arXiv:2601.02786v1 [math.FA] 6 Jan 2026

勒贝格-博赫纳空间上的近似毕尔霍夫-詹姆斯正交保持映射

MOHIT 和 Ranjana Jain

摘要： 本文研究了向量值可积函数空间中 Koldobsky-Blanco-Turnˇsek 定理（即性质 P）的一个近似版本。更准确地说，我们证明，在关于 μ 和巴拿赫空间 X 的某些条件下，勒贝格-博赫纳空间 $L^p(\mu, X)$，$(1 \leq p < \infty)$ 不具有性质 P。

1. 引言

比尔克霍夫–詹姆斯正交性（简称 B-J 正交性）在赋范空间几何的研究中发挥着重要作用。Koldobsky [7]，于 1993 年，以及 Blanco 和 Turnˇsek [1]，于 2006 年，利用 B-J 正交性的概念刻画了巴拿赫空间上的等距映射（分别针对实数域和复数域）。特别地，他们证明了，巴拿赫空间上任何保持 B-J 正交性的线性算子都必须是等距映射的数乘。这项研究后来进一步延伸到了某些巴拿赫空间的几何非线性刻画[13, 14, 15]。除此之外，研究人员还研究了 Koldobsky-Blanco-Turnˇsek 定理的若干改进（参见 [9, 12]）。

赋范空间 x 中的元素 X，定义在 $\mathbb{F}$（$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）上，若对所有 $\alpha \in \mathbb{F}$ 都有 $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$，则称元素 x 与 $y \in X$ 正交。后来，Chmieli´nski[3] 引入了 B-J 正交性的近似形式。对于 $\epsilon \in$（0，1），如果满足以下不等式，则称元素 $x \in X$ -近似 ***B-J*** 正交于 $y \in X$（记作 $x \perp_{BJ}^{\epsilon} y$）：

$$\|x + \alpha y\|^2 \geq \|x\|^2 - 2\epsilon\|x\|\|\alpha y\|, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{F}.$$

近期，Mandal 等人[10] 提出了巴拿赫空间上线性算子保持正交性的近似版本。更明确地说，如果定义在 X 上的任意保持近似 B-J 正交性的有界线性算子都是等距映射的数乘，则称巴拿赫空间 X 具有性质 P。Mandal 等人证明，对于 $n > 2$，空间 ℓ_∞^n 以及单位球面为正多边形的二维巴拿赫空间具有性质

2020 数学主题分类。46B20，46B04，46E40，46G10。关键词。近似毕尔霍夫-詹姆斯正交，性质 P，Fr´echet 导数，博赫纳可积函数。第一作者的研究ได้รับ Savitribai JyotiraoPhule 单女童奖学金资助，资助文件编号为 F.No. 82-7/2022(SA-III)。

P。他们还证明，ℓ^p，$1 \leq p < \infty$，即绝对 p可和的实值序列空间，不具有性质 P。

本文旨在探讨勒贝格–博赫纳空间$L^p(\mu, X)$ $1 \leq p < \infty$的性质 P，这些空间由向量值可积函数组成。我们给出了向量值绝对可和序列空间 $\ell^1(X)$中非零元素的支撑泛函，以及 $L^1(\mu, X)$的支撑泛函的描述。此外，我们在 $L^p(\mu, X)$ $1 < p < \infty$上定义了一个半内积，其中 μ 是完备正测度，且 X 的范数是 Fr´echet 可微的。这些结果有助于我们证明，空间 $\ell^1(X)$和 $L^p(\mu, X)$ $1 \leq p < \infty$不具有性质P。

2. 预备知识

本节给出一些后续研究所需的定义和结果。

定义 2.1. [10, 定义 1.2] 称定义在 $\mathbb{F}$ 上的巴拿赫空间 X 具有性质 P，如果存在一个 $\epsilon \in (0, 1)$，使得任意保持 ϵ-近似正交性的有界线性算子 $T : X \to X$（即，对于任意 $x, y \in X, x \perp_{BJ} y \implies T(x) \perp^{\epsilon}_{BJ} T(y)$）都必须是等距映射的数乘。

显然，性质 P 可以看作 Koldobsky-Blanco-Turnˇsek 定理的一个近似版本。

显然，James 判据是 B-J 正交性的重要工具。接下来，我们给出一个类似的结果，用于刻画巴拿赫空间中的 ϵ-近似 B-J 正交性。

定理 2.2。 [4, 定理 2。3] 设 X 为实巴拿赫空间，且 $x, y \in X$。那么，对于 $\epsilon \in [0, 1)$， $x \perp^{\epsilon}_{BJ} y$ 当且仅当存在一个有界线性泛函，使得 $\|T\| = 1$, $T(x) = \|x\|$ 以及 $|T(y)| \leq \epsilon \|y\|$。此外，对于复巴拿赫空间，逆命题同样成立。

