arXiv:2601.02768v1 [math.CV] 6 Jan 2026

广义 Kausz 紧化与完全关联空间的自同构群

Hanlong Fang

中国北京，北京大学，邮编 *100871*

摘要

本文确定了广义 Kausz 紧化$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$的自同构群。通过证明$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$的反典范丛的（半）正性，我们还确定了广义完全关联空间$\mathcal{M}_{s,\ p,\ n}$的自同构群。本文的部分结果取自作者早期发表于 arXiv 的文章（Grassmann 流形的典范爆破，arXiv:2007.06200）。

关键词：自同构，爆破，格拉斯曼流形，正性

目录

1 引言 2 2 预备知识 8 2.1 $\mathrm{T}_{s,p,n}$ 之间的同构.9 2.2 Mille Crêpes 坐标.12 3 $\mathrm{T}_{s,p,n}$ 和 $\mathrm{M}_{s,p,n}$ 14 中的不变除子 3.1 $\mathrm{T}_{s,p,n}$ 上的显式 Białynicki-Birula 分解 . . . . . 14 3.2 G-稳定和 B-稳定除子.16 3.3 T-不变曲线.22 3.4 反典范丛的（半）正性 24

电子邮箱地址： hlfang@pku.edu.cn (HanlongFang)

4 $\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 和$\mathcal{M}_{s,\ p,\ n}$ **25**4.1 $\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 的自同构群.27 4.2 $\mathcal{M}_{s,\ p,\ n}$ 的自同构群.31

附录 **40**

交数的计算 **40**

1. 引言

完全关联空间是代数几何中的经典对象，它们紧化了最高秩线性映射空间。相关研究的历史至少可以追溯到 Study [32], Severi [30], Van der Waerden [36], 等人从枚举几何角度对完全圆锥曲线的研究。Vainsencher[35] 将完全共线变换空间描述为通过格拉斯曼流形的普吕克坐标定义的有理映射的闭包，并证明它们是 De Concini–Procesi [9]意义下的奇妙簇。奇妙簇在枚举几何 [10, 22, 29] 和球面簇理论 [20, 21, 5], 中发挥着重要作用，而伴随半单群的奇妙紧化则广泛应用于算术几何和表示论 [11, 31, 23]。然而，尽管奇妙紧化十分重要，对于超出伴随型的约化群，奇妙紧化并不存在。2000年，Kausz [19] 在推广奇妙紧化的过程中构造了一般线性群的模紧化。

文献 [16], 研究了 Kausz 紧化及其推广的优美几何，并建立了一个简洁统一的图景，将 Kausz 紧化与完全关联空间纳入其中。类似的思想随后也被进一步应用于其他模空间，例如 Faltings–Lafforgue空间 [17] 以及 Kollár–Shepherd-Barron–Alexeev 的带标记的三次曲面模空间 [14]。

确定模空间的自同构群一直是备受关注的研究课题。重要成果包括 Bruno 和 Mella 对 Knudsen–Mumford紧化 $M_{0,\ n}$ 以及 Bolognesi 和 Massarenti 对 $\mathbb{P}^1$ 上点配置的几何不变量理论商在标准线性化$\mathcal{O}(1,\cdots,1)$ 下的计算 [4]。此后的研究又涉及其他重要的紧化：Massarenti 给出了 [24]Deligne–Mumford紧化 $M_{g,\ n}$ 在 $\mathbb{C}$上的相应结果，而 Fantechi 和 Massarenti [12] 则将其推广到了正特征情形。

Hassett空间的自同构在特征零情形下由 Massarenti 和 Mella 确定 [28]，而在任意域上则由 Fantechi 和 Massarenti 确定 [13]。Massarenti 计算了 Fulton–MacPherson 紧化和抛物向量丛模空间的自同构群 [25], , Araujo 等人则分别完成了相应的计算。 [2], 在一系列工作中, Masserenti [26, 27] 计算了完全形式空间的自同构。

在本文中，我们将确定广义 Kausz 模紧化和广义完全共线变换空间的自同构群。

现在让我们更加精确地描述。设 E 是一个秩为 n 的自由 $\mathbb{Z}$-模。给定满足 $0 < p < n$ 的整数 p，考虑格拉斯曼流形 $Gr(p, E)$，它通过 Plücker嵌入嵌入射影空间 $\mathbb{P}(\bigwedge^p E)$ 中。一般线性群 $\mathrm{GL}(E)$ 在线性地作用于 $\bigwedge^p E$ 上，并且其在 $\mathbb{P}(\bigwedge^p E)$ 上的诱导作用稳定 $Gr(p, E)$。选取一个非平凡分解 $E = E_1 \oplus E_2$，并令 $s = \dim(E_1)$。于是我们得到分解

$$\bigwedge^p E := \bigoplus_{k=0}^{p} \bigwedge^k E_1 \otimes \bigwedge^{p-k} E_2. \tag{1}$$

子群 $G := \mathrm{GL}(E_1) \times \mathrm{GL}(E_2) \subset \mathrm{GL}(E)$ 稳定（1），其中各直和项是不可约的 G-模。我们导出一个有理 G-等变映射

$$\mathcal{K}(s, p, E) : Gr(p, E) \dashrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^p E) \times \prod_{k=0}^{p} \mathbb{P}(\bigwedge^k E_1 \otimes \bigwedge^{n-k} E_2). \tag{2}$$

这里约定，当 $\bigwedge^k E_1 \otimes \bigwedge^{n-k} E_2 = 0$ 时，$\mathbb{P}(\bigwedge^k E_1 \otimes \bigwedge^{n-k} E_2)$ 是一个点。记 $\mathcal{T}(s, p, E)$ 为有理映射 $\mathcal{K}(s, p, E)$ 的像的闭包。记 $\mathcal{M}(s, p, E)$ 为 $\mathcal{T}(s, p, E)$ 在自然投影下的像

$$\mathbb{P}(\bigwedge^p E) \times \prod_{k=0}^{p} \mathbb{P}(\bigwedge^k E_1 \otimes \bigwedge^{n-k} E_2) \longrightarrow \prod_{k=0}^{p} \mathbb{P}(\bigwedge^k E_1 \otimes \bigwedge^{n-k} E_2).$$

定义 *1.1.* 我们称 $T(s, p, E)$ 为广义 *Kausz* 紧化，称 $M(s, p, E)$ 为广义完全关联空间。若无歧义，我们分别将 $Gr(p, E)$、$T(s, p, E)$、$K(s, p, E)$、$M(s, p, E)$ 简写为$G(p, n)$、$T_{s,p,n}$、$K_{s,p,n}$、$M_{s,p,n}$。

根据 [16], $\mathcal{T}_{p,\ p,\ 2p}$ 同一般线性群 GL_p的 Kausz 紧化同构，而 $\mathcal{M}_{p,\ p,\ n}$ 同与从一个 p 维向量空间到一个 ([16],) 维向量空间的线性映射相关联的完全共线变换空间同构。

一般地，$\mathrm{T}_{s,p,n}$ 通过如下抛物诱导由 Kausz 紧化导出。定义有理映射 π_1：$Gr(p,E) \dashrightarrow Gr(p,E_1)$，将 $W \in Gr(p,E)$（其中 $W \cap E_2 = 0$）映射到 $\pi_1(W) \in Gr(p,E_1)$，使得 $W + E_2 = \pi_1(W) \oplus E_2$。$\pi_1$ 延拓为一个等变态射 f_1：$\mathrm{T}(s,p,E) \to Gr(p,E_1)$。将 $Gr(p,E_1)$ 视为 $\mathrm{GL}(E_1)$ 对某个子空间 $W \subset E_1$ 的稳定子之商，我们看到 f_1 是一个局部纤维化空间，其在 W 处的纤维为 $\mathrm{T}(p,p,W \oplus E_2)$。于是有

命题 *1.2*（[16]中的命题 *1.5*）。（*A*）如果 $p < n-s$ 且 $p < s$，则 $T_{s,p,n}$（分别为 $M_{s,p,n}$）是到 $G(p,s)$ 上的局部平凡纤维化，其纤维为 $T_{p,p,n-s+p}$（分别为 $M_{p,p,n-s+p}$）；并且是到 $G(p,n-s)$ 上的局部平凡纤维化，其纤维为 $T_{p,p,s+p}$（分别为 $M_{p,p,s+p}$）。

（*B*）如果 $n-s < p < s$，则 $T_{s,p,n}$（分别为 $M_{s,p,n}$）是到 $G(p,s)$ 上的局部平凡纤维化，其纤维为 $T_{n-s,n-s,n-s+p}$（分别为 $M_{n-s,n-s,n-s+p}$）；并且是到 $G(s+p-n,s)$ 上的局部平凡纤维化，其纤维为 $T_{n-s,n-s,2n-s-p}$（分别为 $M_{n-s,n-s,2n-s-p}$）。

(C) 若 $p = n-s < s$，$T_{s,\,p,\,n}$（分别为 $M_{s,\,p,\,n}$）是以$G(p,\ s)$为底、纤维为 $T_{p,\,p,\,2p}$（分别为 $M_{p,\,p,\,2p}$）的局部平凡纤维化。

下述定理揭示了$\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}$和$\mathcal{M}_{s,\,p,\,n}$的优美几何性质。

定理 1.3（[16]**中的定理 1.3**）。（*2*）的逆映射可延拓为正则态射

$$R_{s,p,n} : \mathcal{T}_{s,p,n} \longrightarrow G(p,n). \tag{3}$$

$T_{s,\,p,\,n}$ 在谱 $\mathbb{Z}$ 上是光滑且射影的，并带有 G 的作用。令

$$r = \min\{s, n-s, p, n-p\}. \tag{4}$$

那么，$T_{s,\,p,\,n}$ 中开 G-轨道的补集由 $2r$ 个光滑素除子组成，这些除子具有简单正规交叉 D_1^+，$\cdots$ D_r^+，D_1^-，$\cdots$ D_r^-，并满足以下性质。

(A) $D_1^+ \cong D_1^- \cong M_{s,\,p,\,n}$ 在谱 $\mathbb{Z}$上是光滑且射影的。

(B) 存在一个 G-等变平坦收缩映射

$$\mathcal{P}_{s,p,n} : \mathcal{T}_{s,p,n} \longrightarrow D_1^- \cong \mathcal{M}_{s,p,n} \tag{5}$$

使得限制 $P_{s,\,p,\,n}|_{D_1^+}$：$D_1^+ \to D_1^-$ 是一个同构，并且对于 $2 \le i \le r$，

$$\mathcal{P}_{s,p,n}(D_i^-) = \mathcal{P}_{s,p,n}(D_{r+2-i}^+) =: \check{D}_i$$

（C） G-轨道在 $T_{s,\ p,\ n}$ 中的闭包由下式一一对应给出

$$\left(\bigcap\nolimits_{i\in I^+} D_i^+\right)\bigcap\left(\bigcap\nolimits_{i\in I^-} D_i^-\right)$$

对于子集 $I^+, I^- \subset \{1, 2, \cdots\ r\}$，满足 $\min(I^+) + \min(I^-) \geq r+2$，约定 $\min(\emptyset) = +\infty$。

(D) D_1^- 是 *wonderful*，其 G-稳定除子为 $\check{}\ D_i$, $2 \leq i \leq r$。

在本文余下部分中，我们固定一个特征零代数闭域 $\mathbb{K}$ 。

通过将 $R_{s,\ p,\ n}$ 解释为爆破，我们首先推导出

推论 1.4. $T_{s,\ p,\ n}$ 的皮卡群由以下元素自由生成

$$\begin{cases} (R_{s,\ p,\ n})^*\mathcal{O}^{G(p,n)}(1)\ D_1^+, \cdots\ D_r^+, D_1^-, \cdots\ D_r^- & \text{当}\ \ p<s,\ \ n-s\neq p \\ (R_{s,\ p,\ n})^*\mathcal{O}^{G(p,n)}(1)\ \ D_1^+,\ \cdots\ D_r^+,\ D_1^-,\ \cdots\ D_{r-1}^- & \text{当}\ \ n-s=p<s \\ (R_{s,\ p,\ n})^*\mathcal{O}^{G(p,n)}(1)\ \ D_1^+,\ \cdots\ D_{r-1}^+,\ D_1^-,\ \cdots\ D_{r-1}^- & \text{当}\ \ n-s=p=s \end{cases}, \tag{6}$$

其中，$\mathcal{O}^{G(p,n)}(1)$ 是 $G\ (p,\ n)$ 上的超平面线丛。

推论 1.5。 $M_{s、\ p、\ n}$ 的皮卡群自由生成于

$$\begin{cases} (R_{s,p,n})^*\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)|_{\mathcal{M}_{s,p,n}}, \check{D}_1, \check{D}_2, \cdots, \check{D}_r & \text{when } p<s,\ n-s\neq p \\ (R_{s,p,n})^*\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)|_{\mathcal{M}_{s,p,n}}, \check{D}_1, \check{D}_2, \cdots, \check{D}_{r-1} & \text{when } n-s=p<s \\ \check{D}_1, \check{D}_2, \cdots, \check{D}_{r-1} & \text{when } n-s=p=s \end{cases}.$$

记 $\mathrm{Z}(n、\ \mathbb{K})$ 为 $\mathrm{GL}(n、\ \mathbb{K})$ 的中心。定义一般线性群 $\mathrm{GL}(n、\ \mathbb{K})$ 的一个子群如下:

$$\mathrm{GL}(s,\mathbb{K})\times\mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle| \ g_1\in\mathrm{GL}(s,\mathbb{K}), g_2\in\mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K}) \right\}.$$

众所周知，格拉斯曼流形 $G\ (p、\ n)$ 的自同构群在 $\mathrm{PGL}(n、\ \mathbb{K})$ 时为 $n\neq 2p$，而在 $\mathrm{PGL}(n、\ \mathbb{K})\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 时为 $n=2p$ [8]。

我们如下确定 $T_{s、\ p、\ n}$ 的对称性。

定理 1.6。 自同构群 $\mathrm{Aut}(T_{s、\ p、\ n})$ *of* $T_{s、\ p、\ n}$ 为

$$\mathrm{GL}(s,\mathbb{K})\times\mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K})\ \big/\mathrm{Z}(n,\mathbb{K})\ ,$$

除了以下情形外。

(A) (USD[1] 情形)。如果 $n = 2s$ 和 $s \neq p$,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{s,p,2s}) = \left(\mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K}) \Big/ \mathrm{Z}(n,\mathbb{K})\right) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

(B)（DUAL[2] 情形）。若 $n = 2p$ 且 $s \neq p$,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{s,p,2p}) = \left(\mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K}) \Big/ \mathrm{Z}(n,\mathbb{K})\right) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

(C)（USD+DUAL[3] 情形）。若 $n = 2s = 2p$ 且 $p \geq 2$,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{p,p,2p}) = \left(\mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K}) \Big/ \mathrm{Z}(n,\mathbb{K})\right) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ .$$

(D)（退化情形）。

(a). $T_{1,\ 1,\ 2} \cong \mathbb{P}^1$ 和自同构群($T^{1,1,2}$) = 射影一般线性群(2, $\mathbb{K}$)。(b). 对于 $m \geq 2$, $T_{m,\ 1,\ m+1} \cong T_{m,\ m,\ m+1} \cong T_{1,\ 1,\ m+1} \cong T_{1,\ m,\ m+1}$。它们的自同构群同构于以下射影一般线性群($n$, $\mathbb{K}$)的子群。

$$\left\{ \begin{pmatrix} V & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ V \in \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{K}) \, , \ \eta \text{ is a } (n-1) \times 1 \text{ matrix} \right\} . \quad (7)$$

为了确定$\mathcal{M}_{s,\ p,\ n}$的对称性，我们首先确立以下正性结果，这推广了 De Concini 和 Procesi [9]给出的$\mathcal{M}_{p,\ p,\ 2p}$ 的相应结果。

命题1.7。 $M_{s,\ p,\ n}$ 的反典范丛$-K_{\mathcal{M}_{s,\ p,\ n}}$ 是丰沛的。

命题1.8。 反典范丛 $-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}}$ 的 $\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 是大且数值有效的。 $-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}}$ 当且仅当秩 $r \leq 2$ （见（4））时是丰沛的。

现在，我们有

[1]USD 表示一种离散对称性，它将$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 上下颠倒。[2]DUAL 表示由 $G(p,\ 2p)$ 的对偶映射诱导的离散对称性。[3](A) 和 (B) 中的两种离散对称性在 (C) 中共存。

定理 1.9。 M_sAut(的自同构群, p, n) $M_{s,\ p,\ n}$ 是

$$\mathrm{PGL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})\,,$$

除以下情形外。

(A) (Usd[4] 情形)。若 $n = 2s$ 且 $p \neq s$,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{s,p,2s}) = (\mathrm{PGL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

(B) (Dual[5] 情形)。若 $n = 2p$ 且 $p \neq s$,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{s,p,2p}) = (\mathrm{PGL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

(C) (Usd+Dual[6] 情形)。若 $n = 2s = 2p$ 且 $p \geq 3$,

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{p,p,2p}) = (\mathrm{PGL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

(D) (退化情形)。

(a). $M_{1,1,2}$ 是一个点。(b). $M_{2,2,4} \cong \mathbb{P}^3$ 和 自同构群($M_{2,2,4}$) = 射影一般线性群(4, $\mathbb{K}$) 。

注意，Brion [7] 计算了$\mathcal{M}_{p,p,2p}$的自同构群，其中它是 PGL($p, \mathbb{K}$) 的美妙紧化。完全共线映射空间$\mathcal{M}_{p,p,n}$的自同构群最早由 Massarenti [26]确定。

我们现在简要介绍本文的结构和证明的基本思路。我们采用 [16] 中引入的 Mille Crêpes 坐标图，从空间$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 和$\mathcal{M}_{s,\ p,\ n}$中提取几何信息。结合 Brion 的结果——任意不可约完备球面簇上的有效循环锥都由其 B-轨道闭包的类生成——我们由此确定有效锥的极射线，以及线丛与环面不变曲线之间的交配对。由此类数值数据可得$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 的自同构。

[4]Usd 表示由对称变换$\mathcal{T}_{s,p,n}$ 上下翻转所诱导的离散对称性。[5]Dual 表示由 $G(p, 2p)$ 的对偶映射诱导的离散对称性。[6](A) 和 (B) 中的两种离散对称性在 (C) 中共存。

$\mathcal{M}_{s,\,p,\,n}$ 的情形则更为微妙。我们首先证明，任意 B-稳定除子的完全线性系都由相应的普吕克坐标函数生成。接下来，我们通过详细验证与环面不变曲线相关的所有交数，确立$\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}$ 的反典范丛的（半）正性。结合这两项结果与 Kawamata–Viehweg 消失定理，问题便归结为确定某些子格拉斯曼流形上的射影丛的特殊自同构。为完成证明，我们广泛运用格拉斯曼流形的几何性质，尤其是普吕克坐标和普吕克关系。

