arXiv:2601.02791v1 [math.AP] 6 Jan 2026

关于无 D 条件下三维定常等熵纳维–斯托克斯系统的刘维尔型定理

Quansen Jiu、Jie Tan 和 Zhihong Yan

Abstract. 本文建立了定常可压缩纳维–斯托克斯系统的刘维尔型定理。假设存在光滑解 $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$，$3 \le p \le \frac{9}{2}$ 且密度有界，则可得到 $u \equiv 0$。这推广了 Li-Yu 的结果 [8]，去除了狄利克雷条件 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\, dx < \infty$。若 $\frac{9}{2} < p < 6$，则在附加以下条件时，刘维尔型定理成立：关于动量的振荡条件 $\rho u \in \dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$。对于临界情形 $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$，振荡条件可由 $\rho u \in BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$ 替代。我们还给出了莫雷型空间中的结果：$u \in \dot{M}^{s,6}(\mathbb{R}^3)$ 和 $\rho u \in \dot{M}^{q,3}_w(\mathbb{R}^3)$，其中 $2 \le s \le 6$ 和 $\frac{3}{2} < q \le 3$。

引言

三维定常等熵可压缩纳维–斯托克斯方程为

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P(\rho) = \mu \Delta u + (\mu + \lambda)\nabla \operatorname{div} u, \\ \operatorname{div}(\rho u) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\rho \ge 0$ 表示密度，$u = (u_1, u_2, u_3)$表示速度，常数 $\mu > 0$ 和 $\mu + \lambda > 0$ 为黏性系数，压强-密度函数的形式为

$$p(\rho) = A\rho^\gamma \tag{2}$$

其中 $A > 0$，$\gamma > 1$。

近年来，关于定常不可压缩纳维–斯托克斯系统的刘维尔型定理取得了重大进展。Galdi 的专著中给出了一项该方向上的经典结果 [5]，，证明任何光滑解都必须满足 $u \equiv 0$，其条件为衰减条件 $u \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$。正如 Chamorro 等人 [3]所证明的，对于 $3 \le p < \frac{9}{2}$，在较弱的可积性条件 $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$下，同样的结论仍然成立。Seregin [13]，提出了一个重要改进，将衰减条件替换为衰减–振荡条件：$u \in L^6(\mathbb{R}^3) \cap BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$。随后，这一结果得到了推广：Chamorro 等人 [3]引入了一种新的衰减–振荡判据，其形式为

$$u \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap \dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3), \quad \frac{9}{2} < p < 6.$$

最近，Seregin [12] 在莫雷型空间中获得了一个刘维尔型定理，具体而言，在以下条件下

$$u \in \dot{M}^{s,6}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{M}^{q,3}_w(\mathbb{R}^3).$$

关于可压缩纳维–斯托克斯方程组的刘维尔型定理，现有文献相对较少，参见例如 [2, 7, 8]。对于光滑的 D-解（即满足 $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ 的解），D. Chae [2] 在可积性条件 $u \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 下建立了一个刘维尔型定理。随后，D. Li 等人 [8] 证明，任何光滑的 D-解都必须

Date：2026年1月7日。

恒等于零，前提是 $u \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$。这一 $L^{\frac{9}{2}}$条件后来被 Z.-Y. Li 等人 [7], 放宽，他们以适当的洛伦兹空间假设取而代之。然而，据我们所知，此前尚无研究完全去除狄利克雷型正则性条件 $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3$。本文的主要目标是研究不施加此类 D-条件时定常可压缩纳维–斯托克斯方程组的刘维尔型定理。

在我们的第一个定理中，我们将证明在衰减条件下，系统 (1)-(2) 具有刘维尔型性质。

定理1. 设(u, ρ) 是满足 $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ 和 $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 且 $3 \le p \le \frac{9}{2}$ 的(1)-(2) 的光滑解，则 $u = 0$ 和 $\rho =$为常数。

