arXiv:2601.02742v1 [math.DG] 6 Jan 2026

几何与引力中的黎曼张量广义双重对偶

MOHAMMED LARBI LABBI

Abstract. 黎曼曲率张量完整编码了局部几何，但其里奇收缩仅保留有限的信息：只有里奇张量和标量曲率得以保留，而外尔曲率则恒等于零。我们表明，改为收缩黎曼张量的双重对偶，可以揭示完整的曲率结构，并生成一列典范的对称、无散度（p, p）双形式。这些张量满足第一比安基恒等式，并遵循一种遗传收缩关系，在双对偶张量与爱因斯坦张量之间建立联系。

我们证明，在一般的几何设定下，这一层级中的每个张量都是唯一的无散度（p, p）双形式，且其依赖黎曼曲率张量的方式为线性，从而为爱因斯坦张量提供典范的高阶母张量。

它们的截面曲率与 p–曲率相同；值得注意的是，2–曲率决定了完整的黎曼曲率张量，并且当其非负时，迫使紧致自旋流形的 A–属消失；里奇曲率或标量曲率则不具备这一性质。最后，我们将这一构造推广到高斯–克罗内克曲率张量和洛夫洛克理论，尤其表明第二Lovelock张量 T_4 具有真正的四指标母张量。

双形式；双重对偶曲率张量；无散曲率张量；唯一性定理；消失定理； p-曲率；Lovelock 张量；四指标引力。

Contents

1. 引言与主要结果陈述 2 1.1. 黎曼曲率张量的双重对偶与 Einstein 张量的母张量 2
1.2. 广义双重对偶的截面曲率 4 1.3. 在广义相对论修正场方程中的应用 4

2020 数学学科分类。主要分类 53C21、53B20；次要分类 53C80、83C05。

1.4. Lovelock 张量的母张量与 T_4 5 情形 1.5. 研究动机：四指标引力与双重对偶曲率张量 6 2. 双重对偶曲率张量及其缩并 7 2.1. 黎曼张量的高阶指标双对偶张量 9 2.2. 黎曼张量高阶双重对偶的无指标表述 10 2.3. 黎曼张量广义双重对偶的唯一性定理 11 2.4. $^*\mathbf{R}$ $^*_p$ 15 的自对偶与反自对偶 12 2.5. 张量 $^*\mathbf{R}^*_p$ 15 的正交分解 14 3. 黎曼张量广义双重对偶的截面曲率 16 3.1. p-曲率的正性性质 18 3.2. 纤维丛性质 18 4. 高阶指标 Lovelock 引力 21 4.1. Lovelock 张量与 (p,q)-曲率张量 21 4.2. 母 Lovelock 场方程 25 参考文献 28

1. Introduction and statement of the main results

本节旨在陈述本文的主要结果，并阐明研究由黎曼曲率张量产生的高阶曲率张量的动机，同时说明双重对偶构造在整理曲率信息方面所起的作用。我们首先回顾里奇缩并在从黎曼张量中提取几何不变量方面的局限性。随后概述本文引入的规范散度自由曲率张量层级，并指出其几何、拓扑和引力意义。

1.1. **黎曼曲率张量的双重对偶与爱因斯坦张量的母体**。

黎曼曲率张量 $\mathbf{R}$ 是一个 (2,2) 双形式，已经编码了

黎曼流形的完整局部几何。因此，本文探讨的难题并非 $\mathbf{R}$ 中信息不足，而是里奇缩并作为提取几何不变量的机制存在退化。事实上，$\mathbf{R}$ 仅有两种非平凡的里奇缩并：里奇张量 $\mathbf{Ric} = \mathbf{cR}$ 和标量曲率 $\mathbf{Scal} = \mathbf{c}^2\mathbf{R}$。尤其是，表示 $\mathbf{R}$ 无迹部分的外尔张量，在所有里奇缩并下都恒等于零。因此，任何仅以里奇缩并为基础构建的曲率理论，都会忽略 $\mathbf{R}$ 中已有的大量曲率信息。

这一局限并非黎曼张量本身固有，而是源于里奇缩并。因此，这促使我们寻求通过缩并以外的运算从$\mathbf{R}$ 构造规范曲率张量，同时保留几何与物理学所要求的基本代数和微分性质。沿着这一思路，一种自然的构造方式是双对偶运算

$$ {}^*\mathbf{R}^*(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \mathbf{R}(*\,\cdot\,,*\,\cdot\,), $$

其中霍奇星算子分别作用于双形式$\mathbf{R}$的每个自变量。与里奇缩并不同，这一运算不会降低曲率阶数，而是将$\mathbf{R}$ 所包含的信息重新组织并扩展为一个更高秩的（$n-2, n-2$）双形式。在四维空间中，双重对偶保持次数不变，并在几何和广义相对论中发挥基础作用；在更高维空间中，它提供了一种规范机制，用于获取仅凭里奇缩并无法揭示的曲率信息。

本文研究双对偶张量 ${}^*\mathbf{R}^*$的连续里奇缩并。对于满足 $0 \le p \le n-2$的每个整数 p，我们记

$$ {}^*\mathbf{R}^*_p := \frac{1}{(n-p-2)!}\,\mathbf{c}^{\,n-p-2}({}^*\mathbf{R}^*) $$

相应的对称 (p,p) 双形式。对于 $p=0$, ${}^*\mathbf{R}^*_0$，它等于标量曲率的一半。对于 $p=1$, ${}^*\mathbf{R}^*_1$，它等于爱因斯坦张量 $\frac{1}{2}\mathbf{Scalg} - \mathbf{Ric}$。对于$p=2$, ${}^*\mathbf{R}^*_2$，它是一个对称的(2,2) 双形式，具有与黎曼张量相同的代数对称性，包括第一比安基恒等式，并且散度为零，因此是引力四指标表述的一种自然选择（见第 1.5 节）。此外， ${}^*\mathbf{R}^*_2$与$\mathbf{R}$ 具有相同的 Weyl 部分（见推论 2.10），并且在所有维数中都确定$\mathbf{R}$ （见命题 3.1）。

一般而言，所有张量 ${}^*\mathbf{R}^*_p$ 都是对称的，满足第一比安基恒等式且散度为零，见推论 2.2。它们满足遗传收缩关系

$$\mathbf{c}({}^*\mathbf{R}^*_p) = (n-p-1)\,{}^*\mathbf{R}^*_{p-1},$$

因此，对于 $p \geq 2$，张量 ${}^*\mathbf{R}^*_p$ 构成爱因斯坦张量的母张量层级：

$${}^*\mathbf{R}^* = {}^*\mathbf{R}^*_{n-2} \xrightarrow{\mathbf{c}} {}^*\mathbf{R}^*_{n-3} \xrightarrow{\mathbf{c}} \ldots \xrightarrow{\mathbf{c}} {}^*\mathbf{R}^*_2 \xrightarrow{\mathbf{c}} {}^*\mathbf{R}^*_1 = \textbf{Einstein tensor}.$$

本文的一个核心结果（定理 2.6 和 2.7）表明，对于$1 \leq p \leq n-2$，张量 ${}^*\mathbf{R}^*_p$ 通常是依赖于黎曼曲率张量的、线性的、无散度（p， p）双形式中的唯一者。

1.2. 广义双重对偶的截面曲率。我们还研究了与张量 ${}^*\mathbf{R}^*_p$ 相关的截面曲率。这些恰好是 p-曲率的一半s_p，该曲率此前已由作者引入并研究，例如见 [9, 10, 11, 4]。我们在定理 3.3 中证明， s_p 的正性满足纤维丛性质。

在这些不变量中，2-曲率 s_2 发挥着尤为重要的作用。我们证明， s_2 决定张量 ${}^*\mathbf{R}^*_2$，从而决定完整的黎曼曲率张量 $\mathbf{R}$（命题 3.1）。我们在定理 3.4 中证明，如果（M^{4k}，$\mathbf{g}$）是具有ˆ非负2-曲率的紧致自旋流形，那么其 A-亏格为零。在$\mathbf{Scal} \geq 0$ 或甚至 $\mathbf{Ric} \geq 0$ 条件下，这一性质并不成立，见例3.1。

1.3. 广义相对论修正场方程的应用。Moulin [22, 23], 近期提出了一种适用于任意维数的引力场方程四指标表述 *，其中方程的几何部分直接用双重对偶曲率张量 ${}^*\mathbf{R}^*_2$表示。在这种方法中，对四指标方程进行缩并可恢复经典爱因斯坦方程，同时在缩并之前保留额外的曲率信息。

这类表述为高阶无散曲率张量的出现提供了一个自然的框架，并促使人们研究满足与爱因斯坦张量相同结构性质的典范四指标对象。第 1.5 节将详细讨论这些四指标表述的概念背景和几何动机。

1.4. Lovelock 张量的母体及 T_4 的情形。在第 4 节中，对于满足 $2 \le 2q \le n$ 的每个整数 q，我们将同样的分析应用于高斯–克罗内克曲率张量$\mathbf{R}^q$，它们是（$2q$，$2q$）双形式。我们考虑由下式定义的它们的双对偶张量：

$$ {}^*(\mathbf{R}^q)^*(\cdot,\cdot) := \mathbf{R}^q(*\cdot,*\cdot), $$

它们是（$n-2q$，$n-2q$）双形式。为简便起见，以下将这些张量记为 $*(\mathbf{R}^q)$，或简写为 $*\mathbf{R}^q$。

通过进行连续的里奇缩并，我们定义一族称为（p，q）-曲率张量的曲率张量，其中 $0 \le p \le n-2q$，定义为

$$ \mathbf{R}^{(p,q)} := \frac{1}{(n-2q-p)!}\,\mathbf{c}^{\,n-2q-p}(*\,\mathbf{R}^q)\,. $$