本文的组织结构如下。确定一些记号后，我们在 §2.1 中将 $\mathrm{T}_{s,p,n}$ 实现为 $G(p,n)$ 的迭代爆破，然后在这些空间上引入自然的群作用。在 §2.2 中，我们回顾文献 [16] 中介绍的 $\mathrm{T}_{s,p,n}$ 的 Mille Crêpes 坐标图。在 §3.1 中，我们回顾 $\mathrm{T}_{s,p,n}$ 上显式的 Białynicki-Birula 分解，并利用它为 $\mathrm{M}_{s,p,n}$ 引入 Usd 和 Dual 同构。在 §3.2 中，我们定义 $\mathrm{T}_{s,p,n}$ 和 $\mathrm{M}_{s,p,n}$ 上的 G-稳定和 B-稳定除子，并确定各种几何不变量的结构，例如皮卡群和典范丛。特别地，我们证明引理 3.9，该引理确定了 B-稳定除子的完全线性系。我们在 §3.3 中列举所有环面不变曲线，并计算它们对应的交数，再于 §3.4 中利用这一结果证明命题 1.7、1.8。最后，我们在 §4.1 中证明定理 1.6，并在 §4.2 中证明定理 1.9。为方便读者，附录 A 汇总了第 3.3 节中的交数。

致谢。 作者非常感谢匿名审稿人对稿件的认真审阅以及提出的宝贵意见。本研究得到国家重点研发计划（批准号：2022YFA1006700）和国家自然科学基金委员会项目（NSFC-12201012）的资助。

2. 预备知识

我们首先简要回顾 [16]中的一些记号。在本文中，不失一般性，设 $2p \le n \le 2s$，并称 $r := \min\{s,\ n-s,\ p,\ n-p\}$ 为$\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}$的秩。

定义一个指标集

$$\mathbb{I}_{p,n} := \{(i_1, i_2, \cdots, i_p) \in \mathbb{Z}^p : 1 \le i_p < i_{p-1} < \cdots < i_1 \le n\}.$$

对于 $I=(i_1,\cdots\ i_p)\in\mathbb{I}_{p,\ n}$，我们定义 普吕克坐标函数 P_I 在

$$\mathbb{A}^{pn}:=\mathrm{Spec}\mathbb{Z}\left[x_{ij}(1\leq i\leq p,1\leq j\leq n)\right]$$

为由第 i_1、$\cdots$、 i_p 列构成的 (x_{ij}) 的 $p\times p$ 子行列式。定义

$$\mathcal{G}(p,n):=\left\{\mathfrak{p}\in\mathbb{A}^{pn}:P_I\notin\mathfrak{p}\text{ for a certain }I\in\mathbb{I}_{p,n}\right\}.$$

对于 $(1,2,\cdots\ n)$ 的任意部分置换 $\Delta:=(\delta_1,\delta_2,\cdots\ \delta_p)$，定义 $\mathcal{G}(p,n)$ 的闭子概形

$$U_\Delta:=\mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\cdots,x_{ij},\cdots\right]/(x_{1\delta_1}-1,x_{1\delta_2},\cdots,x_{1\delta_p},\cdots,x_{p\delta_1},\cdots,x_{p\delta_p}-1)\right)$$

其嵌入记为 $e_\Delta:\ U_\Delta\hookrightarrow \mathbf{G}(p,n)$。将 U_Δ 与其在 $[\cdots\ P_I\circ e_\Delta$ 下的像 $\cdots]_{I\in\mathbb{I}_{p,n}}$ 等同，我们得到 Grassmannian $G(p,n)$ 的一个图册。将自然投影记为 $\pi:\mathbf{G}(p,n)\to G(p,n)$。对于 $x\in G(p,n)$，我们将原像 $\pi^{-1}(x)\subset\mathbf{G}(p,n)$ 中的任意元素记为 $\tilde{x}$。为简化记号，我们称 $\tilde{x}$ 为 x 的一个矩阵代表。

为方便起见，我们将 Plücker嵌入 $Gr(p,E)\to\mathbb{P}(\bigwedge^p E)$ 记作 $e:\ G(p,n)\hookrightarrow\mathbb{P}^{N_{p,n}}$，其中 $\mathbb{P}^{N_{p,n}}$ 是维数为 $N_{p,n}:=\ ^{n!}_{(n-p)!p!}-1$ 的射影空间，其齐次坐标为 $[\cdots\ z_I,\cdots]_{I\in\mathbb{I}_{p,n}}$。

对于 $0\leq k\leq r$ (参见4)，定义指标子集

$$\mathbb{I}^k_{s,p,n}:=\left\{(i_1,\cdots,i_p)\in\mathbb{Z}^p:1\leq i_p<\cdots<i_{k+1}\leq s\,;s+1\leq i_k<\cdots<i_1\leq n\right\}. \tag{8}$$

考虑 $\mathbb{P}^{N_{p,n}}$ 的如下线性子空间，

$$\left\{[\cdots,z_I,\cdots]_{I\in\mathbb{I}_{p,n}}\in\mathbb{P}^{N_{p,n}}:z_I=0\,,\ \forall I\notin\mathbb{I}^k_{s,p,n}\right\},\quad 0\leq k\leq r, \tag{9}$$

为方便起见，我们将（9）记作 $\mathbb{P}^{N^k_{s,p,n}}$，其中 $N^k_{s,p,n}=|\mathbb{I}^k_{s,p,n}|-1$，其齐次坐标记作 $[\cdots\ z_I,\ldots]_{I\in\mathbb{I}^k_{s,p,n}}$。

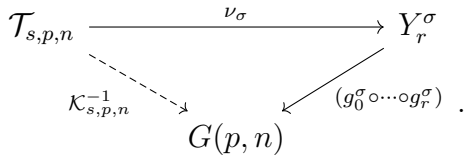
2.1. $\mathcal{T}_{s,p,n}$ 之间的同构

我们有如下将 $\mathcal{T}_{s,p,n}$ 构造为 $G(p,n)$ 的迭代爆破的另一种方法。对于 $0\leq k\leq r$，定义 $G(p,n)$ 的子概形如下：

$$S_k:=\left\{x\in G(p,n):\ P_I=0\ \forall I\in\mathbb{I}^k_{s,p,n}\right\}. \tag{10}$$

对于 σ 对 $\{0,\ 1,\ \cdots\ r\}$的任意排列，令 $g^\sigma_0:\ Y^\sigma_0\to G(p,\ n)$ 为沿着 $S_{\sigma(0)}$ 对 $G(p,\ n)$ 进行的爆破，并归纳定义 $g^\sigma_{i+1}:\ Y^\sigma_{i+1}\to Y^\sigma_i$, $0\leq i\leq r-1$,

为沿着 $(g_0^\sigma \circ g_1^\sigma \circ \cdots \circ g_i^\sigma)^{-1}(S_{\sigma(i+1)})$ 对 Y_i^σ 进行的爆破。显然， Y_r^σ 与 σ 的选择无关。此外，对于任意排列 σ，存在一个同构 $\nu_\sigma : \mathcal{T}_{s,\ p,\ n} \to Y_r^\sigma$，使得下图交换。



特别地，存在一个态射 $R_{s,p,n} : \mathbf{T}_{s,p,n} \to G(p,n)$，将 $\mathbf{K}_s^{-1}{}_{,p,n}$延拓。显然， $R_{s,p,n}$ 也可由 $\mathbf{T}_{s,p,n}$ 到环境空间 $\mathbb{P}^{N_p}{}_{,n} \times \mathbb{P}^{N_s^0}{}_{,p,}{}^{n} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_s^r}{}_{,p,}{}^{n}$第一因子的投影 $\mathbb{P}^{N_p}{}_{,}{}^{n}$ 给出。

回忆一下， n维空间V中的每个 p维子空间 W 都确定一个 $(n-p)$维商空间 V/W。取对偶后得到一个包含关系 $(V/W)^*$，$\to V^*$。因此，我们有典范同构

$$^* : \quad Gr(p,V) \cong Gr(n-p,V^*). \tag{11}$$

接下来，我们首先将 (11) 延拓为 $\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 与$\mathcal{T}$ $_{s\ n-p\ n}$ $0 \le k \le p$ $I = \ i_1 \quad i_p \ \in \mathbb{I}_{s\ p\ n}^k$ $I^* = \ i_1^* \quad i_{n-p}^* \ \in$,,之间的同构。对于 和 (, ·· $\mathbb{I}_s^{s-k}$ $_n$ ·) ,, 令 (, ···) , $_{n-p,}$ 满足

$$\left\{i_1, \cdots, i_p, i_1^*, \cdots, i_{n-p}^*\right\} = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

定义一个同构 g_k： $\mathbb{P}^{N_s^k}{}_{,p,n} \to \mathbb{P}^{N_s^{s-k}}{}_{n-p,,}{}^{n}$ 如下

$$g_k\left(\left[\cdots, z_I^k, \cdots\right]_{I \in \mathbb{I}_{s,p,n}^k}\right) := \left[\cdots, (-1)^{\sigma(I)} \cdot \underset{\uparrow}{z_{I^*}^{s-k}}, \cdots\right]_{I^* \in \mathbb{I}_{s,n-p,n}^{s-k}},$$

其中， $\sigma(I)$ 是排列 $i_1 \cdots \quad i_p \quad i_1^* \quad i_{n-p}^* \cdots\cdots p \quad p+1 \cdots n$ 的符号，而 $\left[\cdots \quad z_I^k, \cdots\right]_{I \in \mathbb{I}_s^k}{}_{,p,n}$ 和 $\left[\cdots \quad z_{I^*}^{s-k}, \cdots\right]_{I^* \in \mathbb{I}_s^{s-k}}{}_{,n-p,n}$ 分别是 $\mathbb{P}^{N_s^k}{}_{,p,}{}^{n}$ 和 $\mathbb{P}^{N_s^{s-k}}{}_{,n-p,}{}^{n}$ 的齐次坐标。现在我们定义一个同构 $\frown$DUAL： $G(p,n) \times \mathbb{P}^{N_s^0}{}_{,p,}{}^{n} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_s^p}{}_{,p,}{}^{n} \to G(n-p,n) \times \mathbb{P}^{N_s^0}{}_{,n-p,}{}^{n} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_s^{n-p}}{}_{,n-p,n,}$ 如下所示。设 $a = \left(x, \left[\cdots \quad z_I^0, \cdots\right]_{I \in \mathbb{I}_s^0}{}_{,p,n}, \cdots, \left[\cdots \quad z_I^p, \cdots\right]_{I \in \mathbb{I}_s^p}{}_{,p,n}\right) \in G(p,n) \times \mathbb{P}^{N_s^0}{}_{,p,}$ $_n \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_s^p}{}_{,p,}{}^{n}$。 $\frown$DUAL(a) 的 $G(n-p,n)$ 分量为 x^*。定义

$\widetilde{\text{DUAL}}(a)$ 的 $\mathbb{P}^{N^k_{s,n-p,n}}$-分量为

$$\left[\cdots, z^k_{I^*}\left(\widetilde{\text{DUAL}}(a)\right), \cdots\right]_{I^*\in\mathbb{I}^k_{s,n-p,n}} = g_{s-k}\left(\left[\cdots, z^{s-k}_I, \cdots\right]_{I\in\mathbb{I}^{s-k}_{s,p,n}}\right),$$

当 $\max\{0, n-s-p\} \le k \le \min\{n-s, n-p\}$。若 $n-s < k \le n-p$ 或 $0 \le k < n-s-p$，则 $\mathbb{I}^k s, n-p, n = \emptyset$。在此情形下，按照约定，射影空间 $\mathbb{P}^{N^k s,n-p,^n}$ 是单点 c_k，并定义 DUAL(a) 的 $\mathbb{P}^{N^k_{s,n-p,^n}}$-$\widetilde{\ }$ 分量为 c_k。

定义-引理 2.1。DUAL 的限制诱导出一个从 $T_{s,p,n}$ 到 $T_{s,n-p,n}$ 的同构DUAL，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{s,p,n} & \xrightarrow{\text{DUAL}} & \mathcal{T}_{s,n-p,n} \\ {\scriptstyle R_{s,p,n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R_{s,n-p,n}} \\ G(p,n) & \xrightarrow{\ ^*\ } & G(n-p,n) \end{array}.$$

引理的证明 2.1。只需证明，在$\widetilde{\ }$DUAL 作用下，$\mathcal{T}_{s,p,n}$ 的像包含于$\mathcal{T}_{s,n-p,n}$。

对于每个 $x \in Gr(p,V) \cong G(p,n)$，令 $\tilde{x}$ 为 x 的矩阵代表，并令 $\widetilde{x^*}$ 为 $x^* \in Gr(n-p,V^*) \cong G(n-p,n)$ 的矩阵代表。那么，用矩阵乘法表示，对偶映射可由下式刻画

$$\tilde{x} \cdot \left(\widetilde{x^*}\right)^T = 0,$$

这里 $\left(\widetilde{x^*}\right)^T$ 是矩阵 $\widetilde{x^*}$的转置，0 是 $p\times(n-p)$ 零矩阵。

考虑 $G(p, n)$ 的以下开集，

$$U := \left\{ \left(I_{p\times p} \,\middle|\, A \right) \,\middle|\, A \text{ is a } p\times(n-p) \text{ matrix} \right\}.$$

记 U 在对偶映射 *下的像为 U^*。那么，

$$U^* = \left\{ \left(-A^T \,\middle|\, I_{(n-p)\times(n-p)} \right) \,\middle|\, A \text{ is a } p\times(n-p) \text{ matrix} \right\},$$

而对偶映射的形式为

$$\left(I_{p\times p} \,\middle|\, A \right)^* = \left(-A^T \,\middle|\, I_{(n-p)\times(n-p)} \right). \tag{12}$$

分别计算 U 和 U^* 在双有理映射 $\mathcal{K}_{s,p,n}$ 和$\mathcal{K}_{s,n-p,n}$ 下的像，可得引理 2.1。 ∎

以类似的方式，我们将如下引入另一个同构。令$\mathfrak{E}=(e_{ij})$为一个 $n\times n$ 反对角矩阵，其中 $e_{ij}=1$ 当 $j+i=n+1$ 时成立，其他情况下为 0。对于 $0\le k\le p$ 和 $I=(i_1,\ldots\ldots\ i_p)\in\mathbb{I}^k_{s,\ p,\ n}$，定义

$$I^*:=(n+1-i_p,n+1-i_{p-1},\cdots,n+1-i_2,n+1-i_1)\in\mathbb{I}^{p-k}_{n-s,p,n}\,.$$

对于 $0\le k\le p$，定义同构 g_k：$\mathbb{P}^{N^k_s}{}_{,p,n}\to\mathbb{P}^{N^{p-k}_{n-s}}{}_{,p,n}$，其定义为 $z^{p-k}_{I^*}=z^k_I$，其中 $[\ldots\ldots\ z^k_I,\ \ldots\ldots]_{I\in\mathbb{I}^k_{s,p,n}}$和 $[\ldots\ldots\ z^{p-k}_{I^*},\ \ldots\ldots]_{I^*\in\mathbb{I}^{p-k}_{n-s},p,n}$ 分别是 $\mathbb{P}^{N^k_s}{}_{,p,n}$ 和 $\mathbb{P}^{N^{p-k}_{n-s}}{}_{,p,n}$ 的齐次坐标。我们定义一个同构

$\widetilde{\text{USD}}$: $G(p,\ n)\times\mathbb{P}^{N^0_{s,p,n}}\times\ldots\ldots\times\mathbb{P}^{N^p_{s,p}{}^n}\to G(p,\ n)\times\mathbb{P}^{N^0_{n-s,p}{}^n}\times\ldots\ldots\times\mathbb{P}^{N^p_{n-s,p,n}}$ 如下。令 $a=\left(x,[\cdots\ \ z^0_I,\ldots]_{I\in\mathbb{I}^0_{s,p,n}},\cdots,[\cdots\ \ z^p_I,\ldots]_{I\in\mathbb{I}^p_{s,p,n}}\right)\in G(p,n)\times\mathbb{P}^{N^0_{s,p,n}}\times\cdots\times\mathbb{P}^{N^p_{s,p,n}}$。$\widetilde{\text{USD}}(a)$ 的 $G(p,n)$ 分量为 $\mathfrak{E}\cdot x$。将 $\widetilde{\text{USD}}(a)$ 的 $\mathbb{P}^{N^k_{n-s,p,n}}$ 分量定义为

$$\left[\cdots,z^k_{I^*}\left(\widetilde{\text{USD}}(a)\right),\cdots\right]_{I^*\in\mathbb{I}^k_{n-s,p,n}}=g_{p-k}\left(\left[\cdots,z^{p-k}_I,\cdots\right]_{I\in\mathbb{I}^{p-k}_{s,p,n}}\right),$$

当 $\max\{0,s+p-n\}\le k\le\min\{p,s\}$ 时。如果 $s<k\le p$ 或 $0\le k<s+p-n$，我们将 $\widetilde{\text{USD}}(a)$ 的 $\mathbb{P}^{N^k_{n-s,p,n}}$ 分量定义为 $\mathbb{P}^{N^k_{n-s,p,n}}$ 中的唯一一点。类似地，我们有

定义-引理 2.2. $\widetilde{\text{USD}}$ 诱导出一个同构 $\widetilde{\text{USD}}:\mathcal{T}_{s,p,n}\to\mathcal{T}_{n-s,p,n}$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{T}_{s,p,n} & \xrightarrow{\widetilde{\text{USD}}} & \mathcal{T}_{n-s,p,n}\\ \downarrow{\scriptstyle R_{s,p,n}} & & \downarrow{\scriptstyle R_{n-s,p,n}}\\ G(p,n) & \xrightarrow{\mathfrak{E}} & G(p,n)\end{array}\,.$$

2.2. Mille Crêpes 坐标

在本节中，我们回顾 [16] 中定义的$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 的光滑图册。其思路是将 $\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 局部表示为一系列爆破，使得连续两次爆破之间的过渡本质上就是高斯消元过程。反向构造坐标图时，将所有得到的矩阵相加，以整合中间步骤，这

类似于将薄如纸的可丽饼和甘纳许一层层叠在一起（因此我们将这类坐标称为千层酥）。

为方便起见，对于任意 $x \in G(p,\ n)$，我们将函数 $P_l(\tilde{x})$ 记作 $P_l(x)$，因为它们的使用方式使得 $\tilde{x}$ 的选择无关紧要。