为了推广赋范空间中的内积，Giles[5]在赋范空间中引入了半内积的概念。

定义 2.3. [5] 如果对任意 x， y， $z \in X$ 和 α， $\beta \in \mathbb{F}$，以下条件均成立，则称映射 $[\cdot] : X \times X \to \mathbb{F}$ 是 X 上的半内积：

(1) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$,

(2) $[x, \alpha y] = \bar{\alpha}[x, y]$, **(3)** $|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$, **(4)** $[x, x] = \|x\|^2$。

定义 2.4. 对于测度空间 (S, μ) 和巴拿赫空间 X （实数或复数），勒贝格–博赫纳空间 $L^p(\mu, X)$ $1 \leq p < \infty$定义为

$$L^p(\mu, X) := \{f : S \to X | \ f \text{ is strongly measurable and } \int_S \|f(s)\|^p \, ds < \infty\},$$

其中几乎处处相等的函数视为同一函数。

定义 2.5. 若存在 $f \in X^*$，使得范数函数 $\|\cdot\|$ 在 X 上于 $0 \neq x \in X$ 处*Fr´échet* 可微，则称其为

$$\lim_{h\to 0} \frac{\big|\|x+h\| - \|x\| - f(h)\big|}{\|h\|} = 0.$$

若范数函数在每个非零点处 Fr´échet 可微，则称其为*Fr´échet* 可微。

定理 *2.6.* [2]空间 $\ell^1(X)^*$ 与 $\ell^\infty(X^*)$等距同构，同构映射为 $\theta : \ell^\infty(X^*) \to \ell^1(X)^*$，定义为 $(f_n) \mapsto \theta((f_n))$，其中 $\theta((f_n))((y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(y_n)$，对所有 $(y_n) \in \ell^1(X)$ 均成立。

定理 *2.7.* [6, 定理 3] 设 (S, Σ, μ) 是一个 σ-有限正测度空间，且 X 是一个巴拿赫空间（实或复），满足 X^* 相对于 μ具有广义拉东-尼科迪姆性质。则 $L^1(\mu, X)^*$ 在映射 $L^\infty(\mu, X^*) \ni G \to \theta(G) \in L^1(\mu, X)^*$下与 $L^\infty(\mu, X^*)$ 等距同构，其中 $\theta(G)(f) = \int G(s)(f(s))\, ds$，对所有 $f \in L^1(\mu, X)$ 均成立。

在本文中，除非另有说明，μ表示完备正测度，X 表示实巴拿赫空间。对于 $f \in L^p(\mu, X)$ $1 \le p < \infty$，我们将集合 $\{s \in S : f(s) = 0\}$ 记为 $Z(f)$；对于巴拿赫空间X中的非零元素 x，$J(x) = \{f \in X^* : \|f\| = 1,\ f(x) = \|x\|\}$ 表示在 x处的支撑泛函集。

3. MAIN RESULTS

本节首先刻画 $\ell^1(X)$ 中非零元素所对应的支撑泛函。

引理 *3.1.* 设 $x = (x_n) \in \ell^1(X)$ 是一个非零元素。那么，当且仅当对于每个 $(y_n) \in \ell^1(X)$，有 $T \in J(x)$，其中 $(F_n) \in \ell^\infty(X^*)_{n\in\mathbb{N}}$，且对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $F_n \in J(x_n)$，$\|F_n\| \le 1$，对于所有满足 $x_n \neq 0$ 的 $n \in \mathbb{N}$。

证明。设 $T \in J(x)$。根据定理 2.6，存在 $(H_n) \in \ell^\infty(X^*)$，使得 $\|(H_n)\|_\infty = 1$且 $T((y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} H_n(y_n)$。现在，$T(x) = \|x\|$，由此可得 $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\|x_n\| - H_n(x_n)) = 0$。由于 $\|H_n\| \le 1$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和$\{n\in\mathbb{N}:\ x_n\neq 0\}X$ 是一个实巴拿赫空间，因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$H_n(x_n) \le \|x_n\|$。于是，$\sum_{\{n\in\mathbb{N}:\ x_n\neq 0\}} (\|x_n\| - H_n(x_n)) = 0$ 意味着只要 $x_n \neq 0$，就有 $H_n(x_n) = \|x_n\|$。因此，对于满足 $x_n \neq 0$ 的 $n \in \mathbb{N}$，我们有，

$$\|H_n\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|H_n(x)|}{\|x\|} \ge \frac{H_n(x_n)}{\|x_n\|} = 1.$$