对于 $p=0$，张量 $\mathbf{R}^{(0,q)}$ 是标量函数，并且除一个常数因子外，与（M，$\mathbf{g}$）的 Gauss–Bonnet 曲率一致。特别地，当维数 n 为偶数时，$\mathbf{R}^{(0,n/2)}$ 就是 Gauss–Bonnet 被积函数。对于 $q=1$，我们得到黎曼张量的广义双重对偶，即 $\mathbf{R}^{(p,1)} = {}^*\mathbf{R}^*_p$。对于 $p=1$，张量 $\mathbf{R}^{(1,q)}$ 与 T_{2q} 阶的洛夫洛克张量重合。

曲率张量$\mathbf{R}^{(p,q)}$ 是对称的（p,p）双形式，并满足第一比安基恒等式。尽管它们通常不满足第二比安基恒等式，但始终无散度。此外，对于 $p \ge 1$，它们关于里奇缩并满足以下遗传性质：

$$ \mathbf{R}^{(p,q)} \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{R}^{(p-1,q)} \xrightarrow{\mathbf{c}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{R}^{(1,q)} = \mathbf{Lovelock\ tensor}. $$

特别地，对$\mathbf{R}^{(p,q)}$ 进行（$p-1$）次缩并可得到洛夫洛克张量 T_{2q}。因此，我们将称张量 $\mathbf{R}^{(p,q)}$ 为洛夫洛克张量的 $p\ge 2$ p-父张量。

第一个洛夫洛克张量 T_2，对应于 $q=1$，就是通常的爱因斯坦张量。第二个洛夫洛克张量 T_4，在 $q=2$ 时得到，可以经典地由（$4,4$）双形式$\mathbf{R}^2$ 通过公式恢复（见下文公式（21））

$$ T_4 = \frac{\mathbf{c}^4\mathbf{R}^2}{4!}\,\mathbf{g} - \frac{\mathbf{c}^3\mathbf{R}^2}{3!}. $$

这需要对八阶张量$\mathbf{R}^2$ 或其双重对偶 $*\,\mathbf{R}^2$，进行缩并，后者是一个 $(2n-8)$ 阶张量。本文证明，第二Lovelock张量 T_4 也可以通过缩并一个四阶 曲率张量得到，这与

爱因斯坦张量由黎曼张量得到的方式完全类似。更具体地说，我们在命题 4.1 中证明，T_4 可以通过缩并 (2，2) 双形式$\mathbf{R}\circ{}^*\mathbf{R}^*_2$得到，其中 ${}^*\mathbf{R}^*_2$表示黎曼张量的广义双重对偶，而 $\circ$是双形式的复合积：

$$T_4 = \frac{1}{2}\,\mathbf{c}^2(\mathbf{R}\circ{}^*\mathbf{R}^*_2)\,\mathbf{g} - 2\,\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ{}^*\mathbf{R}^*_2).$$

在最后一节中，我们探讨引力的洛夫洛克场方程可能的修改。我们首先指出，高斯–克罗内克曲率张量$\mathbf{R}^q$的重要分量（包括其无迹部分）并未对经典洛夫洛克场方程作出贡献。这种信息损失源于必须对$\mathbf{R}^q$ 进行（$2q-1$）次缩并，才能得到洛夫洛克张量 T_{2q}。

我们在第 4.2 节表明，为了使$\mathbf{R}^q$ 的所有分量都能有效地对场方程作出贡献，可以在 $2q \le n/2$时用其母张量$\mathbf{R}^{(2q,q)}$替代洛夫洛克张量 T_{2q}，而在 $2q > n/2$时则用$\mathbf{R}^{(n-2q,q)}$ 替代。

1.5. 动机：四指标引力与双重对偶曲率张量。爱因斯坦场方程以爱因斯坦张量$\frac{1}{2}\mathbf{Scal}\,\mathbf{g} - \mathbf{Ric}$的形式表示，该张量由黎曼曲率张量经里奇缩并得到。因此，黎曼张量的无迹部分，即外尔张量，在爱因斯坦方程中完全消失，因为它在所有里奇缩并下均为零。尽管如此，外尔张量仍包含重要的几何和物理信息，包括潮汐力和自由引力场。

这一观察促使人们发展出直接在四指标曲率张量层面书写的引力场方程。这类公式的一个自然候选是黎曼张量的双重对偶 ${}^*\mathbf{R}^*$，它与$\mathbf{R}$ 具有相同的代数对称性，并且散度为零。

在 $n = 4$ 维中，黎曼张量的双重对偶通常表示为（例如参见 [21]）

$${}^*\mathbf{R}^*_{ijkl} = \frac{1}{4}\,\varepsilon_{ij}{}^{pq}\,\mathbf{R}_{pqrs}\,\varepsilon^{rs}{}_{kl},$$

并且它满足代数恒等式

$${}^*\mathbf{R}^*_{ijkl} = \mathbf{R}_{ijkl} - (\mathbf{g}_{ik}\mathbf{Ric}_{jl} - \mathbf{g}_{il}\mathbf{Ric}_{jk} + \mathbf{g}_{jl}\mathbf{Ric}_{ik} - \mathbf{g}_{jk}\mathbf{Ric}_{il}) + \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{ik}\mathbf{g}_{jl} - \mathbf{g}_{il}\mathbf{g}_{jk})\mathbf{Scal}.$$

张量 ${}^*\mathbf{R}^*_{ijkl}$ 具有与黎曼张量相同的代数对称性，满足第一比安基恒等式，且散度为零。其缩并可重现爱因斯坦张量，因此是爱因斯坦张量自然的四指标类比。

最近，Moulin [22, 23], 提出了任意维数下爱因斯坦场方程的一种四指标重述，其中场方程的几何部分由双对偶张量 ${}^*\mathbf{R}^*_2$给出。缩并后的方程等价于经典爱因斯坦方程，而无迹部分则给出了一个涉及外尔张量的附加约束。

此前，Zakir [26] 强调，将场方程化为二指标形式会使引力场丢失一个本质部分，并主张直接在四指标层级书写引力场方程。本文的结果通过将双对偶张量嵌入无散曲率张量的标准层级，并将这一构造推广到 Lovelock理论，为这些方法提供了一个自然的几何框架。

全文中，所有流形、度量和曲率张量均假定为光滑，黎曼度量取正定，并且 n 表示底层流形的维数。因此，所有陈述均在黎曼情形下表述；不过，第 2、3 和 5 节的结果大多是代数性的，只需作少量标准修改即可推广到伪黎曼情形。相比之下，截面曲率的概念以及第 4 节中发展的相关正性结果本质上属于黎曼情形。

2. The double dual curvature tensor and its contractions

本节将作为双形式看待的黎曼曲率张量的双重对偶的代数与微分性质加以阐述。我们的目标是构造一个由连续缩并得到的对称（p, p）双形式的典范层级，并以内蕴方式通过这些张量的散度为零性质加以刻画。本节的主要结果表明，在温和且一般的几何假设下，这一层级涵盖了所有依赖于黎曼曲率张量的线性散度为零（p, p）双形式。

设（M^n，$\mathbf{g}$）是一个维数为 $n \geq 4$ 的黎曼流形。在每一点 $p \in M$，(0，4) 黎曼曲率张量 R_{ijkl} 都可视为 $\Lambda^2 T_p^* M \otimes \Lambda^2 T_p^* M$ 的一个元素，或等价地，视为定义在 T_pM 上的对称 (2，2) 双形式。四维情形下，黎曼张量的双重对偶 在物理学文献中广为人知。它通过对黎曼曲率张量的每一对反对称指标分别施加霍奇星算子得到，在物理学文献中常记作左星和右星：

$$ {}^*\mathbf{R}^*(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \mathbf{R}(*\,\cdot\,,*\,\cdot\,), $$

其中，霍奇星算子分别作用于双形式 $\mathbf{R}$的每个自变量上。在四维情况下，其分量由下式给出（见 [21,第 325]页）

$$ ({}^*\mathbf{R}^*)_{ijkl} = \frac{1}{4} \sum_{p,q,r,s} \varepsilon_{ijpq}\, \varepsilon_{klrs}\, R_{pqrs}, \tag{1} $$

其中，ε_{ijpq} 表示列维-奇维塔符号。张量 ${}^*\mathbf{R}^*$ 具有与黎曼张量 $\mathbf{R}$ 相同的代数对称性，并满足第一比安基恒等式。尽管它通常不满足第二比安基恒等式，但它始终无散度 [21, 第 325]页。此外，其第一次缩并得到爱因斯坦张量，第二次缩并得到标量曲率。