我们将 Mille Crêpes 坐标图在群作用意义下定义如下。对于 $0 \le l \le r$，定义仿射开子概形 $U_l \subset G(p,\ n)$ 为

$$U_l := \{ \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} Z \\ Y \end{matrix}}_{s-p+l \text{ columns}} & \vdots & \begin{matrix} 0 \\ I_{(p-l)\times(p-l)} \end{matrix} & \vdots & \begin{matrix} I_{l\times l} \\ 0 \end{matrix} & \vdots & \underbrace{\begin{matrix} X \\ W \end{matrix}}_{(n-s-l) \text{ columns}} \end{pmatrix} \} \tag{13}$$

其坐标为

$$Z := (\cdots, z_{ij}, \cdots)_{1\le i\le l,\, 1\le j\le s-p-l}, \qquad X := (\cdots, x_{ij}, \cdots)_{1\le i\le l,\, s+l+1\le j\le n},$$
$$Y := (\cdots, y_{ij}, \cdots)_{l+1\le i\le p,\, 1\le j\le s-p-l}, \quad W := (\cdots, w_{ij}, \cdots)_{l+1\le i\le p,\, s+l+1\le j\le n}.$$

对于 $0 \le l \le r$，我们定义指标集

$$\mathbb{J}_l := \left\{ \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} (i_1, \cdots, i_{r-l}) \text{ is a partial permutation of } (l+1, \cdots, p) \\ (i_{r-l+1}, \cdots, i_p) \text{ is a permutation of } (1, \cdots, l) \\ (j_1, \cdots, j_{r-l}) \text{ is a partial permutation of } (s+l+1, \cdots, n) \\ (j_{r-l+1}, \cdots, j_r) \text{ is a partial permutation of } (1, \cdots, s-p+l) \end{matrix} \right\}.$$

对于每个 $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \in \mathbb{J}_l$，令 $\mathbb{A}^{p(n-p)} :=$ 谱 $\mathbb{Z}[\overrightarrow{A}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}, \overrightarrow{B}^1, \cdots \overrightarrow{B}^r]$，其中

$$\overrightarrow{A} := \left((b_{i_k j_k})_{1\le k\le r-l}, (a_{i_k j_k})_{r-l+1\le k\le r}\right),$$
$$\widetilde{X} := (\cdots, x_{ij}, \cdots)_{1\le i\le l,\, s+l+1\le j\le n}, \quad \widetilde{Y} := (\cdots, y_{ij}, \cdots)_{l+1\le i\le p,\, 1\le j\le s-p-l},$$

for $1 \le k \le r-l$,

$$\overrightarrow{B}^k := \left((\xi^{(k)}_{i_k j})_{s+l+1\le j\le n,\, j\ne j_1, j_2, \cdots, j_k},\ (\xi^{(k)}_{i j_k})_{l+1\le i\le p,\, i\ne i_1, i_2, \cdots, i_k} \right),$$

对于 $r-l+1 \le k \le r$，以及

$$\overrightarrow{B}^k := \left((\xi^{(k)}_{i_k j})_{1\le j\le s-p+l,\, j\ne j_{r-l+1}, j_{r-l+2}, \cdots, j_k},\ (\xi^{(k)}_{i j_k})_{1\le i\le l,\, i\ne i_{r-l+1}, i_{r-l+2}, \cdots, i_k} \right).$$

定义映射 $\Gamma_l^\tau \colon \mathbb{A}^{p(n-p)} \to U_l$，其定义如下：

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=r-l+1}^{r} \left(\prod_{t=r-l+1}^{k} a_{i_t j_t} \right) \cdot \Xi_k^T \cdot \Omega_k & 0_{l\times(p-l)} & I_{l\times l} & \widetilde{X} \\ \widetilde{Y} & I_{(p-l)\times(p-l)} & 0_{(p-l)\times l} & \sum_{k=1}^{r-l} \left(\prod_{t=1}^{k} b_{i_t j_t} \right) \cdot \Xi_k^T \cdot \Omega_k \end{pmatrix}.$$

这里，对于 $1 \leq k \leq r-l$, $\Xi_k := \begin{pmatrix} v_{l+1}^k, \cdots & v_p^k \end{pmatrix}$，满足

$$v_t^k = \begin{cases} \xi_{tj_k}^{(k)} & t \in \{l+1, l+2, \cdots, p\} \backslash \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \\ 0 & t \in \{i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}\} \\ 1 & t = i_k \end{cases},$$

以及 $\Omega_k := \begin{pmatrix} w_{s+l+1}^k, \cdots & w_n^k \end{pmatrix}$ 与

$$w_t^k = \begin{cases} \xi_{i_k t}^{(k)} & t \in \{s+l+1, s+l+2, \cdots, n\} \backslash \{j_1, j_2, \cdots, j_k\} \\ 0 & t \in \{j_1, j_2, \cdots, j_{k-1}\} \\ 1 & t = j_k \end{cases};$$

对于 $r-l+1 \leq k \leq r$, $\Xi_k := \begin{pmatrix} v_1^k, \cdots & v_l^k \end{pmatrix}$ 与

$$v_t^k = \begin{cases} \xi_{tj_k}^{(k)} & t \in \{1, 2, \cdots, l\} \backslash \{i_{r-l+1}, i_{r-l+2}, \cdots, i_k\} \\ 0 & t \in \{i_{r-l+1}, i_{r-l+2}, \cdots, i_{k-1}\} \\ 1 & t = i_k \end{cases},$$

以及 $\Omega_k := \begin{pmatrix} w_1^k, \cdots & w_{s-p+l}^k \end{pmatrix}$ 与

$$w_t^k = \begin{cases} \xi_{i_k t}^{(k)} & t \in \{1, 2, \cdots, s-p+l\} \backslash \{j_{r-l+1}, j_{r-l+2}, \cdots, j_k\} \\ 0 & t \in \{j_{r-l+1}, j_{r-l+2}, \cdots, j_{k-1}\} \\ 1 & t = j_k \end{cases}.$$

我们定义有理映射 J_l^τ: $\mathbb{A}^{p(n-p)} \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_p}{}_{,n} \times \mathbb{P}^{N_s^0}{}_{,p,n} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_s^r}{}_{,p,n}$, 其定义为 $J_l^\tau := \mathrm{K}_{s,p,n} \circ \Gamma_l^\tau$。我们可以证明，有理映射 J_l^τ 是 $\mathbb{A}^{p(n-p)}$ 的一个嵌入。记 A^τ 为 $\mathbb{A}^{p(n-p)}$ 在 J_l^τ 下的像。显然，$\{(\mathrm{A}^\tau, (J_l^\tau)^{-1})\}_{\tau \in \mathbb{J}_l}$ 是 $R_s^{-1}{}_{,p,n}(U_l)$ 的一组坐标图，其中 $(J_l^\tau)^{-1} : \mathrm{A}^\tau \to \mathbb{A}^{p(n-p)}$ 是逆映射。我们还可以证明 $\bigcup_{\tau \in \mathbb{J}_l} \mathrm{A}^\tau = R_s^{-1}{}_{,p,n}(U_l)$，因此 $\{(\mathrm{A}^\tau, (J_l^\tau)^{-1})\}_{\tau \in \mathbb{J}_l}$ 是 $R_s^{-1}{}_{,p,n}(U_l)$ 的一个图册。

定义 2.3. 我们将 $\{(A^\tau, (J_l^\tau)^{-1})\}_{\tau \in \mathbb{J}_l}$ 称为 $R_s^{-1}{}_{,p,n}(U_l)$ 的 ***Mille Crêpes*** 坐标图，或简称 ***Mille Crêpes*** 坐标。

3. 在 $\mathcal{T}_{s,p,n}$ 和 $\mathcal{M}_{s,p,n}$ 中的不变除子

3.1. 上的显式 *Białynicki-Birula* 分解 $\mathcal{T}_{s,p,n}$

在本节中，我们回顾 $\mathcal{T}_{s,p,n}$ 中显式的 Białynicki-Birula 分解 [16]。

注意，存在唯一的 $\mathrm{GL}(s,\mathbb{K})\times\mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K})$-作用 $\Delta_{s,p,n}$，它作用于 $\mathcal{T}_{s,p,n}$，并且相对于由矩阵乘法给出的 $\mathrm{GL}(s,\mathbb{K})\times\mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K})$ 在 $G(p,n)$ 上的作用是等变的。特别地，$\mathbb{G}_m$-作用在秩为 $E=n$ 的 $E=E_1\oplus E_2$ 上定义为

$$t\cdot(e_1,e_2)\mapsto(e_1,te_2),\quad (e_1,e_2)\in E_1\oplus E_2 \tag{14}$$

诱导出 $\mathcal{T}_s$ 上的作用 $\mathbb{G}_{m^{p,\ n,}}$。

对于 $0\le k\le r$，定义 $G(p,\ n)$ 的子概形

$$\mathcal{V}_{(p-k,k)}:=\left\{\begin{pmatrix}0 & X\\ Y & 0\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{c}X\text{ is an }k\times(n-s)\text{ matrix of rank }k\\ Y\text{ is a }(p-k)\times s\text{ matrix of rank }(p-k)\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{V}^{+}_{(p-k,k)}:=\left\{\begin{pmatrix}0 & X\\ Y & W\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{c}X\text{ is an }k\times(n-s)\text{ matrix of rank }k\\ Y\text{ is a }(p-k)\times s\text{ matrix of rank }(p-k)\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{V}^{-}_{(p-k,k)}:=\left\{\begin{pmatrix}Z & X\\ Y & 0\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{c}X\text{ is an }k\times(n-s)\text{ matrix of rank }k\\ Y\text{ is a }(p-k)\times s\text{ matrix of rank }(p-k)\end{array}\right\}.$$

在 $\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 上，由 $\mathbb{G}_m$-作用（由（14）定义）的不动点概形的连通分支为

$$\mathcal{D}_{(p-k,k)}:=R^{-1}_{s,p,n}(\mathcal{V}_{(p-k,k)}),\ 0\le k\le r. \tag{15}$$

通过取$\mathcal{D}^{\pm}{}_{(p-k,\ k)}:=R^{-1}{}_{s,\ p,\ n}(\mathcal{V}^{\pm}{}_{(p-k,\ k)})$ 的扎里斯基闭包，我们定义

$$D^{-}_{k}:=\overline{\mathcal{D}^{-}_{(p-k+1,k-1)}},\ D^{+}_{k}:=\overline{\mathcal{D}^{+}_{(p-r+k-1,r-k+1)}},\ 1\le k\le r.$$

根据 [16, 引理 4.3]，$D^{+}_{1}\cdots$、D^{+}_{r}、$D^{-}_{1}\cdots$、D^{-}_{r} 是互不相同且具有简单正规交叉的光滑除子。特别地，$D^{-}_{1}=\mathcal{D}_{(p,0)}$、$D^{+}_{1}=\mathcal{D}_{(p-r,r)}$。

回顾一下[16, 引理 4.9]，(5) 诱导了一个同构 $\mathcal{L}_{s,\ p,\ n}:=\mathcal{P}_{s,\ p,\ n}\big|_{D^{+}_{1}}$，从汇 D^{+}_{1} 到源 D^{-}_{1}。于是，我们得到以下两个由$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 的同构所诱导的$\mathcal{M}_{s,\ p,\ n}$ 的额外同构。

定义 3.1. 定义一个同构 USD：$M_{s,\ p,\ n}\to M_{n-s,\ p,\ n}$，其定义为

$$\mathrm{Usd}:=\mathcal{L}_{n-s,p,n}\circ\mathrm{USD}\big|_{\mathcal{M}_{s,p,n}},$$

以及一个同构 DUAL：$M_{s,\ p,\ n}\to M_{s,\ n-p,\ n}$，其定义为

$$\mathrm{Dual}:=\mathcal{L}_{s,n-p,n}\circ\mathrm{DUAL}\big|_{\mathcal{M}_{s,p,n}},$$

其中USD，DUAL 定义见 §2.1。

3.2. G稳定和 B稳定除子

为方便起见，我们用 G 表示群 $\mathbf{GL}(s,\ \mathbb{K})\ \times \mathbf{GL}(n-s,\ \mathbb{K})$。定义 G 的一个 Borel 子群 B 为

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} g_1 \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \text{ is a lower triangular matrix}; \\ g_2 \in \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K}) \text{ is an upper triangular matrix} \end{array} \right\}.$$

设 T 是由下式定义的 B 的极大环面

$$\left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle| g_1 \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}),\ g_2 \in \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K}) \text{ are diagonal} \right\}.$$

显然，$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 是一个球面 G簇，B 具有一个开轨道。

将 $G(p,\ n)$的不可约除子定义为 $b_k := \{x \in G(p,\ n) |\, P_{I_k}(x) = 0\}$,$0 \le k \le r$, 其中

$$I_k := (s+k, s+k-1, \cdots, s-p+k+1) \in \mathbb{I}^k_{s,p,n}. \tag{16}$$

设 $B_k \subset \mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$, $0 \le k \le r$为 b_k 在爆破$R_{s,\ p,\ n} : \mathcal{T}_{s,\ p,\ n} \to G(p,\ n)$下的严格变换。容易验证

引理 3.2. 若$\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}$ 的不可约除子 $\mathfrak{D}$ 是 G-不变的（分别地，B-不变），则

$$\mathfrak{D} \in \{D_1^-, \cdots, D_r^-, D_1^+, \cdots, D_r^+\}\ (resp.\ \{D_1^-, \cdots, D_r^-, D_1^+, \cdots, D_r^+, B_0, \cdots, B_r\}).$$

因此，我们称 D_1^-、$\cdots$ D_r^-、D_1^+、$\cdots$ D_r^+为 G-稳定除子，并称 B_0、$\cdots$ B_r 为 B-稳定除子。

注 3.3. 当 $p = n-s$, $B_r = D_r^-$ 时；当 $p = s$, $B_0 = D_r^+$ 时。本文中 B-稳定除子的概念与球面簇理论中的定义略有不同。在该理论中，B_0（分别为 B_r）不是 B-稳定除子。

引理 3.4. 设 E 为爆破 $R_{s、\ p、\ n}$ 的例外除子。那么 ，

$$E = \begin{cases} D_1^+ + D_2^+ + \cdots + D_r^+ + D_1^- + D_2^- + \quad + D_r^- & p < s \quad n-s \neq p \cdots \text{当且} \cdots \cdots \\ D_1^+ + D_2^+ + \quad + D_r^+ + D_1^- + D_2^- + \quad + D_{r-1}^- & \\ \text{当 } D_1^+ + D_2^+ + \quad + D_{r-1}^+ + D_1^- + D_2^- + \quad + D_{r-1}^- & \cdots \cdots \text{当 } n-s = p = s \end{cases} \quad n-s = p < s \quad .$$

引理 3.4 的证明。回忆 [16, 引理 4.2] ，由 (10) 定义的 S_k $0 \leq k \leq r$ 是 $\mathrm{V}^+_{(p-k-1,k+1)}$ 与 $\mathrm{V}^-_{(p-k+1,k-1)}$ 的概形论并，其中 $\mathrm{V}^\pm_{(p-k,k)}$ 是 $\mathrm{V}^\pm_{(p-k,k)}$ 与 $\mathrm{V}^+_{(p-r-1,r+1)} = \mathrm{V}^-_{(p+1,-1)}$ 的扎里斯基闭包（按约定）。根据 (15)，显然 E 的支集包含于 $D_1^-, \cdots D_r^-, D_1^+, \cdots D_r^+$ 的并中。

与 §2 类似，我们可以将爆破 $R_{s,p,n}$ 写成如下的迭代爆破。首先爆破 $\mathrm{V}^-_{(p,0)}$，然后依次爆破 $\mathrm{V}^-_{(p-1,1)}$、$\mathrm{V}^-_{(p-2,2)}$、$\cdots$、$\mathrm{V}^-_{(p-r+1,r-1)}$ 的全变换；接着依次爆破 $\mathrm{V}^+_{(p-r,r)}$、$\mathrm{V}^+_{(p-r+1,r-1)}$、$\cdots$、$\mathrm{V}^+_{(p-1,1)}$ 的全变换。可以证明，每次中间爆破的中心都是一个光滑子概形与一个除子的概形论并（后者可以略去）。

现在，在 Mille Crêpes 坐标下进行计算，得到 E 沿 $D_l^\dagger$的所需重数。由此得到引理 3.4。 ∎

推论 1.4 的证明。首先假设 $p < s$ 和 $p \neq n - s$。令 $Z \subset \mathrm{T}_{s,p,n}$ 为一个不可约除子。若 Z 包含在 $R_{s,p,n}$ 的例外除子中，则根据引理 3.4， Z 是 $\mathbb{Z}$- 线性组合 $D_j^\pm$, $1 \leq j \leq r$。否则，考察 $R_s^{-1}{}_{,p,n}(R_{s,p,n}(Z))$，可得 (6) 在 $\mathbb{Z}$ 上生成 $\mathrm{Pic}(\mathrm{T}_{s,p,n})$。

接下来，假设 $\mathrm{Pic}(\mathcal{T}_{s,p,n})$ 中满足以下关系。

$$0 = h \cdot (R_{s,p,n})^* \left(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)\right) + a_r^+ \cdot D_r^+ + \sum_{i=1}^{r-1} \left(a_i^+ \cdot D_i^+ + a_{r-i}^- D_{r-i}^-\right) + a_r^- \cdot D_r^- .$$

显然， $h = 0$。于是，存在有理函数 f，定义在 $\mathcal{T}_{s,p,n}$ 上，使得

$$(f) = a_r^+ \cdot D_r^+ + \sum_{i=1}^{r-1} \left(a_i^+ \cdot D_i^+ + a_{r-i}^- D_{r-i}^-\right) + a_r^- \cdot D_r^- ,$$

其中 (f) 是 f 对应的主除子。 f 在 $G(p,n)$ 上诱导出一个有理函数 $\tilde{f}$。注意， f 在爆破 $R_{s,p,n}$ 的中心之外处处正则，该中心的余维至少为二。于是， f 可延拓为一个正则函数，因此必为常数。因此，对于 $1 \leq i \leq r$, 有 $a_i^\pm = 0$。

其余情形的证明也可用同样的方法完成。 ∎

令 $K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}$ 为$\mathcal{T}_{s,p,n}$的典范丛。我们将 $K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}$ 表示为例外除子与 $(R_{s,p,n})^*$ $(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1))$ 的组合，如下所示。

引理 3.5。当 $r = p\,(p \le n-s)$,

$$K_{\mathcal{T}_{s,p,n}} = -n\cdot(R_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)) + \sum_{i=1}^{r}\Big((p-i+1)(n-s-i+1)-1\Big)\cdot D_i^- + \sum_{i=1}^{r}\Big((p-i+1)(s-i+1)-1\Big)\cdot D_i^+ \ .$$