由此可得 $\|H_n\| = 1$，因此，对于所有满足 $x_n \neq 0$ 的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $H_n \in J(x_n)$。这表明 T 对应于一个序列 $(H_n) \in \ell^\infty(X^*)$，使得若 $x_n \neq 0$，则 $H_n \in J(x_n)$；若 $x_n = 0$，则 $\|H_n\| \leq 1$。

反之，由于 $x = (x_n) \in \ell^1(X)$ 是一个非零元素且 $\|F_n\| = 1$，每当 $x_n \neq 0$ 时，因此 $\|(F_n)\|_\infty = 1$。由此，根据定理 2.6，T 是一个范数为 1 的线性泛函，且 $T((x_n)) = \|(x_n)\|$。证毕。□

利用上述结果，我们证明 Koldobsky-Blanco-Turnˇsek 定理的近似版本在 $\ell^1(X)$ 中不成立。

定理 3.2. 序列空间 $\ell^1(X)$ 不具有性质 *P*。

证明。我们证明，对于每个 $\epsilon \in (0,1)$，存在 $U_\epsilon \in B(\ell^1(X))$，即定义在 $\ell^1(X)$ 上的有界算子空间，其中的算子保留 ϵ- 近似 B-J 正交性，但不是等距映射的数乘。对于 $\epsilon \in (0,1)$，定义 $U_\epsilon : \ell^1(X) \to \ell^1(X)$ 为 $U_\epsilon((x_n)) = ((1-\epsilon)x_1, x_2, ...)$。显然，$U_\epsilon \in B(\ell^1(X))$，且不是等距映射的数乘。

现在，我们断言 U_ϵ 保持 ϵ-近似 B-J 正交性。任取满足 $x \perp_{BJ} y$ 的 $x = (x_n)$ $y = (y_n) \in \ell^1(X)$。根据 James 判据，存在 $T \in J(x)$，使得 $T(y) = 0$。根据定理 3.1，$T : \ell^1(X) \to \mathbb{R}$ 可表示为 $T((z_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F_n(z_n)$，其中 $(F_n) \in \ell^\infty(X^*)$，且 $F_n \in J(x_n)$，对所有满足 $x_n \neq 0$ 的 n 均成立。显然，$T(U_\epsilon(x)) = \|U_\epsilon(x)\|$。为证明该断言，根据[4, 定理 2.3], ，只需证明 $|T(U_\epsilon(y))| \leq \epsilon\|U_\epsilon(y)\|$。为此，考虑，

$$|T(U_\epsilon(y))| = \left|(1-\epsilon)F_1(y_1) + \sum_{n\geq 2} F_n(y_n)\right|.$$

现在，$T(y) = 0$ 给出 $F_1(y_1) = -\sum_{n\geq 2} F_n(y_n)$。因此，

$$\begin{aligned}
|T(U_\epsilon(y))| &= \left| -(1-\epsilon)\sum_{n\geq 2} F_n(y_n) + \sum_{n\geq 2} F_n(y_n)\right| \\
&\leq \epsilon \sum_{n\geq 2} \|y_n\| \\
&\leq \epsilon\left|(1-\epsilon)\|y_1\| + \sum_{n\geq 2}\|y_n\|\right| \\
&= \epsilon\|U_\epsilon(y)\|.
\end{aligned}$$

因此，$U_\epsilon(x) \perp^\epsilon_{BJ} U_\epsilon(y)$，结论得证。 □

可以看出，为了验证性质 P，关于支撑泛函的信息至关重要。因此，为了转向空间 $L^1(\mu, X)$，我们首先推导出 $L^1(\mu, X)$ 中给定非零元素处支撑泛函的一种有用形式。

引理 *3.3.* 设 (S,μ) 是一个 σ-有限测度空间，且 X 是一个巴拿赫空间，使得 X^* 关于 μ 具有广义拉东 - 尼科迪姆性质。设 $f \in L^1(\mu, X)$ 是一个非零元素。若 $T \in L^1(\mu, X)^*$ 是 f 的一个支撑泛函，则 $T\colon\ L^1(\mu, X) \to \mathbb{R}$ 可表示为 $T(g) = \int G(s)(g(s))\, ds$，对所有 $g \in L^1(\mu, X)$ 均成立，其中 $G \in L^\infty(\mu, X^*)$，且 $G(s) \in J(f(s))$ 对几乎处处的 $s \in Z(f)^c$ 均成立。