上述关于 ${}^*\mathbf{R}^*$ 分量的表达式无法直接推广到更高维数，因为符号 ε_{ijpq} 仅在 $n = 4$ 时才有定义。不过，可以利用广义克罗内克δ将该公式改写为

$$ ({}^*\mathbf{R}^*)_{ijkl} = \frac{1}{4} \sum_{p,q,r,s} \delta^{ijpq}_{klrs}\, R_{pqrs}. \tag{2} $$

此表达式在所有维数下均成立 $n \geq 4$，因此为任意维数下的黎曼张量双对偶提供了自然定义，以下将其记为 ${}^*\mathbf{R}^*_2$。所得张量具有与四维情形相同的代数和微分性质。这些性质促使人们引入高指标类比物，其连续缩并能够还原经典曲率张量，同时保持无散度结构。

黎曼张量 R 黎曼张量双对偶 ${}^*\mathbf{R}_2^*$对称 (2,2) 双形式，对称 (2, 2) 双形式，满足 Bianchi 第一和第二恒等式 满足 Bianchi第一恒等式，无散度 $\downarrow^{\mathbf{c}}$ $\downarrow^{\mathbf{c}}$**里奇曲率** Einstein $= \frac{1}{2}$**标量曲率** **g** $-$ **里奇曲率** $\downarrow^{\mathbf{c}}$ $\downarrow^{\mathbf{c}}$**标量曲率** $\frac{n-2}{2}$ **标量曲率**

此处 **c** 表示缩并映射。除了具有内在的几何意义之外，双对偶张量 ${}^*\mathbf{R}_2^*$ 在引力理论中也发挥着作用。Moulin [22, 23], 近期提出了一种现代观点，构建了适用于所有维数的引力场方程的四指标表述 $n \geq 4$ ，其缩并可还原为经典爱因斯坦方程。在这种表述中，与经典爱因斯坦方程不同，完整曲率张量通过其双重对偶 ${}^*\mathbf{R}_2^*$发挥核心作用。

2.1. **黎曼张量的高阶指标双对偶张量**。

定义 2.1. 对于每个满足 $0 \leq p \leq n-2$ 的整数 p， p 阶的黎曼张量的广义双对偶，记为 ${}^*\mathbf{R}_p^* = ({}^*\mathbf{R}^*_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_p})$，是一个 $2p$ 阶协变张量，其分量定义如下：

$$ {}^*\mathbf{R}^*_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_p} = \frac{1}{4} \sum_{p,q,r,s} \delta^{pqi_1\ldots i_p}_{rsj_1\ldots j_p} R_{pqrs}. \tag{3}$$

对于 $p = 0$, 我们设

$$ {}^*\mathbf{R}_0^* = \frac{1}{4} \sum_{p,q,r,s} \delta^{pq}_{rs} R_{pqrs} = \frac{\mathbf{Scal}}{2}.$$

这些张量是通过双重对偶和缩并，对黎曼张量的曲率信息进行重新组织和展开而得到的。对于 $p = 1$, 张量 ${}^*\mathbf{R}_1^*$与经典的爱因斯坦张量重合。对于 $p = 2$, 我们得到双对偶张量
${}^*\mathbf{R}_2^*$ 上一节。

2.2. 黎曼张量高阶双重对偶的无指标表述。以下命题利用双形式的外积，为黎曼张量的高阶双重对偶提供了无指标公式。

我们强调，其证明依赖于利用双形式形式体系，将基于指标的表达式系统地转换为无指标恒等式。这种方法使我们能够以概念化且无坐标方式重新诠释经典的曲率缩并。

命题 2.1。 对于每个 p 且满足 $0 \leq p \leq n-2$，有

$$ {}^*\mathbf{R}^*_p = * \frac{\mathbf{g}^{n-p-2}\mathbf{R}}{(n-p-2)!}. $$

证明。设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 为局部标准正交标架。利用广义克罗内克δ与度量张量外幂之间的标准对应关系，我们计算得

$$ \begin{aligned} {}^*\mathbf{R}^*_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_p} =& \frac{1}{4} \sum_{p,q,r,s} \delta^{pqi_1\ldots i_p}_{rsj_1\ldots j_p} \mathbf{R}_{pqrs} \\ =& \frac{1}{4} \sum_{p,q,r,s} \frac{\mathbf{g}^{p+2}}{(p+2)!} (e_p, e_q, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}; e_r, e_s, e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})\, \mathbf{R}_{pqrs} \\ =& \frac{1}{4} \left(i_{\mathbf{R}} \frac{\mathbf{g}^{p+2}}{(p+2)!} \right) (e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}; e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}). \end{aligned} \tag{4} $$

因此，

$$ {}^*\mathbf{R}^*_p = \frac{1}{4}\, i_{\mathbf{R}} \frac{\mathbf{g}^{p+2}}{(p+2)!} = \frac{1}{4} * \mathbf{R} * \left(\frac{\mathbf{g}^{p+2}}{(p+2)!} \right) = * \frac{\mathbf{g}^{n-p-2}\mathbf{R}}{(n-p-2)!}. $$

这里，i_ω 表示双形式的内积，它满足 $i_{\mathbf{R}} = *\mathbf{R}*$；见 [1, 17]。证明完毕。□

推论 2.2. (1) 对于每个满足 $1 \leq p \leq n-2$ 的 p，张量 ${}^*\mathbf{R}^*_p$ 均无散度。

(2) 对于每个满足 $2 \leq p \leq n-2$ 的 p，有

$$ {}^*\mathbf{R}^*_p = 0 \iff \mathbf{R} = 0. $$

证明。第一个断言由命题 2.1 以及恒等式 $*\delta*(\omega) = (-1)^r D\omega$ 推出，该恒等式适用于 (r, r) 双形式（例如参见 [17] 中的恒等式 (49)），其中 D 表示第二比安基和，δ 表示散度算子，而 $\omega = \mathbf{g}^{n-p-2}\mathbf{R}$，其满足 $D\omega = 0$。

第二个断言直接由命题 2.1 以及度量张量 $\mathbf{g}$ 的幂的外乘法的消去性质推出；参见 [13, 命题 2.3]。□

推论 2.3. 对于每个 p 且满足 $1 \leq p \leq n-2$ 的对象，均有

$$ {}^{*}\mathbf{R}^{*}_{p} = \frac{1}{(n-p-2)!}\,\mathbf{c}^{\,n-p-2}(*\,\mathbf{R}). \tag{5} $$

特别是，

$$ \mathbf{c}({}^{*}\mathbf{R}^{*}_{p}) = (n-p-1)\,{}^{*}\mathbf{R}^{*}_{p-1}. \tag{6} $$

证明。 这可直接由命题 2.1 和恒等式 $\mathbf{c}^{\,r} = *\,\mathbf{g}^{\,r}\,*$ 得出 . □

因此，我们得到了一列高秩张量，它们都具有黎曼张量的代数对称性，满足第一比安基恒等式，且散度为零。此外，连续缩并可还原出爱因斯坦张量和标量曲率：

$$ {}^{*}\mathbf{R}^{*} = {}^{*}\mathbf{R}^{*}_{n-2} \xrightarrow{\mathbf{c}} {}^{*}\mathbf{R}^{*}_{n-3} \xrightarrow{\mathbf{c}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{c}} {}^{*}\mathbf{R}^{*}_{1} = \text{Einstein tensor} \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{Scal}. $$

下述性质表明，在流形的每一点处，黎曼张量 $\mathbf{R}$ 与其双重对偶 ${}^{*}\mathbf{R}^{*}_{2}$ 之间的夹角（相对于双形式上的自然内积）由 Gauss–Bonnet 曲率 $h_4 = \|\mathbf{R}\|^2 - \|\mathbf{Ric}\|^2 + \frac{1}{4}\mathbf{Scal}^2$ 决定。

命题 2.4。有

$$ \langle \mathbf{R}, {}^{*}\mathbf{R}^{*}_{2} \rangle = h_4. $$

证明。这直接由双形式内积的性质得出，如下所示

$$ \langle \mathbf{R}, {}^{*}\mathbf{R}^{*}_{2} \rangle = *((*\,{}^{*}\mathbf{R}^{*}_{2})\mathbf{R}) = *\left(\frac{\mathbf{g}^{n-4}\mathbf{R}^{2}}{(n-4)!} \right) = h_4. $$

□

2.3. **黎曼曲率张量广义双重对偶的唯一性定理**。令$\mathbf{R}$ 表示黎曼流形 $(M,\mathbf{g})$ 的 (0,4) 黎曼曲率张量，并将其视为对称的 (2,2) 双形式；设 ω 是 M 上的 (p,p) 双形式。

定义 2.2。若双形式 ω 的分量 $\omega_{i_1\dots i_p,j_1\dots j_p}$ 在任意标准正交标架下，均由黎曼曲率张量的分量 R_{ijkl} 的通用（即与标架无关）齐次线性多项式给出，则称该(p,p) 双形式为关于黎曼张量的线性多项式$\mathbf{R}$ 。

（p, p）双形式中，关于 $\mathbf{R}$ 的一次多项式的典型例子包括 $\mathbf{g}^p$ **标量曲率**、$\mathbf{g}^{p-1}$**里奇曲率** 和 $\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}$。利用不变量理论，Bivens [3] 证明了这三个张量张成了所有关于 $\mathbf{R}$ 的线性多项式（p, p）双形式所构成的整个空间。更确切地说，有如下结果。

