关于邻接矩阵列空间猜想的肯定结果

S. Akansha[1]*和 **K. C. Sivakumar**[2]†

数学系[1]LNM信息技术学院，印度斋浦尔 302031[2]印度理工学院马德拉斯分校，印度金奈 600036

agrawal.akansha5@gmail.com, kcskumar@iitm.ac.in

arXiv:2601.02746v1 [math.CO] 6 Jan 2026

摘要

Akbari-Cameron-Khosrovshahi（ACK）猜想似乎尚未解决。该猜想指出，对于任意至少含有一条边的简单图G，其邻接矩阵的行空间中存在一个非零 $\{0,1\}$向量，且该向量不是矩阵本身的任何一行。在本次报告中，我们提出一个统一框架，涵盖了若干满足 ACK 猜想的图族和图运算。基于这些基本结果，我们介绍了新的图构造，并通过图结构论证和线性代数论证证明这些构造符合该猜想。此外，我们证明某些图运算能够保持 ACK 性质。这些结果共同扩展了已知满足该猜想的图类，并揭示了该猜想在复合与扩展下的结构不变性。

美国数学学会学科分类： [2020] 05C50，15A03

关键词：ACK 猜想、核心图、坚果图、卫星图。

1 引言

我们回顾一下后来被称为 ACK 猜想的内容。本文中的所有图都是简单连通图。

猜想 1.1. *[6, 问题 2]* 对于任意图 G（至少包含一条边），其邻接矩阵 A 的行空间中都存在一个非零$\{0,1\}$-向量$_G$，在域 $\mathbb{R}$ 上，该向量不是 A 的任何一行$_G$。

*作者在马尼帕尔理工学院（印度马尼帕尔）任职期间完成了本研究的部分工作。

†通讯作者。

先前的研究已证明猜想1.1 对非奇异图成立，也就是说，对邻接矩阵可逆的图成立 [7, 1]。因此，猜想仅在奇异图的情形下仍未解决。在奇异图这一类中，直径至少为 4 的图，以及直径为 2、没有支配顶点且恰有 $2n - 5$ 条边的图均已验证该猜想，其中 n 表示图的阶 [7]。最近，Sciriha 等人 [1] 提出了一种基于顶点添加时邻接矩阵零度变化的新方法。利用这一框架，他们找出了一类范围受限的奇异图，这类图可能成为潜在的反例，并特别证明此类图不可能包含悬挂顶点。

本文着重识别并刻画若干不同于已知情形、且满足 ACK 猜想的奇异图新族。我们引入“基于核向量的非重复零和子集”这一概念，将其作为 ACK 猜想的一种等价表述。本文的主要贡献包括发现若干满足 ACK 猜想的奇异图新族及图运算。首先，我们引入一类具有支配顶点的直径为 2 的图；这些图满足 Sciriha 等人提出的潜在反例的所有已知必要条件。 [1], 我们验证了该类图满足猜想。其次，我们证明 ACK 性质在特定图运算下保持不变。此外，我们还提出一种构造性方法：通过与不相交零和子集相关联的顶点添加，构造任意阶且满足猜想的图。

本文其余部分安排如下。第2节中，我们建立必要的记号，并回顾核图和坚果图等基本概念。第3节中，我们引入零和子集这一关键概念，并将其用作 ACK 猜想的一种等价表述。第4节致力于构造属于潜在反例类别的奇异图新族，并通过识别其内在的零和结构，证明这些图族满足 ACK 猜想。相关结果见定理5 和推论4.1。第5节中，我们研究保持 ACK 性质的图运算，证明该性质在与K_2的笛卡尔积（定理8）以及特定顶点添加操作（定理9）下保持不变。最后，第6 节确定满足猜想的更广泛的任意零度核图类别。相关结果见定理10和定理11。

2 预备知识

向量**e** 表示每个分量均为 1 的向量。 该向量的维数将由上下文明确。若一个矩阵的所有元素均非零，则称其为满 矩阵。向量也有类似的定义。对于矩阵X，用x^i表示其第i列。下面将回顾讨论中所需的一些基本定义，并介绍一些记号。

对于图 G $=$(V, E)，其中 V $=\{v_1, v2, \ldots, v_n\}$ 是顶点集，E 是边集，我们用 (a$_i$j) $=A_G$ 表示其邻接矩阵。因此，对于所有 i、j，a$_i$j $=$a$_{ji}$；如果顶点 v$_i$ 与 v j 之间存在一条边，且 i $\neq$j，则 a$_i$j $\neq 0$。对于矩阵 X，分别用 N(X)、R(X) 表示 X 的零空间和值域。

1. 图 G 中的顶点 v 称为核顶点（CV），如果存在一个核向量 x，使得x_v中对应于顶点v的分量非零。若一个图的每个顶点都是核顶点（CV），则称该图为核图。换言之，核图是存在一个核向量且其每个分量均非零的图。

2. 若图 G 满足A_G 的零度为 1，，且$N(A_G)$ 中任意非零向量的所有分量均非零，则称图 G 为坚果图 。换言之，坚果图是零度为 1 的核图。最小的坚果图有七个顶点，且恰有三个。坚果图也都是非二部图，且没有叶顶点。以下是关于坚果图的两个相关结果:

(a) 图 G 是坚果图，当且仅当 $\det(A) = 0$ 且矩阵 adj(A) 的所有元素均非零[2, 引理 2。2]。以下是一个核图但不是坚果图的例子 [5]。