证明。由于 T 是 f 处的支撑泛函，由定理 2.7，存在 $G \in L^\infty(\mu,\ X^*)$，使得对于所有 $g \in L^1(\mu,\ X)$，都有 $T(g) = \int G(s)(g(s))\, ds$。由于 $T(f) = \|f\|$，我们得到

$$\int_{Z(f)^c} (\|f(s)\| - G(s)(f(s)))\, ds = 0. \tag{1}$$

此外，$\|T\| = 1$ 得出 $\|G\|_\infty = \operatorname{esssup}_{s\in S}\|G(s)\| = 1$，即对于几乎处处的 $s \in S$，$\|G(s)\| \leq 1$。由于 μ 是完备的，我们得到，对于几乎处处的 $s \in Z(f)^c$，$|G(s)(f(s))| \leq \|f(s)\|$。因此，函数 $s \mapsto \|f(s)\| - G(s)(f(s))$ 对于几乎处处的 $s \in Z(f)^c$ 是非负函数，其中 X 为实巴拿赫空间。故由等式 (1)，对于几乎处处的 $s \in Z(f)^c$，有 $G(s)(f(s)) = \|f(s)\|$。因此，对于几乎处处的 $s \in Z(f)^c$，$G(s) \in J(f(s))$。□

定理 3.4。设 (S, Σ, μ) 是一个 σ-有限测度空间，且至少包含两个互不相交、测度有限且为正的可测集。设 X 是一个巴拿赫空间，并且 X^*相对于 μ具有广义拉东-尼科迪姆性质。那么空间 $L^1(\mu, X)$不具有性质 *P*。

证明。取 $A,\ B \in \Sigma$，使得 $0 < \mu(A)\ \ \mu(B) < \infty$，且 $A \cap B \neq \emptyset$。对任意的 $\epsilon \in (0, 1)$，定义 $U_\epsilon\colon\ L^1(\mu, X) \to L^1(\mu, X)$为 $U_\epsilon(f) = (1-\epsilon) f\chi_A + f\chi_{S\setminus A}$，其中 χ_A 表示集合 A对应的示性函数。显然，$U_\epsilon \in B(L^1(\mu, X))$。

注意到 U_ϵ 不是等距映射的数乘。为此，任取 $\alpha \in \mathbb{R}$，并令 $x_0 \in X$ 为一个范数为一的元素。定义函数 $h_\alpha\colon\ S \to X$为 $h_\alpha(s) = \chi_A(s)x_0 + \alpha\chi_B(s)x_0$，则 $h_\alpha \in L^1(\mu, X)$，其中 $\|h_\alpha\| = \mu(A) + |\alpha|\mu(B)$。此外，$U_\epsilon(h_\alpha) = (1-\epsilon)\chi_A x_0 + \alpha\chi_B x_0$，且 $\|U_\epsilon(h_\alpha)\| = (1-\epsilon)\mu(A) + |\alpha|\mu(B)$。假设 U_ϵ 是等距映射的数乘，则存在一个 $c > 0$，使得对所有 $f \in L^1(\mu, X)$，都有 $\|U_\epsilon(f)\| = c\|f\|$。特别地，$\|U_\epsilon(h_\alpha)\| = c\|h_\alpha\|$，由此可得 $c = \frac{(1-\epsilon)\mu(A)+|\alpha|\mu(B)}{\mu(A)+|\alpha|\mu(B)}$，因为 c 取决于标量 α，这就导致矛盾。因此，U_ϵ 不是等距映射的数乘。

现在，我们声称 U_ϵ 保留 ϵ-近似 B-J 正交性。设$f,\ g \in L^1(\mu, X)$ 满足 $f \perp_{BJ} g$。根据 James 判据，存在$T \in L^1(\mu, X)^*$满足 $\|T\| = 1,\ T(f) = \|f\|$且 $T(g) = 0$。由定理 2.7，存在 $G \in L^\infty(\mu, X^*)$，使得 $T(h) = \int G(s)(h(s))\, ds$，对$s$所有 $h \in L^1(\mu, X)$ 均成立。

注意，集合 $K = \{s \in Z(f)^c\colon\ G(s) \in J(f(s))\}$是可测的。为此，写作 $K = K_1 \cap K_2$，其中 $K_1 = \{s \in Z(f)^c\colon\ G(s)(f(s)) = \|f(s)\|\}$且 $K_2 = \{s \in Z(f)^c\colon \|G(s)\| \leq 1\}$。映射 $s \mapsto G(s)(f(s))$ 在 S 上可测，因此在 $Z(f)^c$ 上也可测。此外，$s \mapsto {}_{\|f}{}^{1}(s)\|$在 $Z(f)^c$上可测。综上，映射 $\overline{\psi}\colon s \mapsto {}_{\|f}{}^{1}(s)\| G(s)(f(s))$ 在 $Z(f)^c$上可测。因此，集合$K_1 = \psi^{-1}(\{1\})$是$\overline{\text{可测}}$集。进一步， $G : S \to X^*$ 是强可测的，且 μ是 S 上的完备测度，因此根据引理 10， G是可测的 [8, 。所以，$s \mapsto \|G(s)\|$ 在 $Z(f)^c$ 上可测，由此可知 K_2的可测性。