定理 2.5 （[3, 定理 3.1]）。 设（M, $\mathbf{g}$） 是一个维数为 $n \geq 4$ 的黎曼流形，设 $\mathbf{R}$ 是其黎曼曲率张量，并设 $p \geq 1$。所有关于 $\mathbf{R}$ 的线性多项式（p, p） 双形式构成的空间是一个由以下元素张成的实向量空间

$$\{\mathbf{g}^p\,\mathbf{Scal},\ \mathbf{g}^{p-1}\mathbf{Ric},\ \mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}\}.$$

这里约定 $\mathbf{g}^{-1}=0$ 和 $\mathbf{g}^0=1$。

我们利用这一结果证明，在一般的几何情形下，广义双重对偶张量 ${}^*\mathbf{R}^*_p$ 是黎曼张量中唯一的无散度线性多项式。我们先处理 $p=1$ 的情形，然后讨论 p 的更高取值。

定理 2.6。 设$(M,\mathbf{g})$ 是一个维数为 $n \geq 4$ 的黎曼流形，设$\mathbf{R}$ 为其黎曼曲率张量，并令 ${}^*\mathbf{R}^*_1 = \frac{1}{2}\,\mathbf{Scal}\mathbf{g} - \mathbf{Ric}$ 表示爱因斯坦张量。在$(M,\mathbf{g})$ 上所有散度为零的$\mathbf{R}$-线性多项式$(1,1)$ 双形式构成的空间是一个由以下元素张成的实向量空间

a) $\{{}^*\mathbf{R}^*_1\}$ 若$(M,\mathbf{g})$ 的标量曲率不是常数；b) $\{{}^*\mathbf{R}^*_1, \mathbf{Scal}\mathbf{g}\}$ 若$(M,\mathbf{g})$ 的标量曲率为常数。

证明。 设 ω 是一个散度为零的$\mathbf{R}$-线性多项式 **(1,1)** 双形式。根据 Bivens 定理， ω 可写为

$$\omega = \alpha\,\mathbf{g}\,\mathbf{Scal} + \beta\,\mathbf{Ric} = (\alpha+\tfrac{\beta}{2})\,\mathbf{g}\,\mathbf{Scal} - \beta\,{}^*\mathbf{R}^*_1,$$

对于某些实常数 α 和 β。由于 ${}^*\mathbf{R}^*_1$ 无散度，我们得到

$$\delta\omega = 0 \iff (\alpha+\tfrac{\beta}{2})\,\delta(\mathbf{g}\,\mathbf{Scal}) = -(\alpha+\tfrac{\beta}{2})\,\widetilde{D}\mathbf{Scal} = 0.$$

这就证明了该结果。

□

定理 2.7。 设$(M,\mathbf{g})$ 是一个维数为 $n \geq 4$ 的黎曼流形，$\mathbf{R}$ 是其黎曼曲率张量，并且 $2 \leq p \leq n-2$。所有散度为零的 $\mathbf{R}$ 线性多项式 (p,p) 双形式构成一个实向量空间，其生成元为

a) $\{{}^*R_p^*\}$ ，适用于一般情形，即外尔张量不是调和的且标量曲率不是常数；*b)* $\{{}^*R_p^*,\ *(g^{n-p-1}$里奇曲率$)\ *(g^{n-p}$标量曲率$)\}$ ，适用于外尔张量为调和张量且标量曲率为常数的情形；*c)* $\{{}^*R_p^*,\ *(g^{n-p-1}A)\}$ ，适用于外尔张量为调和张量且标量曲率不是常数的情形，其中 A 表示舒滕张量；*d)* $\{{}^*R_p^*,\ *(g^{n-p}$标量曲率$)\}$ ，适用于外尔张量不是调和的且标量曲率为常数的情形。

证明。 回忆一下，一个双形式 θ 散度为零，当且仅当它的双重对偶 $\star\theta$ 是 Codazzi 张量，也就是说满足 $D(\star\theta)=0$。因此，只需对所有 Codazzi $\mathbf{R}$-线性多项式（p,p）双形式进行分类。

设 ω 是这样一个形式。根据 Bivens 定理，我们可以写成

$$\omega = \alpha\,\mathbf{g}^{p}\,\mathbf{Scal} + \beta\,\mathbf{g}^{p-1}\mathbf{Ric} + \gamma\,\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R},$$

其中 α、 β 和 γ 是实常数。条件 $D\omega=0$ 等价于

$$D\big[\mathbf{g}^{p-1}(\alpha\,\mathbf{g}\,\mathbf{Scal}+\beta\,\mathbf{Ric})\big] = (-1)^{p-1}\,\mathbf{g}^{p-1}\,D(\alpha\,\mathbf{g}\,\mathbf{Scal}+\beta\,\mathbf{Ric}) = 0.$$

由于 $p \leq n-2$，我们有 $p-1+2+1 < n+1$，因此根据 [13, 命题 2.3]，可得

$$D\omega = 0 \iff D(\alpha\,\mathbf{g}\,\mathbf{Scal}+\beta\,\mathbf{Ric}) = 0. \tag{7}$$

舒滕张量 A 与里奇张量的关系为

$$\mathbf{Ric} = (n-2)A + \frac{\mathbf{Scal}}{2(n-1)}\,\mathbf{g}.$$

将其代入（7），可得等价条件

$$D\omega = 0 \iff D\left[\left(\alpha + \frac{\beta}{2(n-1)}\right)\mathbf{g}\,\mathbf{Scal} + \beta\,(n-2)A\right] = 0. \tag{8}$$

由于 Cotton 张量 DA 无迹，对上述方程取迹可得

$$\Big(\alpha+\frac{\beta}{2(n-1)}\Big)\,n\,D(\mathbf{Scal})=0.$$

由这些关系可得以下情况:

- 在一般情况下，当 $DA\neq 0$ 且标量曲率不是常数时，有$\alpha=\beta=0$，因此 $\omega=$$\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}$。
- 如果 $DA=0$ 且标量曲率为常数，则对于α、 β和 γ的所有实数值，均有 $D\omega=0$ 。
- 如果 $DA=0$且标量曲率不是常数，则 $\beta=-2(n-1)\alpha$，因此

$$\omega=\alpha\,\mathbf{g}^{p-1}(\mathbf{g}\,\mathbf{Scal}-2(n-1)\mathbf{Ric})+\gamma\,\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}=-2(n-1)(n-2)\alpha\,\mathbf{g}^{p-1}A+\gamma\,\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}.$$

- 如果 $DA\neq 0$ 且标量曲率为常数，则 $\beta=0$，因此

$$\omega=\alpha\,\mathbf{g}^{p}\,\mathbf{c}^{2}\mathbf{R}+\gamma\,\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}.$$

最后，回想一下，条件 $DA=0$ 等价于外尔张量散度为零，因而是调和的。证明至此完成。□

注 2.3（与洛夫洛克关于散度为零张量的定理的关系）。 定理 *2.6* 和 *2.7* 为洛夫洛克著名的散度为零张量唯一性定理提供了一个线性的高阶类比 [20]。洛夫洛克定理对由度量及其前两阶导数构造的最一般的对称散度为零二阶张量进行了分类，这些张量给出洛夫洛克张量 T_{2k}，其中包括度量 $T_0=\mathbf{g}$ 和爱因斯坦张量T_2）。

我们的结果针对每个 p，对唯一的对称、散度为零的（p,p）双形式进行分类，该双形式关于黎曼曲率张量$\mathbf{R}$是线性的。度量$\mathbf{g}$ 未出现在我们的分类中，恰恰是因为它关于$\mathbf{R}$不是线性的；在洛夫洛克定理中，它作为项 $T_0=\mathbf{g}$出现。

对于 $p=1$，我们恢复爱因斯坦张量（仅当标量曲率为常数时才恢复度量）。对于 $p\geq 2$，我们得到新的高秩张量 ${}^{*}\mathbf{R}^{*}_{p}$，它们构成了爱因斯坦张量的一个规范父张量层级。在第 *4* 节中，我们将这一构造推广，从而为所有洛夫洛克张量 T_{2q} 得到 p-父张量。

2.4. $\mathbf{R}_p^*$ 的自对偶与反自对偶 ${}^*\mathbf{R}_p^*$。黎曼张量的高阶双重对偶在所有偶数维数中，为爱因斯坦度量以及标量曲率为零的共形平坦度量提供了一种刻画，如下所示。

定理 2.8 ([13, 9]). 设$(M,\mathbf{g})$ 是一个维数为偶数 $n = 2p \geq 4$ 的黎曼流形。定义 $*({}^*\mathbf{R}_p^*)(\cdot,\cdot) := {}^*\mathbf{R}_p^*(*\cdot, *\cdot)$。则：

a) $(M,\mathbf{g})$ 是 *Einstein* 流形，当且仅当 ${}^*\mathbf{R}_p^*$ 是自对偶的，也就是说，

$$*({}^*\mathbf{R}_p^*) = {}^*\mathbf{R}_p^*;$$

b) $(M,\mathbf{g})$ 是标量曲率为零的共形平坦流形，当且仅当 ${}^*\mathbf{R}_p^*$ 是反自对偶的，也就是说，

$$*({}^*\mathbf{R}_p^*) = -{}^*\mathbf{R}_p^*.$$

2.5. **张量的正交分解** ${}^*\mathbf{R}_p^*$. 下列有用公式可直接由 [13] 中的公式（15）推出。

命题 2.9. 对于 $0 \leq p \leq n-2$，有

$$ {}^*\mathbf{R}_p^* = *\left(\frac{\mathbf{g}^{n-p-2}\mathbf{R}}{(n-p-2)!} \right) = \frac{\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}}{(p-2)!} - \frac{\mathbf{g}^{p-1}\mathbf{Ric}}{(p-1)!} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{g}^p}{p!}\mathbf{Scal}. \tag{9}$$

