arXiv:2601.02743v1 [math.NT] 6 Jan 2026

数域上代数簇中的多项式型例外单位计数

Chen Lin[1],Kaihan Tang[2*]

[1,2]南京大学数学学院，南京 210093，中国[1]
chen.lin@smail.nju.edu.cn， [2]kaihantang@smail.nju.edu.cn

摘要

以往关于例外单位的研究主要集中于有理整数环或抽象有限环，且通常局限于线性或二次约束。本文将多项式型例外单位的概念推广到任意代数数域的整数环。我们研究一般代数簇上这类多项式型例外单位的数量。通过运用中国剩余定理和亨泽尔提升法，在良约化假设下，我们推导出光滑闭子概形上例外单位数量的精确计数公式。此外，利用朗-韦尔不等式，我们为计数函数建立了一个渐近估计。特别地，我们证明，对于次数至多为二的簇，误差项可以得到显著改善，从而获得更精确的渐近界。

2020数学主题分类：*11D79*，*14G15*。
关键词：例外单位，整数环，概形，亨泽尔方法，朗-韦尔不等式

1 引言

例外单位 （*ex*单位的简称）这一概念，定义为环 R 中满足 $1-u$ 也是单位元的单位元 u ，最早由 Nagell [11] 于1969年提出，用于研究三次丢番图方程。此后，该概念在代数数论中得到广泛应用，最著名的例子是 Lenstra 关于欧几里得数域的研究[8]。除了这些应用之外，ex单位的计数函数本身也具有丰富的算术结构。Harrington 和 Jones [6] 研究了该计数函数在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$上的迭代动力学行为。

*通讯作者。

不少研究致力于统计满足特定约束的 ex单位的数量。Sander [13] 得到了 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中满足线性同余式 $x_1+x_2\equiv c$ （模 n），且 x_1 和 x_2 均为 ex 单位的解的数量公式。随后，Yang 和 Zhao [14], 将其推广到 k 个 ex单位之和，Miguel [9]进一步将结果推广到任意有限交换环。除了线性和之外，研究者也尝试处理非线性约束：Mollahajiaghaei [10]推导出了满足二次同余式 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2\equiv c$（模 n），且每个 x_i 均为例外单位的解的数量公式；Feng 和 Hong [4]则在给定正整数 e的条件下研究了 $x_1^e+x_2^e+\cdots+x_k^e\equiv c$（模 n）。

Anand、Chattopadhyay 和 Roy [1] 将这一概念推广为“f多项式-ex单位”。对于多项式 $f(X)\in\mathbb{Z}[X]$ 和整数 $n\geq 2$，若元素 $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 满足 $\gcd(f(a),n)=1$，则称其为 ***f-ex*单位** 。正如上文所述，这一推广自然引发了若干关于 f-ex单位计数函数的研究，其研究方向与经典 ex单位的计数函数类似，参见 [1, 2, 15, 3]。然而，与经典情形不同的是，这些研究仅关注 f-ex单位的和集。

以往研究主要集中于有理整数环 $\mathbb{Z}$ 或抽象有限环，且研究大多局限于线性约束（即和集）。Miguel [9]在研究有限环时明确指出，这些计数问题可以推广到代数数域的整数环。另一个自然且重要的问题是：我们能否不再考虑单个线性方程，而是确定一般多项式方程或由多项式方程组定义的代数簇上 f-ex单位的计数公式?

