arXiv:2601.02781v1 [math.NT] 6 Jan 2026

塞尔伯格与 Bourgade 中心极限定理的收敛速率

许博涵与黄鹏杰

谨以此文纪念我们的恩师沈昭良教授，并致以感激与敬仰

摘要。基于 Radziwiłł-Soundararajan 和 Roberts 最近的研究，我们为 Bourgade 关于平移狄利克雷L函数的中心极限定理建立了收敛速率。我们的结果还表明，随机向量各分量之间的依赖结构，可能会对这类多元中心极限定理的收敛速率产生重大影响。

1. 引言

对于狄利克雷特征 χ，令$L(s,\chi)$表示 χ的狄利克雷L函数。令$N \in \mathbb{N}$。给定模q的狄利克雷特征 χ_j以及满足 $|\alpha_j| \le 0.5T$的实值函数 $\alpha_j = \alpha_j(T)$，其中T为实数，我们考虑

$$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}_T(U) = (\mathscr{X}_{\alpha_1,\chi_1,T}(U), \dots, \mathscr{X}_{\alpha_N,\chi_N,T}(U)), \tag{1.1}$$

其中 $U = U_T$是 $[T, 2T]$, 上的均匀分布，并且

$$\mathscr{X}_{\alpha_j,\chi_j,T}(U) = (\log|L(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}(U+\alpha_j), \chi_j)|)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}. \tag{1.2}$$

著名的塞尔伯格中心极限定理 [31, 32] 断言，每个 $\mathscr{X}_{\alpha_j,\chi_j,T}(U)$ 在分布意义下收敛到标准正态随机变量（另见 [16, 23]）。最近，在 [17], 本文作者证明，在对 α_j 满足某些适当条件时，$\mathbf{X}_T(U)$ 在分布意义下收敛到一个 N 维正态分布。这样的收敛性推广了 Bourgade 关于平移黎曼ζ函数的中心极限定理（见 [3]）。

本文的主要目标是估计此类中心极限定理的收敛速率。为陈述主定理，我们先回顾一些背景知识。对于任意函数 $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，记 f 的 p-范数为 $\|f\|_p$；若存在 $L > 0$ 使得对任意 $X, Y \in \mathbb{R}^N$，均有 $|f(X) - f(Y)| \le L\|X - Y\|_2$，则称 f 为 Lipschitz（连续）函数。我们将 $\|f\|_{Lip}$ 定义为该不等式中可能的最小 L。我们将考虑

$$\mathscr{L}_{L,M} := \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \mid f \text{ is Lipschitz with } \|f\|_{Lip} \le L \text{ and } \|f\|_\infty \le M\} \tag{1.3}$$

并注意到 $\cup_{L,M\in\mathbb{R}^+} \mathscr{L}_{L,M}$ 构成了 $\mathbb{R}^N$ 上所有有界利普希茨函数组成的空间。此外，对于取值于$\mathbb{R}^N$的随机向量 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$，$\mathbf{X}$ 与$\mathbf{Y}$ 之间的（广义）Dudley 距离定义为

$$d_{\mathscr{D},L,M}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \sup_{f\in\mathscr{L}_{L,M}} |\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] - \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]|. \tag{1.4}$$

2000 数学主题分类。主要分类 11M06；次要分类 11M41、60F05。关键词和短语。狄利克雷L函数、中心极限定理、收敛速率。本研究部分得到 PJW 的国家科学及技术委员会拨款 114-2628-M-110-006-MY4，以及 PHH 的国家科学及技术委员会拨款 113-2115-M- 110-001-MY2 和 114-2115-M-110-004-MY3 的资助。

在全文讨论中，我们要求实值函数 $\alpha_j = \alpha_j(T)$ 满足 $|\alpha_j| \le 0.5T$，且 $|\alpha_i - \alpha_j| = d_{i,j}(T) \le \Delta(T)$，其中非负的 $\Delta(T) \ll (\log\log T)^{\varepsilon}$，对固定的 $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$ 成立。我们还要求 $\Delta(T)$ 满足 –

$$O_{q_i,q_j}(|\alpha_i - \alpha_j| + 1) + O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T}\Big) = O_1(\Delta(T)),$$

其中，对q_i、q_j的依赖性与 (7.12) 中相同，而O中的下标 1 表示隐含常数为 1（仿 Harper [13]）。与 [17]，类似，我们使用以下$\alpha_{i,j}$ 来刻画移位 α_i 与 α_j 之间的距离。令 $\delta(T)$ 为非负函数，满足 $\delta(T) \ll (\log\log T)^{\varepsilon}$，我们始终取$\alpha_{i,i} = 1$，并按如下方式定义$\alpha_{i,j}$（对$i \neq j$）：

(1) 若满足以下条件，我们令 $\alpha_{i,j} = 1$

$$\log\Big(\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}\Big) \ge \log\log T + e_{i,j}(T) \quad \text{with} \quad |e_{i,j}(T)| \le \delta(T); \tag{1.5}$$

(2) 若存在常数$c \in [0,1]$（与T无关）使得以下条件成立，我们定义$\alpha_{i,j} = c$

$$\log\Big(\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}\Big) = c\log\log T + e_{i,j}(T) \quad \text{with} \quad |e_{i,j}(T)| \le \delta(T). \tag{1.6}$$

我们将 始终假设每个 (α_i, α_j) 均满足 (1.5) 和 (1.6) 中的至少一个。此外，我们令

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } \chi_i\bar{\chi}_j \text{ is principal;} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.7}$$

有了上述记号，我们引入对称矩阵

$$\mathfrak{K} = (k_{i,j})_{1\le i,j\le N} \quad \text{with} \quad k_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j; \\ \delta_{i,j}c_{i,j} & \text{if} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1.8}$$

注意，当 $\mathfrak{K}$为正定（或者等价地，$\sum_{1\le i,j\le N} a_i a_j \delta_{i,j}\alpha_{i,j} \ge 0$对任意$a_i, a_j \in \mathbb{R}$）时，存在一个$N$维正态分布

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathscr{X}}_1, \dots, \tilde{\mathscr{X}}_N), \tag{1.9}$$

其均值为 $\mathbf{0}_N$，协方差矩阵为 $\mathfrak{K}$。

采用上述记号，我们现在可以陈述主定理:

定理 1.1. 设$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}_T(U)$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}$分别如(1.1) 和(1.9)中所定义。那么，对任意固定的$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$，当 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$且 T 充分大时，

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T, \tilde{\mathbf{X}}) \ll_{\mathfrak{K},N} \frac{L}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}} + M(\log\log\log T)^{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}).$$

因此，当 $T \to \infty$时，向量$\mathbf{X}_T$在分布上收敛到 $\tilde{\mathbf{X}}$。

注 1：在不破坏收敛性的前提下，(1.3) 中的常数 L 和M 可以取为T 的函数。此外，取$L = o((\log\log\log T)^{\varepsilon_1})$ 和$M = o(\exp((1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}))(\log\log\log T)^{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2)})$，由 (1.3) 可推出$\cup_{L,M\in\mathbb{R}^+}\mathscr{L}_{L,M} = \cup_{T\in\mathbb{R}^+}\mathscr{L}_{L(T)}$、$M(T) = C_b(\mathbb{R}^n)$，即定义在 $\mathbb{R}^n$上的所有有界连续函数的空间，这恢复了依分布收敛的通常测试函数空间。因此，当T充分大时，定理 1.1 对任意给定的有界连续函数均成立。

正如可以注意到的，若在定理 1.1 中简单地代入 $\chi = \chi_0$（平凡特征）和$N = 1$，并不 会得到由 Tsang 在 $\ll (\log\log\log T)^2/\sqrt{\log\log T}$ 阶给出的 Selberg 中心极限定理的收敛速率，参见 Tsang [33, 定理 6.1]。然而，Tsang 的结果中没有“平移”，因此 $\Delta(T)$ 和 $\delta(T)$ 均恒等于零。注意到对这两个量的估计是命题 3.6 的核心，我们遂选择了一组新的参数，以证明以下与 Tsang 工作平行的结果。值得指出的是，与定理 1.1 相比，我们进一步建立了比本文作者先前关于两个或三个不同狄利克雷L函数之间独立性的工作 [16] 更强的收敛速率。

定理 1.2. 设 $N = 1,2,3$。假设对所有 T， $\Delta(T) = 0$且 $\delta(T) = 0$。那么，对于任意固定的 $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$以及任意充分大的 T，

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T, \tilde{\mathbf{X}}) \ll \begin{cases} \frac{LN(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}} + \frac{M}{(\log\log T)^{1-\varepsilon-\varepsilon_3}} & \text{if } N = 1,2; \\ \frac{LN(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}} + \frac{M}{(\log\log T)^{1/2-\varepsilon_4}} & \text{if } N = 3. \end{cases}$$

注2. (i) 若 $L = o(\sqrt{\log\log \overline{T/(\log\log}\log\log T)^2})$，且当 $N = 1$时 $M = o((\log\log T)^{1-\varepsilon-\varepsilon_3})$，或者当 $N = 3$时 $M = o((\log\log T)^{1/2-\varepsilon_4})$，那么相应的 Dudley 距离仍以 $o(1)$ 的收敛速率收敛到 0。

(ii) 毫无疑问，将第二个上界推广到 $N \geq 4$ 是值得期待的。然而遗憾的是，我们的方法会导出一个关于 T 的“发散”上界（见 (9.22)）。

设 $(\zeta_{K_j})_{j=1}^N$ 是一列二次域 K_j的戴德金ζ函数。对每个 j，记 χ_{K_j}为与 K_j相关联的（二次）本原狄利克雷特征，并回顾其分解式 $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s, \chi_K)$，其中 $\zeta(s)$ 是黎曼ζ函数，而 $L(s, \chi_K)$ 是与χ_K相对应的狄利克雷 L 函数。此外，若 K_i 与 K_j不同，则众所周知， $\chi_{K_i} \neq \chi_{K_j}$，因而 $\zeta_{K_i}(s) \neq \zeta_{K_j}(s)$。如[17], 所示，我们有以下 N 维随机向量：

$$\mathbf{Y}_T := (\log|\zeta_{K_1}(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}(U + \alpha_1))|, \ldots, \log|\zeta_{K_N}(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}(U + \alpha_N))|)/\sqrt{\log\log T}. \tag{1.10}$$

我们的下一个定理给出了 [17, 定理 1.3] 中建立的戴德金ζ函数中心极限定理收敛速率的上界。

定理 1.3. 设$(\zeta_{K_j})^N j=1$是二次域 Kj 上一列戴德金ζ函数，并设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$满足与定理 *1.1* 相同的条件。令 $c_{i,j}$按(1.5)和(1.6)中的定义给出，并设

$$\Delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } \chi_{K_i}\bar{\chi}_{K_j} \text{ is principal;} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $\chi_j = \chi_0 for\ \ 1 \leq j \leq N$。此外，对于 $1 \leq j \leq N$，定义 $\chi_{N+j} = \chi_{K_j} and\ \alpha_{N+j} = \alpha_j$。假设对于任意 b_i, $b\,j \in \mathbb{R}, \sum_{1\leq i,j\leq 2N} b_i b\,j\ \delta_{i,j} c_{i,j} \geq 0$，其中 $\delta_{i,j}$的定义如(1.7)所示。那么存在一个 N 维正态随机变量 $\tilde{}\mathbf{Y} = (\tilde{\mathscr{Y}}_1, \ldots, \tilde{\mathscr{Y}}_N)$，其均值为 $\mathbf{0}_N$，协方差矩阵为

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}_{i,j})_{1\leq i,j\leq N} \quad with \quad \mathfrak{Q}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j; \\ \frac{1}{2} c_{i,j}(\Delta_{i,j} + 1) & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

使得对于任意固定的 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$，当 $\varepsilon_1+\varepsilon_2<1$时，对于充分大的 T，

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{Y}_T,\tilde{\mathbf{Y}}) \ll_{\Omega,N} \frac{L}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}} + M(\log\log\log T)^{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}),$$

因此，当 $T\to\infty$ 时，向量 $\mathbf{Y}_T$ 在分布上收敛到 $\tilde{\mathbf{Y}}$。

正如 [17, 定理 1.3], 的证明中由恒等式 $\log|\zeta_K(s)| = \log|\zeta(s)| + \log|L(s,\chi_K)|$ 所揭示的那样，可以将 (1.10) 看作是把 (1.1) 中的 N 替换为 $2N$，因此可以直接由定理 1.1 推出定理 1.3。为简洁起见，我们省略证明。

1.1. **进一步讨论——数论方面**。塞尔伯格的中心极限定理证明 [31, 32]依赖矩方法（[3, 16, 17, 23] 中也使用了该方法）。矩方法的一个主要缺点是无法追踪收敛速率。尽管如此，在 [33, 定理 6.1], 中，Tsang 扩展了塞尔伯格的方法，并证明 Kolmogorov 距离下的收敛速率为 $O((\log\log\log T)^2/\sqrt{\log\log T})$。最近，Roberts [26, 27] 证明了 Dudley 距离下具有这样的收敛速率，并证明了定理 1.1 的一个特例（~~其中 $N=2$~~ 且 $L=M=1$），适用于任意固定的狄利克雷 L函数（包括黎曼ζ函数）。在 [28], 假设黎曼猜想成立的条件下，Roberts 在 [26] 中将结果改进为 $O(\sqrt{\log\log\log\log T}/\sqrt{\log\log T})$。此外，我们注意到，塞尔伯格的工作 [31, 32]也需要对黎曼ζ函数非平凡零点的某些求和进行精细估计（另见 [3, 33]）。相比之下，Radziwiłł-Soundararajan ~~方法仅使用初等零点密度~~估计。本论文作者 [16, 17] 以及 Roberts [26]均使用了该方法。

此外，我们讨论 [16, 17] 与 [26]的论证之间的主要区别。在作者此前的工作中 [17], ，我们利用各个平移量之间的距离构造了一个半正定矩阵（[17, 式 (1.11)]）。随后，根据多元正态分布的存在性定理（例如参见[14] 和 [2, 第 29]节），我们构造了一个具有所需均值和协方差矩阵的多元正态随机变量，然后运用 Cramér-Wold 装置和矩方法推导出所需的收敛性。这一点在 [16] 中被隐式使用，并且如上所述，似乎难以追踪收敛速率。相比之下，Roberts [26, 引理 9] 直接计算了目标随机变量的适当近似的特征函数之间的距离。尽管如此，仍然需要掌握所涉及随机变量的矩信息，正如 [26, 引理 7]中所述。

正如可能已经注意到的那样，遗憾的是，我们的主要结果——定理 1.1（其中 N = 2）——无法在 [26] 中恢复 Roberts 的结果。值得指出的是，我们的命题 3.1–3.5 以相同的强度将 [26, 命题 1–5] 推广到了高维情形，而命题 3.7 则以一个可忽略的误差修正了[26, 命题 7] 。主要障碍来自命题 3.6 的证明：在那里，我们只能得到阶为 $(\log\log\log T)^{-\varepsilon_1}$ 的上界，其中某个 $0<\varepsilon_1<1/2$；而其在 [26, 命题 6] 中给出的对应结果为 $\ll(\log\log T)^{-1/2}$。导致我们的上界较弱的主要困难如下。首先，在 [26, 引理 5], 中出现了误差项 $O_k(V(u,u')^{k-2})$（其中隐含着对 k 的依赖性），但从 [26, 第 3361] 页的最后一行到 [26, 式（19）], ，这一低阶项被略去了。当 k 固定时，这样处理是合理的；然而，由于稍后在 [26, 引理 7], 中会取 k= ⌊log log T⌋，因此不能直接丢弃这一误差项（参见下文（5.22））。此外，在 [26, 第 3367], 页倒数第二个显示公式中，声称方括号中的各项被 $O_n(V(\xi,\xi')^{n/2-2}/\xi^n)$ 所控制。遗憾的是，在缺乏关于隐含常数的精确信息的情况下，尚不清楚

所得的和是否

$$\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}O_n(V(\xi,\xi')^{n/2-2}/\tilde{\mathfrak{s}}^n)$$

当 $\mathfrak{N}\ge C\log\log T$时，可能会得到所声称的界。此外，我们指出， ξ和 ξ'都不是固定常数，而是由$C\sqrt{\log\log T}$所界。因此， [26, 第 3367 页中最后声称的界还需要进一步验证。事实上，由 [26, 命题 5], 可知，当T充分大时，有$\tilde{\mathfrak{s}}^2=\frac{1}{2}\sum_{p\le Y}1_{\ p}\sim\log\log T$。因此，若取$u=\xi=u'=\xi'=C\sqrt{\log\log T}$，则会导致

$$\frac{V(\xi,\xi')^{\mathfrak{N}/2-2}}{\tilde{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{N}}}\sim\frac{((\log\log T)^2)^{\mathfrak{N}/2-2}}{(\log\log T)^{\mathfrak{N}/2}}=(\log\log T)^{\mathfrak{N}/2-4}. \tag{1.11}$$

然而，由于 $\mathfrak{N}\ge C\log\log T$，(1.11) $\ll(\log\log T)^{-2}$为何成立就相当不清楚了。

因此，上述问题促使我们在第 7 节中选择一组不同的参数。在证明定理 1.1 的设定下，参数 $\mathfrak{r}$ 和 $\|\mathbf{u}\|_1$ 分别按 (7.28) 和 (7.29) 选取，因此 $\mathfrak{N}$ 取为 (7.31) 中的形式。（事实上， [26, 第 2.8]节中这些参数的取值为 $\mathfrak{r}=\log\log T$和 $\|\mathbf{u}\|_1=\sqrt{\log\log T}$，正如 (7.24) 中所解释的，这在当前的方法框架下无法收敛。）不过，按照 (9.4) 和 (9.5) 的方式分别取$\mathfrak{r}$和$\|\mathbf{u}\|_1$，其取值与 [26, 命题 6], 中的接近，我们便能恢复 Tsang 的结果，并将其推广到定理 1.2 中的两个不同狄利克雷L函数。鉴于此，我们或许可以解决上述问题，从而为（至少两个）平移后的狄利克雷L函数建立更强的收敛速率。我们将此留待进一步研究。

1.2. **进一步讨论——概率视角**。将均匀分布（U_T）$_{T\ge0}$视为定义在一般概率空间（$\mathfrak{S}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{P}$）上的随机变量，可以将（X_T）$_{T\ge0}$（定义见（1.1））视为一个随机过程。因此， [16, 17], 中的研究与本文可以纳入一个统一的概率框架，即研究随机过程的平稳分布／极限分布。如命题 3.6 所示，当T足够大时，过程（X_T）$_{T\ge0}$几乎是一个高斯过程。更准确地说，它是一个N维高斯过程，其分量之间存在相关性，相关系数由 log（$_{|\alpha_i-\alpha_j|}^{1}$）给出。这是高斯乘法混沌的一个重要特征。此外，根据 Sakman-Webb [29] 和 Vihko [34], 的研究，从概率角度来看，（X_T）$_{T\ge0}$中的分量具有对数相关性，这并不令人意外。尽管如此，我们想强调的是，本文（以及我们先前的工作 [17]）中的这种对数相关性是受到数论启发的（例如参见 [5, 21]）。此外，我们在此指出，事实上，均匀分布（U_T）$_{T>0}$彼此独立，这意味着随机向量（$\mathbf{X}_T$）$_{T>0}$彼此独立。这种独立性假设在数论中很自然（例如参见 [19, 23]），尽管本文中可能并未明确使用。因此，我们可以将定理 1.1 视为独立随机向量的多元中心极限定理的一个具体例子。

中心极限定理（CLT）中的收敛速率研究是概率论中的经典课题。设 $(X_j)^n{}_{j=1}$ 是独立同分布（iid）随机变量，并记 $S_n=\sum^n{}_{j=1}X_j$。Berry-Esseen界 [9] 指出，$S_n/\sqrt{n}$ 的一元中心极限定理的收敛速率约为 $O(n^{-1/2})$。如果这些随机变量呈现特定的依赖结构，在单变量情形下，Berry-Esseen界仍为$O(n^{-1/2})$。依赖结构作为右侧估计中的一个常数因子出现（参见例如 Hoeffding-Robbins [15], Diananda [8], 和 Orey 的经典著作

[22] 以及 Chen-Shao [7], Janson-Pratelli-Rigo [18]的近期研究）。对于具有独立随机变量的多元中心极限定理，Sazonov [30], Götze [11], Raič [24], 和 Fang-Koike [10]的研究表明，收敛速率仍为$O(n^{-1/2})$，且维数的影响为N^{α}，其中 α。当维数和依赖性同时出现时，这类中心极限定理的收敛速率会变得更加复杂。根据 Chang-Chen-Wu [6, 推论 1], , 收敛速率变为$O(n^{-1/6})$，而不是$O(n^{-1/2})$，维数则作为因子 (log $N)^{7/6}$ 出现在右侧。依赖随机变量的数量m作为因子 $(m \vee 1)^{2/3}$出现。

根据其概率论对应结果（例如，Sazonov [30], Götze [11], Raič [24], 和 Fang-Koike[10]），我们预计定理 1.1 中的收敛速率应与单变量情形（Tsang 的结果或定理 1.2）同阶。然而，实际情况要差得多。其次，我们发现，分量之间的依赖性会对中心极限定理中的收敛速率产生显著影响（参见引理 7.8 和 9.1）。这似乎超出了概率论的预测。第三，定理 1.1 和定理 1.2 中维数的影响也不同于概率论中的对应结果（例如，Sazonov [30], Götze [11], Raič [24], 和 Fang-Koike [10]）。特别是，在定理 1.2 的证明中，如果 $N \geq 4$，我们无法追踪相应的收敛速率。

上述概率结果与其数论对应结果之间的差异表明，仍有改进的空间。此外，随机矩阵模型表明，塞尔伯格中心极限定理中的误差为 $\ll (\log\log T)^{-3/2}$，但这种方法似乎只能得到较弱的误差量级 $(\log\log T)^{-1/2}$。事实上，即使要去掉 $(\log\log\log T)^2$，似乎也颇具挑战。

1.3. **文章结构**。本文安排如下。第 2 节汇集数论和概率论方面的预备知识。定理 1.1 的证明见第 3 节。由于定理 1.1 的证明包含若干辅助命题，这些命题的证明分别安排在第 4 至第 8 节。由于定理 1.2 的证明需要对一组新的参数进行处理，我们将整个第 9 节用于证明该定理。