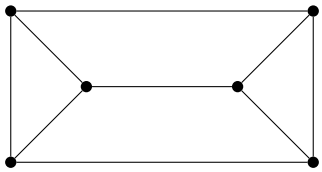

图 1：不是坚果图的核图。

(b) 设G 是通过向具有非奇异相邻矩阵A_H的图H 添加一个新顶点得到的图，使得该顶点恰好与v_i、$v_j \in V(H)$中的两个不同顶点相邻。那么，对于 $(b^{ij}) = B := A_H^{-1}$，以下两个条件成立 [2, 定理 21]当且仅当G 是坚果图:

i. $b_{ii} + b_{jj} + 2b_{ij} = 0$。
ii. $b^i + b^j$ 是一个满向量。

下面是这样一个坚果图的例子:

3. 如果某个特征向量不与**e**正交，则矩阵的一个特征值*main*。

4. 给定一个图G，我们用$G + v$ 表示通过添加一个顶点v从G 得到的图，其中v 要么是孤立顶点，要么与G中的一个或多个顶点相邻。我们有时将G 称为*base*图。

5. 图 G 的零度定义为 A_G 的零度，记作 $\eta(G)$。给定一个基图 G，若顶点 v 满足 $G + v$，则称其为*Parter*顶点，如果 $\eta(G + v) = \eta(G) - 1$.（这称为*CFV*^{upp}

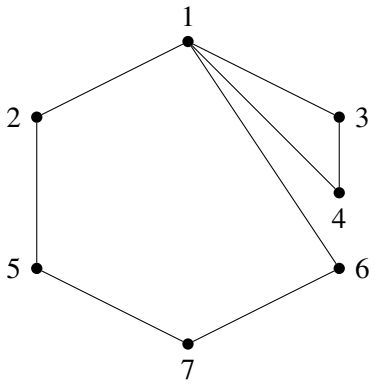

图 2：由基图 H 构造的 7顶点坚果图，将新顶点 7 与顶点 5 和 6 相连。

中的顶点 [1]）。我们利用 Parter顶点，在命题 3.1 中得到 ACK 猜想的一个等价表述。

6. 对于图 G的给定顶点u，向量a^u 是一个 $\{0,1\}$-向量，其第r个分量为 1，当且仅当顶点v_r 与u相邻。我们称a^u 为对应于u的邻接向量。在 [1], 中，a^u 称为特征向量。7. 若将顶点v 添加到图G 中，使得邻接向量a^v 不同于任何其他新增顶点u对应的a^u，则称其为非重复向量。8. 对于图G的子集$S \subseteq V$，向量 χ_S 是一个 $\{0,1\}$-向量，其第r个分量为 1，当且仅当顶点$v_r \in$ 属于S。我们称 χ_S 为对应于顶点子集S的特征向量。

以下关于Parter顶点的刻画将证明相当有用。

定理 1。 *[1, 定理 3。3]* 设 G 是一个奇异基图，v 是添加到 G 的一个非重复顶点，且 v 与 G 中至少一个顶点相邻。那么，v 不是 $G+v$ 的 *Parter*顶点，当且仅当 $a^v \in R(A_G)$。

下一个结果将用于证明卫星图的零度为 1（定理 3）.

引理 1。 设 B 是一个奇异矩阵。假设 $N(B)$ 中没有非零向量含有零坐标。那么 B 的零度为 1。

证明。 假设 $\dim(N(B)) \geq 2$，并设 $y,z \in N(B)$ 线性无关。考虑它们的第一个坐标 y_1 和 z_1，（二者均非零）。令 $w := z_1 y - y_1 z$。 于是 $0 \neq w \in N(B)$ 的第一个坐标为零，矛盾。

□

令 $\mathscr{C}$ 表示所有可能成为 ACK 猜想反例的图G 的集合。最近，人们得到了这类图的以下必要条件。

定理 2。 *[1, 定理 5。1]* 设 $G \in \mathscr{C}$。于是我们有以下结论：

1. G 是一个核图；*2.* 0 是 G 的一个主特征值；*3.* G 的每个顶点都位于一个三角形上；*4.* 对于每个顶点 $u \in V$，$N(u)$ 中的每个顶点都与 u 构成一个三角形；*5.* G 不是正则图；*6.* G 必须是连通图；*7.* G 不是二部图；*8.* G 的直径为2或3。

我们证明，我们在此研究的所有图都满足这些必要条件。

3 猜想的重新表述

我们引入零和子集的概念，并以此为基础，针对一类图重新表述 ACK 猜想。

定义 3.1（零和子集）。给定一个图 G，令 $0 \neq x \in N(A_G)$。若非空子集 $S \subseteq V$ 满足以下条件，则称其为相对于 x 的零和子集：

$$\sum_{v \in S} x_v = 0.$$

如果其特征向量 χ_S 不与 A_G 的任何一行相同，则称该子集为非重复子集。

Le引理 2. 任何非平凡的简单连通奇异图都存在一个非空零和子集 .

证明。设 G 是一个非平凡的简单连通图，其顶点集为 V，且存在一个非零向量 $\mathrm{x} \in \mathrm{N}(\mathrm{A}_G)$。因此，对于任意顶点 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$，都有 $\sum_{w \in N(v)} \mathrm{x}_w = 0$。令 v_0 为 V 中任意一个顶点，并定义集合 $\mathrm{S} = \mathrm{N}(\mathrm{v}_0)$。根据 v_0，处的核条件，我们有 $\sum_{w \in N(v_0)} \mathrm{x}_w = 0$。由于 S =N($\mathrm{v}_0$)，S 上的和为零。由于 G 连通，它没有孤立顶点。因此，$\deg(\mathrm{v}_0) \geq 1$，这意味着 $\mathrm{S} = \mathrm{N}(\mathrm{v}_0) \neq /0$。

□

对于零度为一的图，ACK 猜想有一个等价表述。下面给出这一结果。

命题 3.1。 图 G 满足 ACK 猜想，当且仅当存在一个非空且不重复的子集 $S \subseteq V(G)$，使得 $\chi_S \in N(A_G)^{\perp}$.