根据定理 3.3，对于几乎处处的 $s \in Z(f)^c$，有 $G(s) \in J(f(s))$。因此，$\mu(Z(f)^c \setminus K) = 0$，并且我们有

$$\begin{aligned}
T(U_\epsilon(f)) &= \int\limits_{A\cap Z(f)^c} (1-\epsilon)G(s)(f(s))\,ds + \int\limits_{(S\setminus A)\cap Z(f)^c} G(s)(f(s))\,ds \\
&= \int\limits_{A\cap K} (1-\epsilon)G(s)(f(s))\,ds + \int\limits_{(S\setminus A)\cap K} G(s)(f(s))\,ds \\
&= \int\limits_{A\cap K} (1-\epsilon)\|f(s)\|\,ds + \int\limits_{(S\setminus A)\cap K} \|f(s)\|\,ds \\
&= \int\limits_{A\cap Z(f)^c} (1-\epsilon)\|f(s)\|\,ds + \int\limits_{(S\setminus A)\cap Z(f)^c} \|f(s)\|\,ds \\
&= \int\limits_{A} (1-\epsilon)\|f(s)\|\,ds + \int\limits_{S\setminus A} \|f(s)\|\,ds \\
&= \int\limits_{S} \|U_\epsilon(f)(s)\|\,ds = \|U_\epsilon(f)\|.
\end{aligned}$$

此外， $T(g) = \int\limits_A G(s)(g(s))\ ds + \int\limits_{S\setminus A} G(s)(g(s))\ ds = 0$，因此，

$$\begin{aligned}
T(U_\epsilon(g)) &= (1-\epsilon)\int\limits_A G(s)(g(s))\,ds + \int\limits_{S\setminus A} G(s)(g(s))\,ds \\
&= -(1-\epsilon)\int\limits_{S\setminus A} G(s)(g(s))\,ds + \int\limits_{S\setminus A} G(s)(g(s))\,ds \\
&= \epsilon\int\limits_{S\setminus A} G(s)(g(s))\,ds.
\end{aligned}$$

现在， $\|G(s)\| \leq 1$ 对几乎处处的 $s \in S$ 成立，且 μ 是完备的，因此 $\|G(s)\| \leq 1$ 对几乎处处的 $s \in S\setminus A$成立。记 $S \setminus A = M \cup M'$，其中 $M = \{s \in S \setminus A\colon\ \|G(s)\| > 1\}$ 是一个零测度

集。于是,

$$\begin{aligned}
|T(U_\epsilon(g))| &= \epsilon\left|\int_{S\setminus A} G(s)(g(s))\,ds\right| \\
&= \epsilon\left|\int_{M'} G(s)(g(s))\,ds\right| \\
&\le \epsilon\int_{M'} \|G(s)\|\|(g(s))\|\,ds \\
&\le \epsilon\int_{M'} \|g(s)\|\,ds \\
&\le \epsilon\left[(1-\epsilon)\int_{A} \|g(s)\|\,ds + \int_{M'} \|g(s)\|\,ds\right] \\
&= \epsilon\left[(1-\epsilon)\int_{A} \|g(s)\|\,ds + \int_{S\setminus A} \|g(s)\|\,ds\right] \\
&= \epsilon\|U_\epsilon(g)\|.
\end{aligned}$$

因此，再由定理 2.2，$U_\epsilon(f) \perp_{BJ}^{\epsilon} U_\epsilon(g)$，从而完成了该断言的证明。□

最后，我们证明空间 $L^p(\mu, X)$ $1 < p < \infty$ 不满足性质 P。在此之前，我们在 $L^p(\mu, X)$ $1 < p < \infty$上定义一个半内积。注意，如果 X 是光滑巴拿赫空间，那么 $J(x)$只包含一个元素，我们将其记为 $F_{x\circ}$ 注意，对所有 $\alpha \in \mathbb{C}$，均有 $F_{\alpha x} = \frac{\alpha}{|\alpha|} F_{x\circ}$

命题 3.5. 设 (S, Σ, μ) 是一个测度空间，且 X 是定义在 $\mathbb{F}$ 上、其范数 *Fréchet* 可微的巴拿赫空间。那么，对于 $1 < p < \infty$，映射$[\cdot] : L^p(\mu, X) \to \mathbb{F}$ 定义如下

$$[f, g] = \begin{cases} \frac{1}{\|g\|^{p-2}} \int\limits_{Z(g)^c} \|g(s)\|^{p-1} F_{g(s)}(f(s))\,ds; & g \neq 0, \\ 0 & ; \ g = 0 \end{cases}$$