本文将这些结果推广到数域的情形。我们的主要结果（定理 1.2）给出了簇 X modulo 理想 $\mathfrak{n}$上 f-ex单位的计数公式。

为了准确陈述我们的主要结果，我们首先将 f-ex单位的定义推广到代数数域的情形。

定义1.1. 设 K 是一个代数数域， $\mathcal{O}_K$ 是其整数环，且$\mathfrak{n}$是 $\mathcal{O}_K$的非零整理想。对于非恒定多项式 $f(X)\in\mathcal{O}_K[X]$，若元素 $\alpha\in\mathcal{O}_K/\mathfrak{n}$满足 $f(\alpha)$是环 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{n}$中的单位元，则称其为模 $\mathfrak{n}$的 ***f-ex*单位**，或称为 $(f,\mathfrak{n})$-***ex*单位**。 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{n}$ 中所有 $(f,\mathfrak{n})$-*ex*单位的集合记为 $\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}$。

将 f-ex单位的定义推广到整数环后，我们现在转向满足多项式方程组的解的计数问题。我们使用概形的语言，这简化了主要定理的陈述和证明。

对于 $\mathcal{O}_K$ 上的 n 维仿射空间 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的闭子概形 X ，我们定义如下集合：

$$\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)=X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{n})\cap\prod_{i=1}^{n}\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}},$$

其中 $X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{n})$ 表示 X 的 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{n}$-点。

我们的主要结果为该集合的基数给出了一个显式计数公式，适用于闭子概形 X 满足光滑性条件的情形。

定理 1.2。给定一个数域 K，其整数环为 $\mathcal{O}_K$，设 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 为一个多项式，X 为 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的光滑闭子概形，且满足 $\operatorname{codim}(X) = d$。对于 $\mathcal{O}_K$ 的非零整理想 $\mathfrak{n}$，若对每个素理想 $\mathfrak{p}|\mathfrak{n}$，$X$ 在 $\mathfrak{p}$ 处具有良约化，则有

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) = (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}} \left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) - \#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}} \right),$$

其中 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) \colon \prod_{i=1}^n \bar{f}(x_i) = 0\}$，$\mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}$ 表示 $K/\mathbb{Q}$ 中的范数映射，f 是 f 在投影 $\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 下的像。

虽然定理 1.2 为 $\#\mathcal{E}_{f,\,\mathfrak{n}}(X)$ 建立了一个公式，但该公式依赖于局部点计数 $\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ 和交集大小 $\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},\ X)$，它们会随素数 $\mathfrak{p}$ 不规则地变化。利用朗-韦尔不等式，我们可以为 $\#\mathcal{E}_{f,\,\mathfrak{n}}(X)$ 推导出一个仅取决于 X 的几何不变量和理想 $\mathfrak{n}$ 的绝对范数的界。

定理 1.3。设 K 为一个带整数环 $\mathcal{O}_K$ 的数域，令 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 为一个多项式。设 X 是 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的光滑闭子簇，且 $\operatorname{codim}(X) = d$，其在 K 上几何不可约。对于 $\mathcal{O}_K$ 的非零整理想 $\mathfrak{n}$，若对任意素理想 $\mathfrak{p}|\mathfrak{n}$，$X$ 在 $\mathfrak{p}$ 处具有良约化，则有

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) = (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d} \exp\left(O\left(\frac{\log \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})}{\log\log \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})} \right) \right).$$

O-项中的隐含常数仅依赖于 K、X 和 f。

尽管定理 1.3 为一般的光滑簇提供了一个渐近界，但当簇 X 的次数较低时，误差项可以得到显著改善。正如前文所述，先前的研究主要集中于线性和二次同余，因此我们为次数不超过 2 的簇推导出以下更精确的估计。

定理 1.4。设 K 为一个带整数环 $\mathcal{O}_K$ 的数域，令 $f \in \mathcal{O}_K[x]$ 为一个多项式。设 X 是 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的光滑闭子簇，且 $\operatorname{codim}(X) = d$，并且$\deg X \leq 2$，其在 K 上几何不可约。对于 $\mathcal{O}_K$ 的非零整理想 $\mathfrak{n}$，若对任意素理想 $\mathfrak{p}|\mathfrak{n}$，$X$ 在 $\mathfrak{p}$ 处具有良约化，则有

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})^{n-d} \left(\log \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})\right)^{O(1)}.$$