2. 记号与预备知识

本文中，我们使用朗道–维诺格拉多夫记号。若当 x $\to\infty$ 时，f (x)/g (x) 趋于 0（分别为 1），则记作 f $=$o(g)（分别记作 f $\sim$g ）。此外，记 f $=$O(g) 和 f $\ll$g，表示存在常数 C，使得当 x 充分大时，$|$f (x)$| \leq$ C g (x)。令 Ω(n) 表示 n 的素因子个数，按重数计。冯·芒戈尔特函数 Λ(n) 定义为：若 n 是素数 p 的幂，则 Λ(n) $=$ log p；否则 Λ(n) $=0$。莫比乌斯函数 μ(n) 定义为：若 n 是无平方因子的，则 μ(n) $=(-1)^{\Omega(n)}$；否则 $\mu(n)=0$。本文中采用的斯特林公式形式如下

$$n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1+O(1/n)) \tag{2.1}$$

除非另有说明。

除$j = 5,6$之外，所有 $\varepsilon_j > 0$ 均与T无关。除非另有说明，它们都可以任意小。所有κ_j也都是固定的正常数。我们将用 $\mathscr{E}_j$表示一些复杂的项。 $\mathscr{E}_j$ 的定义可能因证明而异，但在单个证明中是固定的。给定

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$，我们按照通常的$p$-范数定义

$$\|\mathbf{a}\|_p := \Big(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^p \Big)^{1/p} \tag{2.2}$$

对任意 $0 < p < \infty$。回想一下，当 $0 < p < q \le \infty$ 时，有 $\|\mathbf{a}\|_q \le \|\mathbf{a}\|_p$。注意，所有粗体字母（例如 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$）均表示 $\mathbb{R}^N$ 值向量。

为简便起见，在本文余下部分，对于给定的 L、$M \ge 0$，我们记作 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{L,M}$，并写作$d_{\mathscr{D}} = d_{\mathscr{D},L,M}$。由此可直接从 (1.3) 和 (1.4) 得出

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \le \sup_{f \in \mathscr{L}} \mathbb{E}[|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|] \le \sup_{f \in \mathscr{L}} \mathbb{E}[\|f\|_{Lip} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2] \le L\mathbb{E}[\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2] \le L\mathbb{E}[\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_1].$$

因此，对于任意随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)$，有

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \le L \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}[|X_j - Y_j|], \tag{2.3}$$

这将在我们的论证中频繁用到。

如第 1.2 节所述，令 $(U_T)_{T>0}$ 为定义在概率空间 $(\mathfrak{S}, \mathfrak{F}, \mathfrak{P})$ 上的一族相互独立的均匀分布，其密度函数为

$$f_{U_T}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{if} \quad T \le t \le 2T; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在无歧义时，我们将写作$U = U_T$。我们将使用 $\mathbb{E}$ 表示关于（$\mathfrak{S}$、$\mathfrak{F}$、$\mathfrak{P}$）的期望。令 $\mathfrak{L}_T$表示 $[T,2T]$上的勒贝格测度。对于博雷尔集 $\mathscr{B} \subseteq [T, 2T]$,，我们记$\mathfrak{P}_T(\mathscr{B}) = {}^1{}_T\mathfrak{L}_T(\mathscr{B})$。相应地，我们记 $\mathbb{E}_T[f] = {}^1{}_T \int^2{}_T {}_T f(t)dt$。这里，我们特别保留括号“[·]"仅用于表示期望。此外，为了指示函数的输入，我们只使用“(·)"。例如，我们将写作 $\mathbb{E}_T[\exp(t)]$。

根据 [26, 第3350页3351]，，对于充分大的常数K和K'，且 $2 < K' < K$，我们令

$$W = K(\log\log\log T)^2, \quad X = T^{(K'\log\log\log T)^{-1}}, \quad Y = T^{(K'\log\log T)^{-1}}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{W}{\log T}.$$

此外，对于每个j，我们令$s0,j = \sigma_0 + \mathrm{i}(U + \alpha_j)$。

3. 关键命题与主定理的证明

3.1. 所有关键命题列表。 鉴于 [17, 式（1.5）], 用于逼近(1.1)中定义的$\mathbf{X}_T(U)$，我们考虑

$$\mathbf{X}_T^0 = \mathbf{X}_T^0(U) = (\mathscr{X}^0_{\alpha_1,\chi_1,T}(U), \ldots, \mathscr{X}^0_{\alpha_N,\chi_N,T}(U)), \tag{3.1}$$

其中

$$\mathscr{X}^0_{\alpha_j,\chi_j,T}(U) = (\log|L(\sigma_0 + \mathrm{i}(U + \alpha_j), \chi_j)|) / \sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}. \tag{3.2}$$

命题 3.1. $\mathbf{X}_T$与$\mathbf{X}^0$ T 之间的 *Dudley* 距离（分别按(1.1) 和(3.1)定义）满足以下估计：

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T,\mathbf{X}_T^0) \ll \frac{LN(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}}.$$

证明。 在$\mathbf{X}_T$ =$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{X}^0$ $_T$=$\mathbf{Y}$的情形下应用不等式（2.3），可得

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T,\mathbf{X}_T^0) \le L\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}[|\mathscr{X}_{\alpha_j,\chi_j,T}-\mathscr{X}^0_{\alpha_j,\chi_j,T}|].$$

回顾（1.2）和（3.2）中的记号，以及 $\mathbb{E}_T$ 的约定。我们看到

$$\mathbb{E}_T[|\mathscr{X}_{\alpha_j,\chi_j,T}-\mathscr{X}^0_{\alpha_j,\chi_j,T}|] \ll \frac{W}{\sqrt{\log\log T}}$$

由 [17, 命题 3.1] 可知。因此，证明完毕。 □

设$A \ge 0$ 为一个稍后选定的固定常数。我们引入如下辅助级数。令$a(n) = 1$当n没有大于X的素因子，且n在Y以下至多有 100 log log$T$个素数，在Y与X之间至多有Alog loglog$T$个素数时。否则，令$a(n) = 0$。（注意，因此$a(n) = 0$，除非$n \le Y^{100}$loglog$_T X_A$logloglog$_T \le T^{\varepsilon}$每当 $^1{}_{K'}(100+A) \le \varepsilon$。）基于 [17,式（3.3）],, 我们定义 —

$$M(s;\chi) = \sum_n \frac{\mu(n)a(n)\chi(n)}{n^s}, \tag{3.3}$$

并令$\mathbf{M}_T = (\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2,\dots,\mathscr{M}_N)$，其中

$$\mathscr{M}_j := (\log|M^{-1}(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j);\chi_j)|)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}. \tag{3.4}$$

我们有以下估计：

命题 3.2. 使用上述记号，我们有

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{M}_T,\mathbf{X}_T^0) \ll \frac{LN}{\sqrt{\log\log T}} + MN(\log\log T)^{-K/K'}.$$

回顾 [17, 式 (3.1)]中的以下辅助级数：

$$\mathscr{P}(s;\chi) := \sum_{2\le n\le X}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s\log n}. \tag{3.5}$$

为简单起见，我们记

$$\mathscr{Q}_j = \mathscr{Q}_{j,T} = \mathfrak{Re}(\mathscr{P}(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j);\chi_j))/\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T} \tag{3.6}$$

以及 $\mathbf{Q}_T = (\mathscr{Q}_1,\mathscr{Q}_2,\dots,\mathscr{Q}_N)$。我们有以下关于用$\mathbf{Q}_T$逼近$\mathbf{M}_T$的结果。

命题 3.3. 设$\mathbf{M}_T$与命题 *3.2* 中相同，且$\mathbf{Q}_T$如上所述。则有

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{M}_T,\mathbf{Q}_T) \ll N(L+M)(\log\log T)^{-80}.$$

在命题 3.3 的证明中，我们将引入辅助级数

$$P(s) = P(s;\chi) := \mathfrak{Re}\sum_{p\le X}\frac{\chi(p)}{p^s}$$

（见 (5.1) 下文）。将 $s0,_j = \sigma_0 + \mathrm{i}(U + \alpha_j)$ 代入 $P(s)$，便可将其视为一个随机变量。定义 e

$$\mathbf{R}_T = (P(\sigma_0 + \mathrm{i}(U + \alpha_j)); \chi_k)_{j=1}^N) / \sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}. \tag{3.7}$$

下面的命题旨在说明，我们可以用 $\mathbf{R}_T$ 来逼近 $\mathbf{Q}_T$。

命题 3.4. 对于如上所述的 $\mathbf{Q}_T$ 与 $\mathbf{R}_T$，我们有如下估计：

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{Q}_T, \mathbf{R}_T) \ll \frac{LN}{\sqrt{\log\log T}}.$$

作为 [26]，中 $\tilde{\mathfrak{s}}$ 的类似物，我们考虑归一化因子

$$\mathfrak{M}_{T,\chi_j} = P_1(2\sigma_0; \chi_j\bar{\chi}_j) := \sum_{13<p\le Y} \frac{\chi_j\bar{\chi}_j(p)}{p^{2\sigma_0}}, \tag{3.8}$$

并且我们定义

$$\mathbf{R}_T^1 = (P_1(\sigma_0 + \mathrm{i}(U + \alpha_j); \chi_j)_{j=1}^N) / \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}. \tag{3.9}$$

我们将证明，当归一化因子发生轻微变化时，Dudley 距离仅有微小变化。

命题 3.5。令$\mathbf{R}_T$和$\mathbf{R}^1$ T分别按(3.7) 和(3.9)定义。我们有

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}_T, \mathbf{R}_T^1) \ll L\sqrt{N}\frac{\sqrt{1+\log\log\log T}}{\sqrt{\log\log T}}.$$

改变$\mathbf{R}_T$中的归一化因子的原因将在下一个命题中显现：我们将在该命题中构造一个多元正态分布，使其具有与$\mathbf{R}^1$ $_T$相同的“协方差矩阵”。如果我们不改变$\mathbf{R}_T$中的重新归一化因子，那么其“协方差矩阵”的对角线元素不会 是各分量的方差，而只是近似于方差（参见例如 [17, 式 (3.17)]）。这就会违反协方差矩阵的基本定义。

设 ˜**整数集**$_{N,T} = (\tilde{\mathcal{Z}}_{1,T}, \ldots, \tilde{\mathcal{Z}}_{N,T})$ 是一个N元正态分布，其均值为 $\mathbf{0}_N$，协方差矩阵与每个T $>T_0$（其中T_0）对应的$\mathbf{R}^1$ $_T$ 相同。事实上，这里所需要的是一个高斯过程，而非仅仅一个多元高斯随机变量。因此，我们将充分运用高斯过程存在性定理的全部威力（参见 [17, 定理 1.1(iii)]）。

命题 3.6. 设 ˜**整数集**$_{N,\ T} = (\tilde{\mathcal{Z}}_{1,\ T}, \ldots, \tilde{\mathcal{Z}}_{N,\ T})$ 服从一个 N 维正态分布，其均值为 $\mathbf{0}_N$，协方差矩阵与 $\mathbf{R}^1$ T 相同。因此，对于充分大的 T，有

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}_T^1, \tilde{\mathbf{Z}}_{N,T}) \ll_N \frac{L}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}} + M(\log\log\log T)^{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}),$$

其中 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 满足 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1$。

根据这些命题，我们已经证明，由平移后的狄利克雷L函数实部的对数构成的向量$\mathbf{X}_T(U)$近似服从具有特定协方差矩阵的正态分布。整个证明的最后一部分如下：两个给定多元正态分布的协方差矩阵略有变化，其影响可以忽略不计。证明依赖于矩阵分析中的技巧。

命题 3.7。 设 $\tilde{\mathbf{X}}$ 如(1.9) 中所定义，且 $\tilde{}$**整数集**$N,\ T$ 与命题 *3.6* 中相同。那么对于任意$\varepsilon_3>0$，我们有

$$d_{\mathscr{D}}(\tilde{\mathbf{Z}}_{N,T},\tilde{\mathbf{X}}) \ll_{\mathfrak{K}} M(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}.$$

3.2. **定理 1.1 的证明**。 设$\mathbf{X}_T$如(1.1)中所定义，且 $\tilde{}\mathbf{X}$如(1.9)中所定义。此外，设$\mathbf{X}^0{}_T$、$\mathbf{M}_T$、$\mathbf{Q}_T$、$\mathbf{R}_T$、$\mathbf{R}^1{}_T$以及 $\tilde{}\mathbf{Z}_N$、$_T$如命题3.1—3.7中所定义。那么，根据三角不等式，有

$$\begin{aligned}
d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T,\tilde{\mathbf{X}}) &\ll d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T,\mathbf{X}_T^0)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T^0,\mathbf{M}_T)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{M}_T,\mathbf{Q}_T)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{Q}_T,\mathbf{R}_T)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}_T,\mathbf{R}_T^1)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}_T^1,\tilde{\mathbf{Z}}_T)+d_{\mathscr{D}}(\tilde{\mathbf{Z}}_T,\tilde{\mathbf{X}})\\
&\ll \frac{LN(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}}+\Big(\frac{LN}{\sqrt{\log\log T}}+MN(\log\log T)^{-K/K'}\Big)+N(L+M)(\log\log T)^{-80}\\
&\quad+\frac{LN}{\sqrt{\log\log T}}+L\sqrt{N}\frac{\sqrt{1+\log\log\log T}}{\sqrt{\log\log T}}+\frac{L}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}}\\
&\quad+M(\log\log\log T)^{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2})+M(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}\\
&\ll \frac{L}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}}+M(\log\log\log T)^{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}),
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_3>0$ 和 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 满足 $\varepsilon_1+\varepsilon_2<1$。

注 3。 (1.3)中的常数L 和M 可以取为T 的函数，只要不破坏收敛结构。在当前情形下，当 ε_1取定时，常数L可以取为$o((\log\log\log T)^{\varepsilon_1})$（例如$L=o(\log\log\log\log T)$）；对于任意固定的$C$，常数$M$可以取为$C(\log\log\log T)^2$。按照上述方式选取$L$和$M$，由(1.3)可知，$\cup_{L,\ M\in\mathbb{R}^+}\mathscr{L}_{L,\ M}=\cup_{T>0}\mathscr{L}_{L(T),\ M(T)}=C_b(\mathbb{R}^n)$都是定义在 $\mathbb{R}^n$上的有界连续函数。因此，我们恢复了依分布收敛的测试函数空间。

4. 命题 3.2 的证明

为证明命题 3.2，我们需要以下引理。

引理 4.1. 设 χ 为模 q 的本原狄利克雷特征。那么我们有

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}|1-L(\sigma_0+\mathrm{i}t,\chi)M(\sigma_0+\mathrm{i}t)|^2dt\ll(\log\log T)^{-K/K'}.$$

证明。 该引理的证明与 [16, 命题3.4]的证明思路相同。不过，为了追踪不同参数的贡献，我们在此给出必要的计算。首先，我们使用狄利克雷L函数的近似函数方程 [25, 推论],

$$L(\sigma_0+\mathrm{i}t,\chi)=\sum_{n\le T}\frac{\chi(n)}{n^{\sigma_0+\mathrm{i}t}}+O(T^{-\frac{1}{2}}),$$

以获得

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T}L(\sigma_0+\mathrm{i}t,\chi)M(\sigma_0+\mathrm{i}t)dt&=\sum_{1\le n\le T}\frac{\chi(n)}{n^{\sigma_0}}\sum_{1\le m<T^{1/K'}}\frac{\mu(m)a(m)\chi(m)}{m^{\sigma_0}}\int_T^{2T}(mn)^{-\mathrm{i}t}dt+O(T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{K'}})\\
&=T+O(T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{K'}}).
\end{aligned}$$

这里，m的取值范围与 [16], 不同，因此当前误差为$O(T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{K}})$，而原误差为$O(T^{\frac{1}{2}+\epsilon})$。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}|1-L(\sigma_0+\mathrm{i}t,\chi)M(\sigma_0+\mathrm{i}t)|^2dt\\&=\sum_{h,k}\frac{\mu(h)\mu(k)a(h)a(k)}{(hk)^{\sigma_0}}\chi(k)\bar{\chi}(h)\int_T^{2T}\left(\frac{h}{k}\right)^{\mathrm{i}t}|L(\sigma_0+\mathrm{i}t,\chi)|^2dt-T+O(T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{K'}}).\end{aligned}$$

回忆一下， [16, 引理 7.2] 指出，对于任意非负整数h、$k\le T$以及任意 $\frac{1}{2}<\sigma\le 1$，有

$$\begin{aligned}\int_T^{2T}\left(\frac{h}{k}\right)^{\mathrm{i}t}|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|^2dt=\chi(h)\bar{\chi}(k)\int_T^{2T}\Big(L(2\sigma,\chi_0)\Big(\frac{(h,k)^2}{hk}\Big)^{\sigma}+\Big(\frac{qt}{2\pi}\Big)^{1-2\sigma}L(2-2\sigma,\chi_0)\Big(\frac{(h,k)^2}{hk}\Big)^{1-\sigma}\Big)dt\\+O(T^{1-\sigma+\epsilon}\min\{h,k\}),\end{aligned}$$

其中， χ_0是模q的主狄利克雷特征。由于 $|a(n)|\le 1$ 且$a(n)=0$除非$n\le T^{\epsilon}$，我们看到误差项至多为

$$\ll\sum_{h,k}\frac{a(h)a(k)}{(hk)^{\sigma_0}}(T^{1-\sigma_0+\epsilon}\min\{h,k\})\ll T^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}\sum_{h,k}\frac{1}{(hk)^{\sigma_0}}\ll T^{\frac{1}{2}+2\varepsilon}\Big(\sum_{h\le T^{\epsilon}}\frac{1}{h}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k\le T^{\epsilon}}\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{2}}\ll T^{\frac{1}{2}+3\varepsilon},$$

其中，第三个估计中用到了柯西-施瓦茨不等式。

按照 [16, 式 (7.9) 和 (7.10)], 中的步骤和记号，我们因此得到

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}|1-L(\sigma_0+\mathrm{i}t,\chi)M(\sigma_0+\mathrm{i}t)|^2dt\\&=\sum_{h,k}\frac{\mu(h)\mu(k)a(h)a(k)}{(hk)^{\sigma_0}}\chi(k)\bar{\chi}(h)\int_T^{2T}\left(\frac{h}{k}\right)^{\mathrm{i}t}|L(\sigma_0+\mathrm{i}t,\chi)|^2dt-T+O(T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{K'}})\\&=\sum_{h,k}\frac{\mu(h)\mu(k)a(h)a(k)}{(hk)^{\sigma_0}}\int_T^{2T}L(2\sigma_0,\chi_0)\left(\frac{(h,k)^2}{hk}\right)^{\sigma_0}dt\\&+\sum_{h,k}\frac{\mu(h)\mu(k)a(h)a(k)}{(hk)^{\sigma_0}}\int_T^{2T}\left(\frac{qt}{2\pi}\right)^{1-2\sigma_0}L(2-2\sigma_0,\chi_0)\left(\frac{(h,k)^2}{hk}\right)^{1-\sigma_0}dt-T+O(T^{\frac{1}{2}+3\varepsilon})+O(T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{K'}}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

回忆一下，

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right).\tag{4.2}$$

将 (4.2) 应用于 (4.1) 中第一个主项里的$L(2\sigma_0,\chi_0)$，并按照 [26, 第 3355 页-3356], 中的方法处理后，我们得到 (4.1) 中的第一个主项为 $\ll T(\log\log T)^{-K/K'}$。

接下来我们考虑式 (4.1) 中的第二个主项。提醒读者，该项在 [16, p.703] 中为$o(T)$（另见 [23, p. 14]），这还不够。按照 [16, p. 703], 中的相同推理，我们看到式 (4.1) 中的第二个主项为

$$\sim L(2-2\sigma_0,\chi_0)\prod_{p\le X}\Big(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^{2\sigma_0}}\Big)\int_T^{2T}\Big(\frac{qt}{2\pi}\Big)^{1-2\sigma_0}dt.\tag{4.3}$$

由于 $\sigma_0 = \frac{1}{2} + w\log T$且 $W = K(\log\log\log T)^2$,，我们推知式 (4.3) 中的积分项为

$$\ll_q T^{2-2\sigma_0} = T^{1-\frac{2W}{\log T}} = Te^{-2W} = Te^{-2K(\log\log\log T)^2}.$$

此外，对指数进行整理可得

$$2K(\log\log\log T)^2 = 2K(\log\log\log T)(\log\log\log T) = \log\Big((\log\log T)^{2K(\log\log\log T)}\Big),$$

这意味着

$$e^{-2K(\log\log\log T)^2} = \exp\Big(\log\Big((\log\log T)^{-2K(\log\log\log T)}\Big)\Big) = \frac{1}{(\log\log T)^{2K(\log\log\log T)}}.$$

因此，我们得出 (4.3) 中的积分项为

$$\ll_q T^{2-2\sigma_0} \ll_q T\frac{1}{(\log\log T)^{2K(\log\log\log T)}}. \tag{4.4}$$

将 (4.2) 应用于 L函数$(2-2\sigma_0,\chi_0)$，可得

$$L(2-2\sigma_0,\chi_0) = \zeta(2-2\sigma_0)\prod_{p|q}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) \ll |\zeta(2-2\sigma_0)| = \Big|\frac{1}{(2-2\sigma_0)-1}\Big| + O(1)$$

因为 $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$。代入 $\sigma_0 = \frac{1}{2} + w\log T$并继续化简，得到

$$L(2-2\sigma_0,\chi_0) \ll \frac{\log T}{W} + O(1) \ll \frac{\log T}{W} = \frac{\log T}{K(\log\log\log T)^2} \tag{4.5}$$

因为 $W = K(\log\log\log T)^2$。对于 (4.3) 中的第二因子，我们有

$$\prod_{p\le X}\Big(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^{2\sigma_0}}\Big) \le \prod_{p\le X}\Big(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p}\Big) = \prod_{p\le X}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)$$

由于 $\frac{1}{p^{2\sigma_0}} < \frac{1}{p}$。回顾梅滕斯第三定理，其表述为

$$\lim_{X\to\infty}\prod_{p\le X}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1} = e^{\kappa_0}\log X + O(1),$$

其中 κ_0 是欧拉常数（另见例如 [20, 定理 2.7(e)]）。因此我们得出

$$\prod_{p\le X}\Big(1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^{2\sigma_0}}\Big) \ll \frac{1}{\log X} = \frac{K'(\log\log\log T)}{\log T} \tag{4.6}$$

since $X = T^{1/K'(\log\log\log T)}$。将 (4.4)、(4.5) 和 (4.6) 代入 (4.3)，可知 (4.3) 为

$$\ll_q T\frac{1}{(\log\log T)^{2K(\log\log\log T)}}\frac{\log T}{K(\log\log\log T)^2}\frac{K'(\log\log\log T)}{\log T} \ll \frac{T}{(\log\log T)^{K/K'}},$$

