布朗环汤中的边界算子

Federico Camia[1,2] **Rongvoram Nivesvivat**[1]

[1] 纽约大学阿布扎比分校，阿布扎比，阿拉伯联合酋长国[2] 纽约大学，
纽约，美利坚合众国

电子邮件： federico.camia@nyu.edu, rongvoramnivesvivat@gmail.com

arXiv:2601.02755v1 [math-ph] 6 Jan 2026

摘要：通过分析一个二点函数的共形块展开，我们在亚临界相的布朗环汤中得到了无穷多个边界算子。该二点函数计算的是上半平面上的两个标记点被布朗环隔开的概率。所得边界算子是中心荷为 $c \leq 1$ 的二维共形场论中的主算符，其共形维数为非负整数。通过将上述共形块展开与布朗环汤中的概率进行比较，我们对偶数维边界算子给出了物理解释：它们是在实轴上的点处插入多个布朗环外边界的算子。

目录

1 引言 21.1 模型简述 .3 1.2 主要结果与安排.4

2 分层算符的二点函数 5
2.1 s-道展开 .6 2.2 t-道展开 .8**3** $e^{(2k)}$ **9**
4 上半平面上的边缘算子 104.1 [12] .10 4.2 边缘算子的新定义 .11

5 展望 **1**
2 共形块 14

1 引言

在 [1], Lawler 和 Werner 提出了一种共形不变统计模型，该模型定义为平面上布朗环的泊松系综，并将其命名为布朗环汤。在这一模型中，布朗环被定义为从同一点出发并返回该点的布朗路径。自提出以来，布朗环汤因其与概率论和统计力学中其他有趣对象的联系而受到广泛研究。例如，布朗环的外边界的分布与临界渗流簇外边界的标度极限相同，后者也被认为与自回避行走的猜想标度极限以及 $O(n \to 0)$ 环模型 [2]的猜想标度极限一致。此外，布朗环簇的外边界集合（其中任意两个相交的布朗环都属于同一个簇）构成一个共形环系综（CLE） [3, 4, 5], ，即一族随机平面环的共形不变集合，其局部分布类似于 SLE 曲线。后者记作 SLE$_\kappa$，构成一参数平面曲线族，遵循所谓的 Schramm-Loewner 演化 [6] ，并且是若干统计力学模型界面的（猜想）标度极限，包括渗流 [7, 8]和伊辛模型 [9]。

近来，一系列论文 [10, 11, 12, 13] 发现，布朗环汤的某些可观测量与共形协变关联函数之间也存在对应关系。这表明，存在一种描述布朗环汤某些方面的二维共形不变量子场论，即二维共形场论（CFT）。然而，能否始终将任意布朗环汤可观测量改写为共形场论的关联函数，仍不清楚。本文旨在进一步探讨二维共形场论中的边界局域算子与上半平面上的布朗环汤之间的联系。

1.1 模型简述

区域 D 中的布朗环泡（稍后，我们将把讨论范围限定在上半平面 $D = \mathbb{H}$）是一个环的泊松系综，其强度为 $\lambda > 0$，其中 λ 也可以等价地解释为巨正则系综中每个布朗环的逸度；该系综的配分函数可写为

$$Z_{\mathrm{BLS}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (\mu_D^{\mathrm{loop}})^k \ , \tag{1.1}$$

其中 μ_D^{loop} 在 D中称为布朗环测度，是 [1] 中用于定义布朗环汤的强度测度；布朗环汤是一个以平面环为对象的泊松过程。布朗环测度 μ_D^{loop} 与二维布朗桥测度有关，后者是定义在从某一点出发并最终回到该点的布朗路径上的自然测度。除相乘的常数因子外，它实际上是唯一一个在所有全局和局部共形变换下均保持不变的非平凡环测度（关于 μ_D^{loop} 的精确定义及其性质，参见 [14]）。

由式（1.1）中的配分函数描述的模型有两个物理相，取决于 λ：当 $\lambda > \frac{1}{2}$ 时为超临界相，当 $\lambda \leq \frac{1}{2}$ 时为亚临界相。在超临界相中，布朗环只有一个簇（也就是说，任意两个环都可以通过一串彼此相交的环连接起来），而所有环的并集的补集是全不连通集（即不包含大于单点的集合——参见 [15]）。在亚临界相中，布朗环有无穷多个簇，其外边界在局部上分布如同参数为 κ的 SLE 曲线，其中 $\kappa \in (\frac{8}{3}, 4]$,其中 κ取决于 λ，并满足关系 [16]

$$\lambda = \frac{(6-\kappa)(3\kappa-8)}{4\kappa} \ . \tag{1.2}$$

我们关注布朗环汤的亚临界相，预计可由中心荷为 $c \leq 1$ 的二维共形场论描述，其形式为

$$c = 2\lambda \ . \tag{1.3}$$

还值得一提的是，在极限 $\lambda \to 0$下，配分函数（1.1）的首项只包含单个布朗环的贡献。正如前文所述，人们猜想其外边界与 $O(n \to 0)$环模型中的自回避环重合，该环模型由 [2] 提出。在此极限下这两个模型的重合性质，已在 [11]中得到利用，从而将布朗环汤的若干关联函数表示为 $O(n \to 0)$ 环模型中所谓扭曲算符的关联函数；后者最初由 [17]计算。

布朗环汤的既有共形场论结果

二维共形场论可定义为一组局部算符，这些算符按照二维共形代数（亦称 Virasoro 代数）变换，并满足共形 Ward 恒等式以及由算符乘积展开（OPE） [18] 所表达的结合律等一致性条件。共形场论的主要目标之一，是根据无限维 Virasoro 代数的表示，对所有普适类进行完整分类；这一目标对统计力学具有重要意义。

因此，要找到一个描述布朗环汤中可观测量的共形场论，第一步是确定一组合适的局部算符。在这方面， [10, 12], 作者提出了两族体局部算符，我们将在下文回顾。

1. 分层算子 $O_\beta(z)$：具有左、右共形维数（Δ_β，Δ_β）的主算符，其中

$$\Delta_\beta = \frac{\lambda}{10}(1-\cos\beta)\ . \tag{1.4}$$

用布朗环来表示，$O_\beta(z) = \sum_\gamma \sigma_\gamma$，其中求和遍及所有布朗环$\gamma$ 它们绕着 z 转，而 $\sigma_\gamma = \pm 1$ 是与每个环相关联的随机符号 γ。我们将在第 2 节详细讨论这类算符。

2. 带电边缘算符 $\mathcal{E}^{(k)}_\beta(z)$：具有左、右共形维数（$\Delta_\beta + \frac{k}{3}$，$\Delta_\beta + \frac{k}{3}$）的主算符，其中 $k = 1,\ 2,\ 3$ ……。对于 $\beta = 0$，算符 $\mathcal{E}^{(k)}_0(z)$ 本质上会通过 z 插入 k 个布朗环的外边界，我们将 $\mathcal{E}_{(k)}(z) \equiv \mathcal{E}^{(k)}_0(z)$ 简称为边缘算符。在 $\beta \neq 0$ 的情况下，该算符会被“扭曲”：为每个绕着 z 的环赋予一个相位。

