟紧的。此外，我们有 $f^{-1}(f(U_{T,\,[a,\infty]})) = |U_{T,\,[a,\infty]}| \cup f^{-1}(f(U_{T,\,[a,\infty)}))$，它是开集。这意味着 $U_{[a,\infty]}$ 是开集。

令 $\overline{U}_{[a,\infty]}$ 表示 $U_{[a,\infty]}$ 在 $U_{[0,\infty]}$中的闭包，并令 $k_{a,\,\infty}$： $U_{[a,\infty]} \to \overline{U}_{[a,\infty]}$ 以及 $\overline{k}_{a,\,\infty}$： $U_{[a,\infty]} \to U_{(0,\infty]}$ 分别表示开浸入和闭浸入。类似地，我们令 k_a： $U_{[a,\infty)} \to U_{[a,\infty)}$ 和 k_a： $U_{[a,\infty)} \to U_{(0,\infty)}$ 分别表示开浸入和闭浸入。我们还令 $\overline{j}_a : \overline{U}_{[a,\infty)} \to \overline{U}_{[a,\infty]}$ 和 j_a： $U_{[a,\infty)} \to U_{[a,\infty]}$ 表示开浸入。

为方便读者，我们将涉及的映射列成表格。

(1) $k_{a,\,\infty}$： $U_{[a,\infty]} \to \overline{U}_{[a,\infty]}$ （开稠密浸入，非部分真）。

(2) $\overline{k}_{a,\infty}\colon \overline{U}_{[a,\infty]} \to U_{(0,\infty]}$（闭浸入）。（3） k_a：$U_{[a,\infty)} \to U_{[a,\infty)}$（开稠密浸入，非部分真）。（4） k_a：$U_{[a,\infty)} \to U_{(0,\infty)}$（闭浸入）。（5） j_a： $U_{[a,\infty)} \to U_{[a,\infty]}$（开稠密浸入，部分真）。（6） j_a: $U_{[a,\infty)} \to U_{[a,\infty]}$（开稠密浸入，部分真）。（7） j_s： $U_{(0,\infty)} \to U_{(0,\infty]}$（开稠密浸入，部分真）。（8） π_s： $U_{(0,\infty]} \to S$。

对于任意 $A \in \mathcal{D}_{ét}(X \times S, \Lambda)$，我们可以用以下公式计算 $\pi_{s,!}A \in \mathcal{D}_{ét}(S, \Lambda)$

$$\pi_{s,!}A \simeq \varinjlim_{a\to 0} \pi_{s,*}\overline{k}_{a,\infty,*}k_{a,\infty,!}A_{|U_{[a,\infty]}}.$$

事实上，这源于以下事实： $X \times S \to S$ 是一个局部空间钻石的映射，映射 $\pi_s \circ k_{a,\infty}\colon U_{[a,\infty]} \to S$ 是真映射，并且族 $U_{[a,\infty]}$ 在 $U_{(0,\infty]} = X \times S$[Sch17，定义 22.13、定义 22。4] 的拟紧开子集中共尾。

当 $A = j_{s,*}B$ 时，我们可以将其改写为

$$\begin{aligned}\varinjlim_{a\to 0} \pi_{s,*}\overline{k}_{a,\infty,*}k_{a,\infty,!}A_{|U_{[a,\infty]}} &\cong \varinjlim_{a\to 0} \pi_{s,*}\overline{k}_{a,\infty,*}k_{a,\infty,!}j_{a,*}B_{|U_{[a,\infty)}}\\ &\cong \varinjlim_{a\to 0} \pi_{s,*}\overline{k}_{a,\infty,*}\overline{j}_{a,*}k_{a,!}B_{|U_{[a,\infty)}}\\ &\cong \varinjlim_{a\to 0} \pi_{s,*}j_{s,*}\overline{k}_{a,*}k_{a,!}B_{|U_{[a,\infty)}}\end{aligned}$$

计算中唯一微妙的一步是证明

$$k_{a,\infty,!}j_{a,*}B_{|U_{[a,\infty)}} \cong \overline{j}_{a,*}k_{a,!}B_{|U_{[a,\infty)}},$$

但这成立，因为 $i_{a,s}^{!}k_{a,\infty,!}j_{a,*}B_{|U_{[a,\infty)}} \cong 0$ 其中 $i_{a,s}$ 表示包含映射

$$i_{a,s}\colon Z \times S \to \overline{U}_{[a,\infty]}$$

而术语 $j_{a,*}k_{a,!}B_{|U_{[a,\infty)}}$ 是通过应用切除得到该三角形而得出的

$$0 = i_{a,s,!}i_{a,s}^{!}k_{a,\infty,!}j_{a,*}B_{|U_{[a,\infty)}} \to k_{a,\infty,!}j_{a,*}B_{|U_{[a,\infty)}} \to \overline{j}_{a,*}k_{a,!}B_{|U_{[a,\infty)}}.$$