这里我们采用如下约定：$\mathbf{g}^{-1} = 0$ 和$\mathbf{g}^0 = 1$。特别地，${}^*\mathbf{R}_1^*$ 与爱因斯坦张量重合，而 ${}^*\mathbf{R}_2^*$ 满足以下恒等式

$$ {}^*\mathbf{R}_2^* = \mathbf{R} - \mathbf{g}\,\mathbf{Ric} + \frac{1}{4}\,\mathbf{g}^2\,\mathbf{Scal}. \tag{10}$$

方程（10）在四维情形下化为经典的 Ruse–Lanczos 恒等式 [7, 命题 3.1] ，在高维情形下则等价于方程 A.14]中的广义 Ruse–Lanczos 恒等式 [24, 。

回顾黎曼张量按不可约分量作正交分解,

$$\mathbf{R} = \omega_2 + \mathbf{g}\,\omega_1 + \mathbf{g}^2\,\omega_0,$$

其中 $\omega_2 = W$为外尔张量，$\omega_1 = \frac{1}{n-2}$**(里奇曲率** $-$ **标量曲率** n **g)**为无迹 Ricci 分量，而 $\omega_0 =$ **标量曲率** $\frac{}{2n(n-1)}$。

由此可知，广义双重对偶张量可分解为以下相互正交的分量。

推论 2.10。对于 $0 \leq p \leq n-2$，有

$$^*\mathbf{R}_p^* = \frac{1}{(p-2)!}\,\mathbf{g}^{p-2}\omega_2 - \frac{n-p-1}{(p-1)!}\,\mathbf{g}^{p-1}\omega_1 + \frac{(n-p)(n-p-1)}{p!}\,\mathbf{g}^p\omega_0.$$

我们采用如下约定：$\mathbf{g}^{-1} = 0$ 和$\mathbf{g}^0 = 1$。特别地，黎曼张量$\mathbf{R}$ 及其双重对偶 $^*\mathbf{R}_2^*$ 具有相同的维尔分量（无迹分量）。更确切地说，

$$^*\mathbf{R}_2^* = \omega_2 - (n-3)\,\mathbf{g}\,\omega_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\,\mathbf{g}^2\,\omega_0.$$

3. Sectional curvatures of the generalized double duals of Riemann

本节中，我们引入与黎曼曲率张量广义双重对偶相关的截面曲率。与经典黎曼张量的截面曲率完全类似，这些不变量定义在切平面的格拉斯曼丛上，并通过在标准正交标架上取高阶曲率张量的值来捕捉曲率信息。我们研究其基本性质，并证明它们编码了重要的几何信息，包括具有显著几何和拓扑后果的正性与非负性性质。

定义 3.1。双对偶张量 $^*\mathbf{R}_p^*$的截面曲率记为 s_p，称为 p-曲率，是定义在切p平面格拉斯曼丛上的函数。对于切 p平面 P以及其任意标准正交基 $\{e_1, \ldots, e_p\}$，我们定义

$$s_p(P) := 2\,{}^*\mathbf{R}_p^*(e_1, \ldots, e_p; e_1, \ldots, e_p).$$

引入因子 2，是为了使该定义与作者所研究的 p-曲率一致。作者自 1995年博士论文 [9], 以来，便广泛研究这一曲率，之后还发表了一系列论文（例如参见 [10, 11, 4]）。下文将阐述这些不变量的新性质，而此前的研究尚未涉及这些性质。

命题 3.1。(1) 双对偶张量 $^*\mathbf{R}_2^*$ 决定了黎曼曲率张量 $\mathbf{R}$。更确切地说，

$$\mathbf{R} = {}^*\mathbf{R}_2^* - \frac{1}{n-3}\mathbf{g}\,\mathbf{c}({}^*\mathbf{R}_2^*) + \frac{1}{2(n-2)(n-3)}\mathbf{g}\,\mathbf{c}^2({}^*\mathbf{R}_2^*). \tag{11}$$

(2) 双重对偶 $^*\mathbf{R}_2^*$ 的截面曲率 s_2 决定了黎曼曲率张量 $\mathbf{R}$。

证明。第一个断言可由对命题 2.9 的恒等式进行缩并直接得出。事实上，可以得到

$$\mathbf{c}({}^*\mathbf{R}_2^*) = (n-3)\Big(\frac{1}{2}\mathbf{Scal}\,\mathbf{g} - \mathbf{Ric}\Big), \qquad \mathbf{c}^2({}^*\mathbf{R}_2^*) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}\mathbf{Scal}.$$

第二个断言可由一个标准论证得出，该论证类似于$\mathbf{R}$的经典情形，表明截面曲率 s_2 决定张量 ${}^*\mathbf{R}_2^*$。回想一下， ${}^*\mathbf{R}_2^*$满足第一比安基恒等式。由命题的第一部分即可得出结论。□

因此，所有高阶双重对偶 ${}^*\mathbf{R}_p^*$（ $p>2$）均由 ${}^*\mathbf{R}_2^*$决定，甚至由其截面曲率 s_2决定。

对命题 2.9 中恒等式两边取截面曲率，可得，对于 $0 \le p \le n-2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}s_p &= \frac{1}{(n-p-2)!} * \big(\mathbf{g}^{n-p-2}\mathbf{R}\big)(e_1\wedge\cdots\wedge e_p; e_1\wedge\cdots\wedge e_p) \\
&= \frac{\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}}{(p-2)!}(e_1\wedge\cdots\wedge e_p; e_1\wedge\cdots\wedge e_p) - \frac{\mathbf{g}^{p-1}\mathbf{Ric}}{(p-1)!}(e_1\wedge\cdots\wedge e_p; e_1\wedge\cdots\wedge e_p) \\
&\qquad + \frac{\mathbf{Scal}}{2}\frac{\mathbf{g}^p}{p!}(e_1\wedge\cdots\wedge e_p; e_1\wedge\cdots\wedge e_p) \\
&= \sum_{1\le i<j\le p} R(e_i,e_j,e_i,e_j) - \sum_{i=1}^{p}\mathbf{Ric}(e_i,e_i) + \frac{1}{2}\mathbf{Scal}.
\end{aligned}$$

这里，向量 $\{e_1,\dots,e_p\}$ 构成一个标准正交族。因此，我们证明了下面这个有用的公式。

引理 3.2。 对于 $2 \le p \le n-2$，有

$$s_p(e_1,\dots,e_p) = \mathbf{Scal} - 2\sum_{i=1}^{p}\mathbf{Ric}(e_i,e_i) + 2\sum_{1\le i<j\le p} K(e_i,e_j). \tag{12}$$

注 3.2 (C_p-曲率。） 回顾一下，*Brendle–Hirsch–Johne* [5] 引入的 C_p-曲率不变量定义在一个切 p-平面 P 上，具体为

$$2C_p(P) = \mathbf{Scal} - s_p(P).$$

因此，可以得到等价的表达式

$$C_p(P)(e_1,\dots,e_p)=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{Ric}(e_i,e_i)-\sum_{1\le i<j\le p}K(e_i,e_j). \tag{13}$$

因此， $C_p(P)$ 衡量的是 P 的中间 p-*Ricci* 曲率与正交$(n-p)$-平面的$(n-p)$-曲率之间的差异。

另一个$r\ ob$观察是， C_p 作为曲率张量的截面曲率出现

$$\frac{\mathbf{g}^{p-1}\mathbf{Ric}}{(p-1)!}-\frac{\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}}{(p-2)!},$$

它满足第一比安基恒等式。该张量与 *Weitzenb¨ock* 曲率张量 [16] 密切相关；二者仅相差一个因子2:

$$\frac{\mathbf{g}^{p-1}\mathbf{Ric}}{(p-1)!}-2\frac{\mathbf{g}^{p-2}\mathbf{R}}{(p-2)!}.$$

3.1. 的正性性质 p**-曲率**。正如 [18], 中所解释的，在满足外科手术稳定性、具有关于笛卡尔积的理想性质且享有纤维丛性质的曲率条件中，有些尤其微妙，值得特别关注。这三种性质是将几何分类问题转化为拓扑问题的基础。这一视角在一定程度上解释了为何这些曲率一直备受关注，并得到了广泛研究，例如见 [9, 11, 4, 6]。

外科手术稳定性已在 [11]中得到确立。下面我们证明，紧流形上的 ${}^*\mathbf{R}^*_p$ 截面曲率正性 s_p 满足纤维丛性质，因此也满足理想性质。

3.2. **纤维丛性质**。

定理 3.3. 设 M 为紧流形，且 $\pi:(M,g)\to(B,\check{}g)$ 为一个具有全测地纤维 F_x, $x\in B$ 的黎曼浸没。假设对于某个 $p\ge 0$，有维数 $F_x\ge p+2$。若纤维上的诱导度量具有正 p曲率，则全空间 M 存在一个具有正 p曲率的黎曼度量。