由于红外和紫外发散，这些算子的定义存在歧义，但可以通过引入截断使其变得严谨，随后可在关联函数中移除这些截断 [10, 12]。

此前关于布朗环汤中局部算子的研究主要涉及体算符，[13] 关于边界边缘算子的研究除外。本注记旨在进一步探讨边界算子的谱，以及如何用布朗环来诠释这一谱。

1.2 主要结果与计划

- 在第2节中，我们将上半平面上分层算子的二点函数 $O_\beta(z)$ 分解为共形块。下面总结本节的主要结果。

1. 我们写出 $O_{\beta_1}(z_1)$ 与 $O_{\beta_2}(z_2)$ 之间的 OPE，

$$O_{\beta_1}(z_1)O_{\beta_2}(z_2) \overset{z_1\to z_2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} |z_1-z_2|^{2\Delta_{12}+\frac{2k}{3}-2\Delta_{\beta_1}-2\Delta_{\beta_2}} \hat{C}_{O_{\beta_1}O_{\beta_2}\mathcal{E}^{(k)}_{\beta_1+\beta_2}} \mathcal{E}^{(k)}_{\beta_1+\beta_2}(z_2) + \dots\ , \tag{1.5}$$

ˆ其中 Δ_{12} 定义于（2.4a）中，而 $C_{O_{\beta_1}O_{\beta_2}\mathcal{E}^{(k)}_{\beta_1+\beta_2}}$ 是 OPE 系数，可以根据共形块展开逐一确定。式（1.5）中的上半平面 OPE 与其全平面对应形式 [11] 的主要区别在于，式（1.5）中不存在自旋非零的主算子，这是由上半平面上的共形不变性所要求的。

2. 我们将 $O_\beta(z)$ 的体-边界算符乘积展开写为，

$$O_\beta(z) \overset{z\to\bar{z}}{=} |z-\bar{z}|^{-2\Delta_\beta}\left(1+|z-\bar{z}|^2\left\{\frac{\Delta_\beta}{\lambda}T(x)+b^{(2)}_\beta Y(x)\right\} + \sum_{k=3}^{\infty}|z-\bar{z}|^k b^{(k)}_\beta e^{(k)}(x)+\dots\right), \tag{1.6}$$

其中 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$和 $T(x)$ 是边界应力能量张量。系数 $b^{(k)}_\beta$ 是 $O_\beta(z)$ 与初级边界算符之间的体-边界算符乘积展开系数。实际上，我们可以根据共形块展开，针对具体情况计算 $b^{(k)}_\beta$ 。

3. 对于 $\beta = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$，式（1.6）中出现的一些算符乘积展开系数为零：

$$b_{\pi n}^{(k)} = 0 \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}, k = 2 \ \text{and} \ 3, 5, 7, \dots \ . \tag{1.7}$$

当 $\beta = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ 时，上述 OPE 系数为零是显然的，而$O_\beta(z)$ 是恒等算子。对于 $\beta = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$，式 (1.7) 中 OPE 系数为零并非显然，而是由式 (2.21) 推导得出；而式 (2.20b) 本身是一个猜想。

4. 对于一般的 β，OPE（1.6）中有两个维数为 2 的算子： $T(x)$ 和 $Y(x)$。我们不知道 $Y(x)$ 在布朗环方面的物理意义，但对于 $\beta = \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ Y(x)$ 不会出现在 OPE （1.6）中，这是由式（1.7）导致的。

5. 根据 OPE（1.6），我们提出新的边界主算子 $Y(x)$ 和 $e^{(k)}(x)$，它们的维数为

$$\Delta^{(Y)} = 2 \quad \text{and} \quad \Delta_k^{(e)} = k \quad \text{for} \quad k = 3, 4, 5 \dots \ . \tag{1.8}$$

- 在第 3 节中，我们用布朗环测度 $\mu_{\text{环}\,\mathbb{H}}$ 来表示 $\langle O_\beta(z_1) O_{-\beta}(z_2) \rangle_{\mathbb{H}}$ 的共形块展开。这为将 $e_{(2k)}(x)$ 解释为插入在 x 处接触实轴的 k 布朗环的算符提供了一种方式。

- 在第 4 节中，我们讨论边缘算子 $\mathcal{E}_{(k)\,\beta}(z)$ 的统计学解释。算符乘积展开（1.5）表明，单点函数 $\langle \mathcal{E}_{(k)\,0}(z) \rangle$ 不为零。这与 [11], 中 $\mathcal{E}_{(k)\,0}(z)$ 的数学定义相矛盾，该定义给出 $\langle \mathcal{E}_{(k)\,0}(z) \rangle = 0$。我们提出了上半平面上 $\mathcal{E}_{(k)\,0}(z)$ 的一种新定义，其单点函数并非恒等于零。

- 在第5节中，我们将讨论这些结果的展望。

2 分层算子的二点函数

本节旨在研究分层算子的算符乘积展开 $O_\beta(z)$。具体而言，我们希望通过考察1.8）中所列维数对应的局部边界算子，写出这些算子的清单。为此，我们考虑 $O_\beta(z)$的体-边界算符乘积展开：在极限 $z \to \bar{z}$下，将 $O_\beta(z)$ 展开为这些边界算子的无穷级数。实际上，可以通过考察 $O_\beta(z)$的二点函数的共形块展开来实现。从 [11], 可得

$$\langle O_{\beta_1}(z_1) O_{\beta_2}(z_2) \rangle_{\mathbb{H}} = |z_1 - \bar{z}_2|^{-4\Delta_{\beta_1}} |z_2 - \bar{z}_2|^{2\Delta_{\beta_1} - 2\Delta_{\beta_2}} G_{\beta_1,\beta_2}(\sigma) \ , \tag{2.1}$$

其中交比 σ 定义为

$$\sigma = \frac{|z_1 - z_2|^2}{|z_1 - \bar{z}_2|^2} \tag{2.2}$$

函数$G_{\beta_1,\beta_2}(\sigma)$定义为

$$G_{\beta_1,\beta_2}(\sigma) = \sigma^{\Delta_{12} - \Delta_{\beta_1} - \Delta_{\beta_2}} (1-\sigma)^{-2\Delta_{\beta_1}} \exp\left\{ (\Delta_{12} - \Delta_{\beta_1} - \Delta_{\beta_2})(1-\sigma)\, {}_3F_2\left(1, 1, \frac{4}{3}; 2, \frac{5}{3}; 1-\sigma\right) \right\} , \tag{2.3}$$

其中我们引入了以下记号

$$\Delta_{ij} = \frac{\lambda}{10}(1 - \cos(\beta_i + \beta_j)) \ . \tag{2.4a}$$

此外，请注意，二点函数（2.1）在 $\beta_i \to \beta_i + 2\pi\mathbb{Z}$ 下保持不变。

上半平面上体算符的二点函数与全平面上的手征四点函数 $\mathbb{C}$ 满足相同的共形 Ward 恒等式 [19]。更确切地说，若 $o_{\beta_i}(z)$表示一个维数为 Δ_{β_i}的手征算符，则关联函数

$$\langle O_{\beta_1}(z_1)O_{\beta_2}(z_2)\rangle_{\mathbb{H}} \quad \text{and} \quad \langle o_{\beta_1}(z_1)o_{\beta_2}(z_2)o_{\beta_2}(\bar{z}_2)o_{\beta_1}(\bar{z}_1)\rangle_{\mathbb{C}} \tag{2.5}$$