最后，我们可以看出该表达式

$$\varinjlim_{a\to 0} \pi_{s,*}\overline{j}_{s,*}\overline{k}_{a,*}k_{a,!}B_{|U_{[a,\infty)}}$$

计算了 [FS21，定义 IV.5。2]，根据 [FS21，定理 IV.5。3] 消失。事实上，$Y \to *$ 是部分真， Y 是一个空间钻石，并且维数。$\operatorname{trg}\pi_Y < \infty$ 这些正是应用 [FS21，定理 IV.5。3]所需的假设。□

7. The stack of shtukas.

我们以一个更复杂且有趣的例子结束本节。回顾 $\mathcal{G}$-shtuka 的栈 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Spd}\, O_E$，它参数化三元组的群胚

$$S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \mapsto \{(S^\sharp, \mathcal{E}, \Phi)\},$$

其中 $S^\sharp$ 是 S 上的非倾斜体的一个同构类， $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{Y}_S$上的一个 $\mathcal{G}$-挠子，并且

$$\Phi : \varphi^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

是除子 $S^\sharp \hookrightarrow \mathcal{Y}_{S\text{之外定义的同构，}[0,\infty)}$ 沿该除子是亚纯的（参见 [SW20，定义 5.3.5]）。回忆局部 Hecke 栈 $\mathrm{Hk}_{\mathcal{G}} = [L^+\mathcal{G}\backslash \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}] \to \mathrm{Spd}\, O_E$ （参见 [FS21，§6]），及其有界版本 $\mathrm{Hk}_{\mathcal{G},\,\mu} = [L^+\mathcal{G}\backslash \mathcal{M}_{\mathcal{G},\mu}] \to \mathrm{Spd}\ O_F$，其中

$$\mathrm{Hk}_{\mathcal{G},\mu} \subseteq \mathrm{Hk}_{\mathcal{G}} \times_{\mathrm{Spd}\, O_E} \mathrm{Spd}\, O_F$$

唯一的闭子栈，其到 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$ 的拉回是 $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\,\mu}$。

回忆我们有一个映射

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Hk}_{\mathcal{G}}$$

并且我们可以沿着闭浸入进行拉回

$$\mathrm{Hk}_{\mathcal{G},\mu} \subseteq \mathrm{Hk}_{\mathcal{G}} \times_{\mathrm{Spd}\, O_E} \mathrm{Spd}\, O_F$$

以获得一个闭子栈

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \subseteq \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}} \times_{\mathrm{Spd}\, O_E} \mathrm{Spd}\, O_F.$$

$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\,\mu}$ 是 μ-有界局部 $\mathcal{G}$-shtuka 的模空间栈。

此外，回顾一下，我们有一个小 v-叠之间的映射

$$\sigma : \mathrm{Sht}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Bun}_G,$$

在点函子上，它将三元组 $(S^\sharp,\ \mathcal{E},\ \Phi)$ 映射到 $X_{\mathrm{FF},\ S}$ 上唯一的 G-丛；作为一个 φ- 等变 G- 丛，它在拉回到 $Y_{S,\ [r,\infty)}$ 后与 $(\mathcal{E},\ \Phi)$ 一致，其中 r 足够大且避开非倾斜体 $S^\sharp \subseteq \mathcal{Y}_S$。回顾一下，对于所有 $b \in B(G)$，我们都有一个映射

$$\mathcal{E}_b : \mathrm{Spd}\, \overline{\mathbb{F}}_p \to \mathrm{Bun}_G,$$

它导出一个局部闭子栈 $\mathrm{Bun}_G^b \subseteq \mathrm{Bun}_G$。我们令

$$\mathrm{Sht}^b_{\mathcal{G},\mu} = \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Bun}_G^b$$

and

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b) = \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G, \mathcal{E}_b} *\,.$$

根据定义以及 [FS21，命题 V.2。2], 映射

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b) \to \mathrm{Sht}^b_{\mathcal{G},\mu}$$

~是一个 G_b-挠子。证明下一个定理是我们引入并研究空间金伯利岩的主要动机，其证明将贯穿本节余下部分。

定理 7.1。 以下结论成立。

(1) 映射 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \to \mathrm{Bun}_G$ 在局部空间钻石中可表。(2) 栈 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}$ 是一个 *Artin v-叠*。(3) *v*-层 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是一个局部空间金伯利岩。

证明。 根据 [FS21，命题 IV.1.8.(iii)]以及 [FS21，定理 IV.1.19], 第一条结论蕴含第二条。我们来证明第一条结论，方法是将其归约为第三条结论。令 $W\mathcal{G}$（分别为 $W^+\mathcal{G}$）表示分类以下对的函子