当 $r = n-s$ $(n-s \le p)$,

$$K_{\mathcal{T}_{s,p,n}} = -n\cdot(R_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)) + \sum_{i=1}^{r}\Big((p-i+1)(n-s-i+1)-1\Big)\cdot D_i^- + \sum_{i=1}^{r}\Big((n-p-i+1)(n-s-i+1)-1\Big)\cdot D_i^+ \ .$$

引理 3.5 的证明。 根据引理 3.4 的证明中构造的迭代爆破可得。 ∎

对于 I_k 由式（16）定义，计算可得

$$(R_{s,p,n})^*(P_{I_k}) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ \prod_{t=k+1}^{l} a_{t(s-p+t)}^{t-k} & \text{if } k \le l-1 \\ \prod_{t=l+1}^{k} b_{t(s+t)}^{k+1-t} & \text{if } k \ge l+1 \end{cases} . \tag{17}$$

因此，对于 $0 \le k \le r$，我们有

$$B_k = (R_{s,p,n})^*\Big(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)\Big) - \sum_{i=1}^{r-k}(r-k+1-i)\cdot D_i^+ - \sum_{i=1}^{k}(k+1-i)\cdot D_i^- . \tag{18}$$

若 $p = s$ （分别地， $p = n-s$），则对 B_0 （分别地， B_r），我们将式（18）修改如下（见注 3.3）。当 $p = s$,

$$B_0 = D_r^+ = (R_{s,p,n})^*\Big(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)\Big) - \sum_{i=1}^{r-1}(r+1-i)\cdot D_i^+ ; \tag{19}$$

当 $p = n-s$,

$$B_r = D_r^- = (R_{s,p,n})^*\Big(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)\Big) - \sum_{i=1}^{r-1}(r+1-i)\cdot D_i^- . \tag{20}$$

为定量研究不变除子，我们定义以下便捷的局部坐标图。

定义 3.6。 对于 $0 \le l \le r$，令 $\left(A^{\tau_l}, (J_l^{\tau_l})^{-1}\right)$ 为与指标 $\tau_l \in \mathbb{J}_l$ 相关联的 $R_{s,\ p,\ n}^{-1}(U_l)$ 的千层酥坐标，其中指标 $\tau_l \in \mathbb{J}_l$ 由下式给出

$$\begin{pmatrix} l+1 & l+2 & \cdots & r & l & l-1 & \cdots & 1 \\ s+l+1 & s+l+2 & \cdots & s+r & s-p+l & s-p+l-1 & \cdots & s-p+1 \end{pmatrix}.$$

我们称 $\left(A^{\tau_l}, (J_l^{\tau_l})^{-1}\right)$（或稍微滥用一下记号，称为 A^{τ_l}）为第 l 个主坐标图。

下面，我们给出 B-稳定除子的几何解释。对于 $0 \le j \le r$，记 h_j 为 $\mathbb{P}^{N_{s,p,n}^j}$ 的皮卡群的正生成元。记 $\widetilde{H}_j$ 为它在相应投影下拉回到 $\mathbb{P}^{N_{p,n}} \times \mathbb{P}^{N_{s,\ p,n}^0} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_{s,p,n}^p}$ 上的类。令 H_j 为它在 $\mathcal{T}_{s,p,n}$ 上的限制。

引理 3.7。对于 $0 \le j \le r$,

$$H_j = R_{s,p,n}^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)) - \sum_{i=1}^{r-j}(r-i+1-j)\cdot D_i^+ - \sum_{i=1}^{j}(j+1-i)\cdot D_i^- .$$

特别地，$H_j = B_j$, $0 \le j \le r$，但 $B_0 = D_r^+$ 或 $B_r = D_r^-$ 时除外。

引理的证明 3.7。 通过计算 P_I在 A^{τ_0} 和 A^{τ_r}, $I \in \mathbb{I}_{s,p,n}^j$，并将结果与（18）、（19）、（20）进行比较，我们得出引理3.7。 ∎

引理 3.8. 线丛 $O_{\mathcal{T}_{s,p,n}}(B_j)$ 是整体生成的，当且仅当

- $p \ne s$, $p \ne n-s$ 且 $0 \le j \le r$,
- 或 $n-s = p < s$ 且 $0 \le j \le p-1$,
- 或 $n-s = p = s$ 且 $1 \le j \le p-1$。

引理的证明 3.8. 引理 3.8 由引理 3.7得证。 ∎

引理 3.9. H_j 的完全线性系与 $\mathbb{P}^{N_{s,\ p,\ n}^j}$ 上的 $O_{\mathbb{P}^{N_{s,\ p,\ n}^j}}(1)$ 的完全线性系同构。

引理 3.9 的证明。不失一般性，我们可以假设 $p \neq s, n-s$。由引理 3.7 可知，$H^0(\mathrm{T}_{s,p,n}, H_j)$ 由 $H^0(\mathrm{T}_{s,p,n}, R^*_{s,p,n}(\mathrm{O}^{G(p,n)}(1)))$ $\cong H^0(G(p,n), \mathrm{O}^{G(p,n)}(1))$ 中在 $D_1^+, \cdots D_{r-j}^+, D_1^-, \cdots D_j^-$ 上按特定指定阶数消失的截面组成。在 Mille Crêpes 坐标中进行计算可得，所有满足 $I \in \mathbb{I}^j_{s,p,n}$ （见（8）、（9）、（10））的普吕克坐标函数P_I 都属于 $H^0(\mathrm{T}_{s,p,n}, H_j)$。注意，$\mathrm{O}^{G(p,n)}(1)$ 的完全线性系有一组由普吕克坐标函数给出的基（例如参见 [33] ）。因此，要证明引理 3.9，只需证明 $H^0(\mathrm{T}_{s,p,n}, H_j)$ 中的任意截面都由 $P_I, I \in \mathbb{I}^j_{s,p,n}$ 生成。

反设不然。设 $s \in H^0(\mathcal{T}_{s,\ p,\ n},\ H_j)$ 是一个具有如下形式的截面

$$s = P_{I^*} + \sum\nolimits_{I \in \mathbb{I}_{p,n} \text{ and } I \neq I^*} c_I \cdot P_I,\ c_I \in \mathbb{K},$$

其中 $I^* \in \mathbb{I}_s^{j^*}$ 、$_p$、$_n$ 满足 $j^* \neq j$。由于 $H^0(\mathrm{T}_{s,p,n}, H_j)$ 在 $\mathrm{PGL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})$-作用下不变，我们可以假设 $I^* = I_{j^*}$ （见（16））。不失一般性，我们可以假设 $j < j^*$。按照引理 3.2] 的证明进行计算可得，在与第 0 个主坐标图 A^{τ_0}相关联的局部坐标中，

$$s = (-1)^{j^*(p-j^*)} \cdot \prod_{t=1}^{j^*} (b_{t(s+t)})^{j^*+1-t} + \sum_{\alpha} F_\alpha\left(\overrightarrow{A}\right) + \sum_{\beta} G_\beta\left(\overrightarrow{A}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}, \overrightarrow{B}^1, \cdots, \overrightarrow{B}^r\right).$$

这里，每个 G_β 都是一个单项式，且至少能被 $\widetilde{X}$，$\widetilde{Y}$，$\overrightarrow{B}^1$，$\cdots$ $\overrightarrow{B}^r$ 中的一个变量整除；每个 F_α 都是变量 $b_{1(s+1)}$，$\cdots$ $b_{p(s+p)}$ 的单项式，并且没有 F_α 是 $\prod_{t=1}^{j^*}(b_{t(s+t)})^{j^*+1-t}$ 的常数倍。然而，根据假设 $s \in H^0(\mathcal{T}_{s,\ p,\ n},\ H_j)$，$s$ 应具有如下形式

$$s = c \cdot \prod_{t=1}^{j} (b_{t(s+t)})^{j+1-t},\ c \in \mathbb{K}.$$

这就得到了矛盾。

我们完成引理3.9的证明。 ∎

我们可以用类似的方式定义$\mathcal{M}_{s,p,n}$ 的不变除子。定义

$$\check{D}_i := D_1^- \cap D_i^- = \mathcal{M}_{s,p,n} \cap D_i^-,\ 2 \leq i \leq r.$$

W ˇˇˇ 我们称 D_2、D_3、$\cdots$、D_r 为 $\mathcal{M}_{s,p,n}$ 的 G-稳定除子。定义

$$\check{B}_i := D_1^- \cap B_i = \mathcal{M}_{s,p,n} \cap B_i,\ 0 \leq i \leq r.$$

˘我们称 B_i、 $0 \le i \le r$ 为 $\mathcal{M}_{s,p,n}$ 的 B-稳定除子。容易验证，若 $1 \le j \le r$，或 $j = 0$ 且 $p < s$，则 B_j 是一个不可约除子。

注记 3.10. ˘ $B_0 = D_1^- \cap B_0 = D_1^- \cap D_r^+ = \emptyset$ 在 $p = s$ 时是平凡的；˘ $B_r = \breve{}D_r$ ˘在 $p = n - s$ 时成立。稍微滥用一下记号，即使 $p = s$，我们也将 B_0 视为一个 B-稳定除子。

为方便起见，我们用 ˘$R_{s,p,n}$ 表示 $R_{s,p,n}|_{\mathbf{M}_{s,p,n}} : \mathbf{M}_{s,p,n} \to \mathbf{V}_{(p,0)}$的限制。由于 $\mathbf{V}_{(p,0)} \cong G(p,s)$ 的超平面丛是 $G(p,n)$ 的超平面丛的限制，我们用 $(\breve{}R_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1))$ 表示线丛 $(R_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1))$ 在 $\mathbf{M}_{s,p,n}$上的限制。类似地，我们可以证明

记$K_{\mathcal{M}_{s,p,n}}$ 为$\mathcal{M}_{s,p,n}$的典范丛。于是

引理 3.11. 假设 $p \le s$。那么，

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{M}_{s,p,n}} = & -n \cdot (\check{R}_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)) + p(n-s) \cdot \check{D}_1 \\ & + \sum_{i=2}^{r} \Big((p-i+1)(n-s-i+1) - 1 \Big) \cdot \check{D}_i \,. \end{aligned}$$

引理 3.11 的证明。注意， $D_i^+ \cap D_1^- = \emptyset$ 对于 $1 \le i \le r$。引理3.11 由引理 3.5 和伴随公式可得。 ∎

与引理 3.2类似，我们有

˘ ˘**引理 3.12.** 设 $\mathfrak{D}$ 是 $M_{s、p、n}$ 的一个不可约除子。若 $\mathfrak{D}$ 是 G-不变的（分别地， B-不变的），则

$$\check{\mathfrak{D}} \in \{\check{D}_2, \check{D}_3, \cdots, \check{D}_r\} \ (resp. \ \{\check{D}_2, \check{D}_3, \cdots, \check{D}_r, \check{B}_0, \check{B}_1, \cdots, \check{B}_r\}).$$

将（18）、（20）限制到 $\mathcal{M}_{s、p、n}$ 上，我们便有

$$\check{B}_i = (\check{R}_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)) - i \cdot \check{D}_1 - \sum_{k=2}^{i} (i+1-k) \cdot \check{D}_k \,, \quad 0 \le i \le r \,; \quad (21)$$

当 $p = n - s$时，我们将 (21) 修改为 ˘ B_r，方法是

$$\check{B}_r = \check{D}_r = (\check{R}_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)) - r \cdot \check{D}_1 - \sum_{k=2}^{r-1} (r+1-k) \cdot \check{D}_k \,.$$

3.3. T-不变曲线

在本小节中，我们将介绍具有各种参数的 T-不变曲线 γ_l, ζ_j^l, $\zeta^{l,\ u}{}_{,\ v}^{k}$, $\delta^l_{m_1,\ m_2}$, $\Delta^l_{m_1\ m_2}{}_{\ s\ p\ n}$，它们是 $\mathcal{T}_{,,}$ 在 l 阶主坐标图 A^{τ_l}, $0 \le l \le r$ 中某些仿射直线的闭包。然后，我们计算这些曲线与线丛 $R^*_{s,\ p,\ n}((\mathcal{O}^{G(p,n)}(1))$, $D_1^{\pm}$, $\cdots$ $D_r^{\pm}$, $-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}}$ 的交数。这些计算将用于证明反典范丛的（半）正性。

为方便起见，我们将 $R^*_{s,p,n}((\mathcal{O}^{G(p,n)}(1))$ 记作 H，并令 δ_{ab} 为克罗内克δ。

(0). 曲线 γ_l, $0 \le l \le r-1$。

根据局部坐标，我们如下定义一条仿射直线 $\mathring{\gamma}_l$： $\mathbb{K} \to A^{\tau_l}$,$0 \le l \le r-1$。$b_{(l+1)(s+l+1)}(\mathring{\gamma}_l(t)) = t$，其余所有变量恒为零。定义 γ_l 为 $\mathring{\gamma}_l$ 在 $\mathcal{T}_{s,p,n}$ 中的闭包。

引理 3.13。 对于 $0 \le l \le r-1$ 和 $1 \le i \le r$，除子 $H, D_i^{\pm}$ 与曲线 γ_l 的交数为

$$H \cdot \gamma_l = 1, \quad D_i^- \cdot \gamma_l = \delta_{i,l+1} - \delta_{i,l+2}, \quad D_i^+ \cdot \gamma_l = \delta_{i,r-l} - \delta_{i,r-l+1}.$$

引理 3.13 的证明。我们将 γ_l 视为 $\mathbb{P}^{N_p}{}_{,n} \times \mathbb{P}^{N_s^0}{}_{,p,n} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_s^p}{}_{,p,n}$ 中的一条曲线。通过计算普吕克坐标函数，容易验证 γ_l 到 $\mathbb{P}^{N_p}{}_{,n}$ 的投影是一条直线，而对于 $0 \le j \le p$, γ_l 到 $\mathbb{P}^{N_s^j}{}_{,p,n}$ 的投影是一个点。因此，我们有 $\gamma_l \cdot H = 1$ 和 $\gamma_l \cdot H_j = 0$, $0 \le j \le p$。注意，γ_l 与除子 $D_1^-, D_2^-, \cdots$ $D_l^-, D_1^+, D_2^+, \cdots$ D_{r-l-1}^+ 不相交。结合引理 3.7，通过求解线性方程即可得出引理 3.13。 ∎

结合引理3.5，直接计算可得

引理 3.14。 当 $r = 1$, $-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}} \cdot \gamma_0 = 2$。当 $r \ge 2$,

$$-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}} \cdot \gamma_l = \delta_{0,l} + \delta_{r-1,l}.$$

(1). 曲线 ζ_j^0, $\zeta^{0,\ u}{}_{v,}^{k}$, $\delta^0_{m_1,\ m_2}$ 在 $R^{-1}_{s\ ,\ p,\ n}\left(\mathcal{V}_{(p,0)}\right)$。

对于 $2 \le j \le r$，定义一条仿射直线 $\mathring{\zeta}_j^0 \subset A^{\tau_0}$，使得 $b_{j(s+j)}\left(\mathring{\zeta}_j^0(t)\right) = t$，且其他变量恒为零。令 ζ_j^0 为 $\mathring{\zeta}_j^0$ 的闭包。类似地，我们可以推导出

引理 3.15. 对于 $2 \le j \le r$ 和 $1 \le i \le r$,

$$H \cdot \zeta_j^0 = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta_j^0 = -\delta_{i,j-1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}, \quad D_i^+ \cdot \zeta_j^0 = 0,$$
$$-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}} \cdot \zeta_j^0 = 3 - \delta_{r,j}.$$

假设 $u = k$和 $s+k+1 \le v \le n$，或者 $v = s+k$和 $k+1 \le u \le p$，其中 $1 \le k \le r$。定义仿射直线 $\mathring{\zeta}^0_{,\,u}{}^{k}_{,\,v} \subset A^{\tau_0}$，使得 $\xi_{uv}^{(k)}\left(\mathring{\zeta}^{0,k}_{u,v}(t)\right) = t$，其余变量均为零。令 $\zeta^0_{,\,u}{}^{k}_{,\,v}$ 为其闭包。交数由引理 A.2 和 A.3 给出，其中 $l = 0$。

当 $1 \le m_1 \le p$ 和 $1 \le m_2 \le s-p$时，定义一条仿射直线 $\mathring{\delta}^0_{m_1,\,m_2} \subset A^{\tau_0}$，使得 $y_{m_1(s-p+1-m_2)}\left(\mathring{\delta}^0_{m_1,m_2}(t)\right) = t$，其余变量均为零。令$\delta^0_{m_1,\,m_2}$ 为其闭包。交数由引理 A.6和 A.7 给出，其中 $l = 0$。

（2）曲线 ζ_j^l, $\zeta^l_{,\,u}{}^{k}_{,\,v}$, $\delta^l_{m_1,\,m_2}$, $\Delta^l_{m_1,\,m_2}$ 在 $R^{-1}_{s,\,p,\,n}\left(\mathcal{V}_{(p-l,l)}\right)$, $1 \le l \le r-1$。

假设 $1 \le l \le r-1$。对于 $2 \le j \le r-l$，定义一条仿射直线 $\mathring{\zeta}_j^l \subset A^{\tau_l}$，使得 $b_{(l+j)(s+l+j)}\left(\mathring{\zeta}_j^l(t)\right)$，而其他变量恒为零。对于 $r-l+2 \le j \le r$，定义一条仿射直线 $\mathring{\zeta}_j^l \subset A^{\tau_l}$，使得 $a_{(r+1-j)(s-p+r+1-j)}\left(\mathring{\zeta}_j^l(t)\right)$，而其他变量为零。令 ζ_j^l 为 $\mathring{\zeta}_j^l$当 $2 \le j \le r-l$ 或 $r-l+2 \le j \le r$的闭包。交数由引理 A.1给出。

假设整数 k、u、v 满足以下条件之一。

(a) $1 \le k \le r-l$；$u = l+k$和 $s+l+k+1 \le v \le n$，或者 $v = s+l+k$和$l+k+1 \le u \le p$.(b) $r-l+1 \le k \le r$；$u = r-k+1$和 $1 \le v \le s-p+r-k$，或者$v = s-p+r-k+1$和 $1 \le u \le r-k$.