满足相同的共形 Ward 恒等式。

接下来，回顾一下，全平面上的手征四点函数总可以分解为共形块 [20]。因此，我们可以将（2.1）中的二点函数展开为共形块 [21]。据此，我们可以将二点函数（2.1）的极限 $z_1 \to z_2$ 表示为（2.5）中四点函数的 s-道共形块的无穷级数，而（2.1）的极限 $z_2 \to \bar{z}_2$ 则可以展开为 t-道共形块。现在我们详细分析（2.1）的两个极限。

2.1 s道展开

我们从二点函数（2.1）在极限 $z_1 \to z_2$ 下对应的共形块展开入手，也就是说，当 $z_1 \to z_2$ 时，对（2.1）中的两个分层算子进行算符乘积展开。实际上，这等价于取（2.1）中的极限 $\sigma \to 0$ 。首先，我们考虑 $G_{\beta_1,\beta_2}(\sigma)$ 在极限 $\sigma \to 0$ 下的情形。由此可得

$$G_{\beta_1,\beta_2}(\sigma) \overset{\sigma\to 0}{=} \sigma^{-\Delta_{\beta_1}-\Delta_{\beta_2}} \sum_{k\in\frac{1}{3}\mathbb{N}} A_k \sigma^k \ , \tag{2.6}$$

其中， $\mathbb{N}$ 表示非负整数集合。上述展开中的前几个系数 A_k 为

$$A_0 = e^{-\frac{2\pi\left(\Delta_{\beta_1}+\Delta_{\beta_2}-\Delta_{12}\right)}{\sqrt{3}}} \ , \tag{2.7a}$$

$$A_{\frac{1}{3}} = \left(\Delta_{12}-\Delta_{\beta_1}-\Delta_{\beta_2}\right)\frac{2^{2/3}\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\sqrt{\pi}}A_0 \ , \tag{2.7b}$$

$$A_{\frac{2}{3}} = \frac{(A_{\frac{1}{3}})^2}{2!} \ , \tag{2.7c}$$

$$A_1 = \left(\Delta_{12}+\Delta_{\beta_1}-\Delta_{\beta_2}\right)A_0 + \frac{(A_{\frac{1}{3}})^3}{3!} \ , \tag{2.7d}$$

$$A_{\frac{4}{3}} = \left(\frac{1}{6}+\Delta_{12}+\Delta_{\beta_1}-\Delta_{\beta_2}\right)A_1 + \frac{(A_{\frac{1}{3}})^4}{4!} \ . \tag{2.7e}$$

因此，展开式（2.6）表明，二点函数（2.1）具有如下 s-道分解，

$$\langle O_{\beta_1}(z_1)O_{\beta_2}(z_2)\rangle_{\mathbb{H}} \overset{z_1\to z_2}{=} |z_1-\bar{z}_2|^{-4\Delta_{\beta_1}}|z_2-\bar{z}_2|^{2\Delta_{\beta_1}-2\Delta_{\beta_2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}\mathcal{F}^{(s)}_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}(\Delta_{\beta_1},\Delta_{\beta_2},\Delta_{\beta_2},\Delta_{\beta_1}|\sigma) \ , \tag{2.8}$$

其中，函数 $\mathcal{F}^{(s)}_{\Delta}(\Delta_{\beta_1},\Delta_{\beta_2},\Delta_{\beta_2},\Delta_{\beta_1}|\sigma)$ 表示维数为 s的 Δ-通道共形块， σ 是定义于式（2.2）中的交比，而$d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}$ 是待确定的结构常数。式（2.8）右侧求和中出现的共形维数，是根据式（2.6）中 σ 的幂次推导出来的。它们是出现在 OPE（1.5）中的体算符的共形维数。

为了确定式（2.8）中的 $d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}$，我们只需将展开式（2.8）与式（2.1）中的二点函数进行比较。首先，我们回顾 [21] 指出的内容： s-通道共形块可在 $\sigma=0$附近写成无穷幂级数，

$$\mathcal{F}_{\Delta}^{(s)}(\Delta_{\beta_1},\Delta_{\beta_2},\Delta_{\beta_2},\Delta_{\beta_1}|\sigma)=\sigma^{\Delta-\Delta_{\beta_1}-\Delta_{\beta_2}}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sigma^k\ . \tag{2.9}$$

计算系数有很多种方法 a_k （见2.9），例如， a_k 可以通过求解局部共形Ward恒等式 [20]来计算。在本文中，我们选择使用共形块的Zamolodchikov递归 [21] ——见附录A。原则上，这一递归可以让我们递归地确定所有系数 a_k 。

比较方程（2.1）、（2.8）、（2.9）和（2.6），我们得到一个以结构常数 $d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}$ 为未知数的线性方程组。对于非负整数-k，我们定义函数

$$h\left(\frac{k}{3}\right)=\sum_{\substack{\frac{j}{3}+m=\frac{k}{3}\\ j,m\in\mathbb{N}}}d_{\Delta_{12}+\frac{j}{3}}a_m-A_{\frac{k}{3}}\ . \tag{2.10}$$

于是，结构常数 $d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}$ 是下列方程的解

$$h\left(\frac{k}{3}\right)=h\left(\frac{k-1}{3}\right)=\ldots=h\left(\frac{1}{3}\right)=h(0)=0\ . \tag{2.11}$$

例如，我们得到

$$d_{\Delta_{12}}=A_0\ , \tag{2.12a}$$
$$d_{\Delta_{12}+\frac{1}{3}}=A_{\frac{1}{3}}\ , \tag{2.12b}$$
$$d_{\Delta_{12}+\frac{2}{3}}=\frac{(A_{\frac{1}{3}})^2}{2!}\ , \tag{2.12c}$$
$$d_{\Delta_{12}+1}=\frac{(A_{\frac{1}{3}})^3}{3!}+\frac{(\Delta_{\beta_2}-\Delta_{\beta_1})(\Delta_{\beta_1}-\Delta_{\beta_2}+\Delta_{12})}{\Delta_{12}}A_0\ , \tag{2.12d}$$
$$d_{\Delta_{12}+\frac{4}{3}}=\frac{(A_{\frac{1}{3}})^4}{4!}+\left\{\Delta_{\beta_1}-\Delta_{\beta_2}+\Delta_{12}+\frac{(3\Delta_{12}+3\Delta_{\beta_1}-3\Delta_{\beta_2}+1)^2}{3(1+3\Delta_{12})}\right\}A_{\frac{1}{3}}\ . \tag{2.12e}$$

我们已经计算了 $d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}$在 $k\leq 6$时的结果，但由于表达式过长，我们不展示 $k=5$、6 这些情形。现在，将算符乘积展开（1.5）代入（2.8），得到关系式

$$d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}=\hat{C}_{O_{\beta_1}O_{\beta_2}\mathcal{E}^{(k)}_{\beta_1+\beta_2}}\times R^{(k)}_{\beta_1+\beta_2}\quad\text{with}\quad\langle\mathcal{E}^{(k)}_{\beta}(z)\rangle=\frac{R^{(k)}_{\beta}}{|z-\bar{z}|^{2\Delta_\beta+\frac{2k}{3}}}\ . \tag{2.13}$$