$$(R, R^+) \mapsto (R^\sharp, g)$$

其中 $R^\sharp$ 是由 $\xi \in \mathbb{W}(R^+)$ 给出的非倾斜体的同构类，且 $R^\sharp, + \_ = \mathbb{W}(R^+)/\xi$ 以及 $g \in \mathcal{G}(\mathbb{W}(R^+)[\xi^{-1}])$（分别为 $g \in \mathcal{G}(\mathbb{W}(R^+))$）。我们有一个 v-满射映射 $W\mathcal{G} \to \mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}$，它是一个 $W^+\mathcal{G}$-挠子 [Ans22] [Gle21，定理 2.8]。令 $W\mathcal{G}_\mu = W\mathcal{G} \times_{\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}}} \mathcal{M}_{\mathcal{G},\,\mu}$。我们断言 $W\mathcal{G}_\mu$ 是一个空间金伯利岩。它显然是分离的，并且是 π-adic。这表明它是形式分离的。我们可以取一个形式 adic v 覆盖 $\mathrm{Spd}\, R^+ \to \mathcal{M}_{\mathcal{G},\,\mu}$ 使得 $W^+\mathcal{G}$-挠子平凡化，从而构造出一个形如以下形式的形式 adic v 覆盖

$$\mathrm{Spd}\, R^+ \times W^+\mathcal{G} \to W\mathcal{G}_\mu.$$

这证明了 $W\mathcal{G}_\mu$ 是 v 局部形式的，因此它是一个特化 v-层（见定理 3.6）。此外，$(W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{red}}$ 是一个拟紧拟分离概形，事实上它是 Witt 向量环群的一个闭子概形。这表明 $W\mathcal{G}_\mu$ 是一个预金伯利岩（见定理 3.7）。利用定理 3.32，可知 $W\mathcal{G}_\mu$ 是一个赋值预金伯利岩（见定理 3.19）。

令 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \to (\mathcal{M}_{\mathcal{G},\mu})^{\mathrm{an}}$ 为一个由严格全不连通空间给出的普遍开覆盖。由于 $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\mu}$ 形式化了点，根据定理 4.2，我们得到一个映射 $\mathrm{Spd}R^+ \to \mathcal{M}_{\mathcal{G},\mu}$，可将其解释为 $\mathrm{Spd}\,\mathbb{W}(R^+)$ 上的一个非倾斜 v-$\mathcal{G}$-挠子，并带有在 $\xi_{R^\sharp}$之外的一个平凡化。根据 [Gü24], 的主定理，此挠子是经典的。由于 $\mathrm{Spd}\, R^+$ 是全不连通的，它必然是平凡的。这表明 $\mathrm{Spd}\ R^+$ 上的 $W^+\mathcal{G}$-挠子是平凡的。特别地，$\mathrm{Spa}(R, R^+) \times W^+\mathcal{G} \to (W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{an}}$ 是一个普遍开、拟紧拟分离且 proétale 的映射，其源是一个空间钻石，因此其目标也是一个空间钻石（Sch17，命题 11.24]）。此外，$\mathrm{Spd}\ R^+ \times W^+\mathcal{G} \to W\mathcal{G}_\mu$ 是形式 adic、拟紧拟分离且满射的，其源是一个空间金伯利岩。这意味着 $W\mathcal{G}_\mu$ 是一个空间金伯利岩（见定理 4.4）。

既然我们已经证明 $W\mathcal{G}_\mu$ 是一个空间金伯利岩，就将这个空间用作 shtuka 栈的 v-满射图表。我们有一个显然的映射

$$f : W\mathcal{G}_\mu \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}$$

将一个 $\mathcal{G}$-矩阵映射到该矩阵所定义的 shtuka。根据 [GIZ25，推论 7.12，以及定理 7.13.(3) 的证明]，此映射是 v-满射。我们断言 f 是拟紧拟分离的。

下面给出拟紧性的论证，拟分离性的论证与此类似。给定一个映射 $\mathrm{Spa}(R, R^+) \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}$ 其中 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是点的乘积，我们可以将它提升为映射 $N\colon \mathrm{Spa}(R, R^+) \to W\mathcal{G}_\mu$ 并且 $\mathcal{F} := W\mathcal{G}_\mu \times_{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}} \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 由满足以下条件的 $M \in \mathcal{G}(\mathbb{W}(R^\circ))$ 中的那些矩阵组成：

$$M^{-1}N\varphi(M) \in \mathcal{G}(\mathbb{W}(R^+)[\xi^{-1}]) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{W}(R^\circ)[\xi^{-1}]).$$

换言之，我们有如下 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 上的层的笛卡尔图，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & W\mathcal{G}_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^{+,\dagger}\mathcal{G}_R & \xrightarrow{(-)^{-1}\cdot N\cdot\varphi(-)} & W^\dagger\mathcal{G}_R. \end{array}$$

这里 $W^\dagger\mathcal{G}(A, A^+) = \mathcal{G}(\mathbb{W}(A^\circ)[\frac{1}{\xi}])$，且 $W^{+,\dagger}\mathcal{G}(A, A^+) = \mathcal{G}(\mathbb{W}(A^\circ))$。映射 $W\mathcal{G} \to W^\dagger\mathcal{G}$ 是沿拟紧过渡映射的原开浸入，因此是拟紧的。此外，固定 Zariski 闭浸入 $\mathcal{G} \to \mathrm{GL}_n \to \mathbf{M}_{n\times n} \times \mathbf{M}_{n\times n}$ 后，我们可以将 $W^{+,\dagger}\mathcal{G}_R$ 视为函子 $A \mapsto \mathbf{M}_{n\times n} \times \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{W}(A^\circ))$ 的 Zariski 闭子层；该函子是 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 上的无限维紧单位球，因此是拟紧的。由此证明了 $\mathcal{F}$ 在 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 上是拟紧的，并且映射 $f\colon W\mathcal{G}_\mu \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}$ 是拟紧拟分离的，正如我们所要证明的。