注2. 对于不可压缩情形，*Galdi* 的结果 [5] 在条件 $u \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$下证明了刘维尔定理，该条件可视为此问题的极限函数空间。随后 *Chamorro* 等人扩展了这一结果，证明了在更大的范围 $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ 且满足 $3 \le p \le \frac{9}{2}$ 时该定理成立。在可压缩情形下，*Chae* [2] 证明了满足 $u \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$的 D-解具有刘维尔定理。随后，*Li*等人 [8] 将这一条件放宽为 $u \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$。本文通过完全去除 D-条件，改进了 *Li*等人 [8] 的结果。

一个关键的观察是，对于满足 $\operatorname{div} b = 0$ 的向量场 b，可以将其表示为 $b = \operatorname{div} d$，其中 $d = (d_{ij})$ 是一个反对称矩阵。关于这一表示的更多细节，可参见 Seregin等人 [15] 的工作。基于这一事实，我们称散度为零的向量场 b 属于 $BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$，如果存在一个反对称矩阵 $d \in BMO(\mathbb{R}^3)$，使得 $b = \operatorname{div} d$。此外，负指标齐次Besov空间可按 Bahouri等人 [1] 所述进行刻画：

$$\dot{B}^q_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3) = \Big\{ f \in \mathcal{S}' \,:\, \|f\|_{\dot{B}^q_{\infty,\infty}} = \sup_{t>0} t^{-q/2} \|h_t * f\|_{L^\infty} < \infty \Big\}, \quad q < 0,$$

其中 h_t 表示时刻 t 的热核。

定理 3. 假设 (u, ρ) 是系统 (1)-(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个光滑解。

(1) 若 $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$ 且 $\rho u \in BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$，则 $u = 0$ 和 $\rho =$ 为常数。*(2)* 若 $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ 且 $\rho u \in \dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$，其中 $\frac{9}{2} < p < 6$，则 $u = 0$ 和 $\rho =$ 为常数。

注4. 对于不可压缩情形，*Seregin* [13] 首次在端点条件 $u \in L^6(\mathbb{R}^3) \cap BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$下证明了一个刘维尔定理。此结果后来被推广到更大的类

$$u \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap \dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3), \quad 3 \le p \le \frac{9}{2}.$$

在可压缩情形中，向量场 ρu散度为零。因此，自然应直接对动量 ρu 而非仅对速度场施加振荡条件。

对于 $1 < p \le q < \infty$，定义齐次莫雷空间

$$\dot{M}^{p,q}(\mathbb{R}^3) := \Big\{ f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) :\, \|f\|_{\dot{M}^{p,q}(\mathbb{R}^3)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3,\, R>0} R^{3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L^p(B_R(x))} < \infty \Big\},$$

其中， $B_R(x)$ 表示以 x 为中心、半径为 R 的球。如果定义中的强 L^p-范数替换为弱 L^p-范数

$$\|f\|_{L^p_w(B_R(x))} := \sup_{t>0} t \left| \{ y \in B_R(x) : |f(y)| > t \} \right|^{1/p},$$

即可得到弱莫雷空间

$$\dot{M}^{p,q}_{w}(\mathbb{R}^3) := \Big\{ f \in L^p_{w,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) : \ \|f\|_{\dot{M}^{p,q}_{w}(\mathbb{R}^3)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3,\, R>0} R^{3\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L^p_w(B_R(x))} < \infty \Big\}.$$

回顾一下，弱勒贝格空间 $L^{p,\infty}(\Omega)$ 是洛伦兹空间 $L^{p,m}(\Omega)$ 的一个特例（其中 $m=\infty$），其范数定义为

$$\|f\|_{L^{p,m}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{m-1} \big| \{ y\in\Omega : |f(y)| > t \} \big|^{\frac{m}{p}} \, dt \Big)^{\frac{1}{m}}, & \text{if } 1 \le m < +\infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} t \, \big| \{ y\in\Omega : |f(y)| > t \} \big|^{\frac{1}{p}}, & \text{if } m = +\infty. \end{cases}$$