是 L^p（μ， X）上的半内积。

证明。 首先，我们证明映射 $[\cdot]$ 定义良好。为此，任取 $0 \neq f,\ g \in L^p(\mu, X)$。注意，被积函数 $s \mapsto \|g(s)\|^{p-1} F_{g(s)}(f(s))$ 是 $Z(g)^c$ 上的可测函数。为此，定义 $\phi : S \to \mathbb{F}$ 如下:

$$\phi(s) = \begin{cases} \|g(s)\|^{p-1} F_{g(s)}(f(s)); & s \in Z(g)^c, \\ 0 & ; \text{ otherwise.} \end{cases}$$

设 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 为简单可测函数序列，分别几乎处处收敛到f 和 g。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $K_n = \{s \in S : g_n(s) \neq 0\}$，并定义 $\phi_n : S \to \mathbb{F}$ 如下:

$$\phi_n(s) = \begin{cases} \|g_n(s)\|^{p-1} F_{g_n(s)}(f_n(s)); & s \in Z(g)^c \cap K_n, \\ 0 & ; \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们声称，对于几乎处处的 $s \in S$，$\phi_n(s)$ 收敛于 $\phi(s)$。令 $s \in S$ 使得 $\lim_n f_n(s) = f(s)$ 且 $\lim_n g_n(s) = g(s)$。如果 $s \in Z(g)$，那么 $\phi_n(s) = 0 = \phi(s)$。因此，$\lim_n \{\phi_n\}$ 是一个简单可测函数序列，对于几乎处处的 $s \in S$，该序列收敛于 ϕ。如果 $s \in Z(g)^c$，那么 $\phi(s) = \|g(s)\|^{p-1} F_{g(s)}(f(s))$，并且存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq n_0$，$g_n(s) \in K_n$，因为 $\lim_n g_n(s) = g(s)$。因此，根据 [11, 命题3.2], $F_{g_n}(s)$ 收敛于 $F_{g(s)}$，从而 $\lim_n \phi_n(s) = \lim_n \|g_n(s)\|^{p-1} F_{g_n}(s)(f_n(s)) = \phi(s)$。这说明 ϕ 是可测的，因为 μ 是完备测度。因此，$\phi|_{Z(g)^c} : s \mapsto \|g(s)\|^{p-1} F_{g(s)}(f(s))$ 是可测的。

现在，考虑

$$\begin{aligned} |[f,g]| &= \frac{1}{\|g\|^{p-2}} \left| \int\limits_{Z(g)^c \cap Z(f)^c} \|g(s)\|^{p-1} F_{g(s)}(f(s))\, ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\|g\|^{p-2}} \int\limits_{Z(g)^c \cap Z(f)^c} \|g(s)\|^{p-1} \|f(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

由于 $f, g \in L^p(\mu, X)$，因此，$s \mapsto \|f(s)\|$ 属于 $L^p(\mu)$，且 $s \mapsto \|g(s)\|^{(p-1)}$ 属于 $L^q(\mu)$，其中 $q = \frac{p}{p-1}$。因此，由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned} |[f,g]| &\leq \frac{1}{\|g\|^{p-2}} \left(\int\limits_{Z(g)^c \cap Z(f)^c} \|g(s)\|^p\, ds \right)^{\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left(\int\limits_{Z(f)^c \cap Z(g)^c} \|f(s)\|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{\|g\|^{p-2}} (\|g\|^{p-1}) \|f\| \\ &= \|g\| \|f\|. \end{aligned}$$

显然，$[\cdot]$ 对第一个分量是线性的。对于任意 $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ 和 $0 \neq f, g \in L^p(\mu, X)$，考虑

$$\begin{aligned} [f, \alpha g] &= \frac{1}{\|\alpha g\|^{p-2}} \int\limits_{Z(\alpha g)^c} \|\alpha g(s)\|^{p-1} F_{\alpha g(s)}(f(s))\, ds \\ &= \frac{1}{|\alpha|^{p-2} \|g\|^{p-2}} \int\limits_{Z(g)^c} |\alpha|^{p-1} \|g(s)\|^{p-1} \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|} F_{g(s)}(f(s))\, ds \end{aligned}$$

$$= \bar{\alpha}\frac{1}{\|g\|^{p-2}} \int\limits_{Z(g)^c} \|g(s)\|^{p-1} F_{g(s)}(f(s))\, ds$$
$$= \bar{\alpha}[f,g].$$