证明。 该证明将收录于本版本的修订稿中。 □

注 3.1。 请注意，对于零度为一的图，条件 $\chi_S \in N(A_G)^{\perp}$ 仅表示 S 是相对于某个非零核向量的零和子集。特别地，如果 G 是零度为一的图，那么 G 满足 ACK 猜想，当且仅当存在一个非空且不重复的零和子集 $S \subseteq V(G)$。在证明零度为一的图满足 ACK 猜想时，我们将始终采用这一零和子集的思路。

推论 3.1。 设 G 是一个零度为一的图。如果 G 有一个非空零和子集 $S \subseteq V$，使得 $|S| \notin \{\text{度}(v) : v \in V\}$，那么 G 满足 ACK 猜想。

证明。 根据定义，A_G 中对应于顶点 v 的任意一行恰有 $\deg(v)$ 个 1。因此，如果 $|S|$不等于任何顶点度，那么特征向量 χ_S 就不可能与A_G的任何一行相同，所以 S自动是不重复的。S 就是所需的非空、不重复的零和子集。因此，G 满足 ACK 猜想。

□

注 3.2。 一般而言，推论 *3.1* 的逆命题并不成立。例如，考虑一个有 14 个顶点、边集为

$$E(H) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,6\}, \{1,7\}, \{1,8\}, \{1,9\}, \{1,10\}, \{1,11\}, \{1,12\}, \{1,13\}, \{1,14\}, \{2,3\}, \{2,10\}, \{2,11\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{4,12\}, \{5,6\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{6,13\}, \{7,8\}, \{7,9\}, \{8,9\}, \{8,10\}, \{8,14\}, \{9,10\}\}.$$

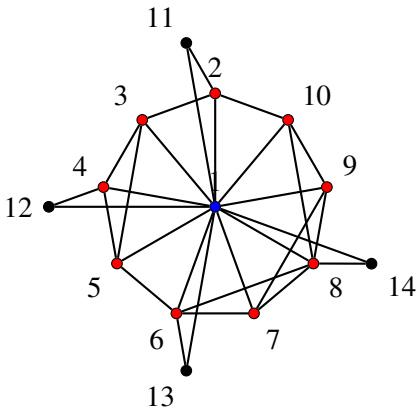

图 3：度序列为 $\{2,2,2,2,4,4,4,4,4,4,4,5,6,13\}$。

Then

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

图 G 如图 *3* 所示，其零度为一，且其核由以下向量张成：

$$x = (0,0,0,0,0,0,1,0,0,-1,1,0,-1,0)^T$$

该向量满足行依赖关系 $a^7 - a^{10} + a^{11} - a^{13} = 0 = \langle x,e \rangle$. 因此，0 不是 G 的主特征值，且 $\mathbf{e}$ 属于 A_G 的行空间。因此，G 满足 *ACK* 猜想，但不存在大小不同于任何顶点度的零和子集 $S := \{v_7, v_{10}, v_{11}, v_{13}\}$ 。

4 满足 ACK 猜想的图类

我们引入一类新的图，其成员满足定理 2 的必要条件，也满足 ACK 猜想。这意味着，尽管这些图被认定为潜在反例，我们证明了它们实际上并非反例。

4.1 卫星图

定义 4.1。 对于正整数 k，令 S_{2k+1} 表示一个具有 $n = 2k + 1$ 个顶点的图，称为卫星图，其定义如下：顶点集 V 被划分为三个不相交集合：一个支配顶点 v_{dom}；一个由 k 个顶点组成的 *4*度顶点集合 $V_4 = \{u_1, u_2、\ldots、u_k\}$，以及一个由 k 个顶点组成的 *2*度顶点集合 $V_2 = \{w_1, w_2、\ldots、w_k\}$。边集 E 定义如下：

- 顶点 $vdom$ 与图中的每个其他顶点都相邻。因此，对于所有 $v \in V_4 \cup V_2$， $\in E(vdom, v)$ 。

- V_4 中的每个顶点都与 V_4 中的两个顶点以及 V_2中的一个顶点相邻。
- V_2 中的每个顶点都与 V_4中的一个顶点相邻。

显然，$k \geq 3$. 因此，当$k = 3$时，该族中最小的图即为此时得到的图，其顶点数为$n = 2(3)+1 = 7$。此后，我们将具有 $2k+1$ 个顶点的卫星图记为S_{2k+1}，并假设$k \geq 3$. 下面列出这类图的几个例子。