ˆ原则上，我们可以通过考察全平面四点函数 $C_{O_{\beta_1}O_{\beta_2}\mathcal{E}^{(k)}_{\beta_1+\beta_2}}$ 来计算算符乘积展开系数 $\langle O_{\beta_1}O_{\beta_2}O_{\beta_1}O_{\beta_2}\rangle_{\mathbb{C}}$，而这已针对 β_1 的一些特殊取值完成，β_2 见 [11]。对于一般情形，[11]的结果表明，$\langle O_{\beta_1}O_{\beta_2}O_{\beta_1}O_{\beta_2}\rangle_{\mathbb{C}}$中的结构常数或许可以写成算符乘积展开系数乘积之和，但我们尚不清楚这种因子化是如何实现的。对于特殊情形 $\langle O_\pi(z_1)O_{-\pi}(z_2)\rangle$，情况稍好一些，ˆ在 $C_{O_\pi O_{-\pi}\mathcal{E}^{(k)}_0}$ 中确定了 $k\leq 6$ 的算符乘积展开系数，其形式为： [11]

$$\hat{C}_{O_\pi O_{-\pi}\mathcal{E}^{(k)}_0}=\frac{1}{k!}\left(\hat{C}_{O_\pi O_{-\pi}\mathcal{E}^{(1)}_0}\right)^{2k}\quad\text{for}\quad k\leq 6\quad\text{with}\quad\hat{C}_{O_\pi O_{-\pi}\mathcal{E}^{(1)}_0}=\frac{3^{3/4}\sqrt{\frac{2\pi}{5}}\sqrt{\lambda}}{\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}\ . \tag{2.14}$$

这使我们能够计算 $R_0^{(k)}$ 在（2.13）中的 $k \leq 6$,

$$R_0^{(k)} = (R_0^{(1)})^k \quad \text{with} \quad R_0^{(1)} = -e^{-\frac{4\pi\lambda}{5\sqrt{3}}}\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) . \tag{2.15}$$

人们很容易猜想 (2.15) 对任意 k都成立，但这一规律在 $k = 7$ 处不再成立。更确切地说，OPE 系数 $C_{O_\pi O_{-\pi}\mathcal{E}_0^{(7)}}$ 由 [11] 中的方程 (2.14) 给出，其表达式不再具有 (2.14) 的形式。利用该表达式，我们还计算了 $R^{(7)}_0$，结果发现它比 (2.15) 复杂得多。

此外，我们在此强调，我们的计算表明 $d_{\Delta_{12}+\frac{k}{3}}$ 对任意 k都不为零，这意味着算子 $\mathcal{E}_\beta^{(k)}(z)$ 具有非零单点函数，这与 $\mathcal{E}_\beta^{(k)}(z)$ 中 [12]的数学定义不一致。这意味着 $\mathcal{E}_\beta^{(k)}(z)$ 中 [12] 对 1.5）中上半平面上分层算子的 OPE4不一致。第 4 节中，我们将提出 $\mathcal{E}_\beta^{(k)}(z)$ 的新定义，使其与 OPE (1.5) 一致。

2.2 t道展开

我们接下来考虑 (2.1) 的极限 $z_2 \to \bar{z}_2$ ，或者等价地，将 (2.2) 中的交比 σ 趋近于 1。这个极限将给出布朗环汤中的一组新边界算子。首先，$G_{\beta_1,\beta_2}(\sigma)$ 的极限 $\sigma \to 1$ 意味着我们可以写成

$$G_{\beta_1,\beta_2}(\sigma) \overset{\sigma\to 1}{=} (1-\sigma)^{-2\Delta_{\beta_1}}\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k (1-\sigma)^k\right) , \tag{2.16}$$

其中系数 B_k 始终非零。回想一下， s道和 t道共形块之间存在如下关系

$$\mathcal{F}_\Delta^{(t)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma) = \mathcal{F}_\Delta^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_4}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_2}|1-\sigma) . \tag{2.17}$$

因此，利用上述关系以及方程 (2.9) 和 (2.16) 可知，(2.16) 可以展开为非负整数维数的共形块。因此，我们假设二点函数 (2.1) 的 t道分解可以写成如下形式：

$$\langle O_{\beta_1}(z_1) O_{\beta_2}(z_2)\rangle_{\mathbb{H}} \overset{z_2\to\bar{z}_2}{=} |z_1 - \bar{z}_2|^{-4\Delta_{\beta_1}} |z_2 - \bar{z}_2|^{2\Delta_{\beta_1} - 2\Delta_{\beta_2}} \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{\beta_1,\beta_2} \mathcal{F}_k^{(t)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_2}|\sigma) . \tag{2.18}$$

比较（2.1）、（2.16）和（2.18），我们得到关于结构常数 $D^{\beta_1}{}_{,k}{}^{\beta_2}$ 的线性方程组。不过，我们不再将其明确写出，因为计算与前面的 s 通道计算类似。对于一般的 β_1, β_2，我们发现 $D^{\beta_1}{}_{,k}{}^{\beta_2}$ 对任意 k 都不为零。就算符乘积展开而言，这意味着在 $O_{\beta_1}(z_1)$ 的体-边界算符乘积展开中，存在无穷多个非负整数维数的边界算子，如（1.6）所示。尽管如此，我们还是列出几个 $D^{\beta_1}{}_{,k}{}^{\beta_2}$ 的例子：

$$D_0^{\beta_1,\beta_2} = 1 , \tag{2.19a}$$

$$D_1^{\beta_1,\beta_2} = 0 , \tag{2.19b}$$

$$D_2^{\beta_1,\beta_2} = \frac{1}{10}(\Delta_{\beta_1} + \Delta_{\beta_2} - \Delta_{12}) - \frac{\Delta_{\beta_1}\Delta_{\beta_2}}{\lambda} , \tag{2.19c}$$

$$D_3^{\beta_1,\beta_2} = -\frac{1}{10}(\Delta_{\beta_1} + \Delta_{\beta_2} - \Delta_{12}) + \frac{\Delta_{\beta_1}\Delta_{\beta_2}}{\lambda} . \tag{2.19d}$$

注意，对于 $\beta_2 = -\beta_1 = \pi$， $D^{\beta_1}{}_{,2}{}^{\beta_2}$ 和 $D^{\beta_1}{}_{,3}{}^{\beta_2}$ 均为零。对于 β_1, β_2 的这些特殊取值，我们的结果意味着存在无穷多个为零的结构常数 $D^{\pi}{}_{,k}{}^{-\pi}$。在 $k \leq 7$ 的范围内，我们得到

$$D_0^{\pi,-\pi} = 1 \ , \tag{2.20a}$$
$$D_1^{\pi,-\pi} = D_2^{\pi,-\pi} = D_3^{\pi,-\pi} = D_5^{\pi,-\pi} = D_7^{\pi,-\pi} = 0 \ , \tag{2.20b}$$
$$D_4^{\pi,-\pi} = \frac{18\lambda^2}{6875(5\lambda+11)} \ , \tag{2.20c}$$
$$D_6^{\pi,-\pi} = \frac{\lambda^2(\lambda(15599\lambda-4362)-200)}{5843750(\lambda+12)(4\lambda-1)(7\lambda+34)} \ . \tag{2.20d}$$

因此，我们猜想

$$D_k^{\pi,-\pi} = 0 \quad \text{for} \quad k = 2 \ \text{ and } \ 3, 5, 7, \ldots \ . \tag{2.21}$$

回想一下，方程（2.1）中的二点函数在 $\beta_i \to \beta_i + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 下是不变的，方程（2.21）表明方程（1.7）中的 OPE 系数为零。