O项中的隐含常数仅依赖于 K、X 和 f。

我们的方法依赖于戴德金整环中由中国剩余定理导出的计数函数的乘法结构。对于局部情形下的计数函数，我们采用亨泽尔型技巧，将解从剩余域 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 提升到 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^k$。为了建立 $\#\mathcal{E}_{f,\,\mathfrak{n}}(X)$ 的渐近估计，我们使用著名的朗-韦尔不等式来控制由簇上的局部点产生的误差项。

本文结构安排如下。

在第 2 节中，我们给出定理 1.2 的证明。论证首先通过中国剩余定理证明计数函数 $\#\mathcal{E}_{f,\,\mathfrak{n}}(X)$ 的乘法性。随后，我们利用亨泽尔提升推导出这些局部计数公式。为展示计数公式的具体应用，我们在本节末尾给出一个详细示例，涉及二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ 上的给定簇 X 。

在第 3 节中，我们重点研究理想 $N(\mathfrak{n})$ 的范数趋于无穷时 $\#\mathcal{E}_{f,\,\mathfrak{n}}(X)$ 的渐近行为。利用朗-韦尔不等式，我们推导出 $(f,\ \mathfrak{n})$-ex单位数量的一般估计，该估计取决于簇的维数和次数以及 $\mathfrak{n}$ 的绝对范数。此外，我们还研究了 $\deg X \leq 2$ 的特定情形。注意到对于二次簇和线性簇，首项误差项的系数为零，因此我们得到一个更精细的估计，将误差界从 $\exp\left(O\left(\log \mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}) \log\log \mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})\right)\right)$ 改进为 $\exp\left(O(\log\log \mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))\right) = \left(\log \mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})\right)^{O(1)}$。

2 定理 1.2 的证明

本节中，我们运用欧拉分解和亨泽尔提升技巧完成定理 1.2 的证明。此外，我们给出一个具体例子来说明计数公式的应用。

在本文中，对于任意 $f \in \mathcal{O}_K[x_1,\dots,x_m]$，我们用 $\bar{f} \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{n})[x_1,\dots,x_m]$ 表示其模 $\mathfrak{n}$ 约化映射下的像。为简洁起见，我们将用 $f(\alpha)$ 来表示 $\alpha \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{n})^m$ 对应的 $\bar{f}(\alpha)$。

首先，我们证明 $\#\mathcal{E}_{f,\,\mathfrak{n}}(X)$ 是关于 $\mathcal{O}_K$ 的理想的乘法函数。

引理 2.1. 设 $\mathfrak{m}$、$\mathfrak{n}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的满足 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = \mathcal{O}_K$ 的整理想，且 X 是 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的一个子概形。那么我们有

$$\mathcal{E}_{f,\mathfrak{mn}}(X) \cong \mathcal{E}_{f,\mathfrak{m}}(X) \times \mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X).$$

证明。 根据中国剩余定理，我们有一个典范环同构

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{mn} \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{m} \times \mathcal{O}_K/\mathfrak{n}.$$

由于概形的点函子与环的有限直积相容，对于 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的任意子概形，我们有如下双射

$$X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{mn}) \cong X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}) \times X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{n}).$$

在这一对应下， $f(x_i)$ 是 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{mn}$ 中的单位元这一条件，等价于其在 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$ 和 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{n}$ 中的像都是单位元。因此，上述双射限制为下面的双射

$$\mathcal{E}_{f,\mathfrak{mn}}(X) \;\cong\; \mathcal{E}_{f,\mathfrak{m}}(X) \times \mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X),$$

这就证明了该引理。 □

注 2.2。 我们注意到，定理 *1.2* 中所要求的光滑性和良约化条件对于本引理并非必需。这里所确立的乘法性质纯粹是中国剩余定理的环论推论。

设 $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \dots \mathfrak{p}_r^{\alpha_r}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的一个理想，其中 $\mathfrak{p}_1$，……， $\mathfrak{p}_r$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的互异素理想。根据引理 2.1，有 $\mathcal{E}_{f,\ \mathfrak{n}}(X) \cong \prod_{i=1}^{r} \mathcal{E}_{f,\ \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}}(X)$。下面的引理讨论 $\mathfrak{n}$ 是一个素理想的幂时的提升问题。