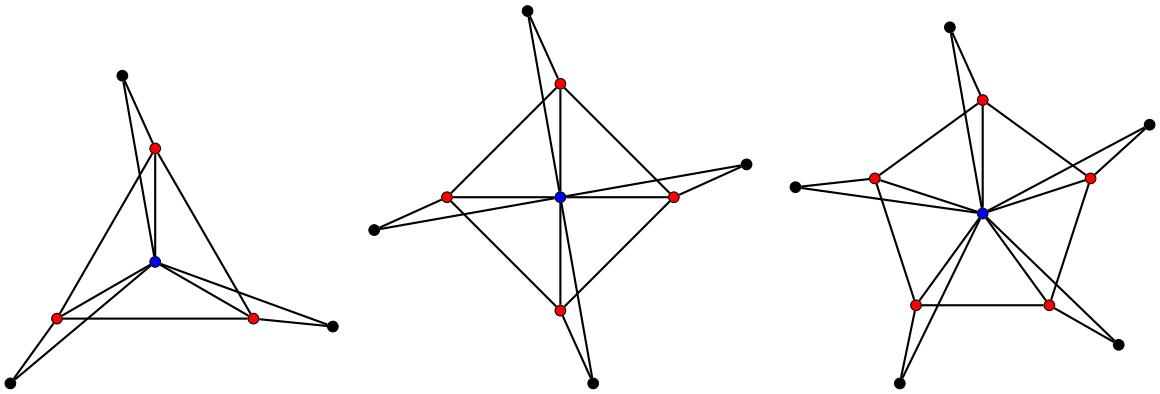

图 4：$k = 3$、4 和 5 对应的卫星图。

接下来，我们证明卫星图是坚果图。

定理 3。 每个 S_{2k+1} 都是坚果图。

证明。 设$x \in \mathbb{R}^{2k+1}$ 在S_{2k+1} 的顶点上定义如下：

$$x_v = \begin{cases} +1 & \text{if } v \in V_4 \\ -1 & \text{if } v \in V_2 \\ -1 & \text{if } v = v_{\text{dom}}. \end{cases}$$

我们断言 $A(S_{2k+1})x = 0$，也就是说，对于任意顶点 $v \in V$，乘积 $A(S_{2k+1})x = \sum_{z \in N(v)} x_z$ 的第 v 个分量为零。若 $v = u_i \in V_4,$，则 $N(u_i) = \{u_{i-1},\ u_{i+1},\ w_i,\ v_{\text{dom}}\}$，对应的和为：

$$\sum_{z \in N(u_i)} x_z = x_{u_{i-1}} + x_{u_{i+1}} + x_{w_i} + x_{v_{\text{dom}}} = (+1)+(+1)+(-1)+(-1) = 0.$$

同样，若 $v = w_i \in V_2,$，则 $N(w_i) = \{u_i,\ v_{\text{dom}}\}$，并且

$$\sum_{z \in N(w_i)} x_z = x_{u_i} + x_{v_{\text{dom}}} = (+1)+(-1) = 0.$$

对于支配顶点 v_{dom}，邻域 $N(v_{\text{dom}}) = V_4 \cup V_2$。因此，

$$\sum_{z \in N(v_{\text{dom}})} x_z = \sum_{j=1}^{n} x_{u_j} + \sum_{j=1}^{n} x_{w_j} = n \cdot (+1) + n \cdot (-1) = 0.$$

接下来我们证明，$N(A(S_{2k+1}))$ 中没有任何非零向量具有零坐标。设 $y \in N(A(S_{2k+1}))$，则对于每个顶点 v，都有 $\sum_{z\in N(v)} y_z = 0.$。对于顶点 $w_i \in V2$，$1 \le i \le k$，我们有 $y_{u_i} + y_{v_{\text{dom}}} = 0$，对于所有$i = 1$，……，$k$均成立。因此，

$$y_{u_1} = y_{u_2} = \cdots = y_{u_k} = -y_{v_{\text{dom}}}.$$

令这个共同值为 c，则对所有 $u_i \in V_4$，都有 $y_{u_i} = c$，且 $y_{v_{\text{dom}}} = -c$。接下来，对于任意顶点 $u_i \in V_4$,，有 $y_{u_{i-1}} + y_{u_{i+1}} + y_{w_i} + y_{v_{\text{dom}}} = 0$，$1 \le i \le k$。这可简化为对所有 $i = 1, \ldots, k$，均有 $y_{w_i} = -c$。因此由引理 1，$A(S_{2k+1})$ 的零度为 1。 □

现在，我们证明 S_{2k+1} 满足定理2的八个必要条件。

定理 4. $S_{2k+1} \in \mathscr{C}$。

证明。 该证明将在此版本的修订稿中给出。 □

尽管属于 $\mathscr{C}$，S_{2k+1} 并不是 ACK 猜想的反例。这是我们的下一个结果。

定理 5。 S_{2k+1} 满足 *ACK* 猜想。

证明。 证明将在下一版本中给出。 □

注 4.1。 值得将我们的结果与近期取得的结果进行比较：在该研究中，*[7]*, 对于没有支配顶点且恰有$2n - 5$条边的直径为 *2* 的图，证明了 *ACK* 猜想成立，其中 n 是 G 中顶点的个数。相比之下，这里构造的卫星图直径为2，且含有一个支配顶点。此外，这些图的零度为一，因此不属于 *[7]*, 所考察的另一图类，即直径至多为3 且秩至多为5的图。在我们的构造中，每个图的秩均为 $n - 1$。因此，卫星图构成了一个全新的图族，它们满足 *ACK* 猜想，同时属于图类 $\mathscr{C}$。

定义 4.2。 受卫星图结构的启发，对于整数 $k = 4$、5和6，我们定义顶点数为偶数的图 E_{2k}（图5）。这里，V 被划分为四个不相交集合：一个支配顶点 v_{dom}；一个由度4 的顶点组成的集合 $V_4 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$；一个由 $k - 3$ 个度2的顶点组成的集合 $V_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_{k-3}\}$；以及两个特殊顶点 s_5 和 s_6，它们的度分别为5和6。边集 E 定义如下：