3 $e^{(2k)}$ 的概率解释

为了从布朗环的角度解释算子 $e^{(2k)}$，我们用布朗环测度 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}$ 重写布朗环汤配分函数（1.1）中的二点函数（2.1）。

根据 [10], ，利用该论文方程（4.3）上方展示的公式，经过简单计算可得

$$\langle O_{-\beta}(z_1) O_{\beta}(z_2) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle O_{-\beta}(z_1) \rangle_{\mathbb{H}} \langle O_{\beta}(z_2) \rangle_{\mathbb{H}} \ \exp\left\{ 2\lambda(1-\cos\beta) \ \mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}(z_1, z_2) \right\}, \tag{3.1}$$

其中，$\langle O_{\beta}(z) \rangle = |z - \bar{z}|^{-2\Delta_\beta}$ 和 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}(z_1, z_2)$ 表示所有包含于上半平面、同时绕过 z_1 和 z_2 并将它们与无穷远处分隔开的布朗环的 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}$ 测度。$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}(z_1, z_2)$ 有一个显式表达式，该表达式已在 [22], 中得到严格推导；为使讨论简洁明了，我们不再将其列出。容易验证，对于 $x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{loop}}(z_1, z_2)\Big|_{z_2 = x_2 + i\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2} \, \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z_1, x_2) + \ldots \ , \tag{3.2}$$

其中，$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}$在相差一个乘法常数的意义下，就是所谓的布朗泡测度，该测度由 [23], 和 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z, \ x)$引入；它是 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}$-测度，定义在所有从 x 到 x 、能将 z 与无穷远隔开的布朗游程上。此外，若 f 是上半平面到自身的共形变换，则有

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z, x) = |f'(x)|^2 \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(f(z), f(x)) \ . \tag{3.3}$$

也就是说，$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z, x)$ 在共形映射下变换为一个维数为 2 的边界准主算符。结合（3.1）和（3.2），我们得到

$$\frac{\langle O_{-\beta}(z_1) O_{\beta}(z_2) \rangle_{\mathbb{H}}}{\langle O_{\beta}(z_2) \rangle_{\mathbb{H}}}\Big|_{z_2 = x_2 + i\varepsilon} = \langle O_{-\beta}(z_1) \rangle_{\mathbb{H}} \Big\{ 1 + \lambda(1-\cos\beta) \mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z_1, x_2) \varepsilon^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k (1-\cos\beta)^k \big(\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z_1, x_2) \big)^k \varepsilon^{2k} + \ldots \Big\} . \tag{3.4}$$

现在我们将 $O_\beta(z_2)$的体-边界算符乘积展开，即方程（1.6），代入二点函数（2.1）中:

$$\frac{\langle O_{-\beta}(z_1)O_\beta(z_2)\rangle_{\mathbb{H}}}{\langle O_\beta(z_2)\rangle_{\mathbb{H}}}\Big|_{z_2=x_2+i\varepsilon} = \langle O_{-\beta}(z_1)\rangle_{\mathbb{H}} + \left\langle \left\{ \frac{\Delta_\beta}{\lambda} T(x_2) + b_\beta^{(2)} Y(x_2) \right\} O_{-\beta}(z_1) \right\rangle_{\mathbb{H}} (2\varepsilon)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} b_\beta^{(k)} \langle e^{(k)}(x_2) O_\beta(z_1)\rangle_{\mathbb{H}} (2\varepsilon)^k + \dots , \quad (3.5)$$

其中我们使用了 $\varepsilon = \frac{z_2-\bar{z}_2}{2i}$。接下来，回顾一下方程（ $b_\pi^{(k)}$对于$k=2$ 和 k 为奇数时，OPE 系数为零这一事实，见方程（1.7）。因此，在（ $\beta=\pi$ ）中取3.5后，只剩下边界应力能量张量 T（x_2）和主算符 $e^{(2k)}$（x_2）及其后裔态的贡献。最后，让我们将所得的 OPE 与方程（3.4）进行比较。

对于 $\beta=\pi$，边界应力能量张量 T（x_2）是方程（3.5）右侧唯一维数为 2 的准主算符。利用方程（3.3），我们便可以将 T（x_2）解释为一个在 x_2处插入布朗环外边界的算符，如 [13]中所述。换言之，我们可以写成

$$\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z_1,x_2) \propto \frac{\langle T(x_2)O_{-\pi}(z_1)\rangle_{\mathbb{H}}}{\langle O_{-\pi}(z_1)\rangle_{\mathbb{H}}} = \frac{\langle T(x_2)O_{\pi}(z_1)\rangle_{\mathbb{H}}}{\langle O_{\pi}(z_1)\rangle_{\mathbb{H}}} \ . \quad (3.6)$$

然后，由方程（3.3）可知， $\left(\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z_1,x_2)\right)^k$ 按维数为 $2k$的准主算符变换。对于 $\beta=\pi$，方程（3.5）右侧唯一维数为 $2k$ 的准主算符是 $e^{(2k)}(x_2)$ [1]。因此，我们提出如下物理解释：主算符 $e^{(2k)}(x_2)$是用于在 x_2处插入 k 个相互独立布朗环的外边界的算符。换言之，方程（3.5）中 $k\geq 3$取值为 $\langle e^{(2k)}(x_2)O_\beta(z_1)\rangle$ 的体-边界二点函数，对应于方程（3.4）中 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}$-测度的幂次:

$$\left(\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}(z_1,x_2)\right)^k \propto \frac{\langle e^{(2k)}(x_2)O_{\pi}(z_1)\rangle_{\mathbb{H}}}{\langle O_{\pi}(z_1)\rangle_{\mathbb{H}}} \ . \quad (3.7)$$

4 上半平面上的边缘算符

在 [12], 中，边缘算符被证明是由两个分层算子的算符乘积展开产生的。这一计算是在全平面上进行的，所得边缘算符的单点函数为零。文献 [12] 中给出的更一般区域上的边缘算符定义受到全平面定义的启发，因此， [12] 中的边缘算符在所有区域上的单点函数都为零。然而，这与分层算子在上半平面上的算符乘积展开不一致，见方程（1.5）。因此，本节提出并分析一种新的边缘算符定义，以解决这一不一致。

4.1 [12]的边缘算符

给定区域 D 中的布朗环汤，我们用 $\mathcal{N}_\varepsilon(z)$ 表示边界与 z 的距离小于 ε 的布朗环数量。由于布朗环汤具有尺度不变性， $\mathcal{N}_\varepsilon(z)$ 实际上是无穷大的，但可以通过引入紫外截断来去除微观尺度的小环，从而使其具有明确的意义。该过程在 [12], 中进行，其中边缘算符

[1]主算符是准主算符，但反之则不成立。

$\mathcal{E}=\mathcal{E}_{CFGk}$ 在有限区域 $D\subset\mathbb{C}$ 中的形式定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{CFGK}(z)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_\varepsilon^{-1}\frac{\hat{c}}{\sqrt{\lambda}}\Big(\mathcal{N}_\varepsilon(z)-\langle\mathcal{N}_\varepsilon(z)\rangle_D\Big)\ ,\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_\varepsilon^{-1}\frac{\hat{c}}{\sqrt{\lambda}}\Big(\mathcal{N}(z)-\lambda\mu_D^{\mathrm{loop}}(\ell\cap B_\varepsilon(z)\neq\emptyset)\Big),\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中， $\vartheta_\varepsilon\approx\varepsilon^{2/3}$ as $\varepsilon\to 0$、 $B_\varepsilon(z)$表示以 z为中心、半径为 ε 的圆盘，而ˆc 是一个常数，其取值使得 $\mathcal{E}_{CFGK}$ 在全平面上进行规范归一化。此外，我们将$\mu_D^{\mathrm{loop}}\big(\ell\cap B_\varepsilon(z)\neq\emptyset\big)$ 记作包含于区域 D内且边界与圆盘 $B_\varepsilon(z)$相交的布朗环的 μ_D^{loop} -测度。注意，

$$\langle\mathcal{N}_\varepsilon(z)\rangle_D=\lambda\mu_D^{\mathrm{loop}}(\ell\cap B_\varepsilon(z)\neq\emptyset)\tag{4.2}$$