引理 2.3。 设 X 是 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的光滑闭子概形，且 余维$X = d$；设 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的素理想，使得 X 在 $\mathfrak{p}$ 处有良约化。对于 一个 $\in X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^k)$，该集合

$$\{\mathbf{b} \in X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^{k+1}) : \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \pmod{\mathfrak{p}^k}\}$$

的基数为 $(\mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}$。

^^证明。 设 $\mathcal{O}_K$ 是 $\mathcal{O}_K$ 在 $\mathfrak{p}$ 处的完备化。则 $\mathcal{O}_K$ 是一个离散赋值环^^，其一致化子为 π。对于所有正整数 m，我们有 $\mathcal{O}_K/(\pi^m\mathcal{O}_K) = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^m$。因此，模 $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}$ 的所有计数结论都可以在将 $\mathcal{O}_K$ 替换为其 $\mathfrak{p}$ 进完备化后进行。不失一般性，可假设 $\mathcal{O}_K$ 在 $\mathfrak{p}$ 处完备，因而是一个离散赋值环。令 π 表示 $\mathcal{O}_K$ 的一致化子，即 $(\pi) = \mathfrak{p}$。

令 I 表示 X 的理想。由于 $O_K[x_1, \dots, x_n]$ 是诺特的，理想 I 有限生成。令 $\{g_1, \dots, g_m\}$ 为其生成元集合。

$X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^{k+1})$提升$\mathbf{a}$的所有点都具有形式 $\alpha \equiv \mathbf{a} + \delta\pi^k$(模 π^{k+1})，其中某个$\delta \in (\mathcal{O}_K/(\pi))^n$ ，因为 $\pi^k\delta$ 模 π^{k+1}是良定义的。

令$\mathbf{g}$表示多项式向量$(g_1, \dots, g_m) \in (\mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_n])^m$。考虑方程

$$\mathbf{g}(\mathbf{a} + \delta\pi^k) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{a}) + \mathrm{J}(X)(\mathbf{a})\delta\pi^k \equiv 0 \pmod{\pi^{k+1}},$$

其中，$\mathrm{J}(X)$表示 X的雅可比矩阵。由于$\mathbf{g(a)} \equiv 0 \pmod{\pi^k}$，我们可以写作$\mathbf{g(a)} = \pi^k \mathbf{a}'$ ，其中某个$\mathbf{a}' \in (\mathcal{O}_K/(\pi))^n$。因此，上述方程可简化如下

$$\mathbf{a}' + \mathrm{J}(X)(\mathbf{a})\delta \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

由于 X 是光滑的，余维为$X = d$，且在 $\mathfrak{p}$处有良约化，因此在剩余域 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$上，rank(J($X$)) $=d$。所以有(#($\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$))$^{n-d}$个不同的解。因此，该集合的基数

$$\{\mathbf{b} \in X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^{k+1}) : \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \pmod{\mathfrak{p}^k}\}$$

等于 (#($\mathcal{O}_K/\pi$))$^{n-d}$ =(#($\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$))$^{n-d}$ =(N$^{K/\mathbb{Q}}$($\mathfrak{p}$))$^{n-d}$。 □

现在，我们可以通过归纳应用引理 2.3 中建立的提升性质，推导出素数幂的显式计数公式。

命题 2.4。设 X 是 $\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}$ 的一个余维为 $\mathrm{codim} X = d$ 的光滑闭子概形， $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 的一个素理想，使得 X 在 $\mathfrak{p}$ 处有良约化。对于正整数 e，我们有

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}^e}(X) = (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{(n-d)e} \left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) - \#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}} \right).$$