其中最后一个大 O 项中的隐含常数取决于 q、K 和 K'。 □

回忆 $s_{0,j} = \sigma_0 + \mathrm{i}(U+\alpha_j)$。因此，为简洁起见，在下文的证明中记 $L(s_{0,j};\chi_j)$ 和 $M(s_{0,j};\chi_j)$。现在，有了引理 4.1，我们就可以证明命题 3.2。

命题 *3.2* 的证明。 对每个 j，我们考虑事件 $\mathscr{E}_j := \{|L(s_{0,j};\chi_j)M(s_{0,j};\chi_j)-1| \le \frac{1}{2}\}$。根据 Dudley 距离的定义 (1.4)，我们有

$$\begin{aligned} d_{\mathscr{D}}(\mathbf{M}_T, \mathbf{X}_T^0) &\le \sup_{f\in\mathscr{L}} \mathbb{E}[|f(\mathbf{M}_T) - f(\mathbf{X}_T^0)|] \\ &\le \sup_{f\in\mathscr{L}} \mathbb{E}[|f(\mathbf{M}_T) - f(\mathbf{X}_T^0)| \cdot \mathbb{1}(\cap_{j=1}^N \mathscr{E}_j)] + \sup_{f\in\mathscr{L}} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[|f(\mathbf{M}_T) - f(\mathbf{X}_T^0)| \cdot \mathbb{1}(\mathscr{E}_j^c)], \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $\mathscr{E}_{cj}$是 $\mathscr{E}_j$的补集。由于 f是满足 $||f||_{Lip} \le L$ 的 Lipschitz 函数，因此有 $|f(\mathbf{M}_T) - f(\mathbf{X}^0{}_T)| \le L\|\mathbf{M}_T - \mathbf{X}^0{}_T\|_1$。因此，(4.7) 右侧的第一项有如下上界：

$$\begin{aligned} L\mathbb{E}[\|\mathbf{M}_T - \mathbf{X}_T^0\|_1 \cdot \mathbb{1}(\cap_{j=1}^N \mathscr{E}_j)] &\le L\sum_{j=1}^N \mathbb{E}[|\mathscr{M}_j - \mathscr{X}^0_{\alpha_j,\chi_j,T}| \cdot \mathbb{1}(\mathscr{E}_j)] \\ &= \frac{L}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}[|\log|L(s_{0,j};\chi_j)M(s_{0,j};\chi_j)|| \cdot \mathbb{1}(\mathscr{E}_j)] \ll \frac{LN}{\sqrt{\log\log T}} \end{aligned}$$

因为在事件 $\mathscr{E}_j$ 上，$|\log|L(s_{0,j};\chi_j)M(s_{0,j};\chi_j)|| \le \log 2$。

另一方面，由于 f 有界（即 $\|f\|_\infty \le M$），(4.7) 右侧的第二项为

$$\begin{aligned} &\le 2M\sum_{j=1}^N \mathfrak{P}_T(\mathscr{E}_j^c) \ll 2M\sum_{j=1}^N \mathbb{E}_T[|L(s_{0,j};\chi_j)M(s_{0,j};\chi_j)-1|^2] \\ &= 2M\sum_{j=1}^N \frac{1}{T}\int_T^{2T} |1 - L(\sigma_0 + \mathrm{i}(U+\alpha_j),\chi_j)M(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j))|^2 dt \ll MN(\log\log T)^{-K/K'} \end{aligned}$$

根据引理 4.1。最后，将所有结果汇总起来，我们完成证明。 □

5. 命题 3.3 的证明

在本节中，我们证明命题 3.3。首先，令 $M(s;\chi)$ 和 $\mathscr{P}(s) = \mathscr{P}(s;\chi)$ 分别按 (3.3) 和 (3.5) 中的定义给出，并引入以下辅助级数：

$$\mathscr{P}_0(s;\chi) := \sum_{2\le n\le 13} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s \log n},\ \mathscr{P}_1(s;\chi) := \sum_{13<n\le Y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s\log n},\ \text{and}\ \mathscr{P}_2(s;\chi) := \sum_{Y<n\le X} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s\log n}.$$

与 [26], 类似，我们写作

$$P(s) = P(s;\chi) := \mathfrak{Re}\sum_{p\le X} \frac{\chi(p)}{p^s} = P_0(s;\chi) + P_1(s;\chi) + P_2(s;\chi), \tag{5.1}$$

其中

$$P_0(s;\chi) := \mathfrak{Re}\sum_{p\le 13} \frac{\chi(p)}{p^s},\ P_1(s;\chi) := \mathfrak{Re}\sum_{13<p\le Y} \frac{\chi(p)}{p^s},\ \text{and}\ P_2(s,\chi) := \mathfrak{Re}\sum_{Y<p\le X} \frac{\chi(p)}{p^s}.$$

为方便起见，对于 j = 0, 1, 2，我们分别记 M(s) = M(s; χ)、$\mathscr{P}$(s) = $\mathscr{P}$(s; χ)、$\mathscr{P}$j (s) = $\mathscr{P}$j (s; χ) 和 P j (s) =P j (s; χ)。当 |Pj(s)| 相对较小时，我们需要以下引理来描述 log |M^{-1}(s)| 与 $\mathfrak{Re}(\mathscr{P}(s))$ 之间的差异。

引理 5.1。 令 $B \ge 1$ 为一个适当的常数，稍后将确定，并令 j = 0,1。在事件{|$\mathscr{P}j$ (s)| ≤ log log T}、{|$\mathscr{P}_2$(s)| ≤ B log log log T}、{|P j (s)| ≤ log log T}以及{|P_2(s)| ≤ B log log log T}上，我们有

$$|\log|M^{-1}(s)| - \mathfrak{Re}(\mathscr{P}(s))| \ll (\log\log T)^{-100}.$$

证明。 若$a_0(n) = 1$成立，则n没有任何素因子$p > 13$，且n的素因子$p \le 13$至多有 $100\log\log T$个；否则，令$a_0(n) = 0$。若 $\tilde{}a_0(n) = 1$ 成立，则n 没有任何素因子$p > 13$，且n的素因子$p \le 13$至少有 $100\,\mathrm{loglog}T$个；否则，令 $\tilde{}a_0(n) = 0$

若$a_1(n) = 1$，且n 由至多 $100\mathrm{loglog}T$个满足条件 $13 < p \le Y$的素数p构成，则如此定义；否则，令 $a_1(n) = 0$。令 $\tilde{}a_1(n) = 1$，若其由至少 $100\mathrm{loglog}T$个满足条件 $13 < p \le Y$的素数p构成，则如此定义；否则，令 $\tilde{}a_1(n) = 0$。

设$A \ge 100$为固定值。若n由至多$A\log\log\log T$个满足条件$Y < p \le X$的素数p构成，则令$a_2(n) = 1$；否则，令$a_2(n) = 0$。若n由至少$A\,\mathrm{loglogloglog}T$个满足条件$Y < p \le X$的素数$p$构成，则令 $\tilde{}a_2(n) = 1$；否则，令 $\tilde{}a_2(n) = 0$。

于是我们得到$M_j(s)$ 和 $\mathscr{E}_j(s)$，其中$j = 0,\ 1,2$，如下

$$M_j(s) = M_j(s;\chi) := \sum_n \frac{\mu(n)a_j(n)\chi(n)}{n^s} \quad \text{and} \quad \mathscr{E}_j(s) = \mathscr{E}_j(s;\chi) := \sum_n \frac{\mu(n)\tilde{a}_j(n)\chi(n)}{n^s}.$$

按照 [26, 式(15)], 进行处理可知，$\exp(-\mathscr{P}_0(s)) = M_0(s)$，因为$p \le 13$ 以及 $\tilde{}a_0(n)$的定义。因此，我们有 $\mathfrak{Re}(\mathscr{P}_0(s)) = \log|M_0^{-1}(s)|$。类似于 [26,式(15)],，我们得到$\exp(-\mathscr{P}_1(s)) = M_1(s) + \mathscr{E}_1(s)$。对于 $\mathscr{E}_1(s)$，按照 [26, 引理 4] 进行处理可得

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1(s) &\ll \exp(-100\log\log T)\exp\Big(\sum_{j\ge1}\frac{e^j|P_1(js)|}{j}\Big)\\ &= \exp(-100\log\log T)\exp\Big(e|P_1(s)| + \frac{e^2}{2}|P_1(2s)| + \sum_{j\ge3}\frac{e^j|P_1(js)|}{j}\Big)\\ &\le \exp\Big(-100\log\log T + e\log\log T + \frac{e^2}{2}\log\log T + \sum_{j\ge3}\frac{e^j|P_1(js)|}{j}\Big).\end{aligned}$$

根据$P_1(s)$的定义，对于 $\ell \ge 3$，我们有

$$|P_1(\ell s)| \le \sum_{13<p\le Y}\frac{1}{p^{\ell/2}} \le \sum_{17\le n\le Y}\frac{1}{n^{\ell/2}} \le \sum_{n\ge\sqrt{17}}\frac{1}{n^\ell} \le \int_{\lfloor\sqrt{17}\rfloor-1}^{\infty}\frac{1}{x^\ell}dx = \frac{x^{-\ell+1}}{-\ell+1}\Big|_3^\infty = \frac{3^{-\ell+1}}{\ell-1} \le \frac{3}{2}3^{-\ell}$$

由于 $\ell \ge 3$。因此，我们得出，对于所有$j \ge 3$，均有 $|P_1(js)| \le \frac{3}{2}3^{-j}$，这意味着

$$\sum_{j\ge3}\frac{e^j|P_1(js)|}{j} \le \frac{3}{2}\sum_{j\ge3}\frac{e^j3^{-j}}{j} = \frac{3}{2}\sum_{j\ge3}\frac{e^je^{-j\log3}}{j} = \frac{3}{2}\sum_{j\ge3}\frac{e^{j(1-\log3)}}{j} \le \frac{3}{2}\sum_{j\ge3}e^{j(1-\log3)},$$

其收敛于 $1-\log3 < 0$。因此，我们有

$$\mathscr{E}_1(s) \ll \exp\Big(\Big(-100 + e + \frac{e^2}{2}\Big)\log\log T\Big) = (\log T)^{-100+e+\frac{e^2}{2}} \ll (\log T)^{-90}$$

根据数值结果$e + e^2/2 \approx 6.413$。由于下界的获得方式类似，我们按照 [26,第 3359] 页的处理得到

$$\mathfrak{Re}(\mathscr{P}_1(s)) = \log|M_1^{-1}(s)| + O((\log T)^{-80})$$

我们将给出M_2 的详细计算。与 [26, 式（15）], 类似，我们有

$$\exp(-\mathscr{P}_2(s)) = M_2(s) + \mathscr{E}_2(s). \tag{5.2}$$

此外，

$$\mathscr{E}_2(s)=\sum_n\frac{\mu(n)\tilde{a}_2(n)}{n^s}=\sum_{\ell>A\log\log\log T}(-1)^\ell\Big(\sum_{p_1<p_2<\cdots<p_\ell}\frac{1}{(p_1\cdots p_\ell)^s}\Big)$$
$$=\sum_{\ell>A\log\log\log T}(-1)^\ell\Big(\sum_{\substack{m_1,\dots,m_k,\dots\\ m_1+2m_2+\cdots+km_k+\cdots=\ell}}\prod_{j\geq1}\frac{(-P_2(js))^{m_j}}{m_j!j^{m_j}}\Big)$$

即

$$\ll\sum_{m_1,\dots,m_k,\dots}e^{(-A\log\log\log T+m_1+2m_2+\cdots+km_k+\cdots)}\prod_{j\geq1}\frac{|P_2(js)|^{m_j}}{m_j!j^{m_j}}=e^{(-A\log\log\log T)}e^{\sum_{j\geq1}e^j|P_2(js)|/j}.$$

回想一下，我们目前处于事件 $\{|P_2(s)|\leq B\log\log\log T\}$ 上。因此，$e|P_2(s)|\leq eB\log\log\log T$。应用梅滕斯定理可得 $|P_2(2s)|\leq\log\log X-\log\log Y$。回想一下 X和 Y的定义。经过仔细计算可得

$$\log X=\frac{\log T}{K'\log\log\log T};$$

因此，$\log\log X=\log\log T-\log K'-\log\log\log\log T$；同理，$\log\log Y=\log\log T-\log K'-\log\log\log T$。综合以上结果，得到

$$|P_2(2s)|\leq\log\log X-\log\log Y\leq\log\log\log T$$

当 T充分大时。

对于 $\ell\geq3$，级数 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{\ell/2}}$ 收敛。因此，$\sum_p1\,p^{\ell/2}$ 收敛，其中 p遍历所有素数。这意味着，作为尾项，$|P_2(\ell s)|\leq10^{-\ell}$ 当 T充分大时成立，因此

$$\sum_{j\geq3}e^j\frac{|P_2(js)|}{j}\leq\sum_{j\geq3}\frac{e^j10^{-j}}{j}=\sum_{j\geq3}\frac{e^{j(1-\log10)}}{j}<\infty.$$

将所有内容汇总起来，我们得到

$$\mathscr{E}_2(s)\ll\exp(-A\log\log\log T+eB\log\log\log T+\log\log\log T)=(\log\log T)^{-A+eB+1}.$$

现在，我们推导出 $\mathscr{E}_2(s)$的一个下界。由于我们处于事件$\{|\mathscr{P}_2(s)|\leq B\log\log\log T\}$上，因此有

$$(\log\log T)^{-B}=\exp(-B\log\log\log T)\leq\exp(-\mathscr{P}_2(s))=M_2(s)+\mathscr{E}_2(s)$$

由（5.2）可得。现在我们取A和B，使得 $-A+eB+1\leq-B$。因此，我们得到$(\log\log T)^{-B}\ll M_2(s)$。再次使用（5.2），我们有

$$\mathfrak{Re}(\mathscr{P}_2(s))=-\log|M_2(s)+\mathscr{E}_2(s)|=\log|M_2^{-1}(s)|+O\Big(\frac{\mathscr{E}_2(s)}{M_2(s)}\Big),$$

即

$$\log|M_2^{-1}(s)|+O\Big(\frac{(\log\log T)^{-A+eB+1}}{(\log\log T)^{-B}}\Big)=\log|M_2^{-1}(s)|+O((\log\log T)^{-A+(e+1)B+1}).$$

最后，取

$$A=400\quad\text{and}\quad B=80,\tag{5.3}$$

于是我们得到 $O((\log\log T)^{-A+(e+1)B+1})=O((\log\log T)^{-100})$，如所需。 □

注 4. 可以注意到，与 [26, p. 3352]，中的情形不同，我们将 P (s) 拆分为三项。这样做的原因是，我们必须单独处理小素数，才能得到所需的估计。在原始证明中，Roberts 只得到了 $(\log\log T)^{-1}$，这比所声称的误差 $(\log\log T)^{-80}$ 更大。引入 P_0 这一项是为了弥补这一差距。此外，我们想强调，这种修改是必要的。如果按照 [26, p. 3352], 中原本的定义，令 $P_1(s)=\Re\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^s}$，那么界$|P_1(\ell s)|\le 10^{-\ell}$似乎并不成立，因为会出现 $\frac{1}{2^{\ell/2}}$。事实上，根据下面的计算，上界应为 $\le \frac{\sqrt{2}^{-\ell+1}}{\ell-1}$。遗憾的是，这个界无法推出 $\sum_{j\ge 3}|P_1(js)|/j$ 的收敛性，而这在 [26, p. 3359] 中至关重要。

现在，给定一 $=(-_1,-_2,\dots,-_N)\in\mathbb{R}^N$和 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{R}^N$，我们定义

$$\mathcal{V}(T,\alpha_i,\alpha_j)=\min\Big(\log\log T,\log\Big(\frac{1}{|\alpha_i-\alpha_j|}\Big)\Big). \tag{5.4}$$

令 $\mathscr{D}=(\chi_j)_{第=1}^{N}$ 为一列本原狄利克雷特征，并令 $\delta_{i,j}$ 如 (1.7) 中所示。定义

$$\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_N^2)\log\log T+2\sum_{1\le i<j\le N}a_ia_j\delta_{i,j}\mathcal{V}(T,\alpha_i,\alpha_j). \tag{5.5}$$

Re将本原狄利克雷特征 χ 模q 的 Merterns 定理表述为

$$\sum_{p\le x}\frac{\chi(p)}{p}=\delta(\chi)\log\log x+b(\chi)+h(x,q), \tag{5.6}$$

对于某个依赖于 χ 的常数$b(\chi)$，其中 $h(x,q)=O_q((\log x)^{-2})$，且

$$\delta(\chi)=\begin{cases}1 & \text{if } \chi \text{ is principal;}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{5.7}$$

现在，我们从本文作者此前的工作中借用以下有用的估计 [17, 引理 6.1]。

引理 5.2。设 λ 为一个实数。对于任意模 q 的狄利克雷特征 χ，有

$$\sum_{p\le z}\frac{\chi(p)e^{i\lambda\log p}}{p}=\delta(\chi)\min\Big\{\log\log z,\log\Big(\frac{1}{|\lambda|}\Big)\Big\}+O_q(|\lambda|+1), \tag{5.8}$$

其中 $\delta(\chi)$ 的定义见 (5.7)

我们将引入一个辅助级数

$$\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(s,Z):=\sum_{p\le Z}\frac{a_1\chi_1(p)p^{-i\alpha_1}+\cdots+a_N\chi_N(p)p^{-i\alpha_n}}{p^s} \tag{5.9}$$

并证明关于其矩的以下引理。提醒读者，对于任意 $\mathbf{a}=(aj)_{j=1}^{N}\in\mathbb{R}^N$，我们用 $\|\mathbf{a}\|_1$ 表示 $\mathbf{a}$ 的 1-范数，其定义见 (2.2)。

引理 5.3. 令 $0<\varepsilon<1$ 为固定值。令 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{R}^N$满足 $|\alpha_i-\alpha_j|=O((\log\log T)^{\epsilon})$。假设 $k,\ell\in\mathbb{Z}$ 为非负数，且 $Yk^{+\ell}\le T$。那么对于任意$\mathbf{a}=(aj)_{j=1}^{N}\in\mathbb{R}^N$，当 $k\ne\ell$时，有：

$$\int_T^{2T}\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(\sigma_0+it,Y)^k\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(\sigma_0+it,Y)^{\ell}}\,dt=O(k!\ell!((\|\mathbf{a}\|_1Y)^{k+\ell})\ll_{\mathbf{a},k,\ell}Y^{k+\ell},$$

其中大 O 项中的隐含常数是绝对的；当 $k=\ell$ 时，有

$$\int_T^{2T}|\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,Y)|^{2k}dt = k!T|\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)|^k + O(g(\mathbf{a},k)T(\log\log T)^{k-1+\varepsilon}) + O((k!)^2(||\mathbf{a}||_1 Y)^{2k}),$$

其中，$\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)$ 的定义如式(5.5)所示，而 $g(\mathbf{a},k)=(\|\mathbf{a}\|_1)^{2k}2^k k!$。

证明。我们先考虑 $k\neq\ell$ 的情形，并回顾一些记号，以求完整。令 $\psi(p)=\sum_{i=1}^N a_i\chi_i(p)p^{-\mathrm{i}\alpha_i}$，且令 $\Psi_k(n)=\prod_{j=1}^r\psi(p_j)^{h_j}$，其中 $n=p_1^{h_1}\cdots p^{h_r}r$，各$p_j$互不相同，且$h_1+\cdots+h_r=k$。记

$$\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,Z)^k=\sum_n\frac{b_k(n)\Psi_k(n)}{n^{\sigma_0+\mathrm{i}t}},$$

其中，$b_k(n)=\frac{k!}{h_1!\cdots h_r!}$，若$n=\prod_{j=1}^r p^{h_j}j$，其中$p_1<\cdots<p_r\le Z$且 $\sum_{j=1}^r h_j=k$；否则，$b_k(n)=0$。

然后，我们按照 [17, 引理 62] 的证明来推导 [17, 公式 (6.9)]:

$$\begin{aligned}&\int_T^{2T}\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,Z)^k\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,Z)^\ell}dt\\&=T\sum_n\frac{b_k(n)b_\ell(n)\Psi_k(n)\overline{\Psi_\ell(n)}}{n^{2\sigma_0}}+O\Big(\sum_{n\neq m}\frac{b_k(n)b_\ell(n)|\Psi_k(n)\overline{\Psi_\ell(m)}|}{(nm)^{\sigma_0-\frac12}}\Big).\end{aligned}\tag{5.10}$$

根据 $\Psi_k(n)$ 的定义，我们看到 $|\Psi_k(n)|\le(|a_1|+\cdots+|a_N|)^k$。因此，(5.10) 中的大 O 项至多为

$$\sum_{n\neq m}b_k(n)b_\ell(m)(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{k+\ell}\ll k!\ell!(Z(|a_1|+\cdots+|a_N|))^{k+\ell}\ll_{\mathbf{a},k,\ell}Z^{k+\ell},$$

其中，第一个大 O 项中的隐含常数是绝对常数。对于$n=m$的情形，根据定义可知$b_k(n)b_\ell(n)=0$当$k\neq\ell$时。代入整数集 $=Y$后，我们得到了引理的第一部分。

剩下需要考虑$k=\ell$的情形。与 [17, 引理 62], 类似，我们有

$$\int_T^{2T}|\mathscr{P}_{\mathbf{a},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,Z)|^{2k}dt=T\Big|\sum_n\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|+O_{\mathbf{a},k}(Z^{2k}),\tag{5.11}$$

其中，隐含常数可取为 $(k!)^2(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k}$。

对于$n=\prod_{j=1}^r p^{h_j}j$，我们记

$$\begin{aligned}\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}=\prod_{j=1}^r\Big((a_1^2|\chi_1(p_j)|^2+\cdots+a_N^2|\chi_N(p_j)|^2)\\+\sum_{1\le i<i'\le N}a_ia_{i'}\chi_i\bar\chi_{i'}(p_j)p_j^{-\mathrm{i}(\alpha_i-\alpha_{i'})}+\sum_{1\le i<i'\le N}a_ia_{i'}\bar\chi_i\chi_{i'}(p_j)p_j^{-\mathrm{i}(\alpha_{i'}-\alpha_i)}\Big)^{h_j}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

因此，由于$\sum_j h_{\ j}=k$，我们得出

$$\Big|\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}\Big|\le\prod_{j=1}^r\big((|a_1|+\cdots+|a_N|)^2\big)^{h_j}=(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k}.$$