这立即由以下事实得出： D 中的布朗环汤定义为强度测度为 $\lambda\mu_D^{\mathrm{loop}}$ 的泊松过程。

根据定义（4.1），显然， $\mathcal{E}_{CFGK}$ 的单点函数对于任意区域 D都为零。高阶边缘算子 $\mathcal{E}_0^{(k)}$ 的 [12]，（其中 $k>1$）本质上定义为（$\mathcal{E}_{CFGK}$）^{k}的正规序。正如 [12],中所述，由定义立即可知， $\mathcal{E}_0^{(k)}$ （z）的单点函数在任意区域中也为零。这些单点函数的消失显然与方程（1.5）在 $\beta_2=-\beta_1$时不相容，因此下面我们提出边缘算子的新定义。注意，高阶带电边缘算子 $\mathcal{E}_\beta^{(k)}$ 本质上是高阶边缘算子 $\mathcal{E}_0^{(k)}$ 与分层算子 O_β的乘积，因此其单点函数不会自动为零。例如， D中的简单带电边缘算子的单点函数为 $\langle\mathcal{E}O_\beta\rangle_D$。然而，重新定义无电边缘算子显然也会影响带电边缘算子。

4.2 边缘算符的新定义

我们提出如下重新定义：在 D 中，边缘算符 $\mathcal{E}(z)$ 定义为：

$$\mathcal{E}(z)=\mathcal{E}_{CFGK}(z)-\hat{c}\sqrt{\lambda}\lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_\varepsilon^{-1}\mu_{\mathbb{C}}^{\mathrm{loop}}(\ell\cap B_\varepsilon(z)\neq\emptyset\ \text{ and }\ \ell\cap(\mathbb{C}\setminus D)\neq\emptyset),\tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{E}_{CFGK}$ [12] $\mu_{\mathbb{C}}^{\mathrm{loop}}$ $\ell\cap B_\varepsilon$ z $\neq\emptyset$ $\ell\cap\ \mathbb{C}\setminus$表示 D $\mathbb{C}$ B_ε z 中定义的边缘算符，且 (() 和 ()) 分别是区域中边界同时与 ()和 $\mathbb{C}\setminus D$相交的布朗环的测度。区域 $D\neq\mathbb{C}$ 中这两个定义的区别在于，在新的定义中$\mathcal{E}(z)$ 我们减去了区域 $\mathbb{C}$ 中所有接近 z的环的权重，而不仅仅是那些包含在D中的环。根据此定义，区域 D 中边缘算符的单点函数为

$$\langle\mathcal{E}(z)\rangle_D=-\hat{c}\sqrt{\lambda}\lim_{\varepsilon\to 0}\vartheta_\varepsilon^{-1}\mu_{\mathbb{C}}^{\mathrm{loop}}(\ell\cap B_\varepsilon(z)\neq\emptyset\ \text{ and }\ \ell\cap(\mathbb{C}\setminus D)\neq\emptyset).\tag{4.4}$$

由 [12] 的引理 2.2 的证明可知，对于任意点 z 位于 D内部，(4.4) 中的极限存在，且是共形协变的，即对于任意与 D' 共形等价的 D,

$$\langle\mathcal{E}(z')\rangle_{D'}=|f'(z)|^{-\frac{2}{3}}\langle\mathcal{E}(z)\rangle_D,\tag{4.5}$$

其中 f 是从 D 到 D' 的任意共形映射，满足 $f(z)=z'$。由 (4.5) 可立即推出

$$\langle\mathcal{E}(z)\rangle_D=-\sqrt{\lambda}\,c_1\,\mathrm{rad}(z,D)^{-\frac{2}{3}},\tag{4.6}$$

其中 c_1 是一个常数，$\mathrm{rad}(z,\ D)$ 表示区域 D 从点$z \in D$出发的共形半径。为说明这一点，给定 $z \in D$，令 D' 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 并选取 $f:\ D \to \mathbb{D}$ 使得$f(z) = 0$。于是由 (4.5) 得

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}(z)\rangle_D &= \langle \mathcal{E}(0)\rangle_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^{\frac{2}{3}}, \\ &= \langle \mathcal{E}(0)\rangle_{\mathbb{D}} \,\mathrm{rad}(z,D)^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

当 D 是上半平面 $\mathbb{H}$ 时，$\mathrm{rad}(z,\mathbb{H}) = |z-\bar{z}|$，因此我们有

$$\langle \mathcal{E}(z)\rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle \mathcal{E}(0)\rangle_{\mathbb{D}}}{|z-\bar{z}|^{\frac{2}{3}}}, \tag{4.8}$$

这正是标度维数为$2_{\ 3}$的主算符的单点函数预期的行为。

可以按照定义 $\mathcal{E}$的相同方式，直接修改高阶边缘算子的定义，从而得到其单点函数在所有区域中都不会自动消失的算符。这个步骤消除了 [12] 的边缘算子定义与（1.5）中的算符乘积展开之间的不一致。

最后，我们简要考察新边缘算符的体-边界算符乘积展开。推导这样的算符乘积展开通常需要计算一个包含 $\mathcal{E}$的二点函数。使用共形场论技巧并不能直接做到这一点，但利用（4.3）中的边缘算符定义，我们可以写出 $\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_{CFGK}(z) + \langle \mathcal{E}(z)\rangle$，这意味着

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{E}(z)O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}} &= \langle \mathcal{E}_{CFGK}(z)O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}} + \langle \mathcal{E}(z)\rangle_{\mathbb{H}}\langle O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \langle \mathcal{E}_{CFGK}(z)O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}} + R_0^{(1)}\left|z-\bar{z}\right|^{-\frac{2}{3}}\langle O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

其中，在第二行中，我们将单点函数 $\langle \mathcal{E}(z)\rangle_{\mathbb{H}}$ 根据 $R_0^{(1)}$（如（2.13）所示）进行了改写。接下来，利用与 [12],定理 3.1 的证明中类似的环汤论证，可以证明

$$\langle \mathcal{E}_{CFGK}(z)O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}} \propto \langle O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}}\, \mu_{\mathbb{H}}^{\mathrm{bub}}(z',x)|z-\bar{z}|^{\frac{4}{3}} + \dots . \tag{4.10}$$

上一节中，我们知道边界应力能量张量 $T(x)$ 可以被确定为这样一个算符：它在点 x处插入布朗运动环的外边界。因此，利用（3.6）可将其写为

$$\langle \mathcal{E}(z)O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}} \overset{z\to\bar{z}}{=} |z-\bar{z}|^{-\frac{2}{3}}\left(R_0^{(1)}\langle O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}} + C\langle T(x)O_\beta(z')\rangle_{\mathbb{H}}|z-\bar{z}|^2 + \dots\right), \tag{4.11}$$