我们定义一条仿射直线 $\mathring{\zeta}^l_{,\,u}{}^{k}_{,\,v} \subset A^{\tau_l}$，使得 $\xi_{uv}^{(k)}\left(\mathring{\zeta}^{l,k}_{u,v}(t)\right) = t$ 且其他变量均为零。令 $\zeta^l_{,\,u}{}^{k}_{,\,v}$ 为其闭包。交数由引理 A.2、A.3、A.4、A.5给出。

对 $1 \le m_1 \le p-l$和 $1 \le m_2 \le s-p+l$，定义一条仿射直线 $\mathring{\delta}^l_{m_1,\,m_2} \subset A^{\tau_l}$使得 $y_{(l+m_1)(s-p+l+1-m_2)}\left(\mathring{\delta}^l_{m_1,m_2}(t)\right) = t$ 且其他变量均为零。令 $\delta^l_{m_1,\,m_2}$ 为其闭包。交数由引理A.6 和A.7给出。

对 $1 \le m_1 \le p-s-l$和 $1 \le m_2 \le l$，定义一条仿射直线 $\mathring{\Delta}^l_{m_1,\,m_2} \subset A^{\tau_l}$使得 $x_{(l+1-m_2)(s+l+m_1)}\left(\mathring{\Delta}^l_{m_1,m_2}(t)\right) = t$，其他变量均为零。

令 $\Delta^{l}_{m_1,\ m_2}$ 为其闭包。交数由引理A.2 给出，其中 $l = r$。

(3) 。 ζ^{r}_{j}、 $\zeta^{r}_{u}{}^{k}_{v}$、 $\delta^{r}_{m_1,\ m_2}$、 $\Delta^{r}_{m_1,\ m_2}$ **中的曲线**。
对于 $2 \le j \le r$ $\mathring{\zeta}^{r}_{j} \subset A^{\tau_r}$ $a_{(r+1-j)(s-p+r+1-j)}\left(\mathring{\zeta}^{r}_{j}\ t\right) =$，定义一条仿射直线，使得()且其他变量均为零。令$\zeta^{r}_{j}$为其闭包。交数由引理A.1给出。

令 $1 \le k \le r$。假设 $u = r-k+1$ 且 $1 \le v \le s-p+r-k$，或$v = s-p+r-k+1$ 且 $1 \le u \le r-k$。定义一条仿射直线 $\mathring{\zeta}^{r}{}_{u}{}^{k}{}_{v} \subset A^{\tau_r}$，使得 $\xi^{(k)}_{uv}\left(\mathring{\zeta}^{r,k}_{u,v}(t)\right) = t$ 且其他变量均为零。令 $\zeta^{r}{}_{u}{}^{k}{}_{v}$ 为其闭包。交数由引理A.4 和A.5 在 $l = r$的条件下给出。

当 $n-s < p,\ 1 \le m_1 \le s+p-n$ 和 $1 \le m_2 \le n-p$ 时，定义仿射直线 $\mathring{\delta}^{r}_{m_1,m_2} \subset A^{\tau_r}$，使得 $y_{(r+m_1)(s-p+r+1-m_2)}\left(\mathring{\delta}^{r}_{m_1,m_2}(t)\right) = t$，其他变量均为零。令 $\delta^{r}_{m_1,m_2}$ 为其闭包。交数由引理 A.6 和 A.7 给出，其中 $l = r$.

当 $p < n-s,\ 1 \le m_1 \le n-s-r$ 和 $1 \le m_2 \le r$ 时，定义仿射直线 $\mathring{\Delta}^{r}_{m_1,m_2} \subset A^{\tau_l}$，使得 $x_{(r+1-m_2)(s+r+m_1)}\left(\mathring{\Delta}^{r}_{m_1,m_2}(t)\right) = t$，其他变量均为零。令 $\Delta^{r}_{m_1,m_2}$ 为其闭包。交数由引理 A.8 和 A.9 给出，其中 $l = r$.

3.4. 反典范丛的（半）正性

本小节中，我们证明$\mathcal{T}_{s,p,n}$ 和$\mathcal{M}_{s,p,n}$的反典范丛的（半）正性。

记 $A_i(X)$ 为 X 上的 i-循环的 Chow 群（详见 [15] ）。Brion 刻画了球面簇的 Chow 群如下。

引理 3.16 ([6]**).** 设 X 是一个维数为 n 的不可约完备球簇。$A_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 中的有效循环锥是一个多面凸锥，由 B- 轨道闭包的类生成。

命题 1.8 的证明。根据 [18, 定理 1.3]，$-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}$ 是大。由 Kleiman 判据和引理 3.16，为证明命题 1.8，只需证明 $-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}$ 在$\mathcal{T}_{s,p,n}$ 的所有不可约曲线上次数非负；这些曲线是维数为 1 的 B-轨道的闭包，并且当且仅当 $r \le 2$ 时，它在这类曲线上的次数严格为正。

注意，对于任意作为一维B-轨道闭包的 $\mathbf{T}_{s,p,n}$ 中的曲线 γ，存在一个置换矩阵 $g \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K})$ 以及一个整数 $0 \le l^* \le r$，使得 $A^{\tau_{l^*}}$ 包含像曲线$g(\gamma)$的一个开子集（关于 A^{τ_l}，参见定义 3.6）。令 T 为 B的极大环面。它

显然，像曲线 $g(\gamma)$ 在 T-作用下保持不变。考虑 $g(\gamma)$ 的一般点 $\mathfrak{a}$ 相对于第 l^*个主坐标图 $A^{\tau_l^*}$的局部坐标。否则，如果不止一个局部坐标非零，那么 $g(\gamma)$ 的维数至少为二。因此， $g(\gamma)$ 与 T-不变曲线 $\gamma_l, \zeta_j^l, \zeta^{l,k}_{u,v}, \delta^l_{m_1,m_2}, \Delta^l_{m_1,m_2}$ 中的一条重合，这些曲线定义于第3.3节。

由于 $K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}$ 在 $\mathbf{T}_{s,p,n}$ 的全纯自同构下保持不变，我们有 $-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}\cdot\gamma = -K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}\cdot g(\gamma)$。根据第3.3节计算的交数，我们得出 $-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}\cdot\gamma \geq 0$, 并且 $-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}\cdot\gamma = 0$ 当且仅当 $g(\gamma)$ 与某个 $1 \leq l \leq r-2$ 的 γ_l 重合。

我们完成命题1.8的证明。 ∎

命题1.7的证明。证明与命题1.8中的证明相同。对于任意曲线 $\check{}\gamma \subset \mathbf{M}_{s,p,n}$, 它是一个一维 B-轨道的闭包，存在置换矩阵 $g \in \mathbf{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathbf{GL}(n-s,\mathbb{K})$, 使得 A^{τ_0} 包含 $g(\check{}\gamma)$ 的像的一个开子集。此外， $g(\check{}\gamma)$ 与第3.3节中定义的 T-不变曲线 $\zeta_j^0, \zeta^{0,k}_{u,v}, , \delta^0_{m_1,m_2}$ 中的一条重合。

注意，对于每条曲线 $\gamma \subset \mathcal{M}_{s,p,n}$,

$$-K_{\mathcal{M}_{s,p,n}}\cdot\gamma = (-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}} - D_1^-)\cdot\gamma$$

命题 1.7 由 §3.3 中的计算可得。 ∎

同理，由引理 3.7、3.8 可证明

引理3.17。 对于 $0 \leq j \leq r$，线丛 $\mathcal{O}_{\mathcal{T}_{s,p,n}}(-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}} - D_1^- + H_j)$是大且数值有效的。

4. $\mathbf{T}_{s,p,n}$ 与$\mathcal{M}_{s,p,n}$的对称性

我们首先计算特殊离散自同构诱导的皮卡群同构。

引理 4.1. 假设 $1 \leq p \leq s$。自同构 USD 会诱导 $T_{s,p,2s}$ 的皮卡群的一个自同构，如下所示。

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{USD})^*(D_i^+) = D_i^-,\ (\mathrm{USD})^*(D_i^-) = D_i^+,\ 1 \leq i \leq r\,;\\
&(\mathrm{USD})^*\left((R_{s,p,2s})^*(\mathcal{O}_{G(p,2s)}(1))\right) = (R_{s,p,2s})^*(\mathcal{O}_{G(p,2s)}(1))\,;\\
&(\mathrm{USD})^*(B_i) = B_{r-i}\,,\ 0 \leq i \leq r.
\end{aligned}$$

引理 4.1 的证明。由于 USD 诱导了 $G(p,2s)$ 的一个自同构，因此我们有 $(\mathrm{USD})^*\left((R_{s,p,2s})^*(\mathrm{O}^{G(p,2s)}(1))\right) = (R_{s,p,2s})^*(\mathrm{O}^{G(p,2s)}(1))$。由 (12) 可得，USD 对调了 D_i^+ 和 D_i^-，其中 $1 \le i \le r$。 ∎

引理 4.2. 假设 $1 \le p \le s$。DUAL 自同构诱导出 $T_{s,p,2p}$ 的皮卡群的一个自同构，如下所示。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{DUAL})^*(D_i^+) = D_i^-,\ \ (\mathrm{DUAL})^*(D_i^-) = D_i^+,\ \ 1 \le i \le r\,;\\
&(\mathrm{DUAL})^*\left((R_{s,p,2p})^*(\mathcal{O}_{G(p,2p)}(1))\right) = (R_{s,p,2p})^*(\mathcal{O}_{G(p,2p)}(1))\,;\\
&(\mathrm{DUAL})^*\left(B_i\right) = B_{r-i}\,,\ 0 \le i \le r.
\end{aligned}
$$

引理 4.2的证明。 证明与引理 4.1中的相同。 ∎

类似地，我们可以证明

引理 4.3. 假设 $1 \le p < s$。那么，自同构 Usd 诱导出 $M_{s,p,2s}$ 的皮卡群的一个自同构，如下所示。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Usd})^*(\check{D}_i) = \check{D}_{r+2-i},\ \ 2 \le i \le r\,;\ (\mathrm{Usd})^*(\check{D}_1) = -\sum_{i=1}^{r}\check{D}_i\,;\\
&(\mathrm{Usd})^*\left((\check{R}_{s,p,2s})^*(\mathcal{O}_{G(p,2s)}(1))\right) = (\check{R}_{s,p,2s})^*(\mathcal{O}_{G(p,2s)}(1)) - \sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\cdot\check{D}_i\,;\\
&(\mathrm{Usd})^*\left(\check{B}_i\right) = \check{B}_{r-i}\,,\ 0 \le i \le r.
\end{aligned}
$$

引理 4.4. 假设 $1 \le p < s$。那么，自同构 Dual 诱导出 $M_{s,p,2p}$ 的皮卡群的一个自同构，如下所示。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Dual})^*(\check{D}_i) = \check{D}_{r+2-i},\ \ 2 \le i \le r\,;\ (\mathrm{Dual})^*(\check{D}_1) = -\sum_{i=1}^{r}\check{D}_i\,;\\
&(\mathrm{Dual})^*\left((\check{R}_{s,p,2p})^*(\mathcal{O}_{G(p,2p)}(1))\right) = (\check{R}_{s,p,2p})^*(\mathcal{O}_{G(p,2p)}(1)) - \sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\cdot\check{D}_i\,;\\
&(\mathrm{Dual})^*\left(\check{B}_i\right) = \check{B}_{r-i}\,,\ 0 \le i \le r.
\end{aligned}
$$

引理 4.5。 假设 $p \ge 1$。自同构 Usd 和 Dual 在 $M_{p,\ p,\ 2p}$ 的皮卡群上诱导出如下自同构。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Usd})^*(\check{D}_i) = (\mathrm{Dual})^*(\check{D}_i) = \check{D}_{r+2-i},\ \ 2 \le i \le r\,;\\
&(\mathrm{Usd})^*(\check{D}_1) = (\mathrm{Dual})^*(\check{D}_1) = -\sum_{i=2}^{r}\frac{i-1}{r}\cdot\check{D}_i\,;\\
&(\mathrm{Usd})^*\left(\check{B}_i\right) = (\mathrm{Dual})^*\left(\check{B}_i\right) = \check{B}_{r-i}\,,\ 1 \le i \le r-1.
\end{aligned}
$$

4.1. $\mathcal{T}_{s,p,n}$的自同构群

引理 4.6。设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T}_{s,\ p,\ n})$。记 Σ 为由 σ 诱导的$G(p,\ n)$ 的双有理自映射。若 $\boldsymbol{T}_{s,\ p,\ n}$ 的皮卡群上诱导的自同构 σ^* 是恒等映射，则 Σ 可延拓为 $G(p,\ n)$ 的自同构。

引理 4.6 的证明。为方便起见，我们使用以下记号来区分源与目标。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^1_{s,p,n} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{T}^2_{s,p,n} \\ {\scriptstyle R^1_{s,p,n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^2_{s,p,n}} \\ G^1(p,n) & \overset{\Sigma}{\dashrightarrow} & G^2(p,n) \end{array} .$$

接下来证明，Σ 可延拓为从 $G^1(p,\ n)$ 到 $G^2(p,\ n)$ 的正则映射。

任取 $x \in G^1(p,n)$。如果 $(R^2_{s,p,n} \circ \sigma)((R^1_{s,p,n})^{-1}(x))$ 由多个点组成，我们便可找到一条曲线 $E \subset (R^1_{s,p,n})^{-1}(x)$，使得 $(R^2_{s,p,n} \circ \sigma)(\sigma(E))$ 是一条曲线，因为 $\mathbf{T}_{s,p,n}$ 可实现为沿光滑子流形对 $G^1(p,n)$ 进行的一系列爆破。然而，任何被 $R^1_{s,p,n}$ 收缩的曲线 $E \subset \mathbf{T}^1_{s,p,n}$ 也必定被 $R^2_{s,p,n}$ 收缩，否则我们将会有

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{O}_{G^1(p,n)}(1) \cdot R^1_{s,p,n}(E) = (R^1_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G^1(p,n)}(1)) \cdot E \\ &= (\sigma^{-1})^* \left((R^1_{s,p,n})^* \left(\mathcal{O}_{G^1(p,n)}(1) \right) \right) \cdot \sigma(E) = (R^2_{s,p,n})^*(\mathcal{O}_{G^2(p,n)}(1)) \cdot \sigma(E) \\ &= \mathcal{O}_{G^2(p,n)}(1) \cdot R^2_{s,p,n}\left(\sigma(E)\right) \geq 1 . \end{aligned}$$

现在 $(R^2_{s,\ p,\ n} \circ \sigma)((R^1_{s,\ p,\ n})^{-1}(x))$ 是一个单点。因此，存在 U 的一个邻域，使得 $x \in G^1(p,\ n)$ 的像 $\Sigma(U)$ 包含在 $(R^2_{s,\ p,\ n} \circ \sigma)((R^1_{s,\ p,\ n})^{-1}(x))$ 的一个小邻域内。在局部坐标中，我们可以将 Σ 写成一个有界的向量值有理函数，它在 x 附近有界。因此我们得出，Σ 可以延拓为 x 附近的一个正则映射。

同样，Σ^{-1} 有一个正则延拓。总之，我们得出，Σ 延拓为 $G(p,\ n)$ 的一个自同构。 ∎

皮卡群的诱导自同构分类如下：

引理 4.7. 设 σ 是 $\boldsymbol{T}_{s,\ p,\ n}$ 的一个自同构，σ^* 是由此诱导的皮卡群自同构。当 $n \neq 2s$ 且 $n \neq 2p$时，σ^* 是恒等映射。当 $n = 2s$时，σ^* 是恒等映射或 $(\mathrm{USD})^*$。当 $n = 2p$时，σ^* 是恒等映射或$(\mathrm{DUAL})^*$。

引理 4.7 的证明。记 $\mathrm{Eff}(\mathsf{T}_{s,p,n}) \subset A_{n-1}(\mathsf{T}_{s,p,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 为 $\mathsf{T}_{s,p,n}$的有效除子锥。由引理 3.2、3.16，$\mathrm{Eff}(\mathsf{T}_{s,p,n})$由 $\{B_0, \cdots B_r, D_1^+, \cdots D_r^+, D_1^-, \cdots D_r^-\}$ 生成。由 (18)–(20) 可得，$\mathrm{Eff}(\mathsf{T}_{s,p,n})$ 的极射线集合为

$$\begin{cases} \{B_0, B_r, D_1^+, \cdots, D_r^+, D_1^-, \cdots, D_r^-\} & \text{when } p < s,\ n-s \neq p \\ \{B_0, B_r, D_1^+, \cdots, D_r^+, D_1^-, \cdots, D_{r-1}^-\} & \text{when } n-s = p < s \\ \{B_0, B_r, D_1^+, \cdots, D_{r-1}^+, D_1^-, \cdots, D_{r-1}^-\} & \text{when } n-s = p = s \end{cases}.$$

由于 σ^* 保持 $\mathrm{Eff}(\mathcal{T}_{s,p,n})$，因此它在 $\mathfrak{G}$ 上诱导出一个排列。

我们通过逐一讨论各种情形来证明引理 4.7 。为简化记号，以下将 $(R_{s,p,n})^*\left(\mathcal{O}_{G(p,n)}(1)\right)$ 记为 H 。

情形 1（$r \geq 2$, $p \neq n-s$ **和** $p < s$）。由（18）可得

$$\sigma^*(B_0) = \sigma^*(B_r) + \sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^-) - \sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^+)\,. \quad (22)$$

若 $\sigma^*(B_0) \in \left\{D_1^-, \cdots D_r^-, D_1^+, \cdots D_r^+\right\}$，通过考察 H 的系数，可得以下几种可能。

（A）对某个 $1 \leq j \leq r$，$\sigma^*(D_j^-) = B_0$ 和 $\sigma^*(D_j^+) = B_r$。

（B）对某个 $1 \leq j \leq r$，$\sigma^*(D_j^+) = B_0$ 和 $\sigma^*(D_j^-) = B_r$。

（C）$\sigma^*(B_r) = B_r$ 和 $\sigma^*(D_r^+) = B_0$。（D）$\sigma^*(B_r) = B_0$ 和 $\sigma^*(D_r^+) = B_r$。

对于情形（A），D_1^+的系数至多为 $-r$（$r-j$），在

$$\sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^-) - \sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^+)\,.$$

由于 $r \geq 2$，我们有 $j = r$ 和

$$\sigma^*(D_r^-) = B_0\,,\ \sigma^*(D_r^+) = B_r\,,\ \sigma^*(B_0) = D_r^-\,,\ \sigma^*(B_r) = D_r^+\,,$$
$$\sigma^*(D_j^+) = D_j^-\,,\ \sigma^*(D_j^-) = D_j^+ \text{ for } 1 \leq j \leq r-1\,.$$

由于 $\sigma^*(K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}) = K_{\mathcal{T}_{s,p,n}}$，我们得出 $n = 2s$，因此 $\sigma^* = (\mathrm{USD})^*$。对于情形 (B)，与上文相同，唯一的可能是

$$\sigma^*(D_r^+) = B_0\,,\ \sigma^*(D_r^-) = B_r\,,\ \sigma^*(B_0) = D_r^+\,,\ \sigma^*(B_r) = D_r^-\,,$$
$$\sigma^*(D_j^-) = D_j^-\,,\ \sigma^*(D_j^+) = D_j^+ \text{ for } 1 \leq j \leq r-1\,.$$