因此，我们得出结论：非平方自由n对 (5.11) 中求和的贡献 is

$$\ll(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k}\sum_{n\text{ non-square-free}}\frac{b_k(n)^2}{n^{2\sigma_0}}.\tag{5.13}$$

注意，对于一个含有k个素因子（按重数计）的非平方自由n，存在一个素数p，使得$p^2 \mid n$。由于$m = n/p^2$含有$k-2$个素因子（按重数计），不失一般性，令$n = \prod^r{}_{j=1} p^{h_j}{}_j$，并取$p = p_1,$，则有

$$b_k(n) = \frac{k!}{h_1! \cdots h_r!} \quad \text{and} \quad b_{k-2}(m) = b_{k-2}(n/p^2) = \frac{(k-2)!}{(h_1-2)! \cdots h_r!}.$$

这一观察得出$b_k(n) \le k(k-1) b_{k-2}(n/p^2)$。因此，我们得出

$$\sum_{n \text{ non-square-free}} \frac{b_k(n)^2}{n^{2\sigma_0}} \ll k! k^2 \Big(\sum_{p \le Z} \frac{1}{p^2} \Big) \Big(\sum_{p \le Z} \frac{1}{p} \Big)^{k-2} \ll k! k^2 (\log\log Z + O(1))^{k-2}. \tag{5.14}$$

接下来，根据定义nition of σ_0，我们有 $2\sigma_0 = 1 + \frac{2}{W \log T}$。因此，由中值定理可得

$$\sum_{p \le Z} \frac{\chi_i \bar{\chi}_j(p) p^{-\mathrm{i}(\alpha_i - \alpha_j)}}{p^{2\sigma_0}} - \sum_{p \le Z} \frac{\chi_i \bar{\chi}_j(p) p^{-\mathrm{i}(\alpha_i - \alpha_j)}}{p} \ll \frac{W}{\log T} \sum_{p \le Z} \frac{\log p}{p}.$$

利用 [17, 式 (6.5)] 以及W的取值，我们进一步推得

$$\frac{W}{\log T} \sum_{p \le Z} \frac{\log p}{p} \ll \frac{(\log\log\log T)^2}{\log T} \log Z.$$

因此，我们得出

$$\sum_{p \le Z} \frac{\chi_i \bar{\chi}_j(p) p^{-\mathrm{i}(\alpha_i - \alpha_j)}}{p^{2\sigma_0}} = \sum_{p \le Z} \frac{\chi_i \bar{\chi}_j(p) p^{-\mathrm{i}(\alpha_i - \alpha_j)}}{p} + O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log T} \log Z \Big).$$

应用引理 5.2 和 $\lambda = \alpha_i - \alpha_j$，我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{p \le Z} \frac{\chi_i \bar{\chi}_j(p) p^{-\mathrm{i}(\alpha_i - \alpha_j)}}{p^{2\sigma_0}} \\ &= \delta_{i,j} \min\Big(\log\log Z, \log\Big(\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|} \Big) \Big) + O_{q_i, q_j}(|\alpha_i - \alpha_j| + 1) + O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log T} \log Z \Big). \end{aligned} \tag{5.15}$$

在 (5.15) 中取 整数集 $= Y = T^{1/K'} \log\log T$，我们可得

$$\begin{aligned} \sum_{p \le Y} \frac{\chi_i \bar{\chi}_j(p) p^{-\mathrm{i}(\alpha_i - \alpha_j)}}{p^{2\sigma_0}} &= \delta_{i,j} \min\Big(\log\log Y, \log\Big(\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|} \Big) \Big) + O_{q_i, q_j}(|\alpha_i - \alpha_j| + 1) + O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T} \Big) \\ &= \delta_{i,j} \mathcal{V}(T, \alpha_i, \alpha_j) + O_{q_i, q_j}((\log\log T)^{\varepsilon}), \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中，最后一个等式由 (5.4) 中 $\mathcal{V}(T, \alpha_i, \alpha_j)$ 的定义以及 $|\alpha_i - \alpha_j| = O((\log\log T)^c)$ 这一假设得出。

对于平方自由整数 n，我们按照 [17, 引理 6.2] 中的方法处理到 [17, 式 (6.15)]。将 (5.16) 代入 [17, 式 (6.15)]，并按照 [17, 第 17], 页的方法继续完成证明，我们看到平方自由n上的和 $\sum_n b_k(n)^2 \Psi_k(n) \overline{\Psi_k(n)} n^{2\sigma_0}$ 等于

$$k! \Big((a_1^2 + \cdots + a_N^2)(\log\log T + O((\log\log T)^{\varepsilon})) + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} a_i a_j \delta_{i,j} (\mathcal{V}(T, \alpha_i, \alpha_j) + O((\log\log T)^{\varepsilon})) \Big)^k.$$

回忆 (5.5) 中 $\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)$ 的定义，可知平方自由n 上的和 $\sum_n b_k(n)^2\Psi_k(n)\Psi_k(n)\ n^{2\sigma_0}$为一

$$
\begin{aligned}
&k!\Big(\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)+O((|a_1|+\cdots+|a_N|)^2(\log\log T)^{\varepsilon})\Big)^k\\
&=k!\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)^k+O\Big(k!(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(\log\log T)^{k-1+\varepsilon}\Big)\\
&=k!\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)^k+O\Big((|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k}2^k k!(\log\log T)^{k-1+\varepsilon}\Big),
\end{aligned}
$$

其中隐含常数与a 和k无关。

总而言之，我们看到 (5.11) 是

$$
\begin{aligned}
&\ll T\Big|\sum_n\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|+((k!)^2(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k})(Z^{2k})\\
&=T\Big|\sum_{n\ \text{non-square-free}}\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}+\sum_{n\ \text{square-free}}\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|+((k!)^2(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k})(Z^{2k})\\
&=T\Big|\sum_{n\ \text{square-free}}\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|+Tk!k^2(\log\log Z+O(1))^{k-2}+((k!)^2(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k})(Z^{2k})\\
&=k!T\mathscr{U}_{\mathbf{a}}(\alpha,\mathscr{D},T)^k+O\Big((|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k}2^k k!T(\log\log T)^{k-1+\varepsilon}\Big)\\
&+Tk!k^2(\log\log Z+O(1))^{k-2}+((k!)^2(|a_1|+\cdots+|a_N|)^{2k})(Z^{2k}).
\end{aligned}
$$

最后，根据 (5.11) 和 (5.13)，取$Z=Y=T^{1/K'}\log\log T$，以及上述讨论，我们得到了该引理的第二个估计。□

注 5. 我们说明一下引理 5.3 与 [17, 引理 6.2]之间的一些差异。差异在于级数 (5.9) 中的上界以及平移的要求 $|\alpha_i-\alpha_j|$。这两处变化都体现了刻画收敛速率的目的。特别地，为了追踪误差的贡献，我们在级数 (5.9) 中引入了一个哑变量Z。正如稍后将看到的，我们将利用这种灵活性来推导相应的估计。此外，我们还精确追踪了误差对$\mathbf{a}$和k的依赖性，以便后续使用。

我们要强调的是，使用矩方法时，$\mathbf{a}$和k是固定的，因此可以视为绝对常数（例如参见 [17, 引理 6.2]）。稍后，我们将采用 Roberts 技巧 [26,引理 7]，选取一个恰当的k，这种明确性届时将发挥关键作用。

下面的 引给出了“随机变量” $|P_1(s,\chi)|$ 和 $|P_2(s,\chi)|$的尾部估计 .

引理 5.4。我们有

$$
\mathfrak{P}_T(|P_1(s,\chi)|>\log\log T)\ll\frac{1}{\log T},\tag{5.17}
$$

$$
\mathfrak{P}_T(|P_2(s,\chi)|>B\log\log\log T)\ll\frac{1}{(\log\log T)^B},\tag{5.18}
$$

其中，B 是引理 *5.1* 中引入的同一参数。

证明。 根据从 (5.10) 到 (5.13) 的论证，对于 $\mathscr{P}_\chi(s,z,\text{整数集}) = \sum_{z<p\le\text{整数集}} \chi(p)\,\underline{p^s}$，我们有

$$\int_T^{2T} \mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)^k\overline{\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)^\ell}\,dt = T\sum_n \frac{c_k(n)c_\ell(n)\chi(n)\overline{\chi(n)}}{n^{2\sigma_0}} + O(k!\ell!Z^{k+\ell}), \tag{5.19}$$

其中，若 $n = \prod_{j=1}^r p_j^{h_j}$，且 $z < p_1 < \cdots < p_r \le Z$，并且 $\sum_{j=1}^r h_j = k$，则 $c_k(n) = k!\,h_1!\cdots h_r!$；否则，$c_k(n) = 0$。类似地，由定义可知，$c_k(n)c_\ell(n) = 0$ if $k \ne \ell$。此外，我们还有

$$\sum_{n\text{ non-square-free}} \frac{c_k(n)^2\chi_0(n)}{n^{2\sigma_0}} \ll k!k^2\Big(\sum_{z<p\le Z}\frac{1}{p}\Big)^{k-2},$$

其中隐含常数均为绝对常数。此外，

$$\Big|\sum_{n\text{ square-free}} \frac{c_k(n)^2\chi_0(n)}{n^{2\sigma_0}}\Big| \le \sum_{n\text{ square-free}} \frac{c_k(n)^2}{n} = k!\Big(\sum_{z<p\le Z}\frac{1}{p}\Big)^k.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\int_T^{2T} (\mathfrak{Re}(\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)))^{2k}\,dt &= \int_T^{2T} \frac{1}{2^{2k}}\Big(\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z) + \overline{\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)}\Big)^{2k}\,dt\\ &= \frac{1}{2^{2k}}\sum_{\ell=0}^{2k}\binom{2k}{\ell}\int_T^{2T} \mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)^\ell\overline{\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)^{2k-\ell}}\,dt\\ &= \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\int_T^{2T} |\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)|^{2k}\,dt + O((2k)!kZ^{2k}),\end{aligned}$$

其中最后一个大 O 项由以下估计得出

$$\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\ne k}}^{2k}\binom{2k}{\ell}\int_T^{2T} \mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)^\ell\overline{\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)^{2k-\ell}}\,dt \ll \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\ne k}}^{2k}\binom{2k}{\ell}(2k-\ell)!(\ell!)Z^{2k} \le Z^{2k}\sum_{\ell=0}^{2k}(2k)!.$$

由上述讨论可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_T^{2T} (\mathfrak{Re}(\mathscr{P}_\chi(\sigma_0+\mathrm{i}t,z,Z)))^{2k}\,dt\\ &\ll 2^{-2k}\binom{2k}{k}k!\Big(\sum_{z<p\le Z}\frac{1}{p}\Big)^k + 2^{-2k}\binom{2k}{k}k!k^2\Big(\sum_{z<p\le Z}\frac{1}{p}\Big)^{k-2} + \frac{(2k)!k}{2^{2k}}\frac{Z^{2k}}{T}.\end{aligned}$$

最后，我们将使用梅滕斯定理，而不是使用 (5.15)（和中值定理）

$$\sum_{p\le z}\frac{1}{p} = \log\log z + O(1)$$

直接推导出

$$\sum_{p\le Y}\frac{1}{p} = \log\log Y + O(1) = \log\log T - \log\log\log T + O(1) \le \log\log T,$$

对于所有充分大的 T，以及

$$\sum_{Y<p\le X}\frac{1}{p} = \log\log X - \log\log Y + O(1) = \log\log\log T - \log\log\log\log T + O(1) \le \log\log\log T.$$

总而言之，我们证明了如下结果（参见 [26, 第 3363 页，式（20）]）：

$$\mathbb{E}_T[|P_1(s;\chi)|^{2k}] \ll \frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}\Big)^{2k} + \frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}\Big)^{2k-4} + O\Big(\frac{(2k)!k}{2^{2k}}\frac{Y^{4k}}{T}\Big), \tag{5.20}$$

并且

$$\mathbb{E}_T[|P_2(s;\chi)|^{2k}] \ll \frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log\log T}\Big)^{2k} + \frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log\log T}\Big)^{2k-4} + O\Big(\frac{(2k)!k}{2^{2k}}\frac{X^{4k}}{T}\Big). \tag{5.21}$$

接下来，我们将使用切比雪夫不等式得到

$$\mathfrak{P}_T(|P_1(s,\chi)| > \log\log T) \le \frac{\mathbb{E}_T[|P_1(s;\chi)|^{2k}]}{(\log\log T)^{2k}} \tag{5.22}$$

对任意 k。将 (5.20) 应用于 (5.22)，然后仔细地选择作为T函数的k，即可得到 (5.17)。我们要强调，(5.22) 中的技巧正是我们必须使引理 5.3 中所有大 O 项不依赖k的原因。另一方面，[26, 式 (18) 和 (19)] 中大 O 项对k的依赖性似乎并不十分明确。此外，将 (5.20) 和 (5.21) 与 [26], 各自对应的结果比较，可以看到差异：我们保留了低阶项（第二项），而 Roberts 将其略去（例如，[26,式 (20)]）。然而，低阶项不可或缺：当$k \le \mathscr{C}\log\log T$，其中 $\mathscr{C}$ 是某个一般常数时，(5.20) 中的第二项为

$$\le \mathscr{C}^2\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}\Big)^{2k}, \tag{5.23}$$

这与主项的阶相同。

现在我们进行证明。如前所述，当$k \le \mathscr{C}\log\log T$时，我们有（5.23）。由斯特林公式（2.1），可得

$$\frac{(2k)!k}{2^{2k}} \ll \frac{k}{2^{2k}}\sqrt{k}\Big(\frac{2k}{e}\Big)^{2k} \ll k^{2k}.$$

因此，当$k \le Y$时，我们有

$$\frac{(2k)!k}{2^{2k}}\frac{Y^{4k}}{T} \le \frac{Y^{6k}}{T}, \tag{5.24}$$

这意味着（5.20）中的第3项为

$$\ll \frac{(2k)!k}{2^{2k}}\frac{Y^{4k}}{T} \ll \frac{Y^{6k}}{T} \le \frac{T^{(6\mathscr{C}\log\log T)/K'\log\log T}}{T} \ll 1.$$

由于$\frac{(2k)!}{k!2^k} \ge 1$，我们得出

$$\mathbb{E}_T[|P_1(s;\chi)|^{2k}] \ll (1+\mathscr{C}^2)\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}\Big)^{2k} \tag{5.25}$$

前提是 $6\mathscr{C}_{K'} \le 1$。有了（5.25），我们按照 [26, 引理 7] 的证明，在$k = \lfloor\log\log T\rfloor$的情形下，得到（5.17）。

现在我们继续证明 (5.18)。当T充分大，使得$B\log\log\log T \ge 2$时，取$k = \lfloor B\log\log\log T\rfloor$，其中 $6B < K'$，我们看到$k \le X$。因此，由切比雪夫不等式、(5.21) 以及

(5.24)，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_T(|P_2(s,\chi)|>B\log\log\log T)&\le\Big(\frac{1}{B\log\log\log T}\Big)^{2k}\mathbb{E}_T[|P_2(s;\chi)|^{2k}]\\&\ll\Big(\frac{1}{B\log\log\log T}\Big)^{2k}\Big(\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac12\log\log\log T}\Big)^{2k}+\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac12\log\log\log T}\Big)^{2k-4}+O\Big(\frac{X^{6k}}{T}\Big)\Big)\end{aligned}\tag{5.26}$$

误差项为

$$\ll\Big(\frac{1}{B\log\log\log T}\Big)^{2k}\cdot\Big(\frac{X^{6k}}{T}\Big)\ll\Big(\frac{1}{B\log\log\log T}\Big)^{2B\log\log\log T}\cdot\Big(\frac{T^{\frac{6B}{K'}}}{T}\Big)\ll(\log\log T)^{-B}$$

如所需。

当 $k\le\lfloor B\log\log\log T\rfloor$时，各项

$$\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac12\log\log\log T}\Big)^{2k}\quad\text{and}\quad\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac12\log\log\log T}\Big)^{2k-4}$$

它们的阶几乎相同。因此，在（5.26）中取 $k=\lfloor B\log\log\log T\rfloor$，其中 $6B<K\prime$，我们看到主项为

$$\begin{aligned}\ll_B\Big(\frac{1}{B\log\log\log T}\Big)^{2k}\Big(\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac12\log\log\log T}\Big)^{2k}\Big)&\ll\Big(\frac{1}{B\log\log\log T}\Big)^{2k}\Big(\frac{(2k)^{2k}}{k^k2^k}\frac{e^{-2k}}{e^{-k}}\Big(\sqrt{\tfrac12\log\log\log T}\Big)^{2k}\Big)\\&\ll(\log\log T)^{-B},\end{aligned}$$

其中第二个 $\ll$由斯特林公式（2.1）得到。 □

经过上述所有准备，我们终于可以证明命题 3.3。

命题 *3.3* 的证明。经过常规计算可得

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{M}_T,\mathbf{Q}_T)\le\sup_{f\in\mathscr{L}}\mathbb{E}_T[|f(\mathbf{M}_T)-f(\mathbf{Q}_T)|].$$

与（4.7）中相同，我们根据$P_1(s)$和$P_2(s)$的取值将期望分情况讨论，然后利用f的性质以及切比雪夫不等式，得到

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{M}_T,\mathbf{Q}_T)\le\sup_{f\in\mathscr{L}}\mathbb{E}_T[|f(\mathbf{M}_T)-f(\mathbf{Q}_T)|]\ll L\mathscr{E}_1+M\mathscr{E}_2,\tag{5.27}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1&=\mathbb{E}\Big[\|\mathbf{M}_T-\mathbf{Q}_T\|_1\cdot\mathbb{1}\big(\cap_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|\le\log\log T,|P_2(s_{0.j})|\le\log\log\log T\}\big)\Big]\\&\le\sum_{j=1}^N\mathbb{E}\big[|\mathscr{M}_j-\mathscr{Q}_j|\cdot\mathbb{1}\big(\{|P_1(s_{0,j})|\le\log\log T,|P_2(s_{0,j})|\le\log\log\log T\}\big)\big]\end{aligned}\tag{5.28}$$

and

$$\mathscr{E}_2=\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j})|>\log\log T)+\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}_T(|P_2(s_{0,j})|>\log\log\log T).$$

这里，$s0,_j=\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)$，并注意到对于所有$j$，均有 $|P_0(s0,_j)|\le7$。

回忆一下，$\mathscr{M}_j$和 $\mathscr{Q}_j$分别定义于 (3.4) 和 (3.6)。由引理 5.1 和 (5.28)，我们进而得到 $\mathscr{E}_1\ll(\log\log T)^{-80}$。对于 $\mathscr{E}_2$，利用引理 5.4 可得 $\mathscr{E}_2\ll(\log\log T)^{-B}$。最后，所需的估计由 (5.3) 中对 B的选取推出。□

6. 命题 3.4 和 3.5 的证明

本节中，我们证明命题 3.4 和 3.5。首先，我们命题 3.4。

命题 *3.4* 的证明。由 (2.3) 可得

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{Q}_T,\mathbf{R}_T)\le \frac{L}{\sqrt{\frac12\log\log T}}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}[|\mathfrak{Re}(\mathscr{P}(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)))-P(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j));\chi_j)|].$$

分别回顾 (3.5) 中 $\mathscr{P}(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j))$ 的定义，以及 (5.1) 中 $P(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j));\chi_j)$ 的定义。我们有

$$\Big|\mathfrak{Re}(\mathscr{P}(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)))-P(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j));\chi_j)\Big|\le\Big|\sum_{\substack{2\le p^k\le X\\ k\ge3}}\frac{\log p\chi(p^k)}{p^{ks}k\log p}\Big|+\Big|\sum_{2\le p^2\le X}\frac{\chi(p^2)}{2p^{2(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j))}}\Big|.$$

前一项由 [17, 第 18] 页倒数第三个显示公式可得 $\ll 1$。此外，

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{2\le p^2\le X}\frac{\chi(p^2)}{2p^{2(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j))}}\Big|\Big]\ll 1$$

根据倒数第后两个显示公式（见 [17, 第 18] 页），且 $a_j=1$。因此，证明完成。 □

最后，我们证明命题 3.5。

命题 *3.5* 的证明。回顾 (3.8)，可知

$$\mathfrak{M}_{T,\chi_j}=P_1(2\sigma_0;\chi_j\bar\chi_j):=\sum_{13<p\le Y}\frac{\chi_j\bar\chi_j(p)}{p^{2\sigma_0}}=\sum_{p\le Y}\frac{\chi_j\bar\chi_j(p)}{p^{2\sigma_0}}-\sum_{2\le p\le 13}\frac{\chi_j\bar\chi_j(p)}{p^{2\sigma_0}}=\sum_{p\le Y}\frac{1}{p^{2\sigma_0}}+O(1).$$

由中值定理（以及对 W 的选取），我们进一步得到

$$\mathfrak{M}_{T,\chi_j}=\sum_{p\le Y}\frac{1}{p}+O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log T}\log Y\Big)+O(1)=\log\log Y+O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log T}\log Y\Big)+O(1).$$

回顾一下，$Y=T^{1}/(K\prime\log\log T)$。由此可得

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}&=\log\log T-\log(K'\log\log T)+O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log T}\frac{\log T}{K'\log\log T}\Big)+O(1)\\&=\log\log T-\log\log\log T+O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{K'\log\log T}\Big)-\log K'+O(1)\\&=\log\log T-\log\log\log T+O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{K'\log\log T}\Big),\end{aligned}\tag{6.1}$$

其中，最后一个等式由取充分大的 T 得出。这意味着，当 T 充分大时，$\mathfrak{M}_{T,\chi_j}\le\log\log T\mathrm{and}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}\sim\log\log T$。

回顾 (3.7) 和 (3.9) 中分别对$\mathbf{R}_T$和$\mathbf{R}^{1}{}_T$的定义，我们有

$$\begin{aligned}&d_{\mathscr{D}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\frac12\log\log T}}(P(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j));\chi_k)_{j=1}^N),\frac{1}{\sqrt{\frac12\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}(P_1(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j));\chi_k)_{j=1}^N)\Big)\\&\le\frac{L}{\sqrt{\frac12\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{N}(P_0(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)+P_2(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j))^2\Big)^{1/2}\Big].\end{aligned}$$

注意，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$(P_0(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)+P_2(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j))^2 \le 2(P_0^2(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)+P_2^2(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)).$$

因此，上述距离为

$$\ll L\sqrt{N}\frac{\sqrt{1+\log\log\log T}}{\sqrt{\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}.$$