其中，C 是一个常数。从共形场论的角度来看，常数 C 是 $T(x)$ 与 $\mathcal{E}(z)$ 之间的体-边界算符乘积展开系数。利用边界应力能量张量的共形场论定义 $T(x)$，很容易证明 $C = \frac{2\Delta^{(\mathcal{E})}}{c} = \frac{1}{3\lambda^\circ}$ 因此，上述展开表明了 $\mathcal{E}(z)$ 的如下体-边界算符乘积展开：

$$\mathcal{E}(z) \overset{z\to\bar{z}}{=} |z-\bar{z}|^{-\frac{2}{3}}\left(R_0^{(1)} + \frac{2}{3\lambda}T(x)|z-\bar{z}|^2 + \dots\right). \tag{4.12}$$

与 [12], 的边缘算符表现为 $\mathcal{E}_{\mathrm{CFGK}}(z) \overset{z\to\bar{z}}{\sim} T(x)|z-\bar{z}|^{\frac{4}{3}}$ 不同，算符乘积展开（4.12）的主导算子是恒等算子，这是由于式（4.3）中多出的项所致。

5 展望

在本文中，我们为上半平面上的布朗环汤得到了 Y（x）和 $e^{(k)}$（x）（1.8中的一组新的边界算子。我们证明，$e^{(2k)}$（x）可以解释为在实轴上的点 k 处插入布朗环外边界的算子 x 。而 Y（x）和 $e^{(2k-1)}$（x）的物理解释仍不清楚。

$e^{(2k)}(x)$ 的关联函数

由于我们已经理解了 $e^{(2k)}(x)$ 的物理解释，因此计算它们的关联函数将很有意义；原则上，这些关联函数可以用 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}$-测度表示，正如第 3 节中对 $\langle e^{(2k)}(x_1)\, O_\beta(z_2)\rangle$ 所做的那样。对于体内对应算子 $\mathcal{E}_0^{(k)}(z)$，它们在 z点插入 k 布朗环的外边界，[12]的作者已经用出现在（1.1）中的布朗环测度 $\mu_{\mathbb{H}}$，明确写出了 $\mathcal{E}_0^{(k)}(z)$ 的关联函数。至于寻找 $e^{(2k)}(x)$ 与 $\mu_{\mathbb{H}}^{\text{bub}}$ 的关联函数之间的关系，以及它们的表达式，我们留待未来工作。

迈向布朗环汤的共形场论描述

尽管我们在列举与布朗环汤相关的共形场论谱中的边界局域算子方面取得了进展，但要理解共形场论的谱，不仅需要知道局部算子的列表，还需要了解模型对称性以及所有物理参数的取值范围。最后这两点尚未得到充分理解。在此，我们讨论超越当前认知的可能途径。

- β的物理取值范围：任何满足共形 Ward 恒等式的函数都可以分解为 Virasoro 共形块。然而，能够将一组函数分解为共形块，并不自动意味着这些函数能导出一致的算符乘积展开，也不意味着它们是一个完整共形场论的 n点函数。这一观察与分层算子有关。在引入分层算子的 [10], 中，研究表明，对于所有 n 以及参数 β_1、.....、β_n的所有取值，n点函数$\langle O_{\beta_1}(z_1)\ \ldots O_{\beta_n}(z_n)\rangle$ 均存在且具有共形协变性。然而，在全平面上，这些 n点函数只有在 $\sum_i \beta_i = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$时才非零；这一条件让人联想到电荷中性条件，后者保证顶点算子的 n点函数不为零。此外，根据 [11], 的先前结果，我们注意到，对于 $\beta = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$，关联函数 $O_\beta(z)$的某些结构常数可用算符乘积展开系数简单地因子化。上半平面二点函数 $\langle O_\pi(z_1)O_{-\pi}(z_2)\rangle$也有类似情形：其中某些结构常数因子化为来自 [11] 的算符乘积展开系数与式 (2.15) 中来自式 (2.13) 的一点函数系数的乘积。这或许表明，可以构造一个一致的共形场论来描述布朗环汤的各种可观测量，其谱中只包含满足 $\beta = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 的分层算子 $O_\beta(z)$。我们怀疑，对应于其他 β 取值的分层算子可能不属于一致共形场论的谱。

- **模型对称性：**.....的作者 [11]已证明，描述布朗环汤的假定共形场论（CFT）的谱包含无穷多个体主算符，其标度维数均为正整数。根据诺特定理，标度维数为 1 的主算符的存在与连续全局对称性相关。在布朗环汤中，相应的全局对称性究竟是什么仍不清楚。此外，高阶整数维数主算符的存在可能意味着高阶对称性。例如，三态波茨模型中存在一个标度维数为 3 的主算符，它与 $\mathcal{W}_3$–对称代数相关，该代数是 $\mathfrak{sl}_3$–Virasoro 代数的推广形式 [24]。布朗环汤是否具有与高阶整数维数主算符相关的高阶对称性，同样尚不清楚。或许，理解模型对称性的第一步是研究维数为 1 的主算符的关联函数。具体而言，根据 [25, 26], 我们预计，该算符二点函数的极限 $\lambda \to 0$ 与布朗环外边界所围区域的面积密度有关。

致谢

本项目于 2025 年夏季在波恩豪斯多夫数学研究所（HIM）访问期间启动。我们感谢 HIM 在“三个月项目‘量子场论中的概率方法’”期间给予的热情接待。该项目由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略资助，项目编号为 EXC-2047/1 - 390685813。R. N. 感谢 Max Downing、Jesper Lykke Jacobsen、Sylvain Ribault 和 Hubert Saleur 在相关项目中的合作，并感谢 Xin Sun 和 Gefei Cai 就布朗环汤进行的讨论。

A 共形块

我们解释如何计算 a_k 共形块的系数 $\mathcal{F}_\Delta^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma)$ 在（2.9）中。原则上，确定 a_k 需要计算该手征初级场的所有层级为k的后裔态 o_Δ 对该共形块的贡献，而计算很快就会变得十分繁琐，因为层级为 k 的后裔态数量 k等于整数分拆的大小，并且增长极快。

克服这一技术困难的一种方法是使用 [21]的扎莫洛奇科夫递归。在这一递归中，我们将共形块视为诺姆函数 $q(\sigma)$ 的无穷幂级数。对于 $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$，有

$$q(\sigma) = \exp\left\{-\pi \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-\sigma\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \sigma\right)}\right\}, \tag{A.1}$$

仅在本附录中，我们将中心荷 c和共形维数 Δ参数化如下：

$$\Delta(P) = \frac{c-1}{24} + P^2 \quad \text{and} \quad c = 1 - 6\left(b - b^{-1}\right)^2. \tag{A.2}$$

s道共形块的表达式于是为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\Delta^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma) = (16q)^{\Delta - \frac{c-1}{24}} \sigma^{\frac{c-1}{24} - \Delta_{\beta_1} - \Delta_{\beta_2}} (1-\sigma)^{\frac{c-1}{24} - \Delta_{\beta_1} - \Delta_{\beta_4}} \\ \times \theta_3(q)^{-4(\Delta_{\beta_1} + \Delta_{\beta_2} + \Delta_{\beta_3} + \Delta_{\beta_4})} \mathcal{H}_\Delta^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma),\end{aligned} \tag{A.3}$$