现在陈述我们的主要结果。

定理5. 设(u,ρ) 是在 $\mathbb{R}^3$ 中定常可压缩纳维–斯托克斯方程组的一个光滑解。假设 $u \in \dot{M}^{s,6}(\mathbb{R}^3)$ 且 $\rho u \in \dot{M}^{q,\frac{3}{w}}(\mathbb{R}^3)$，参数满足 $2 \le s \le 6$, $\frac{3}{2} < q \le 3$. 那么 $u \equiv 0$，且 ρ 在整个 $\mathbb{R}^3$ 上为常数。

注6. 由于莫雷型空间的性质，我们看到 $L^6(\mathbb{R}^3)$ 被莫雷空间 $\dot{M}^{s,6}(\mathbb{R}^3)$ 所替代，而空间 $\dot{M}^{q,\frac{3}{w}}(\mathbb{R}^3)$ 与 $BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$ 具有相同的阶。

主要定理的证明

证明。 **[定理 1]的证明**

不失一般性，设 $A=1$. 固定 $R>0$，并选取 $\frac{R}{2} \le \rho < r \le R$。令径向截断函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 满足以下性质:

$$0 \le \phi \le 1, \quad \phi = 1 \text{ in } B_\rho, \quad \phi = 1 \text{ in } B_r^c, \quad |\nabla\phi| \le \frac{c}{r-\rho}, \quad |\nabla^2\phi| \le \frac{c}{(r-\rho)^2},$$

其中 B_r 表示球 $B(0,r) \subset \mathbb{R}^3$。

对于任意 $s>1$，存在常数 $c_0 = c_0(s,\gamma) > 0$ 以及函数 $w \in W^{1,s}_0(B_r)$，使得 $\operatorname{div} w = \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla\phi \cdot \overline{u}$，并且

$$\int_{B_r} |\nabla w|^s \mathrm{d}x \le c_0 \int_{B_r} |\nabla\phi \cdot u|^s \mathrm{d}x \le \frac{c_0}{(r-\rho)^s} \int_{B_R \setminus B_{R/2}} |u|^s \mathrm{d}x. \tag{3}$$

将 $(1)_1$ 乘以 $\phi u - w$，并在 B_r 上对所得结果积分，得到

$$\begin{aligned} &\mu \int_{B_r} \phi |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + (\mu+\lambda) \int_{B_r} \phi |\operatorname{div} u|^2 \mathrm{d}x \\ &\quad = \frac{1}{2} \int_{B_r} \rho |u|^2 u \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x + \int_{B_r} \rho (u\cdot\nabla u)\cdot w \mathrm{d}x \\ &\quad\quad + \int_{B_r} (\nabla\rho^\gamma \cdot w - \gamma\phi\rho^{\gamma-1} u\cdot\nabla\rho) \mathrm{d}x - \mu \int_{B_r} \nabla\phi \cdot (\nabla u \cdot u) \mathrm{d}x \\ &\quad\quad - \mu \int_{B_r} \nabla u : \nabla w \mathrm{d}x + (\mu+\lambda) \int_{B_r} \operatorname{div} u (\operatorname{div} w - u\cdot\nabla\phi) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4}$$

通过分部积分可得

$$\int_{B_r} \rho (u\cdot\nabla u)\cdot w \mathrm{d}x = -\int_{B_r} \rho u \cdot (\nabla w \cdot u) \mathrm{d}x. \tag{5}$$