映射 $W\mathcal{G}_\mu \to \mathrm{Bun}_G$ 在局部空间钻石中可表。事实上，若 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是严格全不连通的，则由定理4.13 $W\mathcal{G}_\mu \times \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是局部空间钻石，并且 $W\mathcal{G}_\mu \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 与映射沿对角映射的拉回重合

$$W\mathcal{G}_\mu \times \mathrm{Spa}(R, R^+) \to \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_G$$

沿对角映射

$$\mathrm{Bun}_G \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{Bun}_G}} \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_G,$$

它在局部空间钻石中可表，因为 Bun_G 是一个 Artin v-叠（参见 [FS21，定义 IV.1.1]）。

我们要证明，对于所有作为严格全不连通空间的 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$，$Y = \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 都是局部空间钻石。令 $T = \pi_0(\mathrm{Spa}(R, R^+))$ 为副有限拓扑空间。我们有一个连续映射 $|Y| \to T$，它诱导出 v-层的一个映射 $Y \to T$。此外，对于每个 $t \in T$，$Y \times_T *$ 都与 $\overline{\mathrm{Sht}}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Spa}(C_t, C_t^+)$ 重合，其中 $\mathrm{Spa}(C_t, C_t^+)$ 表示连通分支 $t \in T$ 的闭点处的剩余域。注意，我们有一个 v-满射且拟紧拟分离的映射

$$W\mathcal{G}_\mu \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Spa}(R, R^+) \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Spa}(R, R^+)$$

其源是一个局部空间钻石。根据 [Sch17，引理 13。5]，只需证明每个

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Spa}(C_t, C_t^+),$$

对于 $t \in \pi_0(T)$，是一个局部空间钻石。现在，我们可以利用定理 4.13 完成证明，即第三个陈述蕴含第一个陈述。事实上，

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Spa}(C_t, C_t^+) \simeq (\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} *) \times_* \mathrm{Spa}(C_t, C_t^+),$$

and

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b) := \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} * .$$

最后，让我们证明第三个陈述。考虑映射 $(W\mathcal{G}_\mu^{\mathrm{red}})^\diamond \to \mathrm{Bun}_G$。利用 [GIZ25，定理 1。11], 根据伴随，这对应于一个映射$W\mathcal{G}_\mu^{\mathrm{red}} \to \mathfrak{B}(G)$，并且对于任意 $b \in B(G)$，我们得到一个可构造局部闭子集$(W\mathcal{G}_\mu)_b^{\mathrm{red}} \subseteq (W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{red}}$ （见 [Zhu25，定理 3.31.(1)]）。令

$$\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b := \widehat{W\mathcal{G}_\mu}_{/(W\mathcal{G}_\mu)_b^{\mathrm{red}}}$$

表示 $W\mathcal{G}_\mu$沿 $(W\mathcal{G}_\mu)_b^{\mathrm{red}}$的形式邻域，如定理 3.13中所述。这是开子层

$$\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b \subseteq W\mathcal{G}_\mu \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Bun}_G^b$$

对应于点 x 的轨迹：其牛顿多边形为 $b_x = b$，且其专化 $s = \mathrm{sp}(x) \in W\mathcal{G}_\mu^{\mathrm{red}}$ 的牛顿多边形同样为 $b_s = b$。映射 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}$ 显然经过

$$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}^b := \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu} \times_{\mathrm{Bun}_G} \mathrm{Bun}_G^b.$$

此外，根据定理 4.12，$\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b$ 是一个空间金伯利岩。最后，我们通过一系列引理证明 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是一个局部空间金伯利岩。

引理 7.2. *φ 对 $W^+\mathcal{G}$ 在 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b$ 上的共轭作用将此空间实现为 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G}}^b$ 之上的 $W^+\mathcal{G}$-挠子$_{,\mu}$。*

证明。映射

$$\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}^b$$

显然是 $W^+\mathcal{G}$-等变的，我们现在证明它是 v-满射的。

给定 $\alpha \in \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}^b(R, R^+)$，其中 (R, R^+) 是点的乘积，我们可以找到一个定义在 $Y_{[r,\infty)}$ 上的同构，其目标为 $\mathcal{E}_b$。固定这样的同构后， $\mathcal{G}$- 挠子从 $Y_{[0,\infty)}$ 上典范地延拓为 $\mathrm{Spec}(\mathbb{W}(R^+))$ 上的 $\mathcal{G}$-挠子，而后者必然是平凡的。固定一个平凡化后，shtuka 的数据定义了 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b$ 中的一个矩阵，由此得到原来的 shtuka。至此便完成了 v-满射性的证明。