证明。考虑以下正合列:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^e \longrightarrow \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^e \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \longrightarrow 0.$$

投影 φ 诱导出一个映射

$$\phi : \mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}^e}(X) \longrightarrow \mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}}(X), \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$$

由于 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^e$ 中的元素是单位元当且仅当它在 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 中的像是单位元，因此映射 ϕ 定义良好。

回想一下， X 是光滑的，余维为 $\mathrm{codim} X = d$ ，且在 $\mathfrak{p}$ 处有良约化。通过归纳应用引理 2.3，投影 $X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^e) \longrightarrow X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ 的纤维在任意 $\mathbf{a} \in X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ 上的基数等于 (N$^{K/\mathbb{Q}}$($\mathfrak{p}$))$^{(n-d)(e-1)}$。

对于任意 $\mathbf{a} \in X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$，存在 (N$^{K/\mathbb{Q}}$($\mathfrak{p}$))$^{(n-d)(e-1)}$ 个元素提升 $\mathbf{a}$ 至 $X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}^e)$。由于单位元条件在模 $\mathfrak{p}$ 约化下保持不变，$\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}}(X)$ 中的每个元素在 $\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}^e}(X)$ 中恰有 (N$^{K/\mathbb{Q}}$($\mathfrak{p}$))$^{(n-d)(e-1)}$ 个提升。

因此，我们有

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}^e}(X) = (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{(n-d)(e-1)} \#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}}(X),$$

由于 $\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}}(X) = \#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) - \#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)$，我们有

$$\begin{aligned} \#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}^e}(X) &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{(n-d)(e-1)} (\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) - \#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)) \\ &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{(n-d)e} \left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) - \#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}} \right). \end{aligned}$$

至此，命题 2.4 的证明完成。 □

借助命题 2.4 中建立的素数幂显式计数公式，我们现在可以证明主要结果。

定理 *1.2* 的证明。 设 $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_g^{e_g}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的素理想分解，其中 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_g$ 是 $\mathcal{O}_K$ 中互不相同的素理想。根据引理 2.1，我们有

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) = \prod_{i=1}^{g} \#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{p}_i^{e_i}}(X).$$

根据命题 2.4，我们有

$$\begin{aligned}\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) &= \prod_{i=1}^{g} (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_i))^{(n-d)e_i} \left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i) - \#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}_i, X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}_i))^{n-d}} \right) \\ &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d} \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{n}} \left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) - \#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}} \right).\end{aligned}$$

至此，定理 1.2 的证明完成。 □

在确立一般计数公式后，我们现在给出一个具体例子来展示其应用。在下面的例子中，我们将明确计算涉及的各个局部量，并最终得出特定簇模 $\mathfrak{n}$ 的 f 个 ex单位的精确计数。

例 2.5. 令 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$，其整数环为 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$。我们考虑由圆方程 $x^2 + y^2 = c$ 定义的簇 $X \subset \mathbb{A}^2_{\mathcal{O}_K}$，其中参数为 $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。该簇 X 光滑且几何不可约。令 $f(x) = x - a$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 中的一个多项式。

为确保良约化，我们假设理想 $\mathfrak{n}$ 与$(2c)$ 互素。令 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathcal{O}_K$ 上方的一个素理想，其位于素数 $p \in \mathbb{Z}$ 之上。簇 X 在剩余域 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 上的有理点数由以下著名公式给出

$$\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) - \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}} \right),$$

其中，$\left(\frac{\cdot}{\mathfrak{p}} \right)$ 是广义勒让德符号。

接下来，我们计算交数 $\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)$。集合 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)$ 由 $X(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ 中满足 $x = a$ 或 $y = a$ 的点组成。若 $c - a^2$ 在 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 中不是平方数，则 $\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X) = 0$。若 $c - a^2$ 在 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 中是平方数，则存在 $b \in \mathcal{O}_K$ 使得 $b^2 \equiv c - a^2 \pmod{\mathfrak{p}}$。交集 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)$ 至多包含四个点：(a, b)、$(a, -b)$、(b, a) 和 $(-b, a)$。