因此，对于所有 f， $g \in L^p(\mu, X)$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$， $[f, \alpha g] = \bar{\alpha}[f,g]$ 与 $[f,f] = \|f\|^2$。于是， $[\cdot]$ 是 $L^p(\mu, X)$上的半内积。□

定理 3.6. 设(S, Σ, μ) 是一个测度空间，且其中存在两个互不相交的有限正测度可测集；设 X 是定义在 $\mathbb{F}$ 上的巴拿赫空间，其范数 *Fr´echet* 可微。那么，对于 $1 < p < \infty$, $L^p(\mu, X)$ 不具有性质 *P*。

证明。设 A， B 是两个互不相交的可测集，使得 $0 < \mu(A)$ $\mu(B) < \infty$。对于 $\epsilon \in (0, 1)$, 定义 U_ϵ: $L^p(\mu, X) \to L^p(\mu, X)$ 为 $U_\epsilon(f) = f\chi_A + \left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right) f\chi_{S\setminus A}$。显然， $U_\epsilon \in B(L^p(\mu, X))$。

首先，我们断言 U_ϵ 不是等距映射的标量倍数。为此，令 $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$，并设 $x_0 \in X$ 为一个固定的单位向量。反设 U_ϵ 是某个等距映射的标量倍数。那么存在一个 $c > 0$，使得对所有 $f \in L^p(\mu, X)$，均有 $\|T(f)\| = c\|f\|$。特别地，对于 $h_\alpha = x_0(\chi_A + \alpha\chi_B) \in L^p(\mu, X)$，我们有 $\|T(h_\alpha)\| = c\|h_\alpha\|$，即，

$$\left[\mu(A) + |\alpha|^p \left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)\mu(B)\right]^{\frac{1}{p}} = c[\mu(A) + |\alpha|^p \mu(B)]^{\frac{1}{p}},$$

这给出 t at h

$$c = \frac{\left[\mu(A) + |\alpha|^p \left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)\mu(B)\right]^{\frac{1}{p}}}{[\mu(A) + |\alpha|^p \mu(B)]^{\frac{1}{p}}},$$

而这与 c 取决于标量 α矛盾。因此，断言得证。

现在，我们证明 U_ϵ 保留 ϵ-近似 B-J 正交性。设 $0 \neq f$， $g \in L^p(\mu, X)$ 满足 $f \perp_{BJ} g$。为了证明 $U_\epsilon(f) \perp^\epsilon_{BJ} U_\epsilon(g)$，只需证明 $|[U_\epsilon(g) U_\epsilon(f)]| \leq \epsilon\|U_\epsilon(f)\|\|U_\epsilon(g)\|$，根据 $[3, \text{命题 } 3.1]$。考虑，

$$[U_\epsilon(g), U_\epsilon(f)] = \frac{1}{\|U_\epsilon(f)\|^{p-2}} \int\limits_{(Z(U_\epsilon(f)))^c} \|(U_\epsilon(f))(s)\|^{p-1} F_{(U_\epsilon(f))(s)}((U_\epsilon(g))(s))\, ds$$
$$= \frac{1}{\|U_\epsilon(f)\|^{p-2}} \Bigg[\int\limits_{A\cap Z(f)^c} \|f(s)\|^{p-1} F_{f(s)}(g(s))\, ds +$$
$$\int\limits_{(S\setminus A)\cap Z(f)^c} \left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right)^{p-1} \|f(s)\|^{p-1} F_{f(s)}\left(\left(1 - \frac{\epsilon}{p}\right) g(s)\right) ds \Bigg].$$

现在，空间 $L^p(\mu,\ X)$ 是光滑的，X 由于光滑，因此根据 $[5,$ 定理 $3]$,$L^p(\mu,\ X)$ 是一个连续半内积空间。结合 $f \perp_{BJ} g$这一事实可知 $[g,f] = \int \|f(s)\|^{p-1}F_{f(s)}(g(s))\,ds = 0$, $[3,$推论$_{Z(f)^c}$ 3.4]。也就是说，

$$\int\limits_{(S\setminus A)\cap Z(f)^c} \|f(s)\|^{p-1}F_{f(s)}(g(s))\,ds = -\int\limits_{A\cap Z(f)^c} \|f(s)\|^{p-1}F_{f(s)}(g(s))\,ds.$$