由于 $\mathfrak{M}_{T,\chi_j}\sim\log\log T$，当 $T\to\infty$ 时，因此对于充分大的 T，可以要求 $\log\log T/\mathfrak{M}_{T,\chi_j}\le 2$。因此，

$$\sqrt{N}\frac{\sqrt{1+\log\log\log T}}{\sqrt{\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}=\sqrt{N}\frac{\sqrt{1+\log\log\log T}}{\sqrt{\log\log T}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\sqrt{\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}\ll\sqrt{N}\frac{\sqrt{1+\log\log\log T}}{\sqrt{\log\log T}}$$

如所需。 □

7. 命题 3.6 的证明

为简便起见，我们将 $\tilde{}$**整数集**$_N=(\tilde{\mathcal{Z}}_1,\dots,\tilde{\mathcal{Z}}_N)$ 记作 $\tilde{}$**整数集**$_{N,T}=(\tilde{\mathcal{Z}}_{1,T},\dots,\tilde{\mathcal{Z}}_{N,T})$。我们将证明存在一个 $\tilde{}$**整数集**$_N=(\tilde{\mathcal{Z}}_1,\dots,\tilde{\mathcal{Z}}_N)$ 的 $\mathbf{0}_N$ 维正态分布，其均值为 $\mathbf{0}_N$，且协方差矩阵与 $\mathbf{R}^1{}_T$ 相同。为证明其存在，我们借助以下高斯过程存在性定理（参见例如 [14,定理 2.1]）：

定理 7.1。设 $\mathscr{I}$ 为一个指标集。对于 $T\in\mathscr{I}$，令 $\mathfrak{K}(T)$ 为一个 $N\times N$ 非奇异对称正定矩阵。则存在一个（唯一的）高斯过程 $G=\{G(T):T\in\mathscr{I}\}$，其均值向量为 $\mathbf{0}_N$，协方差矩阵为 $\mathfrak{K}(T)$。

根据定理 7.1，只需证明$\mathbf{R}^1{}_T$的“协方差矩阵”是正定的。我们$\tilde{}$ $\tilde{}$将矩阵定义 $\mathfrak{K}$为$(T)=(k_{i,j}(T))_{1\le i,j\le N}$如下：

$\tilde{}$(1) 对所有$i\le N$，$_{i,i}(T)=1$。(2) 对于$i\ne j$，定义

$$\tilde{k}_{i,j}(T):=\frac{\mathrm{Cov}[P_{1,i},P_{1,j}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[P_{1,i}]\mathrm{Var}[P_{1,j}]}},$$

其中$P_{1,j}=P_1(\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j));\chi_j)$。

那么，只要 $\widetilde{\mathfrak{K}}(T)$是正定的，矩阵 $\widetilde{\mathfrak{K}}(T)$就是$\mathbf{R}^1{}_T$的“协方差矩阵”。接下来，我们将说明，当$T$充分大时，$\mathfrak{K}(T)$是正定的。

$\tilde{}$**引理 7.2.** 存在一个数 $T_0>0$，使得前面定义的矩阵 $\mathfrak{K}(T)$ 在$T\ge T_0$时是正定的。

证明。对于一般的 $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ 矩阵 $\mathrm{M}=(\mathrm{m}_{i,j})_{1\le i,j\le N}$，我们用 $\mathrm{M}_r=(\mathrm{m}_{i,j})_{1\le i,j\le r}$ 表示 M 左上角的 r 阶方阵，其中 $1\le\mathrm{r}\le\mathrm{N}$。现在，我们考虑按 (1.8) 引入的矩阵 $\mathfrak{K}=(\mathrm{k}_{i,j})_{1\le i,j\le N}$。由于 $\mathfrak{K}$ 是正定的，根据西尔维斯特判据（参见例如 [12]），对所有 $1\le\mathrm{n}\le\mathrm{N}$，均有 $\det(\mathfrak{K}_r)>0$。另一方面，通过与 [17, 定理 1. 的证明1], 相同的计算，我们得到$\tilde{}\mathrm{k}_{i,j}(\mathrm{T})\to\mathrm{k}_{i,j}$，当 $\mathrm{T}\to\infty$ 时，对所有 $1\le\mathrm{i},\mathrm{j}\le\mathrm{N}$ 均成立。因此，由于行列式函数是连续的，我们$\tilde{}$得出，对于所有 $1\le\mathrm{r}\le\mathrm{N}$，$\det(\mathfrak{K}_r(\mathrm{T}))\to\det(\mathfrak{K}_r)>0$，由此得到该引理。 □

根据引理 7.2，我们看到，当 $T > T_0$ 时，矩阵 $\mathfrak{K}(T)$ 是正定的。因此，我们运用定理 7.1 构造一个 N 维正态分布 $(\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_N)$，使其均值为 $\mathbf{0}_N$，且在每个 $T > T_0$ 时，其协方差矩阵为 $\widetilde{\mathfrak{K}}(T)$。因此，实际上，$\tilde{\mathbf{Z}}_N = (\tilde{\mathcal{Z}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{Z}}_N)$ 是 T 的函数，并且是一个高斯过程。接下来，我们将计算它的矩：

引理 7.3。 令 T_0 与引理 7.2 中的相同，且 $T > T_0$。对于任意 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\mathbb{E}[(\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2n}] \le \frac{(2n)!}{n! 2^n} \|\mathbf{u}\|_2^{2n}.$$

证明。 由于 $T > T_0$，，过程 $\tilde{\mathbf{Z}}_N$ 是一个均值为 $\mathbf{0}_N$、协方差矩阵为 $\widetilde{\mathfrak{K}}(T)$ 的高斯过程。因此，$(\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_N)$ 是一个均值为 0、方差为

$$\sum_{1 \le j \le N} u_j^2 \operatorname{Var}(\tilde{\mathcal{Z}}_j) + \sum_{1 \le i < j \le N} 2 u_i u_j \operatorname{Cov}(\tilde{\mathcal{Z}}_i, \tilde{\mathcal{Z}}_j).$$

由于每个 $\mathcal{Z}_j$ 都服从均值为 0、方差为 1 的一元正态分布，我们将上式化简为

$$\sum_{1 \le j \le N} u_j^2 + \sum_{1 \le i < j \le N} 2 u_i u_j \tilde{k}_{i,j}(T) = \sum_{1 \le i,j \le N} u_i u_j \tilde{k}_{i,j}(T),$$

其中 $\tilde{k}_{i,j}(T)$ 是其协方差矩阵 $\widetilde{\mathfrak{K}}(T)$ 中的 ij 项。因此，根据一元正态分布的矩公式，有

$$\mathbb{E}[(\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2n}] = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \Big(\sum_{1 \le i,j \le N} u_i u_j \tilde{k}_{i,j}(T) \Big)^n.$$

根据构造，我们有 $0 \le \tilde{k}_{i,j}(T) \le 1$ 对所有 i、j 和 T 均成立。此外，根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\Big| \sum_{1 \le i,j \le N} u_i u_j \Big| \le \Big(\sum_{1 \le i \le N} u_i^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{1 \le j \le N} u_j^2 \Big)^{1/2} = \|\mathbf{u}\|_2^2,$$

其中 $\|\mathbf{u}\|_2 = (\sum_{j=1}^N u^2{}_j)^{1/2}$ 是$\mathbf{u}$的二范数。综上可得

$$\mathbb{E}[(\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2n}] = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \Big(\sum_{1 \le i,j \le N} u_i u_j \tilde{k}_{i,j}(T) \Big)^n \le \frac{(2n)!}{n! 2^n} \|\mathbf{u}\|_2^{2n}, \tag{7.1}$$

由此完成证明。 □

我们还计算$\mathbf{R}^1{}_T$的矩：

引理 7.4。 对于任意$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$以及 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\mathbb{E}\left[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_T^1)^{2n}\right] < ||\mathbf{u}||_1^{2n} \cdot \kappa_1 (1 + \mathscr{C}^2) \frac{(2n)!}{n! 2^n},$$

其中 κ_1 是一个绝对常数，而 $\mathscr{C}$ 是(5.25)中相同的常数[i]。

证明。 回忆

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_T^1 = \sum_{j=1}^N u_j P_1(s_{0,j}) / \sqrt{\tfrac{1}{2} \mathfrak{M}_{T,\chi_j}}. \tag{7.2}$$

[i] $\mathscr{C}$必要时可取为 1/3。

记 $f_j(t) = P_1(s0,j)/\sqrt{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}$，有

$$\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2n}] \le \frac{1}{T}\int_T^{2T} |\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1|^{2n} dt = \frac{1}{T}\int_T^{2T} \Big|\sum_{j=1}^N u_j f_j(t)\Big|^{2n} dt = \frac{1}{T}\|\sum_{j=1}^N u_j f_j\|_{2n}^{2n} \le \frac{1}{T}\Big(\sum_{j=1}^N |u_j|\|f_j\|_{2n}\Big)^{2n},$$

由三角不等式可得。此外，由 (5.25)，若 ${}^{6\mathscr{C}}K \le 1$，则有

$$\mathbb{E}_T[|P_1(s;\chi)|^{2k}] \ll (1+\mathscr{C}^2)\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}\Big)^{2k}.$$

因此我们得到

$$||f_j||_{2n} = \Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}\Big)^{-1}\Big(T\mathbb{E}_T[|P_1(s_{0,j};\chi_j)|^{2n}]\Big)^{\frac{1}{2n}} \le \Big(T\kappa_1(1+\mathscr{C}^2)\frac{(2n)!}{n!2^n}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}\Big)^{2n-2n}\Big)^{\frac{1}{2n}}$$

从而

$$\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2n}] \le \Big(\sum_{j=1}^N |u_j|\Big(\kappa_1(1+\mathscr{C}^2)\frac{(2n)!}{n!2^n}\Big)^{\frac{1}{2n}}\Big)^{2n} = ||\mathbf{u}||_1^{2n}\cdot\kappa_1(1+\mathscr{C}^2)\frac{(2n)!}{n!2^n}.$$

□

接下来，我们需要对 $\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}^1{}_T)^{2n}]$ 与 $\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2n}]$ 之间的差进行详细估计。首先，我们进一步分析 $\mathfrak{M}_T$、χ_j。由 (6.1)，令

$$C_1(T) := \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}{\sqrt{\frac{1}{2}(\log\log T - \log\log\log T + O(\frac{(\log\log\log T)^2}{K'\log\log T}))}} = \sqrt{\frac{\log\log T}{\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}. \tag{7.3}$$

于是我们看到，当 $T\to\infty$ 时，$C_1(T)\to 1$，并且对所有 T，$|C_1(T)|>1$。令 $\kappa_2>0$ 为一个常数，使得

$$|C_1(T)|^2 < \kappa_2 \tag{7.4}$$

对所有 T 均成立。接下来我们关注 κ_2 的量。根据 (7.3)，我们看到

$$|C_1(T)|^2 < \frac{\log\log T}{\log\log T - \log\log\log T} = 1 + \frac{\log\log\log T}{\log\log T - \log\log\log T} := 1 + f(T)$$

对所有 T 均成立。因此，我们可以取 κ_2 为 $1+\max_{T>0} f(T)$。标准计算表明，对所有 $T>0$，$|f(T)|<1/(e-1)$。因此，我们可以取

$$\kappa_2 = \frac{e}{e-1}. \tag{7.5}$$

~ ~另一方面，当 $T\to\infty$ 时，$k_{i,j}(T)$ 收敛到 1 或 0。因此，我们假设当 T 充分大时，$|k_{i,j}(T)| < e/(e-1)$。

引理 7.5。令 T_0 与引理 7.2 中的相同，并令 $T > T_0$ 充分大。对于任意 $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_N) \in \mathbb{R}^N$ 以及 $k \in \mathbb{N}$，有

$$\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k+1}] - \mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k+1}]\Big| \ll \frac{1}{T}\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\Big(\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}\Big)^{2k+1}}((2k+1)!)^2(\|\mathbf{u}\|_1 T^{(K'\log\log T)^{-1}})^{4k+2}, \tag{7.6}$$

并且

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\right| &\ll \frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{T}+\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\\ &\quad+\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\delta(T)}{\log\log T}+\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{2k(k-1)}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}\\ &\quad+\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\\ &\quad+\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}+\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^2 2^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k},\end{aligned}\tag{7.7}$$

其中隐含常数是绝对的，且 κ_2 在 (7.5) 中引入。

证明。 与 (5.9) 类似，我们考虑

$$\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(s,13,Y):=\sum_{13<p\le Y}\frac{u_1\chi_1(p)p^{-\mathrm{i}\alpha_1}+\cdots+u_N\chi_N(p)p^{-\mathrm{i}\alpha_n}}{p^s}.$$

取 $s=\sigma_0+\mathrm{i}t$，并令 $b_k(n)$ 和 $\Psi_k(n)$ 按照引理 5.3 中类似的方式定义。于是，对于$k\neq\ell$

$$\int_T^{2T}\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)^k\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)^\ell}\,dt=O(k!\ell!((||\mathbf{u}||_1Y)^{k+\ell}),\tag{7.8}$$

其中大 O 项中的隐含常数是绝对的。

对于 $k=\ell$，我们有

$$\int_T^{2T}|\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)|^{2k}dt=T\Big|\sum_n\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|+O((k!)^2\|\mathbf{u}\|_1^{2k}Y^{2k}).\tag{7.9}$$

众所周知

$$\sum_{13<p\le Z}\frac{1}{p}=\sum_{p\le Z}\frac{1}{p}-\sum_{2\le p\le 13}\frac{1}{p}=\sum_{p\le Z}\frac{1}{p}+O(1),\tag{7.10}$$

对于 (7.9) 右侧第一项中的非平方自由n，从 (5.12) 到 (5.14) 的计算再次得出

$$\Big|\sum_{n\ \text{non-square-free}}\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|=k!k^2(\log\log Y+O(1))^{k-2}.\tag{7.11}$$

由 (5.16) 和 (7.10) 可知

$$\sum_{13<p\le Y}\frac{\chi_i\bar{\chi}_j(p)p^{-\mathrm{i}(\alpha_i-\alpha_j)}}{p^{2\sigma_0}}=\delta_{i,j}\min\Big(\log\log Y,\log\Big(\frac{1}{|\alpha_i-\alpha_j|}\Big)\Big)+O_{q_i,q_j}(|\alpha_i-\alpha_j|+1)+O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T}\Big).$$

因此，我们要求

$$O_{q_i,q_j}(|\alpha_i-\alpha_j|+1)+O\Big(\frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T}\Big)=O_1(\Delta(T)),\tag{7.12}$$

对于所有的i、j，为继续进行。（这里的隐含常数来自引理 5.2。 ）

与引理 5.3 的证明类似，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n\text{ square-free}}\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|\\
&=k!\Big((a_1^2+\cdots+a_N^2)(\log\log T+O_1(\Delta(T)))+2\sum_{1\le i<j\le N}a_ia_j\delta_{i,j}(\mathcal{V}(T,\alpha_i,\alpha_j)+O_1(\Delta(T)))\Big)^k\\
&=k!\Big((u_1^2+\cdots+u_N^2)(\log\log T+O_1(\Delta(T)))+2\sum_{1\le i<j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}(c_{i,j}\log\log T+O_1(\Delta(T))+O_1(\delta(T)))\Big)^k,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由（5.4）中 $\mathcal{V}(T,\alpha_i,\alpha_j)$ 的定义得出。展开括号后，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j}\log\log T+\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}O_1(\Delta(T))+2\sum_{1\le i<j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}O_1(\delta(T))\\
&=\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j}\log\log T+\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}(O_1(\Delta(T))+O_1(\delta(T)))-\sum_{j=1}^N u_j^2O_1(\delta(T)).
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n\text{ square-free}}\frac{b_k(n)^2\Psi_k(n)\overline{\Psi_k(n)}}{n^{2\sigma_0}}\Big|\\
&=k!\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j}\log\log T+\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}(O_1(\Delta(T))+O_1(\delta(T)))-\sum_{j=1}^N u_j^2O_1(\delta(T))\Big)^k.
\end{aligned}\tag{7.13}$$

回顾（7.2），我们有

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1=\sum_{j=1}^N u_j\frac{P_1(s_{0,j})}{\sqrt{\frac12\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}=\sum_{j=1}^N u_j\frac{P_1(s_{0,j})}{\sqrt{\frac12\log\log T}}\frac{\sqrt{\frac12\log\log T}}{\sqrt{\frac12\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}=\sum_{j=1}^N u_j\frac{P_1(s_{0,j})}{\sqrt{\frac12\log\log T}}C_1(T),$$

其中，$C_1(T)$ 在（7.3）中定义。根据上述观察及（7.8），我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k+1}]\\
&=\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}\frac{1}{2^{2k+1}}\sum_{\ell=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{\ell}\frac1T\int_T^{2T}\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)^\ell\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)^{2k+1-\ell}}\,dt\\
&\ll\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}\frac{1}{2^{2k+1}}\sum_{\ell=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{\ell}\frac1T((2k+1)!\ell!((\|\mathbf{u}\|_1Y)^{2k+1+\ell})\\
&\ll\frac1T\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)^2(\|\mathbf{u}\|_1Y)^{4k+2}\frac{1}{2^{2k+1}}\sum_{\ell=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{\ell}\\
&=\frac1T\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)^2(\|\mathbf{u}\|_1Y)^{4k+2},
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由二项式定理得出，即 $\sum_{\ell=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{\ell}=(1+1)^{2k+1}=2^{2k+1}$。将 Y 替换为 $T(K_T\log\log T)^{-1}$，并回想 $\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k+1}]=0$ 对所有 k 均成立，可得 (7.6)。

另一方面，对于偶次幂，我们有

$$\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}] = \frac{(C_1(T))^{2k}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}\right)^{2k}}\frac{1}{2^{2k}}\sum_{\ell=0}^{2k}\binom{2k}{\ell}\frac{1}{T}\int_T^{2T}\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)^{\ell}\overline{\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)^{2k-\ell}}\,dt$$

$$= \frac{(C_1(T))^{2k}}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}\right)^{2k}}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\frac{1}{T}\Big(\int_T^{2T}|\mathscr{P}_{\mathbf{u},0}(\sigma_0+\mathrm{i}t,13,Y)|^{2k}dt + O((2k)!kY^{2k})\Big).$$

利用 (7.8)、(7.9)、(7.11) 和 (7.13)，我们进一步推出

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}\Big]\\
&= \frac{(C_1(T))^{2k}}{(\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T})^{2k}}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\frac{1}{T}\\
&\quad\times\Big(Tk!\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j}\log\log T + \sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}(O_1(\Delta(T))+O_1(\delta(T))) - \sum_{j=1}^N u_j^2O_1(\delta(T))\Big)^k\\
&\qquad + Tk!k^2(\log\log Y+O(1))^{k-2} + O((2k)!kY^{2k})\Big)\\
&= (C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\times\Big(\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j} + \sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}\frac{(O_1(\Delta(T))+O_1(\delta(T)))}{\log\log T} - \sum_{j=1}^N u_j^2\frac{O_1(\delta(T))}{\log\log T}\Big)^k\Big)\\
&+ O\Big(\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}\Big) + O\Big(\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}\Big),
\end{aligned}$$

其中，第二个等式由 $Y = T^{1/K'}\log\log T$ 得出。

由柯西-施瓦茨不等式，我们有 $|\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j| \le \|\mathbf{u}\|_2^2$，因此

$$\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}\frac{(O_1(\Delta(T))+O_1(\delta(T)))}{\log\log T} = O\Big(\|\mathbf{u}\|_2^2\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big).$$

此外，由于 $\sum_{j=1}^N u_j^2 \le \|\mathbf{u}\|_1^2$，我们有 $-\sum_{j=1}^N u_j^2 O_1(\delta(T))\log\log T = O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^2\ \delta(T)\log\log T\Big)$。因此，上面的最后一个$k$次幂项变为

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j} + O\Big(\|\mathbf{u}\|_2^2\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big) + O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^2\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)\Big)^k\\
&= \Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j}\Big)^k + \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=k\\ \alpha\ne k}}\frac{k!}{\alpha!\beta!\gamma!}\Big(O(\|\mathbf{u}\|_2^2)\Big)^{\alpha}\Big(O\Big(\|\mathbf{u}\|_2^2\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)\Big)^{\beta}\Big(O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^2\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)\Big)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

注意到 $\|\mathbf{u}\|_2 \le \|\mathbf{u}\|_1$。我们有 $O(\|\mathbf{u}\|_2) = O(\|\mathbf{u}\|_1)$。因此，我们得出

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=k\\ \alpha\ne k}}\frac{k!}{\alpha!\beta!\gamma!}\Big(O(\|\mathbf{u}\|_2^2)\Big)^{\alpha}\Big(O\Big(\|\mathbf{u}\|_2^2\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)\Big)^{\beta}\Big(O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^2\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)\Big)^{\gamma}\\
&\ll \|\mathbf{u}\|_1^{2k}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=k\\ \alpha\ne k}}\frac{k!}{\alpha!\beta!\gamma!}\Big(1\Big)^{\alpha}\Big(\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)^{\beta}\Big(\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

接下来，我们需要单独考察分母为 $\log\log T$或 $(\log\log T)^2$ 的项，因为 $(\log\log T)^j, j \ge 3$ 将被 $(\log\log T)^2$ 吸收。将有序对写成这种形式 (α,β,γ)，我们看到这些项

分母为 $\log\log T$ 的项来自 $(k-1,1,0)$ 和 $(k-1,0,1)$；分母为 $(\log\log T)^2$ 的项来自 $(k-2,2,0)$、$(k-2,0,2)$ 和 $(k-2,1,1)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=k\\ \alpha\neq k}} \frac{k!}{\alpha!\beta!\gamma!}\Big(1\Big)^{\alpha}\Big(\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)^{\beta}\Big(\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)^{\gamma}\\
&=\frac{k!}{(k-1)!}\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}+\frac{k!}{(k-1)!}\frac{\delta(T)}{\log\log T}\\
&+\frac{k!}{(k-2)!2!}\Big(\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)^2+\frac{k!}{(k-2)!2!}\Big(\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)^2+\frac{k!}{(k-2)!}\Big(\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)\Big(\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)\\
&+\mathscr{E}.
\end{aligned}$$