- （$vdom$，v） $\in E$，对所有顶点 $v \in V$。
- s_5 和 s_6 相邻。其余边必须满足度要求。此外，
  - V_4 中的每个顶点都与V_4中的至少一个其他顶点相邻。
  - V_4 中的一个顶点同时与s_5 和s_6相邻。

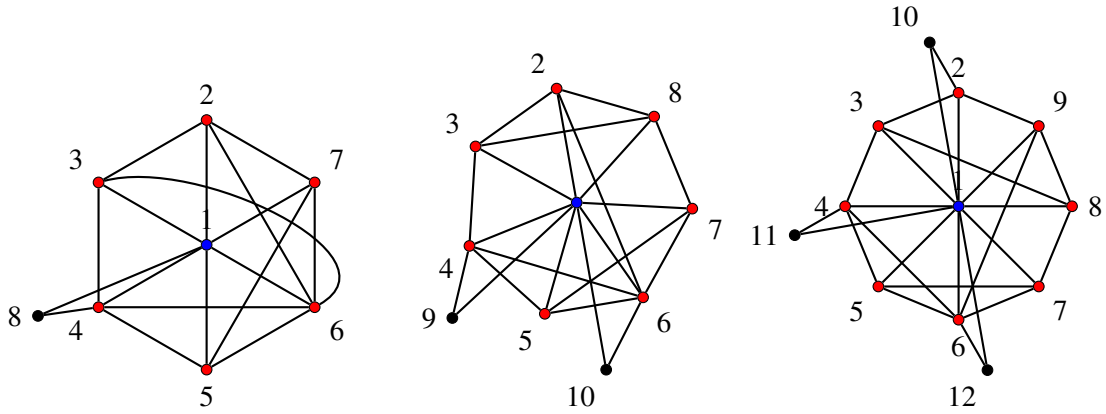

图5：图 E_{2k} （$k=4,5$ 和 6）

– *One vertex in V_2 is adjacent to s_5.*

定理 6。 E_{2k}，当$k=4$为5、6 时是坚果图。

证明。 我们找到了一个非平凡向量 $x \in \mathbb{R}^{2k}$，使其属于 $N(A(E_{2k}))$。对于 8顶点图，

$$x=(1,1,-1,-1,-1,-1,1,2)^T,$$

由于这一事实

$$a^1+a^2+2a^8+a^7-a^3-a^4-a^5-a^6=0.$$

对于 10顶点图，

$$x=(1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,2,1)^T,$$

因为

$$a^1+a^7+a^8+2a^9+a^{10}-a^2-a^3-a^4-a^5-a^6=0,$$

而对于 12顶点图，

$$x=(1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,2,1)^T,$$

由于以下关系：

$$a^1+a^7+a^8+2a^{11}+a^{10}+a^{12}-a^2-a^3-a^4-a^5-a^6-a^9=0.$$

□

定理7。$E_{2k}\in\mathscr{C}$，$k=4$，5，6。

证明。根据定义，E_{2k} 对于 $k = 4$、5、6 都是坚果图，因此也是核心图。由此，定理 2 的第一个条件得以满足。若 x 是定理 6 的证明中给出的向量，则有$\langle x, e\rangle \neq 0$，因此满足定理 2 的第二个条件。每个 E_{2k} 的构造都包含一个支配顶点 v_{dom}；对于任意顶点 u 及其任意一个邻点 w，u 和 w 都与 v_{dom}相邻，从而构成三角形 $\{u, w, v_{dom}\}$。事实上，对于每个顶点 u，N(u) 中的每个邻点都会与 u 构成一个三角形，这表明定理 2 的条件 3 和 4 均得以满足。

显然，这些图不是正则图，是连通的，且不是二部图。最后，支配顶点保证任意两个不相邻顶点之间的路径长度为 2，这意味着直径恰好为 2。这表明定理 2的最后四个条件也得到满足，从而完成证明。

□

以下结果是推论 3.1的直接推论。

推论 4.1. 对于 $k = 4$，坚果图 E_{2k}满足 *ACK* 猜想，5，6。

证明。 每个E_{2k} 都没有度为 3 的顶点，并且有一个大小为 3 的零和子集。 □

注 4.2. 定义*4.2*中的图的构造方法可以扩展到整数 $k \geq 7$，方法是沿用相同的度序列。然而，尽管所得的图 E_{2k} 可能具有零度 *1*，但它们未必是坚果图。特别是，对于 $k = 7$，图 *33*所示的 *14* 阶图就是一例。这个例子表明，对于 $k\mathscr{C}$，这种构造通常不会生成属于类 ≥ 7的图。尽管如此，对于 $k = 8$ 和 9，沿用相同的构造方法并额外添加一条或两条边，可以得到满足 *ACK* 猜想的图。这些图如图 *6*所示，但不属于 $\mathscr{C}$，因为它们不是坚果图，而且 0 不是主特征值。

注释 4.3。 回顾一下，在 *[7]*, 中，*ACK* 猜想已对直径至少为四的图得到证明，也适用于某些直径为二或三的图；这些图的结构允许存在邻域不相交的相邻顶点对，或源于顶点复制过程。相比之下，本文考察的图直径为二，包含一个支配顶点（这是此前尚未研究的情形），且每一对相邻顶点都有一个公共邻点。因此，本文中的偶阶图满足 *ACK* 猜想，同时又不属于此前研究过的任何图族。

5 两种图运算与 ACK 猜想

本节考察一个图与K_2的笛卡尔积。在给定图的邻接矩阵满足某个条件的情况下，由此得到的新图满足 ACK 猜想。

回顾一下，两个图$G_1 \square G_2$ 的笛卡尔积是一个图，其顶点集为$V(G_1) \times V(G_2)$，其中，(u_1, u_2)与(v_1, v_2)相邻，当且仅当$u_1 = v_1$且$u_2 \sim v_2$在G_2,中，或者