这些点的重合情况决定了其确切基数。若 $a^2 - c \equiv 0$(模 $\mathfrak{p}$)，则 $b = -b$，这意味着 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)$ 中有2 个点。若 $2a^2 - c \equiv 0$(模 $\mathfrak{p}$)，则 $b = \pm a$，这意味着 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)$ 中有3 个点。否则，$\mathcal{N}^f(\mathfrak{p}, X)$ 中恰有 *4* 个不同的点。注意，对于任意有理整数 r，$r \equiv 0$(模 $\mathfrak{p}$) 当且仅当 $r \equiv 0$ (模 p)。我们在有理素数上定义函数 $m(p)$ 如下

$$m(p)=\begin{cases}2 & if\ p|(c-a^2),\\ 3 & if\ p|(c-2a^2),\\ 4 & if\ \gcd(p,(c-2a^2)(c-a^2))=1.\end{cases}$$

因此，若 $c-a^2$ 在 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 中是平方数，则有 $\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)=m(p)$；否则为 0。

$c-a^2$ 在剩余域 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 中的二次特征取决于有理素数 p 在 K中的分解行为。若 p 是惰性素数，则 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}=\mathbb{F}_{p^2}$。由于 $\mathbb{F}_p$ 中的每个元素在其二次扩张 $\mathbb{F}_{p^2}$ 中都成为平方数，因此整数 $c-a^2$必定是 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$中的平方数。若 p分裂或分歧，则 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}=\mathbb{F}_p$。在这种情况下， $c-a^2$是否为 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ 中的平方数取决于勒让德符号 $\left(\frac{c-a^2}{p}\right)$。

根据戴德金–库默尔定理 *[12,* 第 *1* 章，命题 *8*，*3],* 有理素数 p 在 $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中的分解由勒让德符号$\left(\frac{-5}{p}\right)$决定。素数 p在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$中分裂，当且仅当 $\left(\frac{-5}{p}\right)=1$，即 $p\equiv 1、3、7、9(\mathrm{mod}\ 20)$。素数 p 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中惰性，当且仅当 $\left(\frac{-5}{p}\right)=-1$，即 $p\equiv 11、13、17、19\,(\mathrm{mod}\,20)$。域 $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ 的判别式为 $d_K=-20$。因此，素数 p 分歧，当且仅当 $p|20$。由于我们假设 p 与2互素，唯一可能的分歧素数是 $p=5$。

根据定理 *1.2*，计数公式为

$$\begin{aligned}\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)=\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})&\prod_{p|N(\mathfrak{n}),\ inert}\left(1-\frac{1+m(p)}{p^2}\right)\\&\times\prod_{p|N(\mathfrak{n}),\ split}\left(1-\frac{\left(\frac{-1}{p}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{c-a^2}{p}\right)+1\right)m(p)}{p}\right)^{\nu_{\mathfrak{n}}(p)}\\&\times\prod_{p|N(\mathfrak{n}),\ ramified}\left(1-\frac{1+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{c-a^2}{p}\right)+1\right)m(p)}{p}\right),\end{aligned}$$

其中 $\nu_{\mathfrak{n}}$ 定义如下

$$\nu_{\mathfrak{n}}(p)=\begin{cases}1 & if\ (p)\nmid\mathfrak{n},\\ 2 & if\ (p)\mid\mathfrak{n}.\end{cases}$$

如例 2.5 所示，$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)$ 的显式公式在很大程度上取决于各个素数的算术性质，例如它们在 K 中的分裂行为以及多项式值的二次特征。因此，局部交项 $\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)$ 的变化不规则，使得精确公式过于复杂，难以分析计数函数的整体增长率。受此观察启发，我们在下一节将注意力转向 $\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)$ 的渐近行为。通过