利用恒等式 $\mathrm{div} w = \frac{\gamma}{\gamma-1}\nabla\phi\cdot u$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{B_r}\nabla\rho^\gamma\cdot w\mathrm{d}x-\gamma\int_{B_r}\phi\rho^{\gamma-1}u\cdot\nabla\rho\mathrm{d}x\\&\qquad=-\frac{\gamma}{\gamma-1}\int_{B_r}\phi\rho u\cdot\nabla(\rho^{\gamma-1})\mathrm{d}x-\int_{B_r}\rho^\gamma\mathrm{div}w\mathrm{d}x\\&\qquad=\frac{\gamma}{\gamma-1}\int_{B_r}\rho^\gamma u\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x-\int_{B_r}\rho^\gamma\mathrm{div}w\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\tag{6}$$

通过直接计算，由 w 的性质可得

$$(\mu+\lambda)\int_{B_r}\mathrm{div}u(\mathrm{div}w-u\cdot\nabla\phi)\mathrm{d}x=-\frac{(\mu+\lambda)}{\gamma-1}\int_{B_r}\mathrm{div}u\cdot(u\cdot\nabla\phi)\mathrm{d}x.\tag{7}$$

将 (5)-(7) 代入 (4)，可得

$$\begin{aligned}&\mu\int_{B_r}\phi|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\mu+\lambda)\int_{B_r}\phi|\mathrm{div}u|^2\mathrm{d}x\\&\qquad=\frac{1}{2}\int_{B_r}\rho|u|^2u\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x-\int_{B_r}\rho u\cdot(\nabla w\cdot u)\mathrm{d}x\\&\qquad-\mu\int_{B_r}\nabla\phi\cdot(\nabla u\cdot u)\mathrm{d}x-\mu\int_{B_r}\nabla u:\nabla w\mathrm{d}x\\&\qquad-\frac{(\mu+\lambda)}{\gamma-1}\int_{B_r}\mathrm{div}u\cdot u\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.\end{aligned}\tag{8}$$

显然

$$|I_1|\le\frac{c\|\rho\|_{L^\infty}}{r-\rho}\|u\|^3_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})}.\tag{9}$$

将不等式 (3) 应用于 $s=3$ 的情形，可得

$$|I_2|\le c\|\rho\|_{L^\infty}\int_{B_r}|u|^2|\nabla w|\mathrm{d}x\le\frac{c\|\rho\|_{L^\infty}}{r-\rho}\|u\|^2_{L^3(B_R)}\|u\|_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})},\tag{10}$$

and

$$|I_3|+|I_4|\le\frac{\mu}{4}\int_{B_r}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{c}{(r-\rho)^2}\|u\|^2_{L^2(B_r\setminus B_\rho)}.\tag{11}$$

由杨氏不等式可得

$$|I_5|\le\frac{\mu+\lambda}{4}\int_{B_r}|\mathrm{div}u|^2\mathrm{d}x+\frac{c}{(r-\rho)^2}\|u\|^2_{L^2(B_r\setminus B_\rho)}.\tag{12}$$

结合（8）—（12）并使用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}(\mu|\nabla u|^2+(\mu+\lambda)|\mathrm{div}u|^2)\mathrm{d}x\le&\frac{1}{4}\int_{B_r}(\mu|\nabla u|^2+(\mu+\lambda)|\mathrm{div}u|^2)\mathrm{d}x\\&+\frac{c}{r-\rho}\left(\|u\|^3_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})}+\|u\|^2_{L^3(B_R)}\|u\|_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})}\right)\\&+\frac{cR}{(r-\rho)^2}\|u\|^2_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})},\end{aligned}\tag{13}$$

其中 $c = c(c_0,\ \mu,\ \lambda,\ \|\rho\|_{L^\infty})$。为方便起见，记

$$\Phi_u(r) = \int_{B_r} (\mu|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)|\mathrm{div} u|^2)\mathrm{d}x,$$

and

$$\kappa_R^1 = c\left(\|u\|^3_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})} + \|u\|^2_{L^3(B_R)}\|u\|_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})}\right),\ \ \kappa_R^2 = cR\|u\|^2_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})}.$$