我们分析 $\mathscr{E}$。首先，在 $(A+B+C)^k$ 的展开式中，总共有 $\binom{k+3-1}{3}$ 项。因此，$\mathscr{E}$ 中有 $\binom{k+3-1}{3}-6$ 项。此外，其中最大的系数是 $\alpha=\beta=\gamma=k/3$ 对应的多项式系数，即 $k!/((k/3)!)^3$。最后，利用假设 $\Delta(T)=O((\log\log T)^{\varepsilon})$ 且 $\delta(T)=O((\log\log T)^{\varepsilon})$，我们得到

$$\mathscr{E}\ll\Big(\binom{k+3-1}{3}-6\Big)\Big(\frac{k!}{((k/3)!)^3}\Big)\frac{1}{(\log\log T)^{3-3\varepsilon}}.$$

由斯特林公式 (2.1) 可知

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}&\ll\Big(\binom{k+3-1}{3}-6\Big)\Big(\frac{k!}{((k/3)!)^3}\Big)\frac{1}{(\log\log T)^{3-3\varepsilon}}\\
&=\Big(\frac{k(k+1)(k+2)}{6}-6\Big)\Big(\frac{\sqrt{2\pi k}(k/e)^k(1+O(1/k))}{(\sqrt{2\pi(k/3)}((k/3)/e)^{k/3}(1+O(1/k)))^3}\Big)\frac{1}{(\log\log T)^{3-3\varepsilon}}\\
&\ll\Big(\frac{k(k+1)(k+2)}{6}-6\Big)\Big(\frac{3^k}{k}\Big)\frac{1}{(\log\log T)^{3-3\varepsilon}}\\
&\ll\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-3\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

与此同时，u 采用相同的策略来简化分母为 $(\log\log T)^2$, 的项，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=k\\ \alpha\neq k}} \frac{k!}{\alpha!\beta!\gamma!}\Big(O(\|\mathbf{u}\|_2^2)\Big)^{\alpha}\Big(O\Big(\|\mathbf{u}\|_2^2\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)\Big)^{\beta}\Big(O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^2\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)\Big)^{\gamma}\\
&\ll\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=k\\ \alpha\neq k}} \frac{k!}{\alpha!\beta!\gamma!}\Big(1\Big)^{\alpha}\Big(\frac{(\Delta(T)+\delta(T))}{\log\log T}\Big)^{\beta}\Big(\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)^{\gamma}\\
&\ll\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\Big(k\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}+k\frac{\delta(T)}{\log\log T}+\frac{2k(k-1)}{(\log\log T)^{2-2\varepsilon}}+\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-3\varepsilon}}\Big).
\end{aligned}$$

因此，我们有

(7.14)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]\\
&=(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\delta_{i,j}c_{i,j}\Big)^k\\
&+(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big\{O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}k\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\Big)+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}k\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{2k(k-1)}{(\log\log T)^{2-2\varepsilon}}\Big)\\
&+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-3\varepsilon}}\Big)\Big\}+O\Big(\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}\Big)+O\Big(\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}\Big)\\
&=\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}\Big)^k+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\Big)\\
&+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{2k(k-1)}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}\Big)+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\Big)\\
&+O\Big(\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}\Big)+O\Big(\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}\Big),
\end{aligned}
$$

其中第四项和第五项是通过将T取足够大，使得$C_1(T)/(\log\log T)^\varepsilon\le 1$而得到的。

现在，我们来估计 $|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}^1{}_T)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{}\mathbf{Z}_N)^{2k}]|$。根据 (7.14)，只需考虑 (7.14) 中第一项与 (7.1) 之间的差。由于$C_1(T)\to 1$当$T\to\infty$时，因此存在$T_{C_1}>0$使得

$$
|(C_1(T))^2-1|<\varepsilon_5 \tag{7.15}
$$

只要$T>T_{C_1}$。另一方面，由引理 7.2 可知，对于所有 $1\le i、j\le N$，$k_{i,j}(T)\to k_{i,j}=\delta_{i,j}c_{i,j}$当$T\to\infty$时。因此，存在$T_k>0$使得

$$
|\tilde{k}_{i,j}(T)-\delta_{i,j}c_{i,j}|<\varepsilon_6 \tag{7.16}
$$

只要$T>T_k$。

现在，考虑

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}\Big)^k-\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\tilde{k}_{i,j}(T)\Big)^k\Big|\\
&=\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big|\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}\Big)^k-\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\tilde{k}_{i,j}(T)\Big)^k\Big|\\
&=\frac{(2k)!}{k!2^k}\Big|\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}-\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\tilde{k}_{i,j}(T)\Big|\\
&\times\Big(\sum_{\ell=0}^{k-1}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}\Big)^{k-1-\ell}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\tilde{k}_{i,j}(T)\Big)^{\ell}\Big).
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

回顾（7.5）中 κ_2 的定义。我们已经设定 $|(C_1(T))^2|\le\kappa_2$ 对所有 T都成立。此外，由于当 $T\to\infty$时，$\tilde{k}_{i,j}(T)$ 收敛到 1 或 0，我们可以假设当 $|k_{i,j}(T)|<e/(e-1)=\kappa_2$ 足够大时

T。此外，利用对于所有 $1\le i、j\le N$ 都有 $|\delta_{i,j}\alpha_{,j}|\le 1$ 这一事实，我们有，当 T 足够大时，

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\ell=0}^{k-1}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}\Big)^{k-1-\ell}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\tilde{k}_{i,j}(T)\Big)^{\ell}\Big|\\
&\le\Big|\sum_{\ell=0}^{k-1}\kappa_2^{k-1-\ell}\kappa_2^{\ell}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\Big)^{k-1-\ell}\Big(\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\Big)^{\ell}\Big|\le\Big|\sum_{\ell=0}^{k-1}\kappa_2^{k-1-\ell}\kappa_2^{\ell}\Big(\|\mathbf{u}\|_2^2\Big)^{k-1-\ell}\Big(\|\mathbf{u}\|_2^2\Big)^{\ell}\Big|\\
&=\frac{(k-1)k}{2}\kappa_2^{k-1}\|\mathbf{u}\|_2^{2k-2}.
\end{aligned}\tag{7.18}$$

另一方面，由 (7.15) 和 (7.16)，当 $T>\max\{T^{C_1},T^{\cdot}k\}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
|(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}-\tilde{k}_{i,j}(T)|&\le|(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}-\delta_{i,j}c_{i,j}|+|\delta_{i,j}c_{i,j}-\tilde{k}_{i,j}(T)|\\
&\le|\delta_{i,j}c_{i,j}||(C_1(T))^2-1|+|\delta_{i,j}c_{i,j}-\tilde{k}_{i,j}(T)|\le\varepsilon_5+\varepsilon_6,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 $|\delta_{i,j}\alpha_{,j}|\le 1$ 得出。因此，

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}-\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j\tilde{k}_{i,j}(T)\Big|\\
&\le\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j|(C_1(T))^2\delta_{i,j}c_{i,j}-\tilde{k}_{i,j}(T)|\le\sum_{1\le i,j\le N}u_iu_j|(\varepsilon_5+\varepsilon_6)|\le\|\mathbf{u}\|_2^2(\varepsilon_5+\varepsilon_6).
\end{aligned}\tag{7.19}$$

取 ε_5 $+\varepsilon_6=2T^{-1}$，并将 (7.19) 和 (7.18) 代入 (7.17)，再由 (7.14) 推得 t

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\Big|\\
&\le\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{T}+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\Big)\\
&+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\delta(T)}{\log\log T}\Big)+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{2k(k-1)}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}\Big)+O\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\Big)\\
&+O\Big(\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}\Big)+O\Big(\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}\Big).
\end{aligned}$$

因此，证明完成。 □

引理 7.5 表明，$P_1(s0,_j,\chi_j)/\sqrt{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}$ ~~在分布~~意义下收敛到标准正态分布。利用这一结果，我们可以改进估计 (5.17)。

引理 7.6. 对于任意 $\mathfrak{r}>0$，我们有

$$\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j},\chi_j)|>\mathfrak{r})\le\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)+\frac{1}{T}.\tag{7.20}$$

特别地，当 $\mathfrak{r}=$ 对数对数T 时，我们有

$$\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j},\chi_j)|>\log\log T)\ll\frac{1}{(\sqrt{\log\log T})\log T}+\frac{1}{T}.$$

证明。令 $\mathcal{N}$为标准正态分布。由引理 7.5，$P_1(s0,_j,\chi_j)/\sqrt{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}$ 在分布意义下收敛到 $\mathcal{N}$，我们有

$$\lim_{T\to\infty}\mathfrak{P}_T(P_1(s_{0,j},\chi_j)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}>r)=\mathfrak{P}(\mathcal{N}>r)$$

对每个 $r \in \mathbb{R}$都成立。由于 $\mathcal{N}$具有对称性，我们得到

$$\lim_{T\to\infty} \mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j},\chi_j)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}| > r) = \mathfrak{P}(|\mathcal{N}| > r)$$

对于每个 $r > 0$。因此，存在 $T_1 > 0$ 使得

$$\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j},\chi_j)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}| > r) < \mathfrak{P}(|\mathcal{N}| > r) + \frac{1}{T}. \tag{7.21}$$

只要 $T > T_1$ 对于每个 $r > 0$成立。利用 [4, 式 (3.6.3)], , 我们进一步得到

$$\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j},\chi_j)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}| > r) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-r^2/2}}{r} + \frac{1}{T}.$$

现在，取 $r = \mathfrak{r}/\sqrt{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}$，得到

$$\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j},\chi_j)| > \mathfrak{r}) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{r}^2}{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}\Big) + \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}\Big) + \frac{1}{T}. \tag{7.22}$$

在 (7.22) 中使用 (6.1)，证明即告完成。 □

我们还需要以下技术性估计。

引理 7.7。 若 $n \ge 7.5(|z|+1)$，则 $|e^z - \sum^n{}_{j=0} z^j/j!\ | < e^{-n}$。

证明。 根据斯特林公式，我们有 $j! \ge (j/e)^j$。因此，

$$\Big|e^z - \sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\Big| \le \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{|z|^j}{j!} \le \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{|z|^j}{(j/e)^j}.$$

对于 $n \ge 7.5(|z|+1)$，我们进一步有

$$\begin{aligned}\Big|e^z - \sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\Big| &\le \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{|z|^j}{(j/e)^j} \le \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{(|j|/7.5)^j}{(j/e)^j} = \sum_{j=n+1}^{\infty}\Big(\frac{e}{7.5}\Big)^j = \Big(1-\frac{e}{7.5}\Big)^{-1}\Big(\frac{e}{7.5}\Big)^{n+1}\\ &= \Big(1-\frac{e}{7.5}\Big)^{-1}\Big(\frac{7.5}{e}\Big)^{-(n+1)} = \Big(1-\frac{e}{7.5}\Big)^{-1}\Big(\frac{7.5}{e}\Big)^{-1}\Big(\frac{7.5}{e}\Big)^{-n} = \Big(\frac{e}{7.5-e}\Big)\Big(\frac{7.5}{e}\Big)^{-n} < \Big(\frac{7.5}{e}\Big)^{-n} < e^{-n}\end{aligned}$$

因为 $7.5/e > e$。 □

注 6。 现在我们对证明命题 3.6 的一些关键步骤作出说明。
(i) 引理 7.2 至关重要，因为没有先验理由认为$\mathbf{R}^1$ T的“协方差矩阵”是正定的。事实上，如果T不够大，矩阵 $\mathfrak{K}(T)$ 可能不是 正定的（参见 [26, 第 3362 页，式（19）下方显示的方程]）。

(ii) 在引理 7.5 中，我们追踪k在大 O 项中的贡献（参见 [26, 第 3367 页，式（23）及其下方]）。这对于引理 7.8 的证明至关重要。
(iii) 引理 7.6 不仅仅给出了更精确的估计。它还允许灵活选择 $\mathfrak{r}$，而这种选择参数的自由度对于引理 7.8 至关重要。
(iv) 在引理 7.8 的证明中，我们对论证进行了参数化，以便轻松地将其应用于另一组参数（引理 9.1）。

(v) 正如稍后将看到的，我们选择了一组不同于 Roberts 的证明 [26,第 2 节8]中的新参数。$\mathscr{E}_2$（7.26）中的项说明了这样做的必要性。如果我们选择 $\|\mathbf{u}\|_1 = \sqrt{\log\log T}$（[26, 式（22）]）以及

$\mathfrak{r}=\log\log T$（[26, 引理的证明 9]），如 [26, 第 2 节8], 中所示，那么（7.34）变为

$$\mathscr{E}_2 \ll \|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}\cdot(\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j})|>\log\log T))^{1/2}. \tag{7.23}$$

将 $\|\mathbf{u}\|_1=\sqrt{\log\log T}$和 $\mathfrak{r}=\log\log T$代入 (7.30)，得到 $\mathfrak{N}=\sqrt{2}C_1(T)\mathscr{C}_2\log\log T$。利用这一选择以及 (5.17)，可知 (7.23) 变为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_2 &\ll (\sqrt{\log\log T})^{\sqrt{2}C_1(T)\mathscr{C}_2\log\log T}\cdot\frac{1}{\sqrt{\log T}}\\ &=\exp\Big((\sqrt{2}C_1(T)\mathscr{C}_2\log\log T)(\log\sqrt{\log\log T})-\log\sqrt{\log T}\Big)\\ &=\exp\Big(\frac{\sqrt{2}C_1(T)\mathscr{C}_2}{2}(\log\log T)(\log\log\log T)-\frac{1}{2}\log\log T\Big),\end{aligned} \tag{7.24}$$

当 $T\to\infty$ 时，该式发散（参见 [26, 第 3367 页，式 (23) 下方的显示公式]）　　.

(iv) 式 (7.24) 是本文作者选择一组不同于 [26, 第 2 节8] 的新参数的原因之一。此外，它还说明了在引理 7.6 中灵活选择 $\mathfrak{r}$ 的必要性。

现在我们回到证明。经过上述准备，我们将证明，作为随机过程，$\mathbf{R}^1{}_T$与高斯过程 $\tilde{}\mathbf{Z}_N=(\tilde{\mathcal{Z}}_1,\dots,\tilde{\mathcal{Z}}_N)$ 相似，具体而言，相应特征函数之间的差很小。

引理 7.8. 假设 $\Delta(T)$和 $\delta(T)$的阶为 $O((\log\log T)^{\varepsilon})$，其中 $\varepsilon\in(0,23)$为固定值，且它们不恒为零。令 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots u_N)\in\mathbb{R}^N$。那么，采用上文引入的记号，我们有

$$\Big|\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))]-\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N))]\Big|\ll\exp\Big(-\frac{1}{2}(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\Big), \tag{7.25}$$

其中 $\varepsilon_j>0, j=1,2$，使得 $\varepsilon_1+\varepsilon_2<1$。

证明。 回忆 $s0,j=\sigma_0+\mathrm{i}(U+\alpha_j)$。对于任意 $\mathfrak{r}>0$，我们有

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))]-\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N))]\Big|\\ &\le\Big|\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))\cdot\mathbb{1}(\cap_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|\le\mathfrak{r}\})]-\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N))]\Big|\\ &+\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))\cdot\mathbb{1}(\cup_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\})]\\ &\le\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|+\Big|\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n\cdot\mathbb{1}(\cap_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|\le\mathfrak{r}\})]\Big|\\ &+\Big|\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n\cdot\mathbb{1}(\cup_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\})]\Big|+\Big|\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|\\ &+\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))\cdot\mathbb{1}(\cup_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\})]\\ &=\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|+\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4.\end{aligned} \tag{7.26}$$

我们从 $\mathscr{E}_1$ 开始。注意，我们处于事件 $|P_1(s0,j)|\le\mathfrak{r}$ 上。因此，由 (7.3) 可得

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1=\sum_{j=1}^N u_j\frac{P_1(s_{0,j})}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}\le\sum_{j=1}^N u_j\frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}}=\sum_{j=1}^N u_j\frac{\mathfrak{r}C_1(T)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}\le\frac{\mathfrak{r}C_1(T)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}\|\mathbf{u}\|_1,$$

这意味着

$$\Big|\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n\cdot\mathbb{1}(\cap_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|\le\mathfrak{r}\})]\Big|\le\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big(\frac{\mathfrak{r}C_1(T)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}\|\mathbf{u}\|_1\Big)^n.$$

按如下方式选取参数：令 $\mathscr{C}_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathscr{C}_2>7.5. \tag{7.27}$$

对于任意 $\varepsilon_2>0$，取

$$\mathfrak{r}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}{C_1(T)\mathscr{C}_2}(\log\log\log T)^{\varepsilon_2}, \tag{7.28}$$

其中 $C_1(T)$在 (7.3) 中引入。对于任意满足 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 且 $\varepsilon_1+\varepsilon_2<1$ 的 $\varepsilon_1>0$，取

$$\|\mathbf{u}\|_1=(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}. \tag{7.29}$$

Let

$$\mathfrak{N}=\frac{C_1(T)\mathscr{C}_2}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}\mathfrak{r}\|\mathbf{u}\|_1. \tag{7.30}$$

于是由 (7.28) 和 (7.29)，我们有

$$\mathfrak{N}=(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}; \tag{7.31}$$

因此

$$\mathfrak{N}\log\|\mathbf{u}\|_1=(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\varepsilon_1\log\log\log\log T). \tag{7.32}$$

由 (7.30) 和 (7.3)，可知

$$\mathfrak{N}>7.5\Big(\frac{\mathfrak{r}C_1(T)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}\|\mathbf{u}\|_1+1\Big)$$

当T充分大时。因此，由引理 7.7 可得

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1&=\Big|\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n\cdot\mathbb{1}(\cap_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|\le\mathfrak{r}\})]\Big|\le\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big(\frac{\mathfrak{r}C_1(T)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}\|\mathbf{u}\|_1\Big)^n\\&<e^{-\mathfrak{N}}=\exp(-(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2})\end{aligned} \tag{7.33}$$

根据 (7.31)。

接下来，我们考虑 $\mathscr{E}_2$。根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\Big|\mathbb{E}\Big[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n\cdot\mathbb{1}\Big\{\cup_{j=1}^N\big\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\big\}\Big\}\Big]\Big|\le\Big(\mathbb{E}\big[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2n}\big]\Big)^{1/2}\Big(\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}\Big\{\cup_{j=1}^N\big\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\big\}\Big\}\Big]^2\Big)^{1/2}.$$

由（7.20）可推得

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{E}[\mathbb{1}(\cup_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\})]^2\Big)^{1/2}&\le\Big(\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}_T(\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\})\Big)^{1/2}\\&\le\sqrt{N}\Big(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)+\frac{1}{T}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

根据引理 7.4，我们有

$$\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big(\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2n}]\Big)^{1/2}<\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big(\|\mathbf{u}\|_1^{2n}\cdot\kappa_1(1+\mathscr{C}^2)\frac{(2n)!}{n!2^n}\Big)^{1/2}\le\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}\sqrt{\kappa_1(1+\mathscr{C}^2)}\sum_{n\le\mathfrak{N}}\sqrt{\frac{(2n)!}{(n!)^3 2^n}}$$
$$\ll\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}},$$

其中最后的 $\ll$ 结论由级数收敛这一事实得出。因此，

$$\mathscr{E}_2\ll\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}\cdot\sqrt{N}\Big(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)+\frac{1}{T}\Big)^{1/2}. \tag{7.34}$$

利用 (7.34) 中的不等式 $\overline{\sqrt{a}+b}\leqq\sqrt{a}\overline{+}\sqrt{b}$，可得

$$\mathscr{E}_2\ll\sqrt{N}\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}\cdot\Big(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)\Big)^{1/2}+\sqrt{N}\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{\sqrt{T}}. \tag{7.35}$$

将 (7.28)、(7.29) 和 (7.31) 代入 (7.35)，由 (7.4) 可推知第一项为

$$\ll\sqrt{N}(\log\log\log T)^{\varepsilon_1(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}\Big(\frac{\sqrt{2\kappa_2}\mathscr{C}_2}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_2}}\exp\Big(-\frac{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}{2\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)\Big)^{1/2}$$
$$=\sqrt{N}\exp\Big(\varepsilon_1(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\log\log\log\log T)$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\log(\sqrt{2\kappa_2}\mathscr{C}_2)-\varepsilon_2(\log\log\log\log T)-\frac{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}{2\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)\Big)$$
$$\le\sqrt{N}\exp\Big(\varepsilon_1(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\log\log\log\log T)-\frac{\varepsilon_2}{2}(\log\log\log\log T)-\frac{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}{4\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)$$

当 T 足够大时。

回顾 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ （(7.29) 上方一行）。因此，当$T\to\infty$时，$\log\log\log\log T(\log\log\log T)^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\to 0$ 和 $\log\log\log\log T(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\to 0$ 均成立。继续化简可得

$$\sqrt{N}\exp\Big(\varepsilon_1(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\log\log\log\log T)-\frac{\varepsilon_2}{2}(\log\log\log\log T)-\frac{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}{4\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)$$
$$=\sqrt{N}\exp\Big((\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\Big(\varepsilon_1\frac{\log\log\log\log T}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}}-\frac{\varepsilon_2}{2}\frac{\log\log\log\log T}{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}-\frac{1}{4\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)\Big)$$
$$\ll\sqrt{N}\exp\Big(-\Big(\frac{1}{4\kappa_2\mathscr{C}_2^2}-\varepsilon'\Big)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\Big),$$

其中 $\varepsilon'>0$ 可以任意小。

将（7.28）、（7.29）和（7.31）代入（7.35），可见第二项变为

$$\sqrt{N}\exp\Big(\varepsilon_1(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\log\log\log\log T)-\frac{1}{2}\log T\Big)\ll\sqrt{N}\exp\Big(-\Big(\frac{1}{2}-\varepsilon'\Big)(\log T)\Big).$$

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_2&\ll\sqrt{N}\exp\Big(-\Big(\frac{1}{4\kappa_2\mathscr{C}_2^2}-\varepsilon'\Big)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\Big)+\sqrt{N}\exp\Big(-\Big(\frac{1}{2}-\varepsilon'\Big)(\log T)\Big)\\&\ll\sqrt{N}\exp\Big(-\Big(\frac{1}{4\kappa_2\mathscr{C}_2^2}-\varepsilon'\Big)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\Big).\end{aligned} \tag{7.36}$$

对于 $\mathscr{E}_3$，由正态分布的矩的性质可知，$\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot \tilde{\text{整数集}}_N)^n]=0$ 当 $n=2k+1$。此外，由引理 7.3，我们还可得

$$\Big|\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|\le\sum_{k>\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{(k)!2^k}\|\mathbf{u}\|_2^{2k}=\sum_{k>\mathfrak{N}/2}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}}{(k)!2^k}\le\sum_{k>\mathfrak{N}/2}\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{2k}}{(k)!2^k}=\sum_{k>\mathfrak{N}/2}\frac{(\|\mathbf{u}\|_1^2/2)^k}{(k)!}$$