运用朗-韦尔不等式，我们可以有效控制这些局部因子，并建立一个主要取决于簇 X的几何不变量、而非每个素数特定算术性质的一般界。

3 计数函数的渐近估计

在本节中，我们使用朗-韦尔不等式来近似 $\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)$，其中当 X 在 K 上几何不可约，且所有整除 $\mathfrak{n}$ 的素数对于 X均为良约化时。我们首先陈述朗-韦尔不等式，本节将反复使用该不等式。

引理 3.1 ([7] 定理 1 或 [5] 备注 11.3)。设 $k=\mathbb{F}_q$ 为一个有限域，且 X 是 $\mathbb{A}_k^n$ 的一个子簇，满足 维数$X=r$ 和次数$X=\ell$。则有

$$|\#X(k)-q^r|=(\ell-1)(\ell-2)q^{r-\frac{1}{2}}+O(q^{r-1}).$$

O-项中的隐含常数仅取决于 n、d、r。

利用这一结果，我们证明定理 1.3 如下。

定理 *1.3* 的证明。根据定理 1.2，我们有

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)=(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{n}}\left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})-\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}}\right).$$

回想一下，X 是光滑且几何不可约的，并且对任意素数 $\mathfrak{p}|\mathfrak{n}$，在 $\mathfrak{p}$处都有良约化。利用朗-韦尔不等式，我们得到

$$\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})=\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n-d}+O(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n-d-\frac{1}{2}}).$$

令 $V(f)$ 表示多项式 f 的零点集合。由于 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)=X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})\cap\bigcup_{i=1}^n V(f(x_i))$，若存在一个素理想 $\mathfrak{p}|\mathfrak{n}$，使得 $X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})\subset\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)$，则在 $X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ 上不存在 $(f,\mathfrak{p})$-ex单位。由定理1.2，我们得到平凡情形 $\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)=0$。若 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)$ 是 $X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ 的真子集，则 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)$ 的每个不可约分支的维数至多为 $n-d-1$。另一方面，利用交叉理论中的广义贝祖定理，我们发现 $\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)$ 的不可约分支数有一个仅依赖于 d、n 和 f 的次数的统一常数上界。因此，利用朗-韦尔不等式，我们得到

$$\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)=O(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n-d-1}).$$

上述 O 项中的隐含常数仅依赖于 K，X和 f。

因此，我们有

$$\begin{aligned}\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}\left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})-\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}}\right)\\ &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}\left(1+O(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}})\right)\\ &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\exp\left(O\left(\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

我们可以如下界定误差项中的和:

$$\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-1/2}\le\omega(\mathfrak{n})=O\left(\frac{\log\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})}{\log\log\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})}\right),$$

其中， $\omega(\mathfrak{n})$ 表示可除以 $\mathcal{O}_K$ 的素理想的数量。

因此，我们得到估计式

$$\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X)=(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\exp\left(O\left(\frac{\log\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})}{\log\log\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})}\right)\right).$$

定理 1.3 的证明至此完成。 □

引理 3.1 表明，当 $\deg(X)\le 2$ 时，主导误差项 $q^{r-\frac{1}{2}}$ 的系数消失。这一观察使我们能够推导出定理 1.4 中给出的更精确估计。

定理 *1.4* 的证明。 我们采用定理 1.3 证明中的相同记号和设置。由于 $\deg(X)\le 2$，引理 3.1 中的系数 $(\deg X-1)(\deg X-2)$ 为零。因此， X 上有理点数量的估计改进为

$$\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})=\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n-d}+O(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n-d-1}).$$

关于与 f 的零点集的交集，我们保留前一个证明中得到的界

$$\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)=O(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n-d-1}).$$

结合这两个估计，我们得到

$$\begin{aligned}\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}\left(\frac{\#X(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})-\#\mathcal{N}^f(\mathfrak{p},X)}{(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{n-d}}\right)\\ &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}\left(1+O(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-1})\right)\\ &= (\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))^{n-d}\exp\left(O(\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-1})\right).\end{aligned}$$