由能量不等式 (13) 得到

$$\Phi_u(\rho) \le \frac{1}{4}\Phi_u(r) + \frac{\kappa_R^1}{r-\rho} + \frac{\kappa_R^2}{(r-\rho)^2},\quad \text{for any } \frac{R}{2} \le \rho < r \le R. \tag{14}$$

对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $r_k = R2^{-1/k}$，并将其代入不等式 (14)，可得

$$\begin{aligned}\Phi_u(r_k) &\le \frac{1}{4}\Phi_u(r_{k+1}) + \kappa_R^1 R^{-1}(2^{-1/(k+1)} - 2^{-1/k})^{-1} + \kappa_R^2 R^{-2}(2^{-1/(k+1)} - 2^{-1/k})^{-2}\\ &\le \frac{1}{4}\Phi_u(r_{k+1}) + c\kappa_R^1 R^{-1}k^2 + c\kappa_R^2 R^{-2}k^4,\end{aligned}$$

这里用到了以下事实

$$2^{-1/(k+1)} - 2^{-1/k} = 2^{-1/k}(2^{1/k(k+1)} - 1) \ge \frac{c\log 2}{2k^2}.$$

借助迭代论证，可得

$$\Phi_u(r_1) \le \frac{1}{4^k}\Phi_u(r_{k+1}) + c\kappa_R^1 R^{-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{j^2}{4^{j-1}} + c\kappa_R^2 R^{-2}\sum_{j=1}^{k}\frac{j^4}{4^{j-1}}. \tag{15}$$

将 (15) 作为 $k \to \infty$，由于 $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^2}{4^{j-1}} < +\infty$ 且 $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^4}{4^{j-1}} < \infty$，可得到卡乔波利型不等式

$$\begin{aligned}&\int_{B_{R/2}} (\mu|\nabla u|^2+(\mu+\lambda)|\mathrm{div} u|^2)\mathrm{d}x\\ &\qquad\le \frac{c}{R}\left(\|u\|^3_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})} + \|u\|^2_{L^3(B_R)}\|u\|_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})} + \|u\|^2_{L^3(B_R\setminus B_{R/2})}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

对于 $p = 3$，不等式 (16) 的右端在 $R \to \infty$ 时趋于零，于是 $u = 0$。如果$3 < p \le \frac{9}{2}$，则可推得

$$\begin{aligned}&\int_{B_{R/2}} (\mu|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)|\mathrm{div} u|^2)\mathrm{d}x\\ &\qquad\le cR^{3\frac{p-3}{p}-1}\left(\|u\|^3_{L^p(B_R\setminus B_{R/2})} + \|u\|^2_{L^p(B_R)}\|u\|_{L^p(B_R\setminus B_{R/2})}\right)\\ &\qquad\quad + cR^{2\frac{p-3}{p}-1}\|u\|^2_{L^p(B_R\setminus B_{R/2})}.\end{aligned} \tag{17}$$

注意到 $3\frac{p-3}{p} - 1 \le 0$和 $2\frac{p-3}{p} - 1 < 0$。令 $R \to \infty$趋于极限，代入（17）式可得 $u = 0$，$\rho =$常数，因此结论成立。

□

证明。 [**定理 3]的证明第一部分**。类似于恒等式（4），有

$$
\begin{aligned}
&\mu\int_{B_r}\phi|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\mu+\lambda)\int_{B_r}\phi|\mathrm{div}u|^2\mathrm{d}x\\
&\qquad=-\mu\int_{B_r}\nabla u:(u\otimes\nabla\phi)\mathrm{d}x-\mu\int_{B_r}\nabla u:\nabla w\mathrm{d}x\\
&\qquad\quad-\frac{(\mu+\lambda)}{\gamma-1}\int_{B_r}\mathrm{div}u\cdot(u\cdot\nabla\phi)\mathrm{d}x-\int_{B_r}(\rho u\cdot\nabla u)\cdot(u\phi-w)\mathrm{d}x\\
&\qquad=I_3+I_4+I_5+I_6.
\end{aligned}\tag{18}
$$