其中，$\theta_3(q)$ 是由 $\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ 给出的雅可比θ函数。此外，函数$\mathcal{H}_\Delta^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma)$ 通过以下递归定义

$$\mathcal{H}_\Delta^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(16q)^{mn}}{\Delta - \Delta_{(m,n)}} R_{m,n} \mathcal{H}_{\Delta_{(m,-n)}}^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma). \tag{A.4}$$

给定 $\Delta_{(r,s)} = \Delta(P_{(r,s)})$ 和 $P_{(r,s)} = \frac{1}{2}(rb - sb^{-1})$，系数 $R_{m,\,n}$ 为

$$R_{m,n} = \frac{-2P_{(0,0)}P_{(m,n)}}{\prod_{r=1-m}^{m}\prod_{s=1-n}^{n} 2P_{(r,s)}} \prod_{\pm}\prod_{r\overset{2}{=}1-m}^{m-1}\prod_{r\overset{2}{=}1-m}^{m-1} (P_2 \pm P_1 + P_{(r,s)})(P_3 \pm P_4 + P_{(r,s)}). \tag{A.5}$$

出现 $P_{(0,0)}$ 的写法是为了强调，在式（A.5）分母的乘积中，略去了含有 $(m,\ n) = (0, 0)$ 这一项。式（A.3）适合将共形块计算为关于 σ的幂级数。下面列出其首项：

$$\mathcal{F}_\Delta^{(s)}(\Delta_{\beta_1}, \Delta_{\beta_2}, \Delta_{\beta_3}, \Delta_{\beta_4}|\sigma) \overset{\sigma\to 0}{=} \sigma^{\Delta - \Delta_{\beta_1} - \Delta_{\beta_2}} \left(1 + \frac{(\Delta_{\beta_1} - \Delta_{\beta_2} + \Delta)(\Delta + \Delta_{\beta_4} - \Delta_{\beta_3})}{2\Delta}\sigma + \ldots\right). \tag{A.6}$$

利用式（A.3），通过蛮力计算，我们可以轻松得到最高至 σ^8 阶各项系数的解析表达式。

参考文献

[1] G. F. Lawler, W. Werner（2004） [doi:10.1007/s00440-003-0319-6]布朗环汤。《概率论及相关领域》128(4)，第565–588页（2, 3）[2] B. Nienhuis（1982） [doi:10.1103/PhysRevLett.49.1062]二维 O(n) 模型的精确临界点与临界指数。《物理评论快报》49，第1062–1065页（2, 3）[3] F. Camia, C. M. Newman（2004） [doi:10.1023/B:JOSS.0000037221.31328.75]连续统非简单环与二维临界渗流。《统计物理学杂志》116，第157–173页（2）[4] S. Sheffield（2009） [doi:10.1215/00127094-2009-007]探索树与共形环系综。《杜克数学杂志》147(1)，第79–129页（2）[5] S. Sheffield, W. Werner（2012） [doi:10.4007/annals.2012.176.3.8]共形环系综：马尔可夫刻画与环汤构造。《数学年刊》176，第1827–1917页（2）[6] O. Schramm（2000） [doi:10.1007/BF02803524]环擦除随机游走与均匀生成树的标度极限。《以色列数学杂志》118，第221–288页（2）

[7] S.Smirnov (2001) [doi:10.1016/S0764-4442(01)01991-7]平面上的临界渗流：共形不变性、*Cardy* 公式、标度极限.Comptes Rendus de l'Académie des Sciences- Series I -Mathematics 333 pp.239–244 (2)

[8] F. Camia, C. M. Newman (2004) [doi:10.1007/s00440-006-0049-7]临界渗流探索路径与 SLE：收敛性证明。Probab. Theory Relat. Fields 139 页 473–519 (2)[9]D. Chelkak, H. Duminil-Copin, C. Hongler, A. Kemppainen, S. Smirnov (2014)[doi:10.1016/j.crma.2013.12.002]伊辛界面收敛到 Schramm 的 SLE 曲线。数学报告 352(2) 页 157–161 (2)[10] F. Camia, A. Gandolfi, M. Kleban (2016) [doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.11.022]布朗环汤中的共形关联函数。《核物理 B》902 页 483–507 (2, 3, 4, 9, 13)[11] F. Camia, V. F. Foit, A. Gandolfi, M. Kleban (2020) [doi:10.1007/jhep07(2020)067]布朗环汤中的精确关联函数。《高能物理学杂志》2020(67) (2, 3, 4, 5, 7, 8, 13)[12] F. Camia, V. F. Foit, A. Gandolfi, M. Kleban (2022) [doi:10.1007/s00220-022-04611-7]布朗环汤中的标量共形初级场。《数学物理通讯》400(2) 页 977–1018 (2, 3, 4, 8, 10, 11, 12, 13)

[13] F. Camia, V. F. Foit, A. Gandolfi, M. Kleban (2022) [doi:10.1007/jhep11(2022)009]布朗环汤应力-能量张量。《高能物理学杂志》2022(11) (2, 4, 10)[14] W. Werner (2008) [doi:10.1090/S0894-0347-07-00557-7]自回避环上的共形不变测度。美国数学会杂志 21 页 137–168 (3)[15] E. I. Broman, F. Camia (2010) [doi:10.1214/EJP.v15-805]分形渗流模型中连通性性质的普适行为。概率电子期刊 15 页 1394–1414 (3)[16] W. Werner (2003) [doi:10.1016/j.crma.2003.08.003]SLE 作为布朗环簇的边界。数学报告 337(7) 页 481–486 (3)[17] J. J. H. Simmons, J. Cardy (2009) [doi:10.1088/1751-8113/42/23/235001]O(n)环模型中的扭曲算符关联函数。Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 42(23) 页 235001 (3)[18]A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov (1984) [doi:10.1016/0550-3213(84)90052-X]二维量子场论中的无限维共形对称性。《核物理 B》241 页 333–380 (3)[19] J. L. Cardy (1984) [doi:10.1016/0550-3213(84)90241-4]共形不变性与表面临界行为。《核物理 B》240(4) 页 514–532 (6)[20] S. Ribault (2014 review) [arXiv:1406.4290] [doi:10.48550/arXiv.1406.4290]平面上的共形场论 (6, 7)[21] A. Zamolodchikov (1984) [doi:10.1007/BF01214585]二维共形对称性：共形部分波振幅的显式递推公式。Commun. Math. Phys. 96 页 419–422 (6, 7, 14)[22] Y. Han, Y. Wang, M. Zinsmeister (2017) [doi:10.1007/s10955-019-02275-7]论布朗环测度。《统计物理学杂志》175 页 987–1005 (9)[23] G. Lawler, O. Schramm, W. Werner (2003) [doi:10.1090/s0894-0347-03-00430-2]共形限制：弦状情形。美国数学会杂志 16(4) 页 917–955 (9)[24] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal (1997 book) [doi:10.1007/978-1-4612-2256-9]共形场论 (13)[25] J. Cardy, R. Ziff (2003) [doi:10.1023/A:1021069209656]渗流、伊辛和 Potts模型中簇的普适面积分布的精确结果。《统计物理学杂志》110 页 1–33 (13)[26] J. L. Cardy (1994) [doi:10.1103/PhysRevLett.72.1580]自避环的平均面积。Phys. Rev. Lett. 72 页 1580–1583 (13)