注意，$K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}}$ 中 H 的系数为 $-n$。当 $n-s<p$ 时，$\sigma^*(K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}})$ 中 H 的系数为 $-2r=-2(n-s) > -2p > -n$。当 $p<n-s$ 时，$\sigma^*(K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}})$ 中 H 的系数为 $-2p > -s-(n-s) = -n$。两者都会导致矛盾。用同样的论证，我们可以排除情形 (C)、(D)。

接下来，我们假设 $\sigma^*(B_0) \in \{B_0, B_r\}$。通过检查（$H$ 在 (22) 中的系数，我们得到以下几种可能。

(a) $\sigma^*(B_0)=B_r$ 和 $\sigma^*(D_r^-)=B_0$。

(b) $\sigma^*(B_0)=B_r$ 和 $\sigma^*(B_r)=B_0$。

(c) $\sigma^*(B_0)=B_0$ 和 $\sigma^*(D_r^-)=B_r$。

(d) $\sigma^*(B_0)=B_0$ 和 $\sigma^*(B_r)=B_r$。

对于情形（a），由 (22) 可得

$$\sigma^*(B_0)=B_r\,,\ \ \sigma^*(D_r^-)=B_0\,,\ \ \sigma^*(D_r^+)=D_r^-\,,\ \ \sigma^*(B_r)=D_r^+\,,$$
$$\sigma^*(D_j^+)=D_j^-\,,\ \ \sigma^*(D_j^-)=D_j^+ \text{ for } 1\le j\le r-1\,.$$

于是 $\sigma^*(H)=H$，因此 $\sigma^*(K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}}) \neq K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}}$。这就产生了矛盾。

对于情形 (b)，由 (22) 可得

$$\sigma^*(B_r)=B_0\,,\ \ \sigma^*(B_0)=B_r\,,\ \ \sigma^*(D_j^+)=D_j^-\,,\ \ \sigma^*(D_j^-)=D_j^+ \text{ for } 1\le j\le r\,.$$

由于 $\sigma^*(K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}}) = K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}}$，我们得出结论：要么 $n=2p$ 且 $\sigma^*=$(DUAL)*，要么 $n=2s$ 且 $\sigma^*=$(USD)*。

对于情形 (c)，由（22）可知，σ^* 置换 D_r^-和 B_r，并固定所有其他除子。由于 $\sigma^*(K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}}) = K_{\mathcal{T}_{s,\,p,\,n}}$，我们有 $p=n-s$，这与假设矛盾。

对于情形 (d)，由（22）可知，σ^* 是恒等映射。

情形 2（$r\ge 2$ **和** $n-s=p<s$）。由（18）和（20）可得

$$\sigma^*(B_0)=\sigma^*(B_r)+\sum_{i=1}^{r-1}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^-)-\sum_{i=1}^{r}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^+)\,. \quad (23)$$

由与上文相同的论证可得 $\sigma^*(B_0) \in \{B_0, B_r\}$。考察 H 在（23）中的系数，可得 σ^* 是恒等映射。**情形 3**（$r\ge 2$ **和** $n-s=p=s$）。由（19）和（20）可得

$$\sigma^*(B_0)=\sigma^*(B_r)+\sum_{i=1}^{r-1}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^-)-\sum_{i=1}^{r-1}(r+1-i)\cdot\sigma^*(D_i^+)\,.$$

由与上文相同的论证可得， σ^* 是恒等映射或 σ^* =(USD)*。

情形 4（$r=p=n-s=1$）。若 $n=2$，引理4.7 显然成立。当$n\geq 3$时，我们有 $B_0=H-D_1^+$、 $B_1=H$和$K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}}=-nH+(n-2)D_1^+=-nB_0-2D_1^+$。因此， σ^* 是恒等映射。

情形 5（$r=p=1$ 和 $2\leq n-s\leq s$）。我们有 $B_0=H-D_1^+$、 $B_1=H-D_1^-$、 $K_{\mathcal{T}_s、p、n}=-nH+(s-1)D_1^++(n-s-1)D_1^-$，且 σ^*是$\{B_0、B_1、D_1^+、D_1^-\}$的一个排列。由于 $\sigma^*(K_{\mathcal{T}_{s,p,n}})=K_{\mathcal{T}_s、p、n}$，我们可以得出结论： σ^*将 B_0 和 B_1互相置换。若 $\sigma^*(B_0)=B_0$，则 σ^* 是恒等映射。若$\sigma^*(B_0)=B_1$，则 $n=2s$ 且 σ^* =(USD)*。

情形 6 ($r=n-s=1$ **和** $2\leq p<s$**)**。类似地，我们可以得出结论：σ^* 置换了 B_0 和 B_1。如果 $\sigma^*(B_0)=B_0$，那么 σ^* 就是恒等映射。如果$\sigma^*(B_0)=B_1$，那么 $n=2p$ 和 σ^* =(DUAL)*。

我们完成引理 4.7的证明。 ∎

定理 1.6的证明。 不失一般性，我们可以假设$2p\leq n\leq 2s$。我们分情形论证定理 1.6 。

情形 1 ($p=s=n-s=1$**)**。 $\mathcal{T}_{1,1,2}\cong\mathbb{P}^1$。

情形 2 ($p=n-s=1$ **和** $s\geq 2$**)**。设 σ 是$\mathcal{T}_{s,p,n}$的一个自同构。由引理4.7，σ^* 是恒等映射。由引理4.6， σ 诱导出 $G(p,n)$的一个自同构 Σ 。注意，例外除子的每个不可约分支在 σ作用下保持不变。因此， Σ 将$\mathcal{V}^+_{(0,1)}$ 映到$\mathcal{V}^+_{(0,1)}$。

回忆一下，当 $n\neq 2p$ 时， $G(p,\ n)$ 的自同构群由 PGL(n, $\mathbb{K}$) 生成。将 Σ 写成一个 $n\times n$ 矩阵

$$\Sigma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中 A、 B、 C、 D 分别是大小为 $s\times s$、 $s\times(n-s)$、$(n-s)\times s$、$(n-s)\times(n-s)$ 的子矩阵。如果 C 不是零矩阵，则存在一个点$x\in$ V$^+$ (0,1)，使得 $\Sigma(x)\notin$ V$^+$ (0,1)，这就产生了矛盾。因此， C 是零矩阵，且 $\Sigma\in P$，其中 P 由 (7) 定义。

情形 3（$p=1$ 和 $2\leq n-s<s$）。设 $\sigma\in$ Aut(T$_{s,p,n}$)。则 σ 诱导出 $G(p,n)$ 的一个自同构 Σ，它将 V$^+$ (0,1) 映到 V$^+$ (0,1)，并将 V$^-$ (1,0) 映到 V$^-$ (1,0)。将Σ 写作 (24)。若 C（分别地， B）不为零，则存在一点 $x\in$V$^+$ (0,1)（分别地，V$^-$ (0,1)），使得 $\Sigma(x)\notin$ V$^+$ (0,1)（分别地，V$^-$ (0,1)）。于是 $\sigma\in$ GL($s,\mathbb{K}$) $\times$ GL($n-s,\mathbb{K}$)。

情形 4（$2 \le p$ 和 $2p < n < 2s$）。设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_{s,p,n})$。则 σ 诱导出 $G(p,n)$ 的一个自同构 Σ，它将 $\mathrm{V}^{+}_{(p-r+1,r-1)}$ 映到 $\overline{\mathrm{V}^{+}_{(p-r+1,r-1)}}$，并将 $\mathrm{V}^{-}_{(p-1,1)}$ 映到 $\overline{\mathrm{V}^{-}_{(p-1,1)}}$。将 Σ 写作 (24)。若 C（分别地，B）不为零，则存在一点 $x \in V^{+}_{(p-r+1,r-1)}$（分别地，$\mathrm{V}^{-}_{(p-1,1)}$），使得 $\Sigma(x) \notin \overline{\mathrm{V}^{+}_{(p-r+1,r-1)}}$（分别地，$\mathrm{V}^{+}_{(p-r+1,r-1)}$）。于是 $\sigma \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K})$。

情形 5 ($1 \le p < s = n - s$**)**。设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{s,p,n})$。那么 σ 或 USD $\circ$ σ诱导出 Σ 在 $G(p,n)$ 上的一个自同构，并在皮卡群上诱导恒等映射。类似地，我们可以得出 $\Sigma \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K})$。

情形 6（$2 \le p < s$ 和 $n = 2p$）。设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_{s,p,2p})$。那么 σ 或 DUAL $\circ$ σ 诱导出 Σ 在 $G(p,2p)$ 上的一个自同构，并在皮卡群上诱导恒等映射。由于 $G(p,2p)$ 的自同构群由 $\mathrm{PGL}(2p,\mathbb{K})$ 和对偶自同构 *（见 §2.1）生成，当 $\Sigma \in \mathrm{PGL}(2p,\mathbb{K})$ 时，类似于情形 4，我们可以得出 $\Sigma \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(2p-s,\mathbb{K})$。

若 $\Sigma \notin \mathrm{PGL}(2p,\mathbb{K})$，则有 $\Sigma = \Sigma' \circ {}^{*}$，其中 Σ' 具有式（12）的形式。将 Σ' 写成式（24）。容易验证，$\mathcal{V}^{-}_{(p,0)}$ 在 $\Sigma = \Sigma' \circ {}^{*}$ 作用下保持不变，当且仅当 B, C 是零矩阵，这与假设矛盾。

情形 7（$2 \le p = s = n - s$）。设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_{s,p,2p})$。则 σ 或 USD $\circ$ σ在 $G(p,2p)$ 上诱导一个自同构 Σ，并在皮卡群上诱导恒等映射。若 $\Sigma \in \mathrm{PGL}(2p,\mathbb{K})$，则与情形 4 中相同，$\Sigma \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(2p-s,\mathbb{K})$。否则，DUAL $\circ$ σ 或 DUAL $\circ$ USD $\circ$ σ 在 $G(p,2p)$ 上诱导一个自同构 Σ，该自同构包含于 $\mathrm{PGL}(2p,\mathbb{K})$。因此，与情形 4 中相同，$\Sigma \in \mathrm{GL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(2p-s,\mathbb{K})$。

我们完成定理1.6的证明。 ∎

4.2. $\mathcal{M}_{s,\,p,\,n}$*的自同构群。回顾*

例 *4.8.* 令 $M_{p\times q}$ 为所有 $p \times q$ 矩阵的集合，$\mathbb{P}(M_{p\times q})$ 为 $M_{p\times q}$ 的射影化。显然，在群 $GL(p,\mathbb{K})$ 的左乘作用和群 $GL(q,\mathbb{K})$ 的右乘作用下，$\mathbb{P}(M_{p\times q})$ 是一个 $GL(p,\mathbb{K}) \times GL(q,\mathbb{K})$-簇。定义 $r := \min\{p,q\}$。那么 $\mathbb{P}(M_{p\times q})$ 有 r 个 $GL(p,\mathbb{K}) \times GL(q,\mathbb{K})$-轨道，其闭包 $Z_r \supset Z_{r-1} \supset \cdots \supset Z_1$ 由以下条件给出：Z_i 是对应于秩至多为 i 的矩阵的点集。沿着 Z_1、…、Z_{r-1}（的严格变换）依次爆破 $\mathbb{P}(M_{p\times q})$，得到光滑簇 $\mathbb{P}(M_{p\times q})$，根据定理 *1.6*，它与 $M_{p,p,p+q}$ 同构。

引理 4.9. 假设 $p \neq q$ 是正整数。设 σ 是 $M_{p,p,p+q}$ 的一个自同构，且 σ^* 在 $M_{p,p,(p+q)}$ 的皮卡群上为恒等映射。那么 $\sigma \in$ 射影一般线性群$(p, \mathbb{K}) \times$ 射影一般线性群$(q, \mathbb{K})$.

引理的证明 4.9。 当 $p = 1$ 或 $q = 1$ 时，$\mathcal{M}_{p,\ p,\ p+q}$ 同构于一个射影空间。不失一般性，我们可以假设 $2 \leq p < q$。

类似于引理 4.6，我们可以证明 σ 下降为一个自同构Σ，其作用于 $P(M_{p\times q})$ 并保持矩阵的秩。因此，要证明引理 4.9，只需证明 $\Sigma \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(q, \mathbb{K})$，将 Σ 视为 $\mathrm{GL}(pq, \mathbb{K})$ 中的一个元素即可。

对于 $1 \leq i \leq p$ 和 $1 \leq j \leq q$，将 E_{ij} 记为满足以下条件的 $p \times q$ 矩阵：其 $(i, j)^{\text{th}}$ 元素为 1，其余位置为 0。将 Σ 写成一个线性变换

$$\Sigma(E_{uv}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{uv}^{ij} \cdot E_{ij}, \quad a_{uv}^{ij} \in \mathbb{K},\ 1 \leq u \leq p,\ 1 \leq v \leq q.$$

由于 Σ 将任意秩为 1 的矩阵映射为秩为 1 的矩阵，因此存在整数 $1 \leq i \leq p$ 和 $1 \leq j \leq q$，使得 $a_{11}^{ij} \neq 0$。将 Σ 与 $\mathrm{GL}(p, \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(q, \mathbb{K})$ 中的一个元素复合后，我们可以假设 $\Sigma(E_{11}) = E_{11}$。

我们断言，存在整数 $2 \leq i \leq p$、$2 \leq j \leq q$，使得 $a_{22}^{ij} \neq 0$。反设不然，则存在整数 $2 \leq i \leq p$、$2 \leq j \leq q$，使得$a_{22}^{i1} \neq 0$ 且 $a_{22}^{1j} \neq 0$，对于 Σ，$E_{11} + E_{22}$ 的秩为 2。然而，这与 Σ，E_{22} 的秩为 1 这一事实矛盾。将 Σ 与一般线性群$(p, \mathbb{K}) \times$ 一般线性群$(q, \mathbb{K})$ 中的某个元素复合，可推出 Σ，$E_{11} = E_{11}$ 且 Σ，$E_{22} = E_{22}$。类似地，我们可以假设对于 $1 \leq i \leq p$，Σ，$E_{ii} = E_{ii}$。

由于 $E_{11} + \lambda E_{12}$（分别地，$E_{22} + \lambda E_{12}$）的秩为 1，$\lambda \in \mathbb{K}$，我们得出

$$\Sigma(E_{12}) = \sum_{i=1}^{p} a_{12}^{i1} \cdot E_{i1} \ \text{ or } \ \sum_{j=1}^{q} a_{12}^{1j} \cdot E_{1j} \left(\text{resp. } \Sigma(E_{12}) = \sum_{i=1}^{p} a_{12}^{i2} \cdot E_{i2} \ \text{ or } \ \sum_{j=1}^{q} a_{12}^{2j} \cdot E_{2j} \right).$$

于是 Σ，$E_{12} = a_{12}^{12} \cdot E_{12}$ 或 $a_{12}^{21} \cdot E_{21}$。我们断言，Σ，$E_{12} = a_{12}^{12} \cdot E_{12}$。反设不然，则 Σ，$E_{1i} = a_{1i}^{i1} \cdot E_{i1}$，其中 $a_{1i}^{i1} \neq 0$ 对于 $2 \leq i \leq p$ 成立。无论 Σ，$E_{1(p+1)}$ 的值如何，都会违背秩在 Σ 下保持不变这一假设。

通过同样的论证，我们可以假设

(a) $\Sigma(E_{ij}) = a_{ij}^{ij} \cdot E_{ij}$ for $1 \leq i \leq p$ and $1 \leq j \leq q$.

(b) 当 $i \equiv j$（模 p）时，$a_{ij}^{ij} = 1$。

通过射影一般线性群（PGL）$(p,\ \mathbb{K})$ 的左作用进行复合，我们可以固定 $a_{21}^{21} = \cdots a_{p1}^{p1} = 1$。于是，对于 $E_{11} + E_{1j} + E_{i1} + E_{ij}$，$a_{ij}^{ij} = 1, 1 \le i \le p, 1 \le j \le q$的秩为 1。因此我们得出结论：$\Sigma \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(q, \mathbb{K})$。

引理 4.9 的证明至此完成。 ∎

引理 4.10。假设 $2p \le n \le 2s$ 和 $2 \le p < s$。设 σ 是 $M_{s,p,n}$ 的一个自同构，且 σ^* 在 $M_{s,p,n}$的皮卡群上是恒等映射。那么 $\sigma \in \mathrm{PGL}(s, \mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s, \mathbb{K})$。

继续之前，回顾一下，根据 [16, §5.2], $\mathcal{M}_{s,p,n}$ 是对 $\mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)})$ 的迭代爆破，其中 $N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)}$ 是子格拉斯曼流形 $\mathcal{V}_{(p,0)} \cong G(p,s)$ 在 $G(p,n)$ 中的法丛的射影化。下文将为 $\mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)})$ 定义便于使用的局部坐标图。

对于 $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le s$，我们将 $\mathcal{V}_{(p,0)}$ 的一个开子集 $U_{i_1 \cdots i_p}$ 定义为

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccccccccc|cccc} \cdots & \widetilde{x}_{1(i_1-1)} & 1 & \cdots & \widetilde{x}_{1(i_2-1)} & 0 & \cdots & \widetilde{x}_{1(i_p-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \widetilde{x}_{2(i_1-1)} & 0 & \cdots & \widetilde{x}_{1(i_2-1)} & 1 & \cdots & \widetilde{x}_{2(i_p-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \widetilde{x}_{p(i_1-1)} & 0 & \cdots & \widetilde{x}_{1(i_2-1)} & 0 & \cdots & \widetilde{x}_{p(i_p-1)} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

（s 列；$(n-s)$ 列）

在 $U_{i_1 \cdots i_p}$ 上进行平凡化后，我们得到一个开子集 $U^N_{i_1 \cdots i_p} \subset N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)}$，其坐标为

$$\left((\cdots, \widetilde{x}_{uv}, \cdots)_{\substack{1 \le u \le p,\, 1 \le v \le s \\ v \ne i_1, \cdots, i_p}},\ (\cdots, \widetilde{a}_{ij}, \cdots)_{1 \le i \le p,\, s+1 \le j \le n} \right) =: (\widetilde{X}, \widetilde{A})_{i_1 \cdots i_p},$$

以及一个开嵌入 $M^{i_1 \ldots i_p}: U^N_{i_1 \cdots i_p} \hookrightarrow G(p,n)$，由 $M((\widetilde{X}, \widetilde{A})_{i_1 \cdots i_p}) :=$ 定义

$$\left(\begin{array}{cccccccc|ccc} \cdots & \widetilde{x}_{1(i_1-1)} & 1 & \cdots & \widetilde{x}_{1(i_p-1)} & 0 & \cdots & & \widetilde{a}_{1(s+1)} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ \cdots & \widetilde{x}_{2(i_1-1)} & 0 & \cdots & \widetilde{x}_{2(i_p-1)} & 0 & \cdots & & \widetilde{a}_{2(s+1)} & \cdots & \widetilde{a}_{2n} \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \widetilde{x}_{p(i_1-1)} & 0 & \cdots & \widetilde{x}_{p(i_p-1)} & 1 & \cdots & & \widetilde{a}_{p(s+1)} & \cdots & \widetilde{a}_{pn} \end{array} \right). \tag{25}$$