要证明该映射是一个 $W^+\mathcal{G}$-挠子，只需证明：若 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是点的乘积，且给定两个矩阵，

$$M_1, M_2 \in \mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}^b(R, R^+),$$

定义同一个 shtuka 的对象彼此 $W^+\mathcal{G}$-φ-共轭。若 $R^+ = \prod_{i\in I} C_i^+$，则 $\mathcal{G}(\mathbb{W}(R^+)) = \prod_{i\in I} \mathcal{G}(\mathbb{W}(C_i^+))$，因此只需逐点验证。换言之，

我们可以假设 $R^+ = C^+$ 对于一个 C^+，它是一个具有代数闭非阿基米德域的赋值环，并且

$$M_1, M_2 \in \mathrm{WSht}^b_{\mathcal{G},\mu}(C, C^+).$$

由 Fargues 定理（[Far18，定理 1。12]）可知，M_1 在 φ的作用下与 M_2 -共轭，其中作用元素为某个 $N \in \mathcal{G}(\mathbb{W}(O_C))$。令 k 为 O_C 的剩余域，并令 $k^+ \subseteq k$ 为定义 $C^+ \subseteq O_C$的赋值环，只需对剩余矩阵作 φ-共轭，

$$\overline{M_1}, \overline{M_2} \in (W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{red}}_b(k^+),$$

在某个 $N_+ \in \mathcal{G}(\mathbb{W}(k^+))$的作用下。我们断言，若 $(W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{red}}_b(k^+)$ 中的任意两个元素在 $(W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{red}}_b(k)$ 中诱导出的点是 φ-共轭的，那么它们在 $(W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{red}}_b(k^+)$ 中就已经是φ-共轭的。这归结为仿射 Deligne–Lusztig 簇的分离性，下面将对此作出说明。考虑概形论 v-层的栈商

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu,b} := \frac{(W\mathcal{G}_\mu)^{\mathrm{red}}_b}{\mathrm{Ad}_\varphi(W^+\mathcal{G})^{\mathrm{red}}}.$$

这是 μ 有界、Newton 点为常值且等于 b 的 Witt 向量 shtuka 的概形论 v-栈。我们想证明，两个 k^+-点

$$\underline{M_1}, \underline{M_2} \in \mathrm{Sht}^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu,b}(k^+)$$

当且仅当它们诱导的 k-点同构时才同构。我们有如下概形 v-栈的笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathcal{G},\mu}(b) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sht}^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu,b} & \longrightarrow & */\underline{G_b(E)}, \end{array}$$

其中 $X_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是附属于 (b,μ) 的仿射 Deligne–Lusztig 簇。由此图，并且由于 Spec k 和 Spec k^+ 分裂每个原 étale 覆盖，我们得到群胚的商公式

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu,b}(k^+) = [X_{\mathcal{G},\mu}(b)(k^+)/\underline{G_b(E)}(k^+)] = [X_{\mathcal{G},\mu}(b)(k^+)/G_b(E)]$$

类似地

$$\mathrm{Sht}^{\mathrm{sch}}_{\mathcal{G},\mu,b}(k) = [X_{\mathcal{G},\mu}(b)(k)/G_b(E)].$$

但是，由于 $X_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 的分离性，我们有一个 $G_b(E)$-等变单射[6]

$$X_{\mathcal{G},\mu}(b)(k^+) \to X_{\mathcal{G},\mu}(b)(k).$$

证明完毕。 □

现在我们考虑以下包含笛卡尔方块的图表

[6]由于 ADLV 是归纳真的，因此这实际上是一个双射。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\ \mu}(b) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}^{\mathrm{WSht}^b}{}_{\mathcal{G},\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Sht}^b_{\mathcal{G},\mu} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^b_G \cong [*/\widetilde{G}_b] \end{array}$$

引理 7.3. 空间$\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\ \mu}(b)$是一个局部空间金伯利岩。

证明。由 [Gle21 引理 2.31], ，且由于映射 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b) \to *$ 是部分真的，$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是一个赋值预金伯利岩。利用定理 3.32，不难看出 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是赋值的，因为 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b) \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是一个 $W^+\mathcal{G}$-挠子。由于 $(\mathrm{WSht}^b_{\mathcal{G},\mu})^{\mathrm{an}}$ 是一个空间钻石，我们可以找到一个普遍开 proétale 覆盖 $\mathrm{Spa}(R,R^+) \to (\mathrm{WSht}^b_{\mathcal{G},\mu})^{\mathrm{an}}$ ，并由定理 4.2 得到一个形式化 $\mathrm{Spd}\, R^+ \to \mathrm{WSht}^b_{\mathcal{G},\mu_\circ}$ 我们断言，映射 $\mathrm{Spd}\ R^+ \to \mathrm{Bun}^b_G$ 可分解为