这一结果推广了 [10] 的定理 2.2 和 [11], 的引理 3.2，后者对纤维施加了额外假设。

证明。 我们考虑 g 的典范变分 g_t ，它通过将垂直方向上的度量按因子 t^2 重新缩放而得到。我们证明存在 $t>0$ ，使得 g_t 的 p-曲率为正。

g_t 的所有曲率不变量均以 t为指标，而赋予诱导度量的纤维的不变量则用帽号标记。当 $t=1$时，我们省略指标 t 。

设 P是 M中的一个切 p平面。存在张成 P的 g_t-标准正交向量 $\{E_1,\dots,E_p\}$，以及 g_t-标准正交的垂直向量 U_i和水平向量 X_i，使得

$$E_i=\cos(\theta_i)U_i+\sin(\theta_i)X_i,\qquad \theta_i\in[0,\pi/2].$$

角 θ_i 是 P的主角（或 Jordan 角）。

根据黎曼浸没的 O'Neill 公式（见 [2] 第 9 章或 [9]第 2 章）， g_t 的截面曲率满足

$$K_t(E_i,E_j)=\frac{\cos^2(\theta_i)\cos^2(\theta_j)}{t^2}\,\hat{K}(U_i,U_j)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right).$$

因此，标量曲率和 Ricci 曲率满足 [12]

$$\mathbf{Scal}_t=\frac{1}{t^2}\hat{\mathbf{Scal}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right),\qquad \mathbf{Ric}_t(E_i,E_i)=\frac{\cos^2(\theta_i)}{t^2}\hat{\mathbf{Ric}}(tU_i,tU_i)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right).$$

利用公式（12），我们得到

$$\begin{aligned}(s_p)_t(P)&=\mathbf{Scal}_t-2\sum_{i=1}^{p}\mathbf{Ric}_t(E_i,E_i)+2\sum_{1\le i<j\le p}K_t(E_i,E_j)\\&=\frac{1}{t^2}\hat{\mathbf{Scal}}-2\sum_{i=1}^{p}\frac{\cos^2(\theta_i)}{t^2}\hat{\mathbf{Ric}}(tU_i,tU_i)+2\sum_{1\le i<j\le p}\frac{\cos^2(\theta_i)\cos^2(\theta_j)}{t^2}\hat{K}(U_i,U_j)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

由于 $\theta_i\in[0,\pi/2]$ ，且该表达式关于每个 $\cos^2(\theta_i)$ 都是线性的，因此其最小值在立方体的角点处取得，其中每个 θ_i 都等于 0 或 $\pi/2$。

如果所有的 $\theta_i=0$，那么对于足够小的 t,

$$(s_p)_t(E_1,\dots,E_p)=\frac{1}{t^2}\hat{s}_p(tU_1,\dots,tU_p)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)>0.$$

在一个恰有 k 个角度等于 0、其余 $p-k$ 个等于 $\pi/2$ 的一般角点处，可得

$$(s_p)_t = \frac{1}{t^2}\hat{s}_k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) > 0,$$

当 t 足够小时。由于 $s_p > 0$ 对 $0 \le k < p \le n-2$ 蕴含 $s_k > 0$，证明完成。□

注3.3。 当正性被 p-曲率的负性取代时，上述定理仍然成立。

定理 3.4（在 A 下消失的属） $s_2 \ge 0$）。 设（M^n, g）是一个维数为 $n = 4k$ 且具有非负2-曲率 $s_2 \ge 0$ 的闭自旋流形。那么

$$\hat{A}(M) = 0.$$

证明。 等式（6）给出$\mathbf{c}^2(^*\mathbf{R}_2^*) = (n-3)(n-2)^*\mathbf{R}_0^*$，因此

$$\mathbf{Scal} = \frac{1}{(n-2)(n-3)} \sum_{i,j} s_2(e_i, e_j),$$

其中 $\{e_i\}$ 是 T_pM 的标准正交基。因此 $s_2 \ge 0$ 蕴含**标量曲率** ≥ 0。

若 **标量曲率** $\not\equiv 0$，则在某一点有 **标量曲率** > 0 。由 Kazdan–Warner定理，度量可以变形为处处具有正标量曲率的度量；由此根据 ˆ Lichn’erowicz 定理可知 $A(M) = 0$。

若 **标量曲率** $\equiv 0$，则上述恒等式推出 $s_2 \equiv 0$。由推论 2.2，流形 $(M,\ g)$ 是平坦的。由 Bieberbach定理， M 存在一个平坦环面 T^{4k} 对其进行有限覆盖。由于 ˆ$A(T^{4k}) = 0$，且 ˆA-亏格在有限覆盖下具有乘法性，结论得证。□

下面的例子表明，在假设 **里奇曲率** ≥ 0 下，结论不成立。

例3.1 (非负 Ricci 曲率并不意味着 $A = 0$)。 设 X 为一个 *K3*曲面。ˆ则 X 是自旋流形，并存在 *Ricci*平坦的 *K¨ahler* 度量，因此 $\mathbf{Ric} \ge 0$，而 $A(X) = 2 \neq 0$。对于任意 $m \ge 1$，考虑乘积

$$M = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{m \ \ factors},$$

赋予乘积度量。由于每个因子都是 *Ricci*平坦的，因此有 $\mathbf{Ric}_M \equiv 0$。另一方面， A-属的乘法性给出

$$\hat{A}(M) = \hat{A}(X)^m = 2^m \neq 0.$$

ˆ因此，存在满足 **里奇曲率** ≥ 0 但 $A \neq 0$的闭自旋流形。特别地，这样的流形不可能具有非负2曲率的黎曼度量。

注3.4 （与标量曲率消失结果的比较）。 众所周知，在ˆ紧致自旋流形上，标量曲率为正意味着 A–亏格消失。在条件 $s_2 \geq 0$ 下得到的消失结果在性质上有所不同，因为2–曲率是与四阶张量 ${}^*\mathbf{R}_2^*$ 相关的截面曲率，其包含的信息严格多于标量曲率或里奇曲率。这特别表明，高秩曲率条件能够产生仅靠里奇缩并无法捕捉的拓扑后果。

4. A higher index Gravity of Lovelock

David Lovelock 在 1971 [20] 提出了爱因斯坦场方程在维数 $n > 4$ 中的一种推广，仅通过修改引力部分来实现。在 Lovelock 理论中，物质的耦合方式与广义相对论完全相同。Lovelock 场方程写为

$$\sum_k \alpha_k T_{2k} = c(n)T. \tag{14}$$

这里，右侧的 T 是应力-能量 **(0，2)** 张量（与广义相对论中的相同），由物质作用量导出。求和遍历整数 $k \geq 0$。其中， $T_0 = \mathbf{g}$ （度量张量）， T_2 是爱因斯坦张量，而对于 $4 \leq 2k < n$，高阶张量 T_{2k} 是 Lovelock 张量。对于 $2k \geq n$，有 $T_{2k} = 0$。系数 α_k 和 c（n）为常数。

4.1. Lovelock 张量与 (p, q)-曲率张量。 前几节引入的曲率张量自然地出现在高维引力的背景下。具体而言，Lovelock引力理论是通过对由黎曼曲率张量构造的高阶曲率张量进行缩并而得到的。本节将在双

形式框架下介绍 Lovelock 张量以及更广泛的一类曲率张量，并展示这些对象如何自然地导出 Love- lock 引力场方程的高指标形式。

对于 $2 \le 2q \le n$，令 R^q 表示黎曼曲率张量 R 的 q 重外积。该张量有时称为 $2q$-Thorpe 张量，或 $2q$-高斯–克罗内克曲率张量 [25, 8]。它是一个 $(0, 4q)$ 阶协变张量，其分量为

$$\mathbf{R}^{q}_{i_1,\dots,i_{2q},j_1,\dots,j_{2q}} = \frac{1}{4^k}\delta^{a_1\cdots a_{2q}}_{i_1\cdots i_{2q}}\delta^{b_1\cdots b_{2q}}_{j_1\cdots j_{2q}}\prod_{\ell=1}^{q}\mathbf{R}_{a_{2\ell-1}a_{2\ell}b_{2\ell-1}b_{2\ell}}.$$

4.1.1. *Lovelock* 张量。 *</style}*对于，*Lovelock* 张量 由 阶高斯–克罗内克曲率张量 R^q 按照与通常的 4 阶黎曼曲率张量 $\mathbf{R}$导出爱因斯坦张量相同的方式得到。更确切地说，它们由 [14, 19] 给出

$$T_{2q} = \frac{\mathbf{c}^{2q}\mathbf{R}^q}{(2q)!}\mathbf{g} - \frac{\mathbf{c}^{2q-1}\mathbf{R}^q}{(2q-1)!}. \tag{15}$$

这些是对称且散度为零的 (1,1) 双形式。其分量为

$$(T_{2q})_{ij} = \frac{1}{((2q)!)^2}\sum_{\substack{A,\,B\\|A|=|B|=2q}}\delta^{Ai}_{Bj}\mathbf{R}^q_{(A,B)}.$$