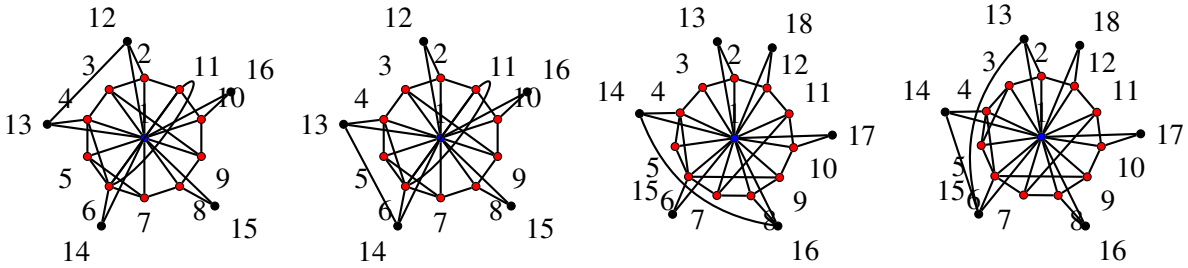

图 6：前两个图的度序列为 $\{2,2,2,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,5,6,15\}$，其依赖关系为 $a^7+a^9+a^{12}+a^{14}-a^4-a^{11}-2a^{15}=0$。接下来的两个图的度序列分别为 $\{2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,5,6,17\}$ 和 $\{2,2,2,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,5,6,17\}$，其依赖关系分别为 $a^3-a^5+a^{15}-a^{13}=0$ 和 $a^4-a^5+a^6-a^8+a^9-2a^3+a^{12}-a^{14}-a^{15}-a^{16}+2a^{18}=0$。

$u_2=v_2$ 和 $u_1\sim v_1$ 属于 G_1 [8]。特别地，当 $G_1=K_2$ 的顶点集标记为 $\{0,1\}$ 时，图 $K_2\square G_2$ 由 G_2, 的两个副本构成，并且对每个 $u\in V(G_2)$，在 (0, u) 和 (1, u) 之间有一条边。我们用$\sigma(X)$ 表示矩阵 X 的谱，即其特征值。

定理 8. 对于图 H，假设 1 是 A_H 的单特征值，且 -1 不是特征值。那么 $G=K_2\square H$ 满足 *ACK* 猜想。

证明。 该证明将收录于此版本的修订稿中。 □

注 5.1. 定理 *8* 的结论在交换特征值的作用时也成立，也就是说，如果 -1 是 A_H 的单特征值，并且 1 不是。并且，直径$(G)\leq 3$ 当且仅当 直径$(H)\leq 2$。

注 5.2. </style}奇圈 H := C_{2k+1}，$k\geq 4$ 满足 $2k+1\equiv 0\,(\text{模 }3)$ 构成了一个自然的无限图族，其中 -1 是 A_H 的单特征值，且 $1\notin\sigma(A_H)$。事实上，C_n 的谱可以明确写为

$$\sigma(C_n)=\left\{2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right):j=0,1,\ldots,n-1\right\},$$

由此可得该断言。然而，我们尚不了解这些条件的任何图论刻画。特别是，许多其他图，包括非正则图和非对称图，也满足这一条件。下一个例子将展示其中一种情况。

例子 5.1. 设 H 是由顶点 $\{1,2,3,4,5\}$ 和边集构成的图

$$E(H)=\{\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}.$$

H 的邻接矩阵为

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

具有单特征值 -1 且1 不是特征值。对于 $\lambda = -1$，核特征向量为 $v = [0,0,-1,1,0]^T$。我们构造图 $G = K_2 \square H$，如图7所示。G 的邻接矩阵具有如下分块结构

$$A_G = \begin{pmatrix} A_H & I_5 \\ I_5 & A_H \end{pmatrix},$$

其中 I_5 是 5×5 单位矩阵。根据定理8，G 满足 ACK 猜想。

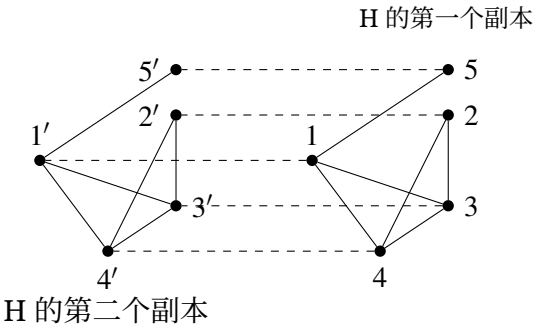

图7：图 G$K_2 \square H$

我们立即得到定理8的一个推论。

推论5.1. 设 1 是 A_H 的单特征值，其对应的满特征向量为 v，且-1 不是 A_H 的特征值。那么 $K_2 \square H$ 满足 ACK 猜想。

证明. 根据对 H 的假设，A_G 的 0 是单特征值，因此 G 的零度为一。对应的核向量为 $y = [v^T, -v^T]^T$。由于 v 是满向量，y 也处处非零。因此，G 是一个坚果图，证明完毕。

□

在下一个结果中，我们考察顶点添加运算。

定理 9。 设 G 是一个具有支配顶点 $1 \in V$ 的图。假设 $N(A_G)$ 中的任意非零向量的第一个坐标均为零。假设存在一个非空且无重复元素的子集 $S \subseteq V$，使得 $\chi_S \perp N(A_G)$。那么，通过添加一个新顶点 v_a，使其满足 $N(v_a) = S \cup \{1\}$，由此得到的（直径为二的图）$H := G + v_a$ 满足 ACK 猜想。