$*_\circ$ 首先，我们证明 $S = \mathrm{Spa}(R,R^+) \to \mathrm{Bun}^b_G$ 经由 $*$分解。由于$\widetilde{}$映射 $[*/G_b(E)] \to [*/G_b]$ 是形式光滑的（参见 [FS21，定义 IV.3.1、命题 IV.3.5、命题 IV.4.24]），它存在被 S分裂的 étale 局部截面。固定一个紧开子群 $K \subseteq G_b(E)$ 后，我们得到 étale 映射$[*/K] \to [*/G_b]$ ，沿着这些映射也可以进行提升，从而得到映射 $S \to [*/K]_\circ$ 我们可以将 $* = \varprojlim_{K_n \subseteq K} [*/K_n]$ 表示为 K_n 遍历 K的有限指数子群时的极限。由于 S 分别提升到每个 $[*/K_n]$ ，并且我们可以找到相容截面，因此它也提升到极限。这就完成了对 $S \to * \to \mathrm{Bun}^b_G$分解的构造。

如同 [GIZ25, 注记 3.15], 中所述，我们可以将映射 $\mathrm{Spd}\, R^+ \to \mathrm{Bun}^b_G$ 理解为 φ-等变向量丛（定义在 Y_S 上），$_{(0,\infty]}$，而构造到 $*$ 的提升等价于构造一个与 $\mathcal{E}_b$ 的 φ-等变同构。令 $T = \mathrm{Spa}(R,R^\circ)$。根据上述推理，我们有一个定义在 Y_S 上的 φ-等变同构，$_{(0,\infty)}$，它可由 [PR21, 命题 2.1.3] 规范地延拓为定义在 Y_T 上的同构，$_{(0,\infty]}$ 。我们得到如下概形论 v-层的交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\ R^\circ_{\mathrm{red}} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\ R^+_{\mathrm{red}} & \longrightarrow & \mathfrak{B}(G)_b \cong [*/\underline{G_b(E)}] \end{array}$$

按照上述论证，我们看到映射 $\mathrm{Spec}\, R^+$ red $\to [*/G_b(E)]$ 经由 $*$分解，因为 $\mathrm{Spec}\ R^+$red 将每个 étale 映射分裂。这表明 $\mathrm{Spec}\ R^+\overline{\mathrm{red}^{\times_{\mathfrak{B}(G)_b}}}*$ 是一个平凡的 $\underline{G_b}(E)$-挠子。此外，存在唯一一个平凡化，其限制为指定的截面 $\mathrm{Spec}\ R^\circ_{\mathrm{red}} \to \mathrm{Spec}\, R^+$red $\times_{\mathfrak{B}(G)_b} *_\circ$ 由定理 5.3，我们的 φ-等变平凡化可延拓至 Y_S，$_{(0,\infty]}$ ，从而完成了对 $\mathrm{Spd}(R^+) \to \mathrm{Bun}^b_G$ 经由 $*$分解的证明。

由上述结果，我们得到如下同一性

$$\mathrm{Spd}\, R^+ \times_{\mathrm{Bun}^b_G} * = \mathrm{Spd}\, R^+ \times \widetilde{G}_b,$$

这就完成了对 $\mathrm{Spd}\, R^+ \times_{\mathrm{Bun}_G^b} *$ 是局部空间金伯利岩的证明，应用定理 4.16。由于 $\mathrm{Spd}\, R^+ \times_{\mathrm{Bun}_G^b} * \to \mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是拟紧拟分离形式 adic v 覆盖，并且在解析轨迹上是普遍开 proétale 的，因此 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 也是局部空间金伯利岩。□

引理 7.4. 映射 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b) \to \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是普遍开的。

证明。 我们证明 $* \to [*/W^+\mathcal{G}]$ 是普遍开的，这一点可以在目标中局部地按 v- 检验。特别地，只需检验 $W^+\mathcal{G} \to *$ 是普遍开的；更进一步，只需检验 $W^+\mathcal{G}_R \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是开集。我们将 $W^+\mathcal{G}_R$ 表示为极限 $W^+\mathcal{G}_R = \varprojlim W^+\mathcal{G}_R/W^{\leq n}\mathcal{G}_R$，并且每个

$$\varprojlim W^+\mathcal{G}_R/W^{\leq n}\mathcal{G}_R \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$$

是 ℓ-上同调光滑的，因此是开映射（见 [Sch17，命题 23。11]）。过渡映射是拟紧拟分离、满射且为从空间钻石到空间钻石的开映射，这使我们得以得出 $W^+\mathcal{G}_R \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 是开集（见[Sch17，引理 11。22]）。□

根据 [Gle21，引理 2.31] 以及部分真性，$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是一个赋值预金伯利岩。令 $U = \mathrm{Spec}\, A \subseteq \mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)^{\mathrm{red}}$ 为我们希望证明 $\widehat{\mathrm{Sht}}_{\mathcal{G},\mu}(b)_{/U}$ 是仿射空间金伯利岩的一个仿射开子集。令 $\tilde{U} \subseteq \mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b)^{\mathrm{red}}$ 为 U 的拉回。这是 $\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b)^{\mathrm{red}}$ 的一个仿射子集，因此根据定理 7.3，$\widehat{\mathrm{WSht}}_{\mathcal{G},\mu}(b)_{/U}$ 是一个空间金伯利岩。该映射

$$\widehat{\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b)}_{/U} \to \widehat{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)}_{/U}$$