其中倒数第二个不等式由 $\|\mathbf{u}\|_2\le\|\mathbf{u}\|_1$ 得出。由 (7.29) 和 (7.31)，当 T 充分大时，我们有 $\mathfrak{N}/2>7.5((\|\mathbf{u}\|_1^2/2)+1)$。因此，由引理 7.7 可得

$$\mathscr{E}_3=\Big|\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|\le\sum_{k>\mathfrak{N}/2}\frac{(\|\mathbf{u}\|_1^2/2)^k}{(k)!}\le e^{-\mathfrak{N}/2}=\exp\Big(-\frac{1}{2}(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\Big).\tag{7.37}$$

对于 $\mathscr{E}_4$，根据 $|e^{\mathrm{i}\theta}|\le 1$ 对所有 θ 均成立这一性质，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_4&=\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))\cdot\mathbb{1}(\cup_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\})]\\&\le\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}_T(|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r})\le N\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)+\frac{N}{T},\end{aligned}\tag{7.38}$$

其中，倒数 后一个不等式由 (7.20) 得出。将 (7.28) 代入 (7.38)，并使用 (7.4)，可得

$$\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)\le\frac{\sqrt{2\kappa_2}\mathscr{C}_2}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_2}}\exp\Big(-\frac{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}{2\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)$$

从而

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_4&\ll N\frac{\sqrt{2\kappa_2}\mathscr{C}_2}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_2}}\exp\Big(-\frac{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}{2\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)\\&\ll N\exp\Big(\log\sqrt{2\kappa_2}\mathscr{C}_2-\varepsilon_2\log\log\log\log T-\frac{(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}}{2\kappa_2\mathscr{C}_2^2}\Big)\\&\ll N\exp\Big(-\Big(\frac{1}{2\kappa_2\mathscr{C}_2^2}-\varepsilon'\Big)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\Big).\end{aligned}\tag{7.39}$$

现在，我们考察 (7.26) 中的主项：

$$\begin{aligned}\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|&=\sum_{2k+1\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k+1)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k+1}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k+1}]\Big|\\&\quad+\sum_{2k\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\Big|.\end{aligned}\tag{7.40}$$

由 (7.6)，(7.40) 右侧的第一项为

$$\begin{aligned}&\ll\frac{1}{T}\sum_{k\le(\mathfrak{N}-1)/2}\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)(\|\mathbf{u}\|_1T^{(K'\log\log T)^{-1}})^{4k+2}\\&\ll\frac{1}{T}\sum_{k\le(\mathfrak{N}-1)/2}\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)((\log\log\log T)^{\varepsilon_1}T^{(K'\log\log T)^{-1}})^{4k+2},\end{aligned}$$

其中第二个 $\ll$ 由 (7.29) 得出。由于该级数发散，指数最大的项占主导。因此，利用斯特林公式 (2.1)，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\sum_{k\le(\mathfrak{N}-1)/2}\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)((\log\log\log T)^{\varepsilon_1}T^{(K'\log\log T)^{-1}})^{4k+2}\\&\ll\frac{1}{T}\frac{C_1(T)^{\mathfrak{N}}}{(\sqrt{\frac12\log\log T})^{\mathfrak{N}}}\mathfrak{N}^{(1/2)+\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}(\log\log\log T)^{(2\mathfrak{N}\varepsilon_1)}T^{\frac{2\mathfrak{N}}{K'\log\log T}}\end{aligned}$$

当T充分大时。此外，利用 (7.31)，我们进一步得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\frac{C_1(T)^{\mathfrak{N}}}{(\sqrt{\frac12\log\log T})^{\mathfrak{N}}}\mathfrak{N}^{(1/2)+\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}(\log\log\log T)^{(2\mathfrak{N}\varepsilon_1)}T^{\frac{2\mathfrak{N}}{K'\log\log T}}\\&=\exp\Big(\Big(\frac{2\mathfrak{N}}{K'\log\log T}-1\Big)\log T+\mathfrak{N}\log C_1(T)-\mathfrak{N}\log(\sqrt{\tfrac12\log\log T})+(\tfrac12+\mathfrak{N})\log\mathfrak{N}\\&\qquad-\mathfrak{N}+(2\mathfrak{N}\varepsilon_1)\log\log\log\log T\Big)\\&\ll\exp(-(1-\varepsilon')\log T),\end{aligned}\tag{7.41}$$

其中最后一点 $\ll$ 由 (7.31) 得出。

利用 (7.7)，我们看到 (7.40) 右侧的第二项变为

$$\begin{aligned}&\ll\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{T}+\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\\&+\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\delta(T)}{\log\log T}+\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{2k(k-1)}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}\\&+\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\\&+\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}+\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}\end{aligned}\tag{7.42}$$

我们先考察 (7.42) 右侧的第一项。化简后得到

$$\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{T}=\frac{1}{T}\sum_{k\le\mathfrak{N}/2}\frac{\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{k!2^k}\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\ll\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{\mathfrak{N}}}{T}\ll\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{T},\tag{7.43}$$

其中级数的收敛性由 (7.5) 得出，而最后一点 $\ll$ 是由以下事实$\|\mathbf{u}\|_2\le\|\mathbf{u}\|_1$ 得出的。然后利用 (7.32)，我们推得

$$\begin{aligned}\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{T}&=\exp(\mathfrak{N}\log\|\mathbf{u}\|_1-\log T)\\&=\exp((\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\varepsilon_1\log\log\log\log T)-\log T)\ll\exp(-(1-\varepsilon')\log T)\end{aligned}\tag{7.44}$$

当T充分大时。

(7.42) 右侧的第二项等于

$$\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\sum_{k<\mathfrak{N}/2}\frac{k(C_1(T))^{2k}}{k!2^k}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}.$$

由 (7.3) 和 (7.5)，可知 $|C_1(T)|^2<2$，因此该级数收敛。所以，我们有 e

$$\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\sum_{k<\mathfrak{N}/2}\frac{k(C_1(T))^{2k}}{k!2^k}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}<\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\sum_{k<\mathfrak{N}/2}\frac{k2^k}{k!2^k}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\ll\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}.$$

回忆一下， $\Delta(T)=O((\log\log T)^{\varepsilon})$ 且 $\delta(T)=O((\log\log T)^{\varepsilon})$。利用 (7.32) 可推出

$$\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T}\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}\ll\exp(-(1-\varepsilon)\log\log\log T+(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\varepsilon_1\log\log\log\log T)).$$

回忆一下， $\varepsilon_1+\varepsilon_2<1$ (（在 (7.29) 前一行）)。因此，存在一个可以任意小的 $\varepsilon'>0$，使得

$$\begin{aligned}&\exp(-(1-\varepsilon)\log\log\log T+(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\varepsilon_1\log\log\log\log T))\\&\ll\exp(-(1-\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T)\end{aligned}\tag{7.45}$$

当 T 充分大时。

(7.42) 右侧的第三项为

$$\sum_{k\leq\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\delta(T)}{\log\log T}.$$

由 (7.3) 和 (7.5)，可知 $|C_1(T)|^2<2$。这意味着该级数收敛。因此，与第二项类似，我们有

$$\sum_{k\leq\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\delta(T)}{\log\log T}<\frac{\delta(T)}{\log\log T}\sum_{k\leq\mathfrak{N}/2}\frac{k}{k!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\ll\frac{\delta(T)}{\log\log T}\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}$$

Sin由于 $\Delta(T)=O((\log\log T)^{\varepsilon})$ 且 $\delta(T)=O((\log\log T)^{\varepsilon})$，由 (7.32) 可推出

$$\frac{\delta(T)}{\log\log T}\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}\ll\exp(-(1-\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T)\tag{7.46}$$

当T充分大时。

(7.42) 右边的第四项为

$$\sum_{k\leq\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{2k(k-1)}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}=\frac{1}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}\sum_{k\leq\mathfrak{N}/2}\frac{2k(k-1)}{k!2^k}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\ll\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}$$

由于该级数收敛。由 (7.32)，可知

$$\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{(\log\log T)^{2-3\varepsilon}}\ll\exp(-(2-3\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T).\tag{7.47}$$

(7.42) 右边的第五项为

$$\begin{aligned}&\sum_{k\leq\mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{3^k(k+1)(k+2)}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\\&=\frac{1}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\sum_{k\leq\mathfrak{N}/2}\frac{(3/2)^k(k+1)(k+2)}{k!}\|\mathbf{u}\|_1^{2k}\ll\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\end{aligned}$$

因为该级数收敛。由（7.32）可知

$$\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{(\log\log T)^{3-4\varepsilon}}\ll\exp(-(3-4\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T)\tag{7.48}$$

（7.42）右侧的第六项为

$$\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}\ll\frac{1}{(\log\log T)^2} \tag{7.49}$$

因为该级数收敛。

(7.42) 右侧的第七项为

$$\begin{aligned}\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}&=\frac{1}{T}\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{(2k)!k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/K'(\log\log T)}}{(\log\log T)^k}\\&<\frac{T^{\mathfrak{N}/K'(\log\log T)}}{T}\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{(2k)!k}{(k!)^22^k}\frac{1}{(\log\log T)^k}.\end{aligned} \tag{7.50}$$

当 T 足够大，使得 $1/\log\log T<1/3$ 时，我们有

$$\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{(2k)!k}{(k!)^22^k}\frac{1}{(\log\log T)^k}<\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{(2k)!k}{(k!)^22^k}\frac{1}{3^k}\ll 1. \tag{7.51}$$

因此，由 (7.51)，从 (7.50) 可推得

$$\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{1}{(2k)!}\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}=\frac{1}{T}\sum_{k\le \mathfrak{N}/2}\frac{(2k)!k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/K'(\log\log T)}}{(\log\log T)^k}.\ll\frac{T^{\mathfrak{N}/K'(\log\log T)}}{T}$$

利用 (7.31)，我们有

$$\frac{T^{\mathfrak{N}/K'(\log\log T)}}{T}=\exp\Big(-\Big(1-\frac{(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}{K'(\log\log T)}\Big)\log T\Big)\ll\exp(-(1-\varepsilon')\log T). \tag{7.52}$$

根据上述论证，我们已完成各项估计。现在可以将它们汇总起来。由 (7.26)，(7.25) 左侧为

$$\le\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|+\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4. \tag{7.53}$$

进一步利用 (7.33)、(7.36)、(7.37) 和 (7.39)，我们得到 (7.53) 为

$$\begin{aligned}&\ll\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|+\exp(-(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2})\\&+\sqrt{N}\exp\Big(-\Big(\frac{1}{4\kappa_2\mathscr{C}_2^2}-\varepsilon'\Big)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\Big)+\exp\Big(-\frac{1}{2}(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\Big)\\&+N\exp\Big(-\Big(\frac{1}{2\kappa_2\mathscr{C}_2^2}-\varepsilon'\Big)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2}\Big).\end{aligned} \tag{7.54}$$

回想一下 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ （(7.29) 前一行）。因此，(7.54) 中的第三项和第五项比第二项和第四项衰减得更快。这意味着 (7.54) 为

$$\ll\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|+\exp\Big(-\frac{1}{2}(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\Big), \tag{7.55}$$

其中 $\varepsilon_2>0$ 且 $\varepsilon_1>0$ 满足 $\varepsilon_1+\varepsilon_2<1$。

由（7.40）可知，（7.55）等于

$$\begin{aligned}(7.56)\qquad &\sum_{2k+1\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k+1)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k+1}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k+1}]\Big|+\sum_{2k\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\Big|\\&+\exp(-(1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}).\end{aligned}$$

将（7.41）代入（7.56），可见（7.56）为

$$\begin{aligned}(7.57)\qquad &\ll\exp(-(1-\varepsilon')\log T)+\sum_{2k\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\Big|+\exp\Big(-\frac{1}{2}(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\Big)\\&\ll\sum_{2k\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\Big|+\exp\Big(-\frac{1}{2}(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\Big).\end{aligned}$$

最后，将（7.44）、（7.45）、（7.46）、（7.47）、（7.48）、（7.49）和（7.52）代入（7.57），可得（7.57）为

$$\begin{aligned}&\ll\exp(-(1-\varepsilon')\log T)+\exp(-(1-\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T)+\exp(-(1-\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T)\\&+\exp(-(2-3\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T)+\exp(-(3-4\varepsilon-\varepsilon')\log\log\log T)+(\log\log T)^{-2}\\&+\exp(-(1-\varepsilon')\log T)+\exp(-(1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2})\\&\ll\exp(-(1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}).\end{aligned}$$

因此，证明完成。 □

类似于 [26], , 我们回顾 [1, 引理 2.6]中的以下引理。

引理 7.9. 设 $N\ge1$。若 μ 和 ν 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的概率测度，其傅里叶变换分别为 $\hat{}\mu$ 和 $\hat{}\nu$，则对任意 $R,F>0$，以及任意满足利普希茨常数为 $\|f\|_{Lip}$ 的函数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}(7.58)\qquad &\Big|\int_{\mathbb{R}^N}f\,d\mu-\int_{\mathbb{R}^N}f\,d\nu\Big|\\&\ll_N\frac{\|f\|_{Lip}}{F}+\|f\|_\infty\big((RF)^N\|(\hat{\mu}-\hat{\nu})\mathbb{1}_{(-F,F)^N}\|_\infty+\mu\big(\big([-R,R]^N\big)^c\big)+\nu\big(\big([-R,R]^N\big)^c\big)\big),\end{aligned}$$

其中 $([-R,R]^N)^c$表示 $[-R,R]^N$的补集。

有了引理 7.8 和引理 7.9，我们就可以证明命题 3.6。

命题 *3.6* 的证明。令 μ 为由 $\mathbf{R}^1{}_T$ 诱导的测度，并令 ν 为由 ˜**整数集**$_N$诱导的测度。对于任意$R>0$，由 (7.21) 可得

$$(7.59)\qquad \mu(([-R,R]^N)^c)\le\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}_T\Big(\Big|P_1(s_{0,j},\chi_j)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_{T,\chi_j}}\Big|>R\Big)\le N\mathfrak{P}(|\mathcal{N}|>R)+\frac{1}{T},$$

因此，由 [4, 式 (3.6)。3], 我们进一步得到

$$(7.60)\qquad \mu(([-R,R]^N)^c)+\nu(([-R,R]^N)^c)\le2N\mathfrak{P}(|\mathcal{N}|>R)+\frac{1}{T}\le2N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-R^2/2}}{R}+\frac{1}{T}$$

因此，取$R=(\log\log\log T)^{\varepsilon_2}$，可得

$$(7.61)\qquad \mu(([-R,R]^N)^c)+\nu(([-R,R]^N)^c)\ll N\frac{\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2})}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_2}}.$$

此外，取$F=(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}$并将（7.25）和（7.61）代入（7.58）的右侧，可得

$$\ll_N \frac{L}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_1}} + M(\log\log\log T)^{N(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2})$$
$$+ NM\frac{\exp((-1/2)(\log\log\log T)^{2\varepsilon_2})}{(\log\log\log T)^{\varepsilon_2}}$$

当T充分大时，即可得到所需的估计。 □

8. 命题 3.7 的证明

本节将证明以下一般性结果，并指出命题 3.7 可由满足 $\mathfrak{C}=\mathfrak{K}$ 和 $\mathfrak{C}=\mathfrak{K}$的引理推出$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$**引理 8.1.** 设 $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(T)$ 和 $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(T)$ 是 $N\ \times N$ 阶对称正定矩阵，且满足

$$\widetilde{\mathfrak{C}}=\mathfrak{C}+\widetilde{E},$$

其中 $\widetilde{\ }E$的每个元素均为 $O((\log\log T)^{-1+\varepsilon})$，其中某个（固定的） $\varepsilon<1$)。那么对任意 $\varepsilon_3>0$，有

$$\int_{\mathscr{B}}\frac{f(x)}{2\pi}\Big(\frac{e^{-(x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2}}{\sqrt{\det\widetilde{\mathfrak{C}}}}-\frac{e^{-(x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2}}{\sqrt{\det\mathfrak{C}}}\Big)dx\ll_{\mathfrak{C}}||f||_\infty(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3},$$

其中 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}^N$中的一个博雷尔集。

证明。 我们先证明

$$\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}=\mathfrak{C}^{-1}+E' \tag{8.1}$$

存在某个 E'，其各项均为 $\ll(\log\log\ T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}$。注意到

$$\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}=(\mathfrak{C}+\widetilde{E})^{-1}=(I+\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{E})^{-1}\mathfrak{C}^{-1},$$

因此

$$(I+\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{E})^{-1}=I+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{E})^k. \tag{8.2}$$

记 γ 为 $\mathfrak{C}^{-1}$各项绝对值的最大值。我们知道， $\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{\ }E$ 的每一项都是$O(N\gamma(\log\log\ T)^{-1+\varepsilon})$，因此 $(\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{\ }E)^k$的所有项均为 $O(N^2k^{-1}\gamma^k(\log\log\ T)^{(-1+\varepsilon)k})$。因此，对于任意满足 $-1+\varepsilon+\varepsilon_3<0$ 的$\varepsilon_3>0$，存在充分大的 T_1，使得当 $T\geq T_1$,时，有 $N^2\gamma\ll(\log\log\ T)^{\varepsilon_3}$，于是

$$N^2\gamma(\log\log T)^{-1+\varepsilon}\ll(\log\log T)^{\varepsilon_3}(\log\log T)^{-1+\varepsilon}<1;$$

对于这样的情形，(8.2) 中求和的每一项至多为

$$\frac{O((\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3})}{1+O((\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3})}\ll(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3},$$

由此得到结论 (8.1)。

接下来，我们注意到 $\widetilde{\mathfrak{C}}=\mathfrak{C}+\widetilde{\ }E=\mathfrak{C}(I+\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{\ }E)$，因此

$$\det\widetilde{\mathfrak{C}}=\det\mathfrak{C}\det(I+\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{E}). \tag{8.3}$$

由行列式的莱布尼茨公式可知

$$\det(I+\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{E}) = 1 + O_{\mathfrak{C},N}((\log\log T)^{-1+\varepsilon}).$$

显然，对于 $\varepsilon_3 > 0$，存在$T_2 > 0$，它依赖于 $\mathfrak{C}$、N，使得隐含常数为 $\ll(\log\log T)^{\varepsilon_3}$，对于$T \geq T_2,$，由此可得

$$\det(I+\mathfrak{C}^{-1}\widetilde{E}) = 1 + O((\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}). \tag{8.4}$$

现在，由 (8.3)、(8.4) 以及 $\sqrt{1+x} = 1+\overline{O(x)}$ 关于 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 一致成立这一事实，我们推得

$$\frac{1}{\sqrt{\det\widetilde{\mathfrak{C}}}} - \frac{1}{\sqrt{\det\mathfrak{C}}} = \frac{1}{\sqrt{\det\mathfrak{C}}}\Big(\frac{1}{1+O((\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3})} - 1\Big) \ll_{\mathfrak{C}} (\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3},$$

这使我们可以写成

$$\begin{aligned}&\int_{\mathscr{B}} \frac{f(x)}{2\pi}\Big(\frac{e^{-(x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2}}{\sqrt{\det\widetilde{\mathfrak{C}}}} - \frac{e^{-(x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2}}{\sqrt{\det\mathfrak{C}}}\Big)dx \\ &= \int_{\mathscr{B}} \frac{f(x)}{2\pi\sqrt{\det\mathfrak{C}}}\Big(e^{-(x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2} - e^{-(x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2}\Big)dx + O_{\mathfrak{C}}(||f||_\infty(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}).\end{aligned} \tag{8.5}$$

为处理最后一个积分，我们应用中值定理（取 e^{-t}）得到

$$e^{-(x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2} - e^{-(x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2} = -e^{-\xi}((x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2 - (x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2)$$

对于某个介于 $(x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2$ 与 $(x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2$ 之间的 ξ。由 (8.1)，我们有

$$x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x = x^T(\mathfrak{C}^{-1}+E')x = x^T\mathfrak{C}^{-1}x + x^TE'x \geq \lambda_{\min}(\mathfrak{C}^{-1})||x||_2^2 + \lambda_{\min}(E')||x||_2^2,$$

其中，$\lambda_{\min}(M)$ 表示矩阵 M 的最小特征值，最后一个不等式由瑞利商的下界得出。（注意，$\mathfrak{C}^{-1}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}$ 的对称性意味着 E' 必须是对称的。）由于 E' 的每个元素都是 $O_{\mathfrak{C}}((\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3})$，我们有

$$|\lambda_{\min}(E')| \leq \rho(E') \leq ||E'|| \ll (\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3},$$

其中，$\rho(M)$ 是 M 的谱半径，而 $||M||$ 表示 M 的（通常意义下的）矩阵范数。（这里我们用到了矩阵范数与最大范数对于 $N \times N$ 矩阵是等价的这一事实。）因此，$x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathfrak{C}^{-1})||x||_2^2$。因此，由于 ξ 介于 $(x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2$ 与 $(x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2$ 之间，我们得出$\xi \geq \frac{1}{4}\lambda_{\min}(\mathfrak{C}^{-1})||x||_2^2 = \frac{1}{4}\lambda_{\min}(\mathfrak{C}^{-1})x^Tx$。（注意，由于 $\mathfrak{C}^{-1}$ 是正定的，$\lambda_{\min}(\mathfrak{C}^{-1}) > 0$。）

最后，由 (8.1) ($\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1} = \mathfrak{C}^{-1}E'$) 以及与上文相同的推理，我们知道

$$|(x^T\widetilde{\mathfrak{C}}^{-1}x)/2 - (x^T\mathfrak{C}^{-1}x)/2| = |(x^TE'x)/2| \leq \rho(E')||x||_2^2 \ll (\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}||x||_2^2.$$

因此，我们得出结论，(8.5) 中的最后一个积分为

$$\ll_{\mathfrak{C}} ||f||_\infty \int_{\mathscr{B}} e^{-\frac{1}{4}\lambda_{\min}(\mathfrak{C}^{-1})x^Tx}(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}||x||_2^2dx \ll_{\mathfrak{C}} ||f||_\infty(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}$$

正如所需。 □

备注 7. 遗憾的是，[26, 命题 7]的证明中有一些遗漏。首先，没有给出C 的~计算；根据 [26, 第 3362] 页的讨论（以及 [26, 式~(24)]下方的讨论），$C-C$的对角项似乎应为$O(\log\log T)$，而非 0。