（s columns；$(n-s)$ columns）

令 $U^P_{i_1 \cdots i_p}$ 为 $\mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)})$ 在 $U_{i_1 \cdots i_p}$ 上的开子集，其坐标为

$$\left((\cdots, \widetilde{x}_{uv}, \cdots)_{\substack{1 \le u \le p,\, 1 \le v \le s \\ v \ne i_1, \cdots, i_p}},\ [\cdots, \widetilde{a}_{ij}, \cdots]_{\substack{1 \le i \le p, \\ s+1 \le j \le n}} \right) =: (\widetilde{X}, [\widetilde{A}])_{i_1 \cdots i_p}, \tag{26}$$

其中 $\widetilde{[\cdots \ \widetilde{a}_{ij}, \cdots]}$ 是纤维 $\mathbb{P}^{p(n-s)-1}$ 的齐次坐标。容易验证，$(X, [A])_{i_1\cdots i_p}$ 和 $(X, [A])_{i'_1\cdots i'_p}$ 表示 $\mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)})$ 中同一个点，当且仅当矩阵 $M_{(\widetilde{X},\widetilde{A})^{i_1\cdots i_p}}$ 和 $M_{(\widetilde{X},\widetilde{A})^{i'_1\cdots i'_p}}$ 在 $\mathbb{G}_m$-作用下表示 $G(p, n)$ 中的同一个点；也就是说，存在一个矩阵 $W \in$ 一般线性群$(p, \mathbb{K})$ 和 $\lambda \in \mathbb{K}$，使得

$$M_{(\widetilde{X},\widetilde{A})_{i_1\cdots i_p}} = W \cdot M_{(\widetilde{X},\widetilde{A})_{i'_1\cdots i'_p}} \cdot \begin{pmatrix} I_{s\times s} & 0 \\ 0 & \lambda \cdot I_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix}.$$

引理 4.10 的证明。 若 $p = n - s$，则引理 4.10 可由引理4.9推出。不失一般性，以下我们可以假设 $2p \le n$， $p \ne n - s$ 且$2 \le p < s$。

由引理 3.17 和 Kawamata–Viehweg 消失定理，以下自然映射是满射。

$$\Gamma(\mathcal{T}_{s,p,n}, H_j) \to \Gamma(\mathcal{M}_{s,p,n}, H_j|_{\mathcal{M}_{s,p,n}}).$$

根据引理 3.9，我们得出，$H_j|_{\mathcal{M}_{s,p,n}}$ 在$\mathcal{M}_{s,p,n}$ 上的完全线性系同样同构于 $\mathbb{P}^{N^j_{s,p,n}}$。因此，我们可以证明， σ 由环境空间 $\mathbb{P}^{N_{p,n}} \times \mathbb{P}^{N^0_{s,p,n}} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N^p_{s,p,n}}$的一个自同构诱导。

由于 σ^* 是$\mathcal{M}_{s,p,n}$的皮卡群上的恒等映射，类似于引理4.6，我们可以得出， σ 诱导了 $\mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)})$的一个自同构 Σ，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_{s,p,n} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{M}_{s,p,n} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{s,p,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{s,p,n}} & & \\ \mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)}) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)}) & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{P}^{N_{p,n}} \times \mathbb{P}^{N^1_{s,p,n}} \\ \downarrow{\scriptstyle \kappa_{s,p,n}} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_{s,p,n}} & & \\ \mathcal{V}_{(p,0)} & \xrightarrow{\widehat{\Sigma}} & \mathcal{V}_{(p,0)} & & \end{array} \tag{27}$$

此外， Σ 将$\kappa_{s,p,n}$ 的一个纤维映到另一个纤维，因此 σ 在底空间 $V_{(p,0)}$上诱导一个自同构 $\widehat{\Sigma}$。由命题 1.2 和例 4.8 可知，$\kappa_{s,p,n}$ 的每个纤维都同构于 $P(M_{p\times(n-s)})$，而$\kappa_{s,p,n} \circ \tau_{s,p,n}$ 的每个纤维都同构于完全共线变换簇 $P(M_{p\times(n-s)}) \cong M_{p,p,n-s+p}$。由于 σ^* 是恒等映射，因此例外除子的不可约分支在 σ作用下不变， Σ 保持 $P(M_{p\times(n-s)})$中矩阵的秩。与引理 4.9 类似，我们可以

推出，$\kappa_{s,p,n}$ 的每个纤维上对 Σ 的限制都由 $\mathrm{GL}(p,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n-s,\mathbb{K})$中的一个元素给出。

接下来，我们将通过逐一讨论各种情形来证明引理 4.10 。

情形 1（$2 \le p < s$ **和** $s \neq 2p$）。将 σ 与一个 $\mathrm{PGL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})$ 中的元素复合后，我们可以假设下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)}) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)}) \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \mathbb{P}^{N_{p,n}} \times \mathbb{P}^{N^1_{s,p,n}} & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\tau)} & \mathbb{P}^{N_{p,n}} \times \mathbb{P}^{N^1_{s,p,n}} \end{array} ,$$

其中，τ 是 $\mathbb{P}^{N^1_{s,p,n}}$ 的一个自同构。

接下来，我们将证明 $\tau \in \mathrm{PGL}(s,\mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})$。

令 $U^P_{(s-p+1)\cdots s} \subset \mathbb{P}(N_{\mathcal{V}_{(p,0)}/G(p,n)})$ 为开子集，其局部坐标 $\widetilde{\quad}$ nates $(X,[A])$ $_{(s-p+1)\cdots s}$ 由式 (26) 在令 $i_1 = s, i_2 = s-1, \cdots \ i_p = s-p+1$ 后定义。为方便起见，我们将 $U^P_{(s-p+1)\cdots s}$ 记为 U^P，并将 $(\widetilde{X},[\tilde{A}])_{(s-p+1)\cdots s}$ 记为 $(X,[A])$。于是，嵌入 i 具有如下形式

$$i((X,[A])) = [\cdots, P_I(M_{(X,A)}), \cdots]_{I\in\mathbb{I}_{p,n}} \times [\cdots, P_I(M_{(X,A)}), \cdots]_{I\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}}$$

其中 P_I 是普吕克坐标函数，而 $M_{(X,A)}$ 由式（25）定义。为区分源和目标 U^P，我们将U^P 在目标中的局部坐标记为

$$(\cdots, y_{uv}, \cdots)_{1\le u\le p,\, 1\le v\le s-p} \times [\cdots, b_{ij}, \cdots]_{1\le i\le p,\, s+1\le j\le n} =: (Y,[B]) .$$

由于 τ 是 $\mathbb{P}^{N^1_{s的p、n}}$的射影线性变换，因此我们可以在上述局部坐标图中将（Y，$[B]$）$=\Sigma$（（X，$[A]$））表示为

$$\begin{aligned} & y_{uv} = x_{uv}, \ 1\le u\le p, \ 1\le v\le s-p, \\ & [\cdots \ P_I(M_{(Y,B)}), \cdots]_{I\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} = [\cdots, \sum_{J\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} C_I^J \cdot \ P_J(M_{(X,A)}), \cdots]_{I\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} , \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $C_I^J \in \mathbb{K}$。

我们引入以下记号。对于 $1\le k\le p$ 和 $1\le t\le s-p$,

$$I_{kt} := (s, s-1, \cdots, \widehat{s-p+k}, \cdots, s-p+2, s-p+1, t) .$$

对于 $1 \le k \le p$ 和 $s+1 \le t \le n$,

$$I^*_{kt} := (t, s, s-1, \cdots, \widehat{s-p+k}, \cdots, s-p+2, s-p+1)\,.$$

对于 $s-p+1 \le \alpha_1,\ \alpha_2 \le s$ 以及 $\alpha_1 \ne \alpha_2$、$1 \le \beta \le s-p$ 和 $s+1 \le \gamma \le n$,

$$I^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta\gamma} := (\gamma, s, s-1, \cdots, \widehat{\alpha_1}, \cdots, \widehat{\alpha_2}, \cdots, s-p+2, s-p+1, \beta)\,.$$

然后，计算可得

$$P_{I_0}(M_{(X,A)}) = 1\,,\ P_{I_{kt}}(M_{(X,A)}) = (-1)^{k-1}\cdot x_{kt}\,,\ P_{I^*_{kt}}(M_{(X,A)}) = (-1)^{p-k}\cdot a_{kt}\,,$$

以及 $P_{I^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta\gamma}}(M_{(X,A)}) =$

$$\begin{cases} (-1)^{p+\alpha_1-\alpha_2}\left(x_{(\alpha_1-s+p)\beta}\cdot a_{(\alpha_2-s+p)\gamma} - x_{(\alpha_2-s+p)\beta}\cdot a_{(\alpha_1-s+p)\gamma}\right) & \text{if } \alpha_1 > \alpha_2 \\ (-1)^{p-1+\alpha_1-\alpha_2}\left(x_{(\alpha_1-s+p)\beta}\cdot a_{(\alpha_2-s+p)\gamma} - x_{(\alpha_2-s+p)\beta}\cdot a_{(\alpha_1-s+p)\gamma}\right) & \text{if } \alpha_1 < \alpha_2 \end{cases}.$$

断言。设 C^J_I 为（28）中的常数。假设对于某个指标 有 $_{,\ p,\ n}$ 以及整数 $1 \le i \le p$、$s+1 \le j \le n$。则 $J = I^*_{kt}$，其中$1 \le k \le p$ 且 $s+1 \le t \le n$。

断言的证明。设对于整数 $1 \le i \le p$、$s+1 \le j \le n$以及指标 J^* 有 $C^{J^*}_{I^*_{ij}} \ne 0$：$=(i_1,\ \cdots\ i_p) \in \mathbb{I}^1_{s,\ p,\ n} \setminus \{I^*_{rt} | 1 \le r \le p,\ s+1 \le t \le n\}$。则 $i_p \le s-p$。取一个整数 $1 \le i' \le p$ 使得

$$i' \notin \{i, i_2 - s + p, i_3 - s + p, \cdots, i_{p-1} - s + p\}.$$

回想一下，格拉斯曼流形 $G(p,\ n)$ 是由普吕克关系定义的 $\mathbb{P}^{N_{p,\ n}}$ 的子簇。特别地，我们有

$$P_{I^{(s-p+i')(s-p+i)}_{ipj}}\cdot P_{I_0} = \begin{cases} P_{I_{i'i_p}}\cdot P_{I^*_{ij}} - P_{I_{ii_p}}\cdot P_{I^*_{i'j}} & \text{if } i < i' \\ -\left(P_{I_{i'i_p}}\cdot P_{I^*_{ij}} - P_{I_{ii_p}}\cdot P_{I^*_{i'j}}\right) & \text{if } i > i' \end{cases}.$$

由于像 $\Sigma\,(U^P)$ 满足相同的方程，将（28）代入普吕克关系，我们得到

$$\sum_{I\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} C^J_{I^{(s-p+i')(s-p+i)}_{ipj}}\cdot P_J(M_{(X,A)}) = \pm x_{i'i_p}\cdot\left(\sum_{I\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} C^J_{I^*_{ij}} P_J(M_{(X,A)})\right) \mp x_{ii_p}\cdot\left(\sum_{I\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} C^J_{I^*_{i'j}} P_J(M_{(X,A)})\right).$$

则以下等式作为多项式成立。

$$\begin{aligned} & x_{i'i_p}\left(C_{I^*_{ij}}^{J^*}\cdot P_{J^*}(M_{(X,A)})+\sum_{I\in\mathbb{I}^1_{s,p,n},\ J\neq J^*} C_{I^*_{ij}}^{J} P_J(M_{(X,A)})\right) \\ & =\pm\sum_{J\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} C^{J}_{I^{(s-p+i')(s-p+i)}_{ipj}} P_I(M_{(X,A)})+x_{ii_p}\left(\sum_{J\in\mathbb{I}^1_{s,p,n}} C^{J}_{I^*_{i'j}} P_I(M_{(X,A)})\right). \end{aligned} \tag{29}$$

注意到，(29) 左边的第一项包含一个带有因子 $x^2_{i'i_p}$ 的非零单项式，而右边不存在带有因子 $x^2_{i'i_p}$ 的非零单项式。这就产生了矛盾。

断言的证明到此完成。 ∎

根据断言，我们有

$$b_{i'j'}\left(\Sigma(X,[A])\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=s+1}^{n}(-1)^{i-i'}\cdot C^{I^*_{ij}}_{I^*_{i'j'}}\cdot a_{ij}\ ,\qquad C^{I^*_{ij}}_{I^*_{i'j'}}\in\mathbb{K}\,.$$

由于 Σ 保持 $P(M_{p(n-s)})$ 中矩阵的秩，与引理4.9 类似，我们可以证明存在一个元素 $\sigma_l\in\mathrm{PGL}(p,\mathbb{K})$ 以及一个元素$\sigma_r\in\mathrm{PGL}(n-s,\mathbb{K})$ 使得

$$\left(b_{i'j'}\left(\Sigma(X,[A])\right)\right)=\sigma_l\cdot(a_{ij})\cdot\sigma_r\,.$$

通过复合一个 $\mathbf{PGL}(n-s,\mathbb{K})$-作用，我们可以假设自同构$\Sigma$ 由左作用 σ_l 给出。

我们断言，对每个 $1\le i\le p, s+1\le j\le n$，都有 $b_{ij}(\Sigma(X,[A]))=C^{I^*_{ij}}_{I^*_{ij}}\cdot a_{ij}$。否则，存在整数 $1\le i\le p, 1\le i'\le p, i\neq i', s+1\le j\le n$ 使得 $C^{I^*_{i'j}}_{I^*_{ij}}\neq 0$。然而，此时 $P_{I^{(s-p+i)(s-p+i')}_{(s-p)j}}(\Sigma(X,[A]))$ 包含一个带有因子 $a_{i'j}\cdot x_{i'(s-p)}$ 的单项式，而它不可能是 $P_I(M_{(X,[A])})$ 的线性组合。这就产生了矛盾。

同样，我们可以得出结论：$C^{I^*_{ij}}_{I^*_{ij}}=C^{I^*_{i'j}}_{I^*_{i'j}}$ 对于 $1\le i,\ i'\le p$。于是 σ_l 是平凡的。至此，我们完成了引理 4.10 在 $2p\neq s$时的证明。

情形 2（$2\le p$ 和 $s=2p$）。回顾一下，$G(p,\ 2p)$ 的自同构群由射影一般线性群（$2p,\ \mathbb{K}$）和对偶自同构生成。与引理4.10第一次证明中的情形 2 类似，我们可以证明 Σ 在 $G(p,\ 2p)$ 中诱导出一个属于射影一般线性群（$2p,\ \mathbb{K}$）的自同构。于是，情形 1 中的同一论证在此处也适用。

我们完成引理 4.10的证明。 ∎

与引理4.7类似，我们有

引理 4.11。假设 $2p \le n \le 2s$ 和 $2 \le p < s$。令 σ 为 $M_{s,p,n}$ 的一个自同构， σ^* 为其诱导的皮卡群自同构。当 $n \neq 2s$ 和 $n \neq 2p$时， σ^* 为恒等映射。当 $n = 2s$ 时， σ^* 为恒等映射或 (USD)*。当 $n = 2p$时， σ^* 为恒等映射或 (DUAL)*。

引理 4.11的证明。由引理 3.12 和 3.16可知，Eff($\mathcal{M}_{s,p,n}$)，即 $\mathcal{M}_{s,p,n}$ 的有效除子锥，由以下元素生成：

$$\{\check{D}_2, \check{D}_3, \cdots, \check{D}_r, \check{B}_0, \check{B}_1, \cdots, \check{B}_r\}.$$

由（21）可知，Eff($\mathcal{M}_{s,p,n}$)的极射线集合为：

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} \{\check{D}_2, \check{D}_3, \cdots, \check{D}_r, \check{B}_0, \check{B}_r\} & \text{when } p \neq n-s \text{ and } p < s \\ \{\check{D}_2, \check{D}_3, \cdots, \check{D}_{r-1}, \check{B}_0, \check{B}_r\} & \text{when } n-s = p < s \end{cases}.$$

由于 σ^* 保持 Eff($\mathcal{M}_{s,p,n}$)，因此它诱导了 $\mathfrak{G}$的一个排列。

我们通过逐个情形的论证证明引理 4.11 。为方便起见，将除子 H （$\check{}R_{s,p,n}$）*($\mathcal{O}^{G(p,n)}$(1)) 记为 H 。

情形 1 ($n - s = 1$)。Eff($\mathcal{M}_{s,p,n}$) 由 $\check{}B_0, \check{}B_1$ 生成。根据引理 3.11 和 (21)，我们有 $K_{\mathcal{M}_{s,p,n}} = -(n-p)\check{}B_0 - p\check{}B_1$。若 σ^* 不是恒等映射，则 $n = 2p$ 和 $\sigma^* =$ (DUAL)*。

情形 2 ($p < s$, $p \neq n - s$, 以及 $n - s \ge 2$)。由引理 3.11，我们有

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{M}_{s,p,n}} &= -n\check{B}_0 + \frac{p(n-s)}{r}\left(\check{B}_0 - \check{B}_r - \sum_{k=2}^{r}(r+1-k)\check{D}_k\right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{r}\Big((p-i+1)(n-s-i+1) - 1\Big)\check{D}_i \\ &= \sum_{i=2}^{r}\left((p-i+1)(n-s-i+1) - 1 - \frac{p(n-s)(r+1-i)}{r}\right)\check{D}_i \\ &\quad - \left(n - \frac{p(n-s)}{r}\right)\check{B}_0 - \frac{p(n-s)}{r}\check{B}_r. \end{aligned} \tag{30}$$

我们首先假设 $r = 2$。若 $p = 2$, $K_{\mathcal{M}_{s,p,n}} = -2\check{}D_2 - s\check{}B_0 - (n-s)\check{}B_r$; 若 $n - s = 2$, $K_{\mathcal{M}_{s,p,n}} = -2\check{}D_2 - (n-p)\check{}B_0 - p\check{}B_r$。则 σ^* 是恒等映射。

令 $r \geq 3$。由（21）可得

$$\sigma^*(\check{D}_1) = \frac{1}{r}\sigma^*(\check{B}_0) - \frac{1}{r}\sigma^*(\check{B}_r) - \sum_{i=2}^{r} \frac{r+1-i}{r}\sigma^*(\check{D}_i)\,. \tag{31}$$