$\widehat{\ }$ 是形式 adic、v-满射且拟紧拟分离的，因此如果我们知道 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)_{/U}$ 是一个金伯利岩，那么根据定义即可推出 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)_{/U}$ 是一个空间金伯利岩。此外，我们已经知道 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)_{/U}$ 是一个赋值预金伯利岩，因此只需证明 $(\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)_{/U})^{\mathrm{an}}$ 是一个空间钻石。这正是我们将要论证的内容。

考虑映射，

$$(\widehat{\mathrm{WSht}_{\mathcal{G},\mu}(b)}_{/\tilde{U}})^{\mathrm{an}} \to (\widehat{\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)}_{/U})^{\mathrm{an}}$$

它是满射、拟紧拟分离且普遍开。由于映射的源是空间钻石（见定理 7.4），而目标是拟分离 v 层（见定理 3.46），因此目标是局部空间 v 层（见 [Sch17，定义 12.12]）。要证明 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)^{\mathrm{an}}$ 是空间钻石，只需根据 [Sch17 定理 12.18]，证明每个点 $x \in |\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)^{\mathrm{an}}|$ 都存在一个来自几何点 $\mathrm{Spa}(C, C^+)$ 的准 pro-étale 映射。我们分两种情况来证明。

对于位于 Spd E 上方的点 $x \in |\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)^{\mathrm{an}}|$，我们可以利用格罗滕迪克–梅辛周期映射构造一个位于 x 上方的几何点，因为在这个轨迹上，$\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 存在到一个 B^+_{dR}-Grassmannian 的 étale 映射。

对于位于 Spd O_E/π 之上的解析点，我们论证如下。回顾[GIZ25]，存在一个映射 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mathbb{F}_p} \to \mathrm{Bun}_G^{\mathrm{mer}}$。我们可以利用一般牛顿多边形分层（参见 [GIZ25，定理 6.13]）将 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu,\mathbb{F}_p}(b)$ 分层；若 $x \in |\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu,\mathbb{F}_p}(b)^{\mathrm{an}}|$，则其在 $\mathrm{Bun}_G^{\mathrm{mer}}$ 中的像位于 $\mathcal{M}^{\circ}_{b_x}$ 中，并且满足 $b_x \neq b$。由于 $\mathcal{M}^{\circ}_{b_x}$ 是一个空间钻石（参见 [FS21，命题 V.3.6]），我们可以构造一个准 pro-étale 映射 $\mathrm{Spa}(C, C^+) \to \mathrm{Bun}_G^{\mathrm{mer}}$，其位于 x 在 $|\mathrm{Bun}_G^{\mathrm{mer}}|$ 中的像之上。最后，映射 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mathbb{F}_p} \to \mathrm{Bun}_G^{\mathrm{mer}}$ 的 $\mathrm{Spa}(C, C^+)$-纤维具有 $(\mathcal{F}\ell_{\mathcal{G}}^{\mathrm{Witt}})^{\diamond} \times \mathrm{Spd}(C, C^+)$ 的形式（参见 [GIZ25，定理 6.6.(2)]）；由于该空间是一个归纳空间菱形，所有点 $x \in |(\mathcal{F}\ell_{\mathcal{G}}^{\mathrm{Witt}})^{\diamond} \times \mathrm{Spd}(C, C^+)|$ 都存在从一个几何点出发的准 pro-étale 映射。这就完成了 $\mathrm{Sht}_{\mathcal{G},\mu}(b)$ 是局部空间金伯利岩的证明，也完成了定理 7.1 的证明。□