其次，在 [26, 第 3368], 页最后一个展示的等式中，用到了$e^t = 1 + O(t)$的泰勒近似。然而，由于$x^T(C^{-1}\tilde{}EC^{-1})x$无法对所有$x \in \mathbb{R}^2$进行界定，所需的泰勒近似便不具备一致性（也就是说，隐含常数并非绝对常数）。

第三，在 [26, 第 3368]，页的最后一段中，声称存在抵消项，这要求对$\sqrt{}^{1}\det \tilde{}_C{}^{-}\sqrt{}^{1}\det_C$给出一个界，但该~~界并未被精确~~计算出来。这个界至关重要，因为它会影响最终的估计（参见（8.5）中的最后一个大 O 项）。

9. 定理 1.2 的证明

在本节中，对于所有 i、j，我们将 $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$ 取为固定常数，从而对所有 T，均有 $\Delta(T) = 0$。我们还令 $\delta(T) = 0$，对所有 T 均成立。对于狄利克雷特征，当 $i \neq j$ 时，我们取 $\chi_i \neq \chi_j$。因此，(1.8) 中引入的矩阵 $\mathfrak{K}$ 变为单位矩阵，而随机向量 $\mathbf{X}_T$ 变为

$$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}_T(U) = (\mathscr{X}_{\alpha,\chi_1,T}(U), \dots, \mathscr{X}_{\alpha,\chi_N,T}(U)), \tag{9.1}$$

其中，$U = U_T$ 在 $[T、2T]$，上服从均匀分布，并且

$$\mathscr{X}_{\alpha,\chi_j,T}(U) = (\log|L(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}(U+\alpha), \chi_j)|)/\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}.$$

在当前情形下，显然命题 3.1–3.5 和命题 3.7 中的估计不受影响；唯一的区别在于命题 3.6，其中 $\Delta(T)$ 和$\delta(T)$（可能）不为零，这导致

$$\|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\Delta(T)+\delta(T)}{\log\log T} \quad \text{and} \quad \|\mathbf{u}\|_1^{2k}(C_1(T))^{2k}\frac{(2k)!k}{k!2^k}\frac{\delta(T)}{\log\log T} \tag{9.2}$$

在 (7.7) 的右侧。我们的首要目标是证明，在不假设 (9.2) 成立的情况下，可以将引理 7.8 中的估计改进如下。

引理 9.1. 设对所有 T，$\Delta(T) = 0$和 $\delta(T) = 0$成立。令 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$，并令 $\mathbf{R}^1 T$ 和 ~~整数集~~$_N$按引理 7.8 中的方式定义。对于充分大的 T，我们有

$$\left|\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))] - \mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N))]\right| \ll (\log\log T)^{-2}.$$

证明。 按照 (7.26) 中相同的分解进行处理，我们有

$$\left|\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))] - \mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N))]\right| \leq \sum_{n\leq\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\left|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n] - \mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\right| + \sum_{j=1}^{4}\mathscr{E}_j. \tag{9.3}$$

现在，我们取

$$\mathfrak{r} = \log\log T \tag{9.4}$$

and

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}{(C_1(T)\mathscr{C}_2)(\log\log\log T)}, \tag{9.5}$$

其中，$C_1(T)$ 和 $\mathscr{C}_2$ 分别与（7.3）和（7.27）中的相同。令 $\mathfrak{N}$ 按（7.30）定义。然后，取 $\mathfrak{r}$ 如（9.4）所示，并取 $\|\mathbf{u}\|_1$ 如（9.5）所示，我们有

$$\mathfrak{N}=\frac{\log\log T}{\log\log\log T} \tag{9.6}$$

并且

$$\mathfrak{N}\log\|\mathbf{u}\|_1=\frac{1}{2}\log\log T-(\log\sqrt{2}+\log C_1(T)\mathscr{C}_2)\frac{\log\log T}{\log\log\log T}-\frac{(\log\log T)(\log\log\log\log T)}{\log\log\log T}. \tag{9.7}$$

对于当前情形中的 $\mathscr{E}_1$，类似地，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1&=\Big|\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\mathrm{i}^n\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n\cdot\mathbb{1}(\cap_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|\le\mathfrak{r}\})]\Big|\\&\le\sum_{n>\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big(\frac{\mathfrak{r}C_1(T)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}\|\mathbf{u}\|_1\Big)^n<e^{-\mathfrak{N}}=\exp\Big(-\frac{(\log\log T)}{(\log\log\log T)}\Big)\end{aligned} \tag{9.8}$$

由(9.6)可得。

接下来，我们考 虑当前情形中的$\mathfrak{r}$ $\mathscr{E}_2$。类似地处理，我们得到(7.35)的对应形式 :

$$\mathscr{E}_2\ll\sqrt{N}\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}\cdot\Big(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)\Big)^{1/2}+\sqrt{N}\frac{\|\mathbf{u}\|_1^{\mathfrak{N}}}{\sqrt{T}}. \tag{9.9}$$

将 (9.4) 和 (9.7) 代入 (9.9)，可知 (9.9) 中的第一项为

$$\ll\sqrt{N}\exp\Big(-(1-\varepsilon')\frac{(\log\log T)(\log\log\log\log T)}{\log\log\log T}\Big)$$

当T充分大时。类似地，(9.9) 中的第二项为

$$\ll\sqrt{N}\exp(-(1/2-\varepsilon')\log T)$$

当T充分大时。因此，我们得出

$$\mathscr{E}_2\ll\sqrt{N}\exp\Big(-(1-\varepsilon')\frac{(\log\log T)(\log\log\log\log T)}{\log\log\log T}\Big) \tag{9.10}$$

当T充分大时。

对于 $\mathscr{E}_3$，在当前情形下，按照与 (7.37) 相同的推理，我们有

$$\mathscr{E}_3\le e^{-\mathfrak{N}/2}=\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\log\log T}{\log\log\log T}\Big) \tag{9.11}$$

当T充分大时。

对于本问题中的 $\mathscr{E}_4$，根据 $|e^{\mathrm{i}\theta}|\le1$ 对所有 θ成立这一性质，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_4&=\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))\cdot\mathbb{1}(\cup_{j=1}^N\{|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\})]\\&\le\sum_{j=1}^N\mathfrak{P}_T\big(|P_1(s_{0,j})|>\mathfrak{r}\big)\le N\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sqrt{\log\log T}}{\mathfrak{r}}\exp\Big(-\frac{\mathfrak{r}^2}{\log\log T}\Big)+\frac{N}{T},\end{aligned} \tag{9.12}$$

最后一个不等式由 (7.20) 得出。将 (9.4) 代入 (9.12)，得到

$$\mathscr{E}_4\ll N\frac{1}{\sqrt{\log\log T}}e^{-\log\log T}+\frac{N}{T}\ll\frac{N}{\log T} \tag{9.13}$$

当T充分大时。

到目前为止，我们已经处理了 (9.3) 中的误差。现在，我们转而关注 (9.3) 中的主项。与引理 7.8 类似，我们也使用引理 7.5。主要区别在于，在当前情形（$\Delta(T) = 0 = \delta(T)$）下，(7.7) 中的第二、第三、第四和第五项均为零 。换言之，在当前情形下，(7.7) 变为

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\Big|\\&=\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{T}+O\Big(\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}\Big)+O\Big(\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^22^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}\Big),\end{aligned}\tag{9.14}$$

其中隐含常数是绝对常数，且 κ_2 在（7.5）中引入。

类似于（7.40），我们将（9.3）中的主项分解为奇项和偶项：

$$\begin{aligned}\sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|&=\sum_{2k+1\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k+1)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k+1}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k+1}]\Big|\\&\quad+\sum_{2k\le\mathfrak{N}}\frac{1}{(2k)!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^{2k}]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^{2k}]\Big|.\end{aligned}\tag{9.15}$$

根据（7.6），（9.15）右侧的第一项为

$$\begin{aligned}&\ll\frac{1}{T}\sum_{k\le(\mathfrak{N}-1)/2}\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)(\|\mathbf{u}\|_1T^{(K'\log\log T)^{-1}})^{4k+2}\\&\ll\frac{1}{T}\sum_{k\le(\mathfrak{N}-1)/2}\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)\Big(\frac{\sqrt{\frac12\log\log T}}{(C_1(T)\mathscr{C}_2)(\log\log\log T)}T^{(K'\log\log T)^{-1}}\Big)^{4k+2},\end{aligned}$$

其中第二个 $\ll$由（9.5）得到。由于该级数发散，指数最大的项占主导。因此，利用斯特林公式（2.1），我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\sum_{k\le(\mathfrak{N}-1)/2}\frac{(C_1(T))^{2k+1}}{\big(\sqrt{\frac12\log\log T}\big)^{2k+1}}((2k+1)!)\Big(\frac{\sqrt{\frac12\log\log T}}{(C_1(T)\mathscr{C}_2)(\log\log\log T)}T^{(K'\log\log T)^{-1}}\Big)^{4k+2}\\&\ll T^{\frac{2\mathfrak{N}}{K'\log\log T}-1}\frac{(\sqrt{\frac12\log\log T})^{\mathfrak{N}}}{(C_1(T))^{\mathfrak{N}}(\mathscr{C}_2)^{2\mathfrak{N}}(\log\log\log T)^{2\mathfrak{N}}}\mathfrak{N}^{(1/2)+\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}\end{aligned}$$

当 T 足够大时。此外，利用（9.6），我们进一步得到

$$\begin{aligned}&T^{\frac{2\mathfrak{N}}{K'\log\log T}-1}\frac{(\sqrt{\frac12\log\log T})^{\mathfrak{N}}}{(C_1(T))^{\mathfrak{N}}(\mathscr{C}_2)^{2\mathfrak{N}}(\log\log\log T)^{2\mathfrak{N}}}\mathfrak{N}^{(1/2)+\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}\\&=\exp\Big(\Big(\frac{2}{K'\log\log\log T}-1\Big)\log T-(\log\sqrt{2}+1+\log C_1(T)+2\log\mathscr{C}_2)\frac{\log\log T}{\log\log\log T}+\frac32\log\log T\\&\qquad+\frac12\log\log\log T-3\frac{(\log\log T)(\log\log\log\log T)}{\log\log\log T}-\frac12\log\log\log\log T\Big)\\&\ll\exp(-(1-\varepsilon')\log T)\end{aligned}$$

f或当T充分大时。因此，我们得出结论，(9.15)右端的第一项为

$$\ll\exp(-(1-\varepsilon')\log T)\tag{9.16}$$

当T充分大时。

现在，我们估计 (9.15) 右边的第二项。由 (9.14) 可知，(9.15) 右边的第二项为

$$\begin{aligned}(9.17)\qquad &\ll \sum_{k\le \mathfrak{N}/2} \frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{T}\\ &+\sum_{k\le \mathfrak{N}/2} \frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!k^2}{k!2^k}\frac{1}{(\log\log T)^2}+\sum_{k\le \mathfrak{N}/2} \frac{1}{(2k)!}\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^2 2^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k}.\end{aligned}$$

(9.17) 中的第一项由 (7.43) 和 (9.7) 得出：

$$(9.18)\qquad \sum_{2k\le \mathfrak{N}} \frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{k!2^k}\frac{\|\mathbf{u}\|_2^{2k}\kappa_2^{k-1}(k-1)k}{T} \ll \exp(-(1-\varepsilon')\log T)$$

当 T 充分大时。(9.17) 中的第二项满足与 (7.49) 相同的估计，因为该级数收敛。对于第三项，将 (9.6) 代入 (7.52)，得到

$$(9.19)\qquad \sum_{k\le \mathfrak{N}/2} \frac{1}{(2k)!}\frac{((2k)!)^2k}{(k!)^2 2^k}\frac{T^{2k/(K'\log\log T)}}{T(\log\log T)^k} \ll \frac{T^{\mathfrak{N}/K'(\log\log T)}}{T} \ll \exp(-(1/2-\varepsilon')\log T)$$

当 T 充分大时。

最后，我们可以汇总这些估计。由 (9.8)、(9.10)、(9.11) 和 (9.13)，可得

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1))]-\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N))]\Big|\\ &\le \sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|+\exp\Big(-\frac{(\log\log T)}{(\log\log\log T)}\Big)\\ &+\sqrt{N}\exp\Big(-(1-\varepsilon')\frac{(\log\log T)(\log\log\log\log T)}{\log\log\log T}\Big)+\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\log\log T}{\log\log\log T}\Big)+\frac{N}{\log T}\\ &\ll \sum_{n\le\mathfrak{N}}\frac{1}{n!}\Big|\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_T^1)^n]-\mathbb{E}[(\mathbf{u}\cdot\tilde{\mathbf{Z}}_N)^n]\Big|+\exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\log\log T}{\log\log\log T}\Big).\end{aligned}$$

最后，由 (9.16)、(9.18)、(7.49) 和 (9.19)，证明即告完成。 □

现在，我们将陈述并证明当前情形下命题 3.6 的对应结论。此外，对N加以限制的原因将在证明过程中变得清楚。

命题 9.2。 设 $N = 1,2,3$。假设对所有 T， $\Delta(T) = 0 = \delta(T)$。令$\mathbf{R}^1$ T 和 $\tilde{\mathbf{Z}}_N$与引理 *9.1* 中相同。则对于充分大的 T，有

$$d_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}_T^1,\tilde{\mathbf{Z}}_N) \ll_{\mathfrak{K},N} \frac{L(\log\log\log T)}{\sqrt{\log\log T}}+\frac{M}{(\log\log T)^{2-N/2-\varepsilon_4}}$$

其中， $\varepsilon_4>0$ 可以任意小。

证明。 与命题 3.6 类似，本证明基于引理 9.1 和 7.9 中建立的结果。令 μ 为由$\mathbf{R}^1$ $_T$诱导的测度，并令 ν 为由 $\tilde{\mathbf{Z}}_N$诱导的测度。按照 (7.59) 和 (7.60) 中的方式进行处理，在 (7.60) 中取$R = \log\log\log T$，可得

$$(9.20)\qquad \mu(([-R,R]^N)^c)+\nu(([-R,R]^N)^c) \ll N\exp((-1/2)(\log\log\log T)^2)$$

当T充分大时。

另一方面，由引理 9.1，取（9.5）中的$F=\|\mathbf{u}\|_1$，可得

$$(RF)^N\|(\hat{\mu}-\hat{\nu})\mathbb{1}_{(-F,F)^N}\|_\infty=\exp\Big(N\Big(\log\frac{\sqrt{1/2}}{C_1(T)\mathscr{C}_2}+\frac{1}{2}\log\log\log T\Big)-2\log\log\log T\Big) \tag{9.21}$$

当T充分大时，其中 $\varepsilon_4>0$ 可以任意小。将 (9.20) 和 (9.21) 代入 (7.58) 右侧，得到

$$\ll_N \frac{L(\log\log\log T)}{\sqrt{\log\log T}}+M\Big(\exp((N/2-2+\varepsilon_4)\log\log\log T)+N\exp((-1/2)(\log\log\log T)^2)\Big), \tag{9.22}$$

由此得到所述估计。 □

有了命题 9.2，我们将证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。设$\mathbf{X}_T$与 (9.1) 中相同，并令 $\tilde{\mathbf{X}}$按 (1.9) 定义，其中 $\mathfrak{K}=\mathrm{I}_N$。此外，假设$\mathbf{X}^0{}_T$、$\mathbf{M}_T$、$\mathbf{Q}_T$、$\mathbf{R}_T$、$\mathbf{R}^1{}_T$以及 $\tilde{\mathbf{Z}}_N$、$_T$均按照当前情形下的命题 3.1–3.5、命题 9.2 和命题 3.7 中的相应方式定义。于是，根据三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T,\tilde{\mathbf{X}})&\ll d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T,\mathbf{X}_T^0)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{X}_T^0,\mathbf{M}_T)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{M}_T,\mathbf{Q}_T)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{Q}_T,\mathbf{R}_T)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}_T,\mathbf{R}_T^1)+d_{\mathscr{D}}(\mathbf{R}_T^1,\tilde{\mathbf{Z}}_T)+d_{\mathscr{D}}(\tilde{\mathbf{Z}}_T,\tilde{\mathbf{X}})\\&\ll\frac{LN(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}}+\Big(\frac{LN}{\sqrt{\log\log T}}+MN(\log\log T)^{-K/K'}\Big)+N(L+M)(\log\log T)^{-80}\\&\quad+\frac{LN}{\sqrt{\log\log T}}+L\sqrt{N}\frac{\sqrt{1+\log\log\log T}}{\sqrt{\log\log T}}+\frac{L(\log\log\log T)}{\sqrt{\log\log T}}+\frac{M}{(\log\log T)^{2-N/2-\varepsilon_4}}\\&\quad+M(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}.\end{aligned}$$

对于$KK'\geq\frac{3}{2}$，$MN(\log\log T)^{-K}/K'$比$M(\log\log T)^{2-N/2-\varepsilon_4}$趋于零的速度更快，对任意可能的$N$均成立。此外，当$N=2$时，我们取 $\varepsilon_4=\varepsilon+\varepsilon_3$使得$M(\log\log T)^{2-N/2-\varepsilon_4}=M(\log\log T)^{-1+\varepsilon+\varepsilon_3}$，从而完成证明。□

致谢

作者感谢 Guan-Yu Chen、Nathan Ng、Jia-Han Shih 和 Guan-Ru Yu 提供有益的讨论和建议。

参考文献

[1] L.-P. Arguin、D. Belius 和 P. Bourgade：随机酉矩阵特征多项式的最大值。《数学物理通讯》**349** (2017), 703-751。[2] P. Billingsley：《概率与测度》。第3版，威利概率与数理统计丛书，约翰·威利父子公司，纽约，1995。[3] P. Bourgade：ζ函数零点的介观涨落。《概率论及相关领域》 **148** (2010), 479-500。[4] G. Casella 和 R. L. Berger：《统计推断》。沃兹沃思与布鲁克斯/科尔统计与概率丛书，沃兹沃思与布鲁克斯/科尔高级图书与软件，太平洋格罗夫，加利福尼亚州，1990。[5] V. Chandee：黎曼ζ函数平移值的相关性。《季刊数学杂志》 **62** (2011), 545-572。[6] J. Chang、X. Chen 和 M. Wu：高维相依数据的中心极限定理。《伯努利》 **30** (2024), 712-742。[7] L. H. Y. Chen 和 Q.-M. Shao：局部依赖下的正态近似。《概率年刊》 **32**(2004), 1985-2028。[8] P. H. Diananda：m-相依变量的中心极限定理。《剑桥哲学学会会刊》 **51** (1955), 92-95。[9] C.-G. Esseen：分布函数的傅里叶分析：拉普拉斯-高斯分布的数学研究。《数学学报》 **77**(1945), 1-125。

[10] X. Fang 和 Y. Koike：具有凸集和球上四阶矩误差界的大维中心极限定理。《应用概率年刊》34 (2024), 2065-2106。[11] F. Götze：多元中心极限定理的收敛速率。《概率年刊》19 (1991), 724-739。[12] G. T. Gilbert：正定矩阵与西尔维斯特判据。《美国数学月刊》98 (1991), 44-46。[13] A. J. Harper：用斯坦方法进行分布近似，为 Erd˝os-Kac 定理给出的两个新证明及其收敛速率界。《剑桥哲学学会会刊》147 (2009), 95 - 114。[14] T. Hida 和 M. Hitsuda：《高斯过程》。由作者从1976年日文原版译出，《数学专著译丛》120，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993。[15] W. Hoeffding 和 H. Robbins：相依随机变量的中心极限定理。《杜克数学杂志》15 (1948), 773–780。[16] P.-H. Hsu 和 P.-J. Wong：狄利克雷 L 函数的塞尔伯格中心极限定理。《波尔多数论杂志》32 (2020), 685-710。[17] P.-H. Hsu 和 P.-J. Wong：平移狄利克雷L函数与二次域戴德金 ζ 函数的对数相关。《数学论坛》(2025)，在线发表。https://doi.org/10.1515/forum-2023-0224。[18] S. Janson、L. Pratelli 和 P. Rigo：m-相依随机变量中心极限定理的定量界。《拉丁美洲概率与数理统计杂志 ALEA》21 (2024), 245-265。[19] Y. Lamzouri、S. Lester 和 M. Radziwiłł：黎曼ζ函数分布的差异界及其应用。《数学分析杂志》139 (2019), 453-494。[20] H. L. Montgomery 和 R. C. Vaughan：《乘法数论 I：经典理论》，剑桥高等数学研究丛书97，剑桥大学出版社，剑桥，2007。[21] N. Ng、Q. Shen 和 P.-J. Wong：黎曼ζ函数的平移矩。《加拿大数学杂志》76 (2024), 1556-1586。[22] S. Orey：m-相依随机变量的中心极限定理。《杜克数学杂志》25 (1958), 543–546。[23] M. Radziwiłł 和 K. Soundararajan：$\log|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$的塞尔伯格中心极限定理。《数学教学》63 (2017), 1-19。[24] M. Raič：具有显式常数的多元贝里-埃森定理。《伯努利》25 (2019), 2824-2853。[25] V. V. Rane：关于狄利克雷 L 级数的近似函数方程。《数学年刊》264 (1983), p. 137-145。[26] A. Roberts：塞尔伯格中心极限定理的多元收敛速率。《应用概率年刊》34 (2024), 3348- 3369。[27] A. Roberts：《解析数论中 L 函数的极限定理》。博士论文，纽约市立大学，美国，2024。[28] A. Roberts：黎曼猜想下塞尔伯格中心极限定理的收敛速率。《组合与加法数论》第六卷，389-402。[29] E. Sakman 和 C. Webb：黎曼ζ函数与高斯乘法混沌：临界线上的统计。《概率年刊》48 (2020), 2680-2754。[30] V. V. Sazonov：关于多维中心极限定理。《Sankhy¯a》A辑30 (1968), 181-204。[31] A. Selberg：对黎曼ζ函数理论的贡献。《自然科学数学档案》48 (1946), 89-155。[32] A. Selberg：关于一类狄利克雷级数的新旧猜想与结果。阿马尔菲解析数论会议论文集（迈奥里，1989），第367-385页。萨莱诺大学，萨莱诺，1992。[33] K.-M. Tsang：黎曼ζ函数值的分布。博士论文，普林斯顿大学，美国，1984。[34] S. Vihko：临界线上的狄利克雷 L 函数与乘法混沌。预印本，https://arxiv.org/abs/2506. 16115。
（许博涵）国立中山大学应用数学系，台湾高雄市。电子邮箱：phsu2@math.nsysu.edu.tw（黄鹏杰）国立中山大学应用数学系，台湾高雄市。电子邮箱：pjwong@math.nsysu.edu.tw