这里，求和遍及所有长度为 $2q$ 的多重指标 A, B。

对于 $q = 0$，我们设定 $T_0 = \mathbf{g}$。对于 $q = 1$，我们得到通常的爱因斯坦张量。

对于 $q = 2$，张量

$$T_4 = \frac{\mathbf{c}^4R^2}{4!}\mathbf{g} - \frac{\mathbf{c}^3\mathbf{R}^2}{3!}$$

由 8 阶高斯–克罗内克曲率张量 R^2 缩并得到。我们将在下一个命题中证明，T_4 也可以通过缩并一个 4 阶曲率张量得到，即张量 $\mathbf{R} \circ {}^*\mathbf{R}^*_2$，其中 ${}^*\mathbf{R}^*_2$ 是黎曼张量的广义双重对偶，而 $\circ$ 表示双形式的复合积。具体而言，我们有如下结论。

命题 4.1。 设 ${}^*\mathbf{R}^*_2$ 为表示黎曼张量广义双重对偶的$(2，2)$ 双形式。那么，洛夫洛克张量 T_4 可通过对$(2，2)$ 双重

形式 $\mathbf{R}\circ{}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*}$ 收缩得到，具体如下：

$$T_4=\frac{1}{2}\mathbf{c}^2(\mathbf{R}\circ{}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*})\,\mathbf{g}-2\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ{}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*}). \tag{16}$$

上述命题可由以下两个引理直接推出。

引理 4.2. 设 h 为任意对称的$(1,1)$ 双形式，则有

$$\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ\mathbf{g}h)=\iota_h\mathbf{R}+\mathbf{Ric}\circ h. \tag{17}$$

这里， ι_h 表示双形式的内积（见 $[13,\,17]$）。

。**注 4.1.** 我们指出， $\iota_h\mathbf{R}=R$ 是第二类黎曼张量。

证明. 设 k 为任意 (1,1) 双形式。利用双形式复合积和内积的代数性质，我们计算得

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ\mathbf{g}h),k\rangle&=\langle\mathbf{R}\circ\mathbf{g}h,\mathbf{g}k\rangle=\langle\mathbf{R},\mathbf{g}k\circ\mathbf{g}h\rangle\\&=\langle\mathbf{R},\mathbf{g}(k\circ h)+kh\rangle=\langle\mathbf{cR},k\circ h\rangle+\langle\mathbf{R},kh\rangle\\&=\langle\mathbf{Ric}\circ h,k\rangle+\langle\iota_h\mathbf{R},k\rangle.\end{aligned}$$

在 第三个等式中，我们使用了 Greub–Vanstone 恒等式 $\mathbf{g}k\circ\mathbf{g}h=\mathbf{g}(k\circ h)+kh$. □

下一个引理给出了一个一般 Lanczos 恒等式 [19,公式 (11)] 的另一种简洁形式。

引理 4.3。 设 ${}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*}$ 是表示黎曼张量广义双重对偶的 $(2,2)$ 双形式。则有

$$\mathbf{c}^3\mathbf{R}^2=12\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ{}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*}). \tag{18}$$

特别地，$\mathbf{c}^4\mathbf{R}^2=12\mathbf{c}^2(\mathbf{R}\circ{}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*})$。

证明。 回想一下，公式 (10) 给出 ${}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*}=\mathbf{R}\ -\mathbf{g}$ **里奇曲率** $+\frac{1}{4}\mathbf{g}^2$ **标量曲率**。由此可得

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ{}^{*}\mathbf{R}_{2}^{*})&=\mathbf{c}\left(\mathbf{R}\circ\mathbf{R}-\mathbf{R}\circ\mathbf{gRic}+1/2\mathbf{R}.\mathbf{Scal}\right)\\&=\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ\mathbf{R})-\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ\mathbf{gRic})+1/2\mathbf{c}(\mathbf{R}.\mathbf{Scal})\\&=\mathbf{c}(\mathbf{R}\circ\mathbf{R})-\iota_{\mathbf{Ric}}\mathbf{R}-\mathbf{Ric}\circ\mathbf{Ric}+1/2\mathbf{Ric}.\mathbf{Scal}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{c}^3\mathbf{R}^2}{3!}\right).\end{aligned}$$

在最后一步中，我们使用了 Lanczos 恒等式 [19, 公式 (11)] 的推广。在前一步中，我们使用了前面的引理，它表明 **c(R ∘g 里奇曲率) $= \iota_{\mathbf{Ric}}\mathbf{R}$ + 里奇曲率 ∘里奇曲率**。□

4.1.2. (p, q)-曲率张量。

定义 4.2 ([13])。 对于整数 $1 \leq q \leq \frac{n}{2}$和 $0 \leq p \leq n-2q$，这里将(p, q)-曲率张量记为 $R^{(p,q)}$，它是一个$(0, 2p)$ 协变张量，其分量由下式给出

$$\mathbf{R}^{(p,q)}_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_p} = \frac{1}{((2q)!)^2} \sum_{\substack{A,\,B \\ |A|=|B|=2q}} \delta^{Ai_1,\dots,i_p}_{Bj_1,\dots,j_p} \mathbf{R}^q_{(A,B)}.$$

这里的求和遍历所有长度为 $2q$ 的多重指标 A, B。

通过采用与命题 2.1 的证明中完全类似的处理，可得到以下无指标表述:

$$\mathbf{R}^{(p,q)} = \frac{1}{(n-2q-p)!} * \big(g^{n-2q-p}\mathbf{R}^q\big), \tag{19}$$

或者等价地，利用恒等式 $*\,\mathbf{g}^r * = \mathbf{c}^r$,

$$\mathbf{R}^{(p,q)} = \frac{1}{(n-2q-p)!}\, \mathbf{c}^{n-2q-p}(*\,\mathbf{R}^q\big), \tag{20}$$

事实证明，张量$\mathbf{R}^{(p,q)}$ 也可以通过直接缩并张量R^q得到。实际上， [13] 的公式（15）表明:

$$\mathbf{R}^{(p,q)} = \sum_{r=\max\{0,2q-p\}}^{2q} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\mathbf{g}^{p-2q+r}}{(p-2q+r)!} \mathbf{c}^r(R^q). \tag{21}$$

对于 $p = 0$ 和 $2 \leq 2q \leq n$，张量$\mathbf{R}^{(0,q)}$ 是标量函数，并且除一个常数因子外，等于（M, g）的 Gauss–Bonnet 曲率。特别地，当 n 为偶数时，$\mathbf{R}^{(0,n/2)}$ 是 Gauss–Bonnet 被积函数。

对于 $q = 1$和 $0 \leq p \leq n-2$，有$\mathbf{R}^{(p,1)} = {}^*\mathbf{R}^*_p$，它与上文介绍的黎曼张量广义双重对偶相同。

对于 $p = 1$和 $2q \leq n$，$\mathbf{R}^{(1,q)}$与 $2q$-洛夫洛克张量 T_{2q}相同。

曲率张量 $\mathbf{R}^{(p,q)}$ 是对称的（p，p）双形式，并满足第一比安基恒等式。一般而言，它们不满足第二比安基恒等式，但始终

无散度。此外，它们关于缩并满足以下遗传性质（对于 $p \geq 1$）：

$$\mathbf{c}\mathbf{R}^{(p,q)} = (n-2q-p)\,\mathbf{R}^{(p-1,q)}. \tag{22}$$

特别地，$(p-1)$ 次缩并$\mathbf{R}^{(p,q)}$ 生成 $2q$阶洛夫洛克张量 T_{2q}，而 p 次缩并则生成 $(2q)$-Gauss–Bonnet 曲率 h_{2q}:

$$\mathbf{R}^{(p,q)} \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{R}^{(p-1,q)} \xrightarrow{\mathbf{c}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathbf{R}^{(1,q)} = \textbf{Lovelock tensor} \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathrm{GB\,curvature}.$$

由于这一遗传性质，我们将$\mathbf{R}^{(p,q)}$称为 $(2q)$ 阶洛夫洛克张量 T_{2q}的 p-父张量 。

注 4.3. 文献 [19] 中使用张量$\mathbf{R}^{(p,q)}$ 来定义所谓的 $2q$-*Thorpe* 度量和$2q$-反 *Thorpe* 度量。这些概念是爱因斯坦条件和共形平坦性的推广。具体而言，若流形 $n = 2p$ 的维数为偶数，则命题 *2.8* 有如下类似结论:

- 自对偶条件 $*(\mathbf{R}_{(p,q)})$ $=\mathbf{R}_{(p,q)}$ 等价于该流形为$(2q)$-*Thorpe* 流形。
- 反自对偶条件 $*(\mathbf{R}_{(p,q)})$ $= -\mathbf{R}_{(p,q)}$ 等价于流形是$(2q)$-反 *Thorpe* 流形。

4.2.母 Lovelock 场方程。 回顾 $(2q, 2q)$ 双形式 R^q [13] 的正交分解:

$$R^q = \omega_{2q} + \mathbf{g}\omega_{2q-1} + \cdots + \mathbf{g}^{2q-2}\omega_2 + \mathbf{g}^{2q-1}\omega_1 + \mathbf{g}^{2q}\omega_0,$$