由于 $\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{n}} \mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-1} = O(\log\log(\mathrm{N}^{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})))$，我们得到

$$\begin{aligned}\#\mathcal{E}_{f,\mathfrak{n}}(X) &= \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})^{n-d}\exp\left(O(\log\log \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}))\right)\\ &= \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})^{n-d}\left(\log \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})\right)^{O(1)}.\end{aligned}$$

定理 1.4 的证明至此完成。 □

4 结论

本文在相关素数处均具有良约化的假设下，得到了光滑代数簇上 f-ex单位数量的精确公式和渐近估计。

未来研究的一个自然方向是将这些结果推广到奇异簇，或分析坏约化素数处解的分布。在这类情形下，纤维的几何结构会显著复杂化，而朗-韦尔不等式中的误差项也可能表现不同。

此外，数域与函数域之间的相似性表明，可以将这些结果推广到函数域。

另一个有趣的研究方向是探讨计数函数的动力学性质。Harrington 和 Jones [6] 研究了 $\mathbb{Z}_n$ 中 $\phi_e(n)$ 的迭代，而 Miguel[9] 建议将其推广到整数环 $\mathcal{O}_K$。然而，由于约化类型各不相同，为一般的 f-ex单位定义自然的迭代颇为复杂。

致谢

作者谨向陶正宇致谢，感谢他在本工作早期阶段进行的有益讨论，以及对稿件提出的宝贵建议。

参考文献

[1] Anand、J. Chattopadhyay 和 B. Roy，关于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中多项式型例外单位之和，《巴塞尔数学文献》**114**(2020)，第 3 期，271-283。[2] Anand、J. Chattopadhyay 和 B. Roy，关于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中 f-ex单位的一个问题，《巴塞尔数学文献》**116** (2021)，第 4 期，403-409。[3] 冯玉玲和 S. Hong，关于有限交换环中多项式单位的和集，《匈牙利数学学报》**167**(2022)，第 1 期，180-191。[4] 冯玉玲和 S. Hong，关于剩余类环中例外单位的平方之和，《匈牙利数学期刊》**86** (2023)，第 1 期，239-248。

[5] S. R. Ghorpade 和 G. Lachaud， ´Etale上同调、Lefschetz定理以及有限域上奇异簇的点数，《莫斯科数学杂志》**2** (2002)，第 3 期，589–631。[6] J. Harrington 和 L. K. Jones，关于一个与欧拉ϕ-函数有关的函数的迭代，Integers **10** (2010)，A42，497-515。[7] S. Lang 和 A. Weil，有限域上簇的点数，《美国数学杂志》**76**(1954)，819–827。[8] H. W. Lenstra Jr.，大次数欧几里得数域，《数学发明》**38**(1976/77)，第 3 期，237-254。[9]C. Miguel，关于有限交换环中例外单位的和集，《月刊数学》**186** (2018)，第 2 期，315-320。[10] M. Mollahajiaghaei，关于模 n 单位的平方之和，《数论杂志》**170** (2017)，35-45。[11] T. Nagell，论一种特殊类型的代数单位，Ark. Mat.**8** (1969)，163-184。[12] J. Neukirch，《代数数论》，由 Norbert Schappacher 从 1992 年德文原版翻译并附注，数学科学基础丛书，第 322 卷，Springer，柏林，1999。[13] J. Sander，剩余类环中例外单位之和，《数论杂志》**159**(2016)，1-6。[14] Q.-H. Yang 和 Q.-Q. Zhao，关于 $\mathbb{Z}_n$ 中例外单位的和集，《月刊数学》**182** (2017)，第 2 期，489-493。[15] J. Zhao、S. Hong 和 C. Zhu，关于模n的多项式型例外单位之和，《澳大利亚数学会通报》**105** (2022)，第 2 期，202-211。