Du关于 $\rho u\in BMO^{-1}$，存在一个反对称矩阵 $d=(d_{ij})\in BMO$，使得

$$\rho u=\mathrm{div}d=(d_{ij,j}).$$

Stein 中已知 [17] 若 $d\in BMO$，则

$$\Gamma(s)=\sup_{x\in\mathbb{R}^3,r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|d-[d]_{B(x,r)}|^s\right)^{\frac{1}{s}}<\infty,$$

对每个 $1\le s<\infty$，其中 $[d]_{B(x,r)}$ 是 $B(x,\ r)$ 上 d 的平均值。

对于 $s>2$，有

$$
\begin{aligned}
|I_6|&=\left|\int_{B_r}\bar{d}_{ij,j}u_{m,i}(u_m\phi-w_m)\mathrm{d}x\right|\\
&\le\int_{B_r}|\bar{d}_{ij}u_{m,i}u_m\phi_{,j}|\mathrm{d}x+\int_{B_r}|\bar{d}_{ij}u_{m,i}w_{m,j}|\mathrm{d}x\\
&\le cR^{\frac{3s-6}{2s}}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}(\|\nabla w\|_{L^s(B_r)}+\frac{1}{r-\rho}\|u\|_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})})\Gamma\left(\frac{2s}{s-2}\right)\\
&\le\frac{cR^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}\|u\|_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})}\Gamma\left(\frac{2s}{s-2}\right),
\end{aligned}\tag{19}
$$

¯其中逗号后的下标表示导数，我们记 $d=d-[d]_{B_r}$。对于其他项，可得

$$|I_3+I_4+I_5|\le\frac{cR^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|u\|_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})}\left(\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}+\|\mathrm{div}u\|_{L^2(B_r)}\right).\tag{20}$$

结合（18）—（20）可得

$$
\begin{aligned}
&\mu\int_{B_r}\phi|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\mu+\lambda)\int_{B_r}\phi|\mathrm{div}u|^2\mathrm{d}x\\
&\qquad\le\frac{cR^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|\mathrm{div}u\|_{L^2(B_r)}\|u\|_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})}+\frac{c(s)R^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}\|u\|_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})}.
\end{aligned}
$$

根据杨氏不等式，可得

$$\Phi_u(\rho)\le\frac{1}{4}\Phi_u(r)+c(s)\frac{R^{\frac{3s-6}{s}}}{(r-\rho)^2}\|u\|^2_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})},$$

经过适当迭代，可推出卡乔波利型不等式

$$\mu\int_{B_{R/2}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\mu+\lambda)\int_{B_{R/2}}|\mathrm{div}u|^2\mathrm{d}x\le c(s)R^{\frac{s-6}{s}}\|u\|^2_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})}.$$

取 $s=6$ 并令 $R\to\infty$趋于极限，我们便完成了第一部分的证明。

第二部分的证明。$|I_3+I_4+I_5|$ 的估计与第一部分证明中的估计相同，但项 I_6 的处理不同。

由于向量 ρu 是散度为零的，因此有

$$\Delta(\rho u)=-\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}(\rho u)+\nabla\mathrm{div}(\rho u)=-\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}(\rho u).$$

记 $v=(-\Delta)^{-1}\mathrm{curl}(\rho u)$，容易验证

$$\mathrm{curl}v=(-\Delta)^{-1}(\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}(\rho u))=(-\Delta)^{-1}(-\Delta(\rho u))=\rho u.$$