证明。 该证明将收录于此版本的修订稿中。

□

注记 5.3。 定理 *9* 中的构造很容易扩展到同时添加多个顶点的情形。若 $S_1, \ldots, S_k \subseteq V(G)$ 是非空、互不重复且两两不相交的子集，并且对每个 i 都有 $\chi_{S_i} \perp N(A(G))$，那么添加顶点 $v_1, \ldots, v_k$ 后，

$$N(v_i) = S_i \cup \{1\}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

所得图满足 *ACK* 猜想。证明思路相同，因为核方程彼此解耦，并迫使所有新增坐标都为零。

例 5.2。 我们从图 G 开始，它有 16 个顶点，如图 *8* 所示，其核特征向量为

$$x = (0,0,1,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,1,0,0,0)^T, \qquad A_G x = 0.$$

考虑 $S_1 = \{3,5\}$ 和 $S_2 = \{13,15\}$。通过添加顶点 19 和 20 构造 F，使得 $N(19) = \{1,3,5\}$ 且 $N(20) = N(5) = \{1,13,15\}$。

$$y = (x,0,0) = (0,0,1,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,1,0,0,0,0,0)^T, \qquad A_F y = 0.$$

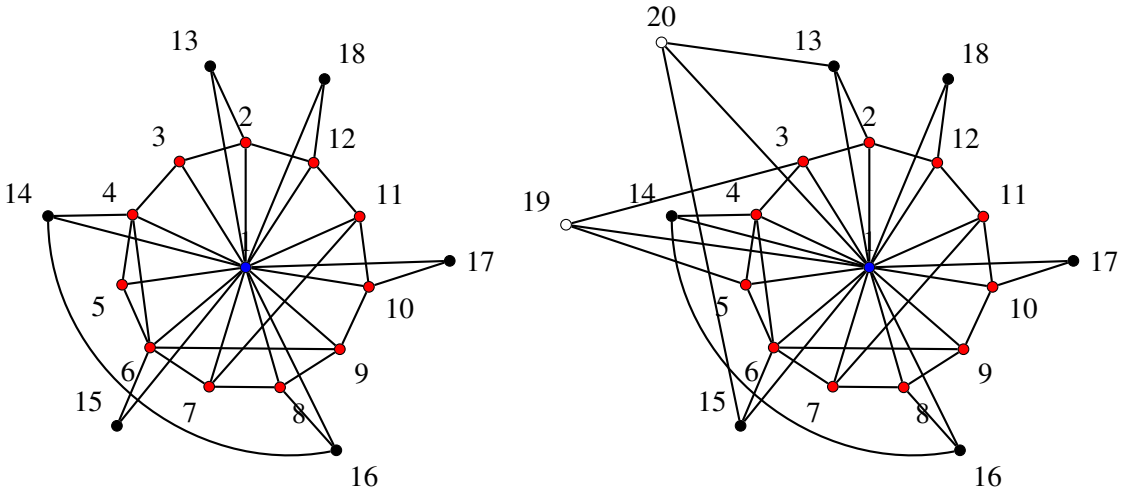

图 8：两个图的依赖关系为$a^3 - a^5 + a^{15} - a^{13} = 0$.

6 满足 ACK 猜想的核心图

在本节的结尾，我们得到满足 ACK 猜想的两类图。第一类将在下一个结果中确定，而第二类图则在定理 11中给出。

定理 10。 设 H 是一个简单图，使得 A_H 可逆。令 $B := A_H^{-1}$。设 S_1，……，$S_k \subseteq V$ 是非空子集，其特征向量分别为 c_1，……，$c_k \in \{0,1\}^{|V|}$。令 $C := [c_1, \cdots, c_k]$。通过向 H 添加新顶点 v_1，……，v_k 构造图 G，使得对于每个 i，都有 $N(v_i) = S_i$。则以下结论成立：

(a) G 是一个核图（零度至少为 k）当且仅当 BC 是满矩阵，且 $C^TBC = 0$.*(b)* 如果存在一个指标 i，使得 S_i 不等于 H 中任何顶点的邻域，那么 G 满足 *ACK* 猜想。

证明。 此版本的修订稿中将包含证明。 □

下面举例说明定理 10 在 $k = 2$.

例 6.1。 设 H 是一个有六个顶点 $\{1,\ldots,8\}$ 的图，其邻接矩阵为

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵可逆，且行列式$A_H = -1$。选择子集

$$S_1 = \{6,8\}, \qquad S_2 = \{1,2\}.$$

相应的特征向量为

$$c_1 = (0,0,0,0,0,1,0,1)^T, \qquad c_2 = (1,1,0,0,0,0,0,0)^T.$$

$$Bc_1 = (-1,1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-1,-\tfrac{1}{2},1)^T, \qquad Bc_2 = (1,-1,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,-\tfrac{1}{2},-1)^T.$$