因此，

$$\begin{aligned}|[U_\epsilon(g),U_\epsilon(f)]| &= \frac{1}{\|U_\epsilon(f)\|^{p-2}}\left|\left(1-\left(1-\frac{\epsilon}{p}\right)^p\right)\int\limits_{A\cap Z(f)^c\cap Z(g)^c}\|f(s)\|^{p-1}F_{f(s)}(g(s))\,ds\right| \\ &\le \frac{\epsilon}{\|U_\epsilon(f)\|^{p-2}}\int\limits_{A\cap Z(f)^c\cap Z(g)^c}\|f(s)\|^{p-1}\|g(s)\|\,ds \\ &\le \frac{\epsilon}{\|U_\epsilon(f)\|^{p-2}}\|g|_{(A\cap Z(f)^c\cap Z(g)^c)}\|\|f|_{(A\cap Z(f)^c\cap Z(g)^c)}\|^{p-1},\end{aligned}$$

第一个不等式由 $\left[1-\left(1-\frac{\epsilon}{p}\right)^p\right] \le \epsilon$ as $1<p<\infty$ 和 $\epsilon\in(0,1)$ 得出；第二个不等式则如定理 3.5 的证明中所示，由 H¨older 不等式得出。此外，注意到

$$\begin{aligned}\|U_\epsilon(f)\| &= \left[\int\limits_A \|f(s)\|^p\,ds + \int\limits_{S\setminus A}\left(1-\frac{\epsilon}{p}\right)^p\|f(s)\|^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\ge \left[\int\limits_A \|f(s)\|^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\ge \left[\int\limits_{A\cap Z(f)^c\cap Z(g)^c}\|f(s)\|^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f|_{(A\cap Z(f)^c\cap Z(g)^c)}\|.\end{aligned}$$

类似地，$\|U_\epsilon(g)\| \ge \|g|_{(A\cap Z(f)^c\cap Z(g)^c)}\|$，这进一步意味着

$$|[U_\epsilon(g),U_\epsilon(f)]| \le \frac{\epsilon}{\|U_\epsilon(f)\|^{p-2}}\|U_\epsilon(f)\|^{p-1}\|U_\epsilon(g)\| = \epsilon\|U_\epsilon(f)\|\|U_\epsilon(g)\|,$$

至此，证明完成。 □

References

[1] Blanco, A. and Turn˘sek, A. 关于在赋范空间中保持正交性的映射, Proc. Roy. Soc.Edinb. A: Math 136 (2006), 709-716.

[2] Chit¸escu, I. and Sfetcu, R.-U. *K* 上的线性连续算子 ¨*othe-Bochner* 空间, Ann. Fenn. Math. 44 (2017), 945-964.[3] Chmieli´nski, J.关于 ϵ-比尔克霍夫正交性, J. Ineq. Pure and Appl. Math. 6 (2005), 1-16.[4] Chmieli´nski, J., Stypula, T. and W´ojcik, P. 赋范线性空间中的近似正交性及其应用, Linear Algebra Appl. 531 (2017), 305-317.[5] Giles, J.R. 半内积空间的类, Trans. Am. Math. Soc. 129 (1967), 436- 446.[6] Lai, H.-C.*Banach* 函数空间的对偶性与拉东–尼科迪姆性质, Acta Math. Hung. 47 (1986), 45-52.[7] Koldobsky, A.保持正交性的算子是等距映射, Proc. Roy. Soc. Edinb. A: Math 123 (1993), 835-837.[8] Light, W. A. and Cheney, E. W. 张量积空间中的逼近理论, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1985), 1-163.[9] Manna, J., Mandal, K. and Paul, K. 关于正交性的方向保持及其在等距映射中的应用, Bull. Sci. Math. 199 (2025),1-24.[10] Mandal, K., Manna, J., Paul, K.and Sain, D. 关于正交性的近似保持及其在等距映射中的应用, Colloq. Math. 179(1) (2025), 189-211.[11] Mohit and Jain, R. *Banach* 空间的某些张量积中的比尔克霍夫–詹姆斯正交性 *II*, Banach J. Math. Anal. 47 (2024), 1-16.[12] Sain, D., Manna, J. and Paul, K. 关于正交性的局部保持及其在等距映射中的应用, Linear Algebra Appl. 690 (2024),112-131.[13] Tanaka, R.基于比尔克霍夫–詹姆斯正交性的 *Banach* 空间的非线性等价, J. Math. Anal. Appl. 505 (2022), 1-12.[14] Tanaka, R.基于比尔克霍夫–詹姆斯正交性的 *Banach* 空间的非线性等价 *II*, J. Math. Anal. Appl. 514 (2022), 1-19.[15] Tanaka, R.交换 C^*-代数的 *Banach* 空间理论刻画, Proc. Am. Math. Soc., 10 (2023), 208-218.

Mohit, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi, India电子邮箱地址: mohitdhandamaths@gmail.com

Ranjana Jain, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi, India电子邮箱地址: rjain@maths.du.ac.in