设 $v^*=v-v(0)$。那么 $\rho u_i=v^*_{j,\ k}-v^*_{k,\ j}(i=1,\ 2,\ 3)$ 中的 $(ijk)=(123)\in S_3$，即作用于 3 个字母的对称群。将其代入 I_6 并分部积分，根据 Chamorro 等人附录中的结果，[3],我们推得

$$\begin{aligned}I_6&=-\sum_{i,m=1}^{3}\sum_{(ijk)=(123)}\int_{B_r}(\rho u_i)u_{m,i}(\phi u_m-w_m)\mathrm{d}x\\&=-\sum_{i,m=1}^{3}\sum_{(ijk)=(123)}\int_{B_r}(v^*_{j,k}-v^*_{k,j})u_{m,i}(\phi u_m-w_m)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i,m=1}^{3}\sum_{(ijk)=(123)}\int_{B_r}\left(u_mu_{m,i}(v^*_j\phi_{,k}-v^*_k\phi_{,j})+u_{m,i}(v^*_kw_{m,j}-v^*_jw_{m,k})\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此可得

(21)

$$\begin{aligned}|I_6|&\le c\left(\int_{B_r}|u||\nabla u||v^*||\nabla\phi|\mathrm{d}x+\int_{B_r}|\nabla u||v^*||\nabla w|\mathrm{d}x\right)\\&\le\frac{c}{r-\rho}\left(\|u\|_{L^p(B_R\setminus B_{R/2})}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}\|v^*\|_{L^q(B_r)}+\|\nabla w\|_{L^p(B_r)}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}\|v^*\|_{L^q(B_r)}\right)\\&\le\frac{c}{r-\rho}\|u\|_{L^p(B_R\setminus B_{R/2})}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}\|v^*\|_{L^q(B_r)},\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}=1$。由 $\rho u\in\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}$，可得

$$\|v^*\|_{L^q(B_r)}\le cr^{\frac{3}{q}}\left(\|v-v(0)\|_{L^\infty(B_r)}\right)\le cr^{\frac{3}{q}+\frac{3}{p}-\frac{1}{2}}\|v\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{1}{2}}_{\infty,\infty}}\le cR\|\rho u\|_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}}.\tag{22}$$

结合式 (20)–(22) 得

$$\Phi_u(\rho)\le\frac{1}{4}\Phi_u(r)+\frac{cR^{\frac{3p-6}{p}}}{(r-\rho)^2}\|u\|^2_{L^p(B_{2R}\setminus B_R)}+\frac{cR^2}{(r-\rho)^2}\|u\|^2_{L^p(B_{2R}\setminus B_R)}\|\rho u\|^2_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}}.$$

通过适当的迭代，我们推出卡乔波利型不等式

$$\mu\int_{B_{R/2}}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\mu+\lambda)\int_{B_{R/2}}|\mathrm{div}u|^2\mathrm{d}x\le c\left(R^{\frac{p-6}{p}}+\|\rho u\|^2_{\dot{B}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}}\right)\|u\|^2_{L^p(B_{2R}\setminus B_R)}.$$

令 $R\to\infty$ 趋于极限，即可完成定理的第二部分。

□

证明。 [**定理的证明 5**] 令 ϕ, w 其定义见定理1的证明。回顾函数 ϕ 具有以下性质:

$$|\nabla\phi| \le \frac{c}{r-\rho}, \quad \text{and} \quad |\nabla^2\phi| \le \frac{c}{(r-\rho)^2}.$$

根据插值和 Poincar´é 不等式，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla w\|_{L^{2q',2}(B_r)} &\le c\|u\cdot\nabla\phi\|_{L^{2q',2}(B_r)} \le c\|u\cdot\nabla\phi\|_{L^2(B_r)}^{1-\frac{3}{2q}}\|u\cdot\nabla\phi\|_{L^6(B_r)}^{\frac{3}{2q}}\\ &\le \frac{c}{(r-\rho)^{1-\frac{3}{2q}}}\|u\|_{L^2(B_r)}^{1-\frac{3}{2q}}\|\nabla(u\cdot\nabla\phi)\|_{L^2(B_r)}^{\frac{3}{2q}}\\ &\le \frac{c}{r-\rho}\|u\|_{L^2(B_R\setminus B_{R/2})}^{1-\frac{3}{2q}}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}^{\frac{3}{2q}} + \frac{c}{(r-\rho)^{1+\frac{3}{2q}}}\|u\|_{L^2(B_R\setminus B_{R/2})},\end{aligned} \tag{23}$$