Note 使得 Bc_1 和 BC_2 的所有坐标均非零。构造矩阵 $C = [c_1\ c_2]$。直接检验可得 s

$$C^TBC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，定理 *10* 的假设均已满足。向 H 添加两个新顶点 v_9 和 v_{10}，其邻域分别为 $N(v_9) = S_1$ 和 $N(v_{10}) = S_2$，得到图 G，其零度至少为 2；此外，其核包含以下线性无关向量

$$y_1 = (Bc_1, -e_1)^T, \qquad y_2 = (Bc_2, -e_2)^T,$$

且 G 满足 *ACK* 猜想。

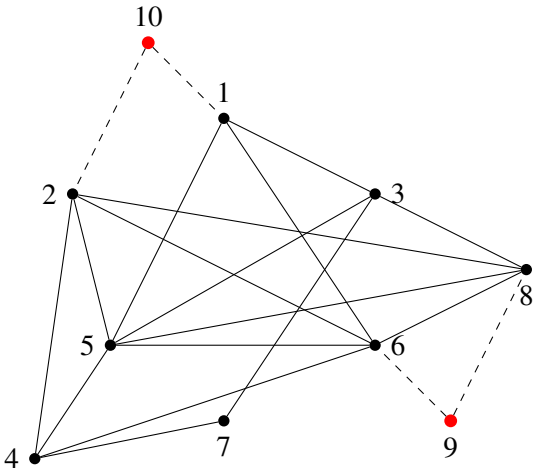

图9：基图 H（顶点 1–8），并附加了新顶点 9 和 10：$N(9) = \{6,8\}$ 和 $N(10) = \{1,2\}$。

定理 11。 设 G 是一个坚果图。
(a) 对于 $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$，令 F 为将每个顶点 $v_i \in T$ 重复 m_i 次、$m_i \geq 1$ 次所构成的图。那么，F 是一个核图。
(b) 设 G 满足 *ACK* 猜想。令 S 是 V 的一个非空、无重复的零和子集，且 $S \cap T = /0$，其中 T 是另一个顶点子集。若 F 按照上述方式由 T 构造，则 F 也满足 *ACK* 猜想。

证明。 此版本的修订稿将附上证明。 □

在下一个例子中，我们展示前述结果中复杂的构造 .

例6.2。 我们从图2 所示的 7顶点坚果图 G 开始，其核特征向量 $(A_G x = 0)$ 为

$$x = (1, 1, -1, -1, -1, 1, -1)^T.$$

通过将顶点 1 复制一次、将顶点 5 复制两次，构造 F；将副本命名为 $1'$ 和 $5'$，其中 $N(1') = N(1) = \{2,3,4,6\}$，且 $N(5') = N(5) = \{2,7\}$。定义

$$y = (x_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5, x_5, x_6, x_7)^T = (1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, -1)^T.$$

由于 $N(1') = N(1)$ 且 $N(5') = N(5)$，我们有 $A_F y = 0$。差向量如下所示：

$$d_{1,1} = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

$$d_{5,1} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0)^T$$

and

$$d_{5,2} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0)^T.$$

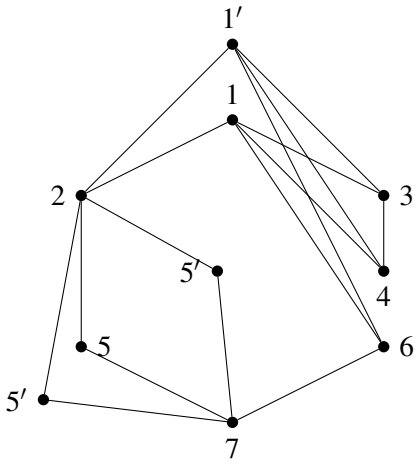

图 10：通过复制 7顶点坚果图中的顶点 1 和 5 构造的 10 顶点核图。

可以验证，$\{y、d_{11}, d_{51}, d_{52}\}$是线性无关的，并且它们属于 $N(A_F)$。此外，F 的每个顶点在这些向量中的至少一个向量里具有非零坐标，因此 F 是一个核图。

总结

在这项工作中，我们证明，Sciriha 等人针对 Akbari–Cameron–Khosrovshahi 猜想所识别出的潜在反例的必要条件并不充分。具体而言，利用基于核向量的零和子集和显式图构造，我们证明，对于每个$n \geq 7$，都存在一个阶为n 、属于潜在反例类 $\mathscr{C}$ 的图，但它仍满足 ACK 猜想。尽管对 $\mathscr{C}$ 中图的完整分类仍有待解决，本文提出的方法进一步缩小了可能反例的范围，并提供了新的构造性和结构性工具，为猜想的正确性提供了支持。

致谢

作者谨向 K. KranthiPriya 和 Aditi Howlader 致以诚挚谢意，感谢她们富有价值的讨论和真知灼见的评论，这些都为本研究做出了贡献。

参考文献

[1] I. Sciriha、B. Kaur、J. L. Borg 和 D. Mark，关于邻接矩阵列空间猜想的潜在反例，*Special Matrices*，**13**(1)，20250033（2025）。

[2]K. Coolsaet、P. W. Fowler 和 J. Goedgebeur，坚果图的生成与性质，*arXiv:1709.04254*（2017）。[3] I. Gutman 和 I. Sciriha，具有最大奇异性的图，美国数学协会（1996）。[4] I. Sciriha 和 I. Gutman，坚果图：最大限度扩展核，曼尼托巴大学计算机科学系（1998）。[5] I. Sciriha，奇异图的刻画，《电子线性代数期刊》，**16**，451–462（2007）。[6] S. Akbari、P. J. Cameron 和 G. B. Khosrovshahi，邻接矩阵的秩与符号，预印本（2004）。[7] S. Bera，简单图邻接矩阵行空间中非零 (0，1) 向量的存在性，《马来西亚数学科学学会通报》，**48**(56)（2025）。[8] A. E. Brouwer 和 W. H. Haemers，图的谱，施普林格科学与商业媒体（2011）。