(31) 相对于基 $\left\{H, \check{D}_2, \cdots, \check{D}_r\right\}$，根据推论 1.5具有整数系数。考察 H的系数，可得以下可能性。

(a) σ^* 是恒等映射。(b) $\sigma^*(\check{B}_0) = \check{B}_r$, $\sigma^*(\check{B}_r) = \check{B}_0$。(c) 存在 $2 \leq l \leq r$，使得 $\sigma^*(\check{D}_l) = \check{B}_0$ 且 $\sigma^*(\check{D}_{r+2-l}) = \check{B}_r$。(d) $\sigma^*(\check{B}_0) = \check{B}_0$ 且 $\sigma^*(\check{D}_r) = \check{B}_r$，或 $\sigma^*(\check{B}_0) = \check{B}_r$ 且 $\sigma^*(\check{D}_r) = \check{B}_0$。(e) $\sigma^*(\check{B}_r) = \check{B}_0$ 且 $\sigma^*(\check{D}_2) = \check{B}_r$，或 $\sigma^*(\check{B}_r) = \check{B}_r$ 且 $\sigma^*(\check{D}_2) = \check{B}_0$。

对于情形 (b)，通过检查（，$\cdots$，）中的系数 $\check{D}_2\check{D}_r$，可得出结论：$\sigma^*(\check{D}_i) = \check{D}_{r+2-i}$，其中 $2 \leq i \leq r$。由（30）可知 $n - {}^{p}(n-s)\,r = p(n-s)\,r$。因此，$n = 2s$ 且 $\sigma^* =$(USD)*，或者 $n = 2p$ 且 $\sigma^* =$(DUAL)*。

对于情形 (c)、(d)、(e)，由（30）可得 $p = n - s$ 或 $p = s$，这与假设矛盾。

情形 3（$p = n - s < s$）。证明与情形 2 的证明类似。为简洁起见，我们省略细节。

我们完成了引理 4.11 的证明。 ∎

定理 1.9 的证明。我们通过分情况讨论来证明定理 1.9 。注意，我们可以假设 $2p \leq n \leq 2s$。

情形 1（$p = 1$）。若 $p = s = 1$ 且 $n = 2$，$\mathcal{M}^{1,1,2}$ 显然是一个点。若 $p = n - s = 1$ 且 $n \geq 3$，$\mathcal{M}_{s,\,1,\,s+1} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ 且 自同构群$(\mathcal{M}_{s,\,1,\,s+1}) =$ 射影一般线性群$(n-1,\ \mathbb{K})$。若 $p = 1$，$2 \leq n - s < s$，$\mathcal{M}_{s,\,1,\,2s} \cong \mathbb{P}^{s-1} \times \mathbb{P}^{n-s-1}$ 且

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{s,1,n}) = \mathrm{PGL}(s, \mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s, \mathbb{K}).$$

如果 $p = 1$、$2 \leq n - s = s$，$\mathcal{M}_{s,\,1,\,n} \cong \mathbb{P}^{s-1} \times \mathbb{P}^{s-1}$ 和

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{s,1,2s}) = \mathrm{PGL}(s, \mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(s, \mathbb{K}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

情形 2（$2 \leq p$、 $n \neq 2s$ 和 $n \neq 2p$）。令 $\sigma \in$Aut($M_{s,p,n}$)。由引理 4.11， σ^* 是 $M_{s,p,n}$ 的皮卡群上的恒等映射。由引理 4.10，我们有 $\sigma \in$ 射影一般线性群 $(s, \mathbb{K}) \times$ 射影一般线性群$(n-s, \mathbb{K})$。

情形 3（$2 \leq p < s$ **和** $n = 2s$）。令 $\sigma \in$ 自同构群$(\mathcal{M}_{s,\ p,\ n})$。由引理 4.11， 4.10可知，要么 σ 要么 Usd $\circ\ \sigma$ 属于 射影一般线性群$(s,\ \mathbb{K}) \times$ 射影一般线性群$(n-s,\ \mathbb{K})$。那么，

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{s,p,2s}) = \mathrm{PGL}(s, \mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s, \mathbb{K}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

情形 4（$2 \leq p < s$ **和** $n = 2p$）。令 $\sigma \in$ 自同构群$(\mathcal{M}_{s,\ p,\ n})$。由引理 4.11， 4.10可知，要么 σ 要么 Dual $\circ\ \sigma$ 属于 射影一般线性群$(s,\ \mathbb{K}) \times$ 射影一般线性群$(n-s,\ \mathbb{K})$。那么

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{s,p,2p}) = \mathrm{PGL}(s, \mathbb{K}) \times \mathrm{PGL}(n-s, \mathbb{K}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

情形 5a（$4 = 2p = 2s = n$）。$\mathcal{M}_{2,\ 2,\ 4} \cong \mathbb{P}^3$，且 自同构群$(\mathcal{M}_{2,2,4})$ = 射影一般线性群$(4,\ \mathbb{K})$。**情形 5b**（$6 \leq 2p = 2s = n$）。由 [26, 定理 7.5] 可得。

我们完成定理 1.9 的证明。 ∎

附录

A. 交数的计算

本附录汇总了 T-不变曲线与线丛之间的交数。由于证明与引理 3.13 的证明相似，我们省略此处的证明。

在下文中， l 是满足 $0 \leq l \leq r$ 的任意整数。

引理 A.1. 对于 $2 \leq j \leq r-l$,

$$H \cdot \zeta_j^l = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta_j^l = -\delta_{i,l+j-1} + 2\delta_{i,l+j} - \delta_{i,l+j+1}, \quad D_i^+ \cdot \zeta_j^l = 0.$$

对于 $r-l+2 \leq j \leq r$,

$$H \cdot \zeta_j^l = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta_j^l = 0, \quad D_i^+ \cdot \zeta_j^l = -\delta_{i,j-1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}.$$

此外,

$$-K_{\mathcal{T}_{s,p,n}} \cdot \zeta_j^l = 2 + \delta_{r-l,j} + \delta_{r,j}.$$

引理 A.2. 假设 $1 \le k \le r-l$。当 $u = l+k$ 和 $v = s+l+k+1 \le n$, 或 $v = s+l+k$ 和 $u = l+k+1 \le p$ 时,

$$H \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = -\delta_{i,l+k} + 2\delta_{i,l+k+1} - \delta_{i,l+k+2}, \quad D_i^+ \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = 0.$$

当 $u = l+k$ 和 $s+l+k+2 \le v \le n$ 时,

$$H \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = -\delta_{i,\ l+k} + \delta_{i,\ l+k+1} + \delta_{i,\ v-s} - \delta_{i,\ v-s+1}, \quad D_i^+ \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = 0.$$

当 $v = s+l+k$ 和 $l+k+2 \le u \le p$ 时,

$$H \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = -\delta_{i,l+k} + \delta_{i,l+k+1} + \delta_{i,u} - \delta_{i,u+1}, \quad D_i^+ \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = 0.$$

引理 A.3。 假设 $1 \le k \le r-l$。则, $-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}} \cdot \zeta^{l,\ \ k}_{\ l+k,\ v} =$

$$\begin{cases} 2(v-s-l-k) & \text{when } s+l+k+1 \le v \le r+s-1 \\ 2(r-l-k)+1 & \text{when } v = r+s \text{ and } k \le r-l-1 \\ n-s+p-2(l+k)+1 & \text{when } r+s+1 \le v \le n \text{ and } k \le r-l-1 \\ n-s+p-2r & \text{when } r+s+1 \le v \le n \text{ and } k = r-l \end{cases}$$

且 $-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}} \cdot \zeta^{l,\ \ k}_{u,\ s+l+k} =$

$$\begin{cases} 2(u-l-k) & \text{when } l+k+1 \le u \le r-1 \\ 2(r-l-k)+1 & \text{when } u = r \text{ and } k \le r-l-1 \\ n-s+p-2(l+k)+1 & \text{when } r+1 \le u \le p \text{ and } k \le r-l-1 \\ n-s+p-2r & \text{when } r+1 \le u \le p \text{ and } k = r-l \end{cases}.$$

引理 A.4。 假设 $r-l+1 \le k \le r$。当 $u = r-k+1$ 和 $v = 1 \le s-p+r-k$, 或 $v = s-p+r-k+1$ 和 $u = r-k \ge 1$ 时,

$$H \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = 0, \quad D_i^+ \cdot \zeta^{l,k}_{u,v} = -\delta_{i,k} + 2\delta_{i,k+1} - \delta_{i,k+2}.$$

当 $u = r-k+1$ 和 $1 \le v \le s-p+r-k-1$ 时,

$$H \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = 0, \quad D_i^+ \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = -\delta_{i,\ k} + \delta_{i,\ k+1} + \delta_{i,\ s-p+r+1-v} - \delta_{i,\ s-p+r+2-v}.$$

当 $v = s-p+r-k+1$ 和 $1 \le u \le r-k-1$ 时,

$$H \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = 0, \quad D_i^- \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = 0, \quad D_i^+ \cdot \zeta^{l,\ k}_{u,\ v} = -\delta_{i,k} + \delta_{i,k+1} + \delta_{i,r+1-u} - \delta_{i,r+2-u}.$$

引理 A.5. 假设 $r-l+1 \le k \le r$。那么，$-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}} \cdot \zeta^{l,\ k}_{r-k+1,v} =$

$$\begin{cases} 2(s-p+r-k+1-v) & \text{when } s-p+2 \le v \le s-p+r-k \\ 2(r-k)+1 & \text{when } v = s-p+1 \text{ and } k \le r-1 \\ 2(r-k)+s-p+1 & \text{when } 1 \le v \le s-p \text{ and } k \le r-1 \\ s-p & \text{when } 1 \le v \le s-p \text{ and } k = r \end{cases}$$

以及 $-K_{\underset{s,p,n}{\mathcal{T}}} \cdot \zeta^{l,k}_{u,s-k+r-p+1} =$

$$\begin{cases} 2(r-k+1-u) & \text{when } 2 \le u \le r-k \\ 2(r-k)+1 & \text{when } u = 1 \text{ and } k \le r-1 \end{cases}.$$

引理 A.6. 对于 $1 \le m_1 \le p-l$ 和 $1 \le m_2 \le s-p+l$,

$H \cdot \delta^l_{m_1,m_2} = 1$, $D_i^- \cdot \delta^l_{m_1,m_2} = \delta_{i,l+m_1} - \delta_{i,l+m_1+1}$, $D_i^+ \cdot \delta^l_{m_1,m_2} = \delta_{i,r-l+m_2} - \delta_{i,r-l+m_2+1}$.

引理 A.7. 对于 $1 \le m_1 \le p-l$和 $1 \le m_2 \le s-p+l$, $-K_{\mathcal{T}_{s,\ p,\ n}} \cdot \delta^l_{m_1,m_2} =$

$$\begin{cases} 2m_1+2m_2-2 \text{ 当} & 1 \le m_1 \le r-l-1 \quad 1 \le m_2 \le l-1 \text{ 且当且} \\ 2m_1+2l-1 & 1 \le m_1 \le r-l-1 \\ r-l+m_2 & \\ r-l+m_2 & \\ & m_2 = l \qquad\qquad m_2 \ge l+1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llllll} 2m_1+2l-1+s-p & 1 \le m_1 \le r-l-1 \text{ 当且 } 2 & -1 & m_1 = r-l & 0 \text{ 当且} \\ & 1 \le m_2 \le l-1 & & & m_2 = l \\ 2r & m_1 = r-l \text{ 当且 } 2r+s-p & & m_1 = r-l & \text{当且} \\ & m_2 \ge l+1 & & & 1 \le m_2 \le l-1 \\ 2 \quad -1+s+p-n & m_1 \ge r-l+1 & 0 \text{ 当且 } n-s+p & m_1 \ge r-l+1 & \text{当且} \\ & & m_2 = l & & \\ n & m_1 \ge r-l+1 \text{ 当且 } & m_2 \ge l+1 & & \end{array}$$

引理 A.8。对于 $1 \le m_1 \le n-s-l$ 和 $1 \le m_2 \le l$,

$H \cdot \Delta^l_{m_1,\ m_2} = 1$, $D_i^- \cdot \Delta^l_{m_1,\ m_2} = \delta_{i,\ l+m_1} - \delta_{i,\ l+m_1+1}$, $D_i^+ \cdot \Delta^l_{m_1,\ m_2} = \delta_{i,r-l+m_2} - \delta_{i,r-l+m_2+1}$.

引理 A.9。 对于 $1 \leq m_1 \leq n-s-l$ 和 $1 \leq m_2 \leq l$, $-K_{\tau_{s,\ p,\ n}}.\Delta^l_{m_1,\ m_2} =$

$$\begin{cases} 2m_1+2m_2-2 \text{ 当} & 1 \leq m_1 \leq r-l-1 \quad 1 \leq m_2 \leq l-1 \text{ 且当且} \\ 2m_1+2l-1 & 1 \leq m_1 \leq r-l-1 \\ r-l+m_2 & \\ r-l+m_2 & \\ & m_2 = l \qquad 1 \leq m_2 \leq l-1 \end{cases}$$

$$2 \quad -1 \quad m_1 = r-l \quad 0 \text{ 当且 } 2r \quad m_1 = r-l \quad \text{当且} \quad m_2 = l \quad 1 \leq m_2 \leq l-1 .$$

$$2 \quad -1+n-s-p \quad m_1 \geq r-l+1 \quad 0 \text{ 当且 } n-s+p \quad m_1 \geq r-l+1 \quad m_2 = l \quad \text{当且}$$

参考文献

[1] A. Alguneid, 空间共线变换的退化, 《埃及科学院院刊》7 (1951), 1-17 (1952).[2] C. Araujo, T. Fassarella, I. Kaur, and A. Massarenti, 关于抛物向量丛模空间的自同构, 《国际数学研究通知》2021, no. 3, 2261-2283.[3] A. Bruno and M. Mella, $M_{0\text{的}n}$自同构群, 《欧洲数学会杂志》15:3 (2013), 949-968.[4] M. Bolognesi and A. Massarenti, 直线上点的构型模空间的双有理几何, 《代数与数论》15 (2021), no. 2, 513-544.[5] P. Bravi and G. Pezzini, 本原美妙簇, 《数学杂志》282 (3-4), 1067-1096 (2016)[6] M. Brion, 球面齐性空间的分类, CompositioMath. 63 (1987), no. 2, 189208.[7] M. Brion, 美妙簇的全坐标环, 《代数杂志》313 (2007), no. 1, 61-99.[8] W. Chow, 关于代数齐性空间的几何, 《数学年刊》(2) 50 (1949), 32-67.

[9] C. De Concini and C. Procesi, 完全对称簇 *I*, 不变式理论（Montecatini, 1982）, 1-44, 《数学讲义》996, Springer, 柏林, 1983.[10] C. De Concini and C. Procesi, 完全对称簇 *II*, Adv. Stud. Pure Math. Vol. 6, 481513, North-Holland, Amsterdam, 1985.[11] G. Faltings, 模空间局部奇点的显式消解, 《纯粹与应用数学杂志》 483:183-196, 1997.[12] B. Fantechi and A. Massarenti, 任意特征下曲线模空间的刚性, 《国际数学研究通知》2017, no. 8, 2431-2463.[13] B. Fantechi and A. Massarenti, 带权标记稳定曲线模空间的刚性, 《纯粹与应用代数》222 (2018), no. 10, 3058-3074.[14] H. Fang, L. Schaffler, and X. Wu, 带标记三次曲面 *KSBA* 模空间的精细性与光滑性, 已被《美国数学会院刊》接受.[15] W. Fulton, 交叉理论, Springer 出版社, 柏林, 1984.[16] H. Fang and X. Wu, 格拉斯曼流形的典范爆破 *I*：*Kausz* 紧化有多典范? 《国际数学研究通知》2025, no. 11, Paper No. rnaf138, 25 pp.[17] H. Fang and M. Zhang, 格拉斯曼流形的典范爆破 *II*, arXiv: 2310.17367, 2023.[18] B. Fu and D. Zhang, 通过自同构群刻画紧致复环面, 《数学年刊》357 (2013), no. 3, 961-968.[19] I. Kausz, 一般线性群的模紧化, 《数学文献》5 (2000), 553-594.[20] F. Knop, 球嵌入的 *Luna-Vust* 理论, 海得拉巴代数群会议论文集（海得拉巴, 1989）, 225-249, Manoj Prakashan, 马德拉斯, 1991.[21] D. Luna, 每个奇妙簇都是球面的, 《变换群》1(3), 249-258 (1996).[22] D. Laksov, A. Lascoux, and A. Thorup, 关于 *Giambelli* 完全相关定理。《数学学报》162(3-4):143-199, 1989.

[23] G. Lusztig，抛物特征层 *I*，《莫斯科数学杂志》，4(1):153-179, 311, 2004。[24] A. Massarenti，的自同构群$M_{g,\ n}$，《伦敦数学会杂志》(2) 89:1 (2014), 131-150。[25] A. Massarenti，关于富尔顿–麦克弗森紧化的双正则几何，《数学进展》322 (2017), 97-131。[26] A. Massarenti，关于完全形式空间的双有理几何 *I*：共线变换与二次曲面，伦敦数学会会报 (3) 121 (2020), no. 6, 1579-1618。[27] A. Massarenti，关于完全形式空间的双有理几何 *II*：斜形式，《代数杂志》546 (2020), 178-200。[28]A. Massarenti 和 M. Mella，关于*Hassett*模空间的自同构，美国数学会会刊 369:12 (2017), 8879-8902。[29] L. Manivel, M. Michałek, L. Monin, T. Seynnaeve 和 M. Vodička，完全二次曲面：高斯模型的舒伯特演算与半定规划，欧洲数学会杂志，26(8):3091-3135, 2024。[30] F. Severi，计数几何基础，《数学年刊》(4) 19 (1940),151-242。[31] T. A. Springer，群紧化中 $B \times B$轨道闭包的交叉上同调，附录由Wilberd van der Kallen撰写，《代数杂志》258 (2002), no. 1, 71-111。[32]E. Study，关于圆锥曲线的几何，特别是其特征问题，《数学年刊》26 (1886), 58-101。[33] J. Weyman，向量丛上同调与合志，剑桥数学丛书，149, 2003。[34] J. Tyrrell，关于 S_n中的完全二次曲面与共线变换，Mathematika 3 (1956), 69-79。[35] I. Vainsencher，完全共线变换与行列式理想的爆破，《数学年刊》267 (1984), no. 3, 417-432。[36] B. van der Waerden，论代数几何 *XV*：圆锥曲线特征问题的解，《数学年刊》115 (1938), no. 1, 645-655。