其中每个 ω_i 都是无迹的 (i, i) 双形式。

[13] 的推论 **4.4** 表明，对于 $n \geq 2q$ 和 $p \leq n-2q$，有

$$(n-2q-p)!\,\mathbf{R}^{(p,q)} = *\big(g^{n-2q-p}\mathbf{R}^q\big) = \sum_{i=0}^{\min\{2q,p\}} (-1)^i \frac{(n-p-i)!}{(p-i)!}\mathbf{g}^{p-i}\omega_i. \tag{23}$$

特别地，对于 $p = 1$，我们得到

$$(n-2q-1)!\,T_{2q} = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i \frac{(n-1-i)!}{(1-i)!}\mathbf{g}^{1-i}\omega_i. \tag{24}$$

上述分析表明，洛夫洛克场方程 (14) 仅保留了张量 R^q 所编码的有限部分曲率信息。更准确地说，除了 R^q 的正交分解中出现的分量 ω_0 和 ω_1 之外，所有更高阶的无迹分量都会在定义洛夫洛克张量 T_{2q} 的缩并过程中被系统地消去。从这一视角来看，洛夫洛克引力可以被视为一种理论，其中 R^q 的大多数曲率分量并不对引力

我们看到，只有 ω_0 和 ω_1 的$\mathbf{R}^q$ 分量对 T_{2q}有实质性贡献；其余分量在缩并过程中消失了。特别是，这些分量并未对洛夫洛克场方程 (14) 作出实质性贡献。

为了确保$\mathbf{R}^q$ 的所有分量都对场方程作出实质性贡献，自然可以用洛夫洛克张量的某个 p-母张量来替代它。下面的命题表明，当且仅当整数 p 满足$p \geq \min\{n-2q, 2q\}$.时，这一要求才得以满足。

命题 4.4. 当且仅当 $p \geq \min\{2q, n-2q\}$时，$\mathbf{R}^q$ 的所有分量 ω_i 都对$\mathbf{R}^{(p,q)}$ 作出实质性贡献。

证明。 对于满足 $2q > n/2$的维数，必须谨慎处理，因为在这种情况下，$\mathbf{R}^q$ 的某些分量会因维数原因而消失，因此即使在 R^q 本身中也不作贡献（例如，在3维中$\mathbf{R}$ 的外尔分量消失）。

首先假设 $n < 4q$。那么 $n - 2q < 2q$，并且有 $\mathbf{R}^q = \sum_{i=0}^{n-2q} \mathbf{g}^{2q-i}\omega_i$；参见[15, 命题 2.1]。其余分量 ω_i 在 $i > n-2q$ 时因维数原因而消失。在这种情况下，(23) 等价于

$$(n-2q-p)!\,\mathbf{R}^{(p,q)} = *\big(g^{n-2q-p}\mathbf{R}^q\big) = \sum_{i=0}^{\min\{n-2q,p\}} (-1)^i \frac{(n-p-i)!}{(p-i)!}\mathbf{g}^{p-i}\omega_i. \tag{25}$$

由此可知，在这种情况下，该陈述成立当且仅当 $p \geq n-2q$。

接下来，假设 $n \geq 4q$。那么，只要$p \geq 2q$，该陈述便可直接由 (23) 得出。□

我们强调两个主要情形。

命题 4.5。• 对于 $n \geq 4q$，有

$$\mathbf{R}^q = \sum_{i=0}^{2q} \mathbf{g}^{2q-i}\omega_i, \text{ and } \mathbf{R}^{(2q,q)} = \sum_{i=0}^{2q} (-1)^i \binom{n-2q-i}{2q-i} \mathbf{g}^{2q-i}\omega_i.$$

特别是， ω_i 中的所有分量均在$\mathbf{R}^q$ 中保留下来。 此外，这两个张量具有相同的无迹部分 ω_{2q}。

• 对于 $n < 4q$，有

$$\mathbf{R}^q = \sum_{i=0}^{n-2q} \mathbf{g}^{2q-i}\omega_i, \text{ and } \mathbf{R}^{(n-2q,q)} = \sum_{i=0}^{n-2q} (-1)^i \frac{(2q-i)!}{(n-2q-i)!} \mathbf{g}^{n-2q-i}\omega_i.$$

特别是， ω_i 中的所有非零分量均在$\mathbf{R}^q$ 中保留下来$\mathbf{R}^{(n-2q,q)}$.

总之，为使 R^q 的所有分量都能在场方程中有效发挥作用，在 $2q \leq n/2$的情况下，可以在 Lovelock 方程中用其母张量$\mathbf{R}^{(2q,q)}$ 替换 T_{2q}；在 $2q > n/2$的情况下，则用母张量 $\mathbf{R}^{(n-2q,q)}$ 替换。

在更高的指标层级上写出完整引力场方程的一种可能方式是，在该方程中， R^q 的所有分量 ω_i 都能有效发挥作用：

$$\sum_{0 \leq 2q \leq n/2} \alpha_{2q} \mathbf{R}_{(2q,q)} + \sum_{n \geq 2q > n/2} \alpha_{2q} \mathbf{R}_{(n-2q,q)} = \chi \mathbb{T}.$$

然而，上述方程的左边并非齐次，因为它将不同阶数的张量相加。另一种做法是取一个共同的更高阶 d-母体，使所有项都成为固定的 (d, d) 双形式：

$$\sum_q \alpha_q \mathbf{R}_{(d,q)} = \chi \mathbb{T}.$$

这里， $d = d(n)$ 是一个仅取决于维数 n 的常数。根据命题 4.4，它被选为集合中的最大值

$$\{\min\{2q, n-2q\} : 2 \leq 2q < n\}.$$

不难验证， $d(n)$可表示为

$$d(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ odd}, \\ n/2 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{n-2}{2} & n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

References

[1] Belkhirat A., Labbi M. L., 关于双形式的复合与外积以及 p-纯流形，《土耳其数学杂志》，第43卷，第1期（2019年），539–560页。[2] Besse A. L.,《爱因斯坦流形》，施普林格，柏林–纽约（1987年）。[3] Bivens I., 曲率算子与特征类，《美国数学会会刊》269（1982年），301–310页。[4] Botvinnik B., M. L. Labbi, 具有正 p-曲率的高连通流形，《美国数学会会刊》366（2014年），3405–3424页。[5] Brendle S., Hirsch S. , Johne F., Geroch 猜想的一种推广，《纯粹与应用数学通讯》第77卷第1期（2024年），441–456页。[6] Burkemper, M., Searle, C., Walsh, M., 正 (p,n)-中间标量曲率与配边，《几何与物理学杂志》第181卷，2022年11月。[7] Goulart E., Ottoni J. E., 关于 (2, 2) 双形式的代数结构的若干注记，《现代物理几何方法国际期刊》第22卷第08期（2025年）。[8] Kulkarni, R. S. 关于比安基恒等式，《数学年刊》199卷，175–204页（1972年）。[9] Labbi, M. L., 正 p-曲率黎曼流形，博士论文，蒙彼利埃大学出版物（1995年）。[10] Labbi, M. L. 几乎单李群的作用与 ′的正性，图卢兹科学学院年刊，第5卷第2期，263–276页（1997年）。[11] Labbi, M. L., 手术下 p-曲率正性的稳定性与具有正爱因斯坦张量的流形，《全球分析与几何年刊》15卷第4期，299–312页（1997年）。[12] Labbi, M. L., 关于具有正爱因斯坦曲率的紧流形，《几何专论》108卷，205–217页（2004年）。[13] Labbi M. L., 双形式、曲率结构与 (p, q)-曲率，《美国数学会会刊》357卷第10期，3971–3992页（2005年）。[14] Labbi, M. L., 高斯–博内曲率的变分性质，《变分演算》32卷，175–189页（2008年）。[15] Labbi M. L., 关于广义爱因斯坦度量，《巴尔干几何及其应用杂志》第15卷第2期，61–69页（2010）。[16] Labbi M., 关于 Weitzenb ¨ck 曲率算子，《数学新闻》288卷（第4期），402–411页（2015年）。[17] Labbi M. L., Hodge-de Rham 与 Lichn ´erowicz 拉普拉斯算子，arXiv:2405.12828 [math.DG] （2024年）。[18] Labbi M. L., 关于正标量曲率紧流形的分层，《拓扑与分析杂志》（2024年），1–22页。[19] Labbi M. L., 关于若干临界黎曼度量与 Thorpe 型条件，（2025）arXiv:2505.06990[math.DG[20] Lovelock D., 爱因斯坦张量及其推广，《数学物理学杂志》12(3)，498–501页（1971年）。[21] Misner C. W., Thorne K. S. 和 Wheeler J. A.,《引力论》，普林斯顿大学出版社（1973年）。[22] F. Moulin, 爱因斯坦引力场方程的推广，《欧洲物理学杂志 C》77（2017年）878，arXiv:2405.03698

[23]F. Moulin，四指标引力场论中的*n*维*Weyl*共形张量，arXiv:2409.16335v3（2025）[24] Senovilla J. M. M.，超能量张量，Class. Quantum Grav. 17 2799（2000）。[25] Thorpe J. A.，关于*Gauss-Bonnet*积分的一些评述，J. Math. Mech. 18(8)（1969）。[26] Zakir, Z.，引力与物质的四指标能量-动量张量 TPAC Theor.Phys. Astro- phys. Cosmol. 5, 1（2010）

Department of Mathematics, College of Science, University of Bahrain, 32038, Bahrain.
电子邮件地址：mlabbi@uob.edu.bh