参考文献

[AGLR22] Johannes Anschütz、Ian Gleason、João Lourenço 和 Timo Richarz。关于局部模型的 p-进理论。即将发表于《数学年刊》（第 2 辑），2022年。5, 6, 22, 23, 36, 37[Ans22] Johannes Anschütz。在 Spec A_{inf} 的去心部分上延拓挠子。《纯粹与应用数学杂志》，2022(783):227–268，2022年。42[BS17] Bhargav Bhatt 和 Peter Scholze。Witt 向量仿射 Grassmannian 的射影性。《数学发明》，209(2):329–423，2017年。7[Car90] Henri Carayol。非阿贝尔 Lubin–Tate 理论。《自守形式、Shimura 簇与 L 函数》，2:15–39，1990年。2[ČS24] Kęstutis Česnavičius 和 Peter Scholze。平坦上同调的纯性。《数学年刊》，199(1):51–180，2024年。26[Dri74] V. G. Drinfeld。椭圆模。《苏联数学文集》，23:561–592，1974年。1[Dri76] VladimirG Drinfel'd。p 进对称区域的覆盖。《泛函分析及其应用》，10(2):107–115，1976年。2[Dri77] V. G. Drinfeld。证明函数域上 GL(2) 的整体朗兰兹猜想。《泛函分析及其应用》，11(3):223–225，1977年。1[Far16] L. Fargues。局部朗兰兹对应的几何化：概述。arXiv 预印本，2016年2月。3[Far18] Laurent Fargues。曲线。《2018 年国际数学家大会论文集——里约热内卢》，1，2018年。45[FF18] Laurent Fargues 和 Jean Marc Fontaine。p 进 Hodge 理论中的曲线与向量丛。法国数学学会，2018年。3[FS21] Laurent Fargues 和 Peter Scholze。局部朗兰兹对应的几何化。即将发表于《Asterisque》，2021年。3, 4, 5, 6, 33, 35, 36, 40, 41, 42, 43, 46, 48[GHI+25] Ian Gleason、Linus Hamann、Alexander Ivanov、João Lourenço 和 Konrad Zou。关于局部朗兰兹范畴的概形构造与解析构造。准备中，2025年。4, 5, 6[GIZ25] Ian Gleason、Alexander B. Ivanov 和 Felix Zillinger。Fargues–Fontaine 曲线上的亚纯向量丛，2025年。2, 4, 5, 6, 23, 33, 35, 36, 42, 44, 46, 48

[GL24] Ian Gleason 和 João Lourenço。局部模型的管状邻域。《杜克数学杂志》，173(4):723–743，2024年。5, 11, 13, 23, 39[Gle21] Ian Gleason。 p进 shtuka 与局部 Shimura 簇模空间的几何连通分支。https://arXiv.org/abs/2107.03579，2021年。5, 6, 10, 22, 42, 46, 47[Gle24] Ian Gleason。Scholze 的钻石范畴的特化映射。《数学年刊》，第 1–69 页，2024年。5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 36, 37[GLX25] Ian Gleason、Dong Gyu Lim 和 Yujie Xu。仿射 Deligne–Lusztig 簇的连通分支。《数学创刊》，第 1–57 页，2025年。5, 22[Gü24] Anton Güthge。族中的完美棱柱 F-晶体与 p 进 shtuka，2024年。6, 42[Heu24] Ben Heuer。完美拟覆盖上的线丛：良约化情形，2024年。9, 10[Kim24] Dongryul Kim。从诺维科夫环下降有限投射模，2024年。11, 13[Laf02] Laurent Lafforgue。Drinfeld 的 Chtouca 与朗兰兹对应。《数学创刊》，147(1):1–241，2002年。1[Laf18] Vincent Lafforgue。约化群的 Chtouca 与整体朗兰兹参数化。《美国数学会杂志》，31(3):719–891，2018年。1[Man22] Lucas Mann。钻石上的 $\mathbb{Z}_\ell$ 与 $\mathbb{Q}_\ell$-层的六函子形式体系。arXiv 预印本 arXiv:2209.08135，2022年。4[PR21] Georgios Pappas 和 Michael Rapoport。 p进 shtuka 与整体及局部 Shimura 簇理论。arXiv 预印本 arXiv:2106.08270，2021年。5, 35, 46[PR24] Georgios Pappas 和 Michael Rapoport。关于整局部 Shimura 簇，2024年。5[Rap95] Michael Rapoport。非阿基米德周期域。载于《国际数学家大会论文集：1994年8月3日至11日，瑞士苏黎世》，第 423–434 页。施普林格，1995年。2[RV14] Michael Rapoport 和 Eva Viehmann。迈向局部 Shimura 簇理论。arXiv 预印本 arXiv:1401.2849，2014年。3[RZ96] M. Rapoport 和 Th. Zink。 p可除群的周期空间，《数学年刊研究》141 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1996年。2[Sch12] Peter Scholze。完美空间。《高等科学研究所数学出版物》，116:245–313，2012年。3[Sch17] Peter Scholze。钻石的 étale 上同调。即将发表于《Asterisque》，2017年。5, 7, 8, 12, 13, 14, 19, 21, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 38, 40, 42, 43, 47[Sta21] Stacks Project 作者。Stacks Project。2021年。15, 16, 21[SW13] Peter Scholze 和 Jared Weinstein。 p可除群的模空间。《剑桥数学杂志》，1(2):145–237，2013年。3[SW20] Peter Scholze 和 Jared Weinstein。《伯克利 p 进几何讲义》，AMS-207 第 389 卷。普林斯顿大学出版社，2020年。2, 3, 7, 41[Tak25] Yuta Takaya。相对可表性与抛物水平结构，2025年。5[Zha23] Mingjia Zhang。一个 PEL 型 Igusa 幺半群与 Shimura 簇的 p进几何。arXiv 预印本 arXiv:2309.05152，2023年。2[Zhu25] Xinwen Zhu。温和范畴局部朗兰兹对应，2025年。4, 5, 44

新加坡国立大学，肯特岗下路 10 号，新加坡 119076电子邮件地址：ianandreigf@nus.edu.sg