and

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{2q',2}(\Omega)} &\le c\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{3}{2q}}\|u\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{3}{2q}}\\ &\le c\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{3}{2q}}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2q}} + c\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{3}{2q}}\|u\|_{\dot{M}^{s,6}}^{\frac{3}{2q}},\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\Omega = B_r$, B_R 或 $B_R\setminus B_{R/2}$，最后一个不等式由 H¨older 不等式得到

$$\|(u)_\Omega\|_{L^6(\Omega)} \le cR^{-\frac{5}{2}}\left|\int_{B_R} u\mathrm{d}x\right| \le CR^{\frac{1}{2}-\frac{3}{s}}\|u\|_{L^s(B_R)} \le \|u\|_{\dot{M}^{s,6}}.$$

回顾定理1证明中的能量恒等式 (8)

$$\begin{aligned}&\mu\int_{B_r}\phi|\nabla u|^2\mathrm{d}x + (\mu+\lambda)\int_{B_r}\phi|\mathrm{div}u|^2\mathrm{d}x\\ &\quad= \frac{1}{2}\int_{B_r}\rho u|u|^2\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x - \int_{B_r}\rho u\cdot(u\cdot\nabla w)\mathrm{d}x - \mu\int_{B_r}\nabla u:(u\otimes\nabla\phi)\mathrm{d}x\\ &\qquad- \mu\int_{B_r}\nabla u:\nabla w\mathrm{d}x - \int_{B_r}\frac{(\mu+\lambda)}{\gamma-1}\mathrm{div}u\cdot u\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x\\ &\quad= I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.\end{aligned} \tag{25}$$

根据洛伦兹空间中的 H¨older 不等式和不等式 (24)，有 at

$$\begin{aligned}|I_1| &\le \frac{c}{r-\rho}\|\rho u\|_{L^{q,\infty}(B_r)}\|u\|_{L^{2q',2}(B_r\setminus B_\rho)}^2\\ &\le \frac{cR^{\frac{3}{q}-1}}{r-\rho}\|\rho u\|_{\dot{M}_w^{q,3}(\mathbb{R}^3)}\|u\|_{L^2(B_R\setminus B_{R/2})}^{2-\frac{3}{q}}(\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}^{\frac{3}{q}}+1).\end{aligned}$$

注意到

$$\|u\|_{L^2(B_R\setminus B_{R/2})}^{2-\frac{3}{q}} \le cR^{\frac{3s-6}{2s}}\|u\|_{L^s(B_R\setminus B_{R/2})}^{2-\frac{3}{q}}, \tag{26}$$

从而得到

$$\begin{aligned}|I_1| &\le c\|u\|_{\dot{M}^{s,6}}^{2-\frac{3}{q}}\frac{R}{r-\rho}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}^{\frac{3}{q}} + c\|u\|_{\dot{M}^{s,6}}^{2-\frac{3}{q}}\frac{R}{r-\rho}\\ &\le \frac{1}{32}\Phi_u(r) + c\left(\frac{R}{r-\rho}\right)^{\frac{2q}{2q-3}} + c\frac{R}{r-\rho},\end{aligned} \tag{27}$$

其中， Φ_u 在定理1的证明中定义。由洛伦兹空间中的H¨older不等式，由(23)和(24)可得

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le \|\rho u\|_{L^{q,\infty}(B_r)}\|u\|_{L^{2q',2}(B_r)}\|\nabla w\|_{L^{2q',2}(B_r)} \\
&\le \frac{cNR^{\frac{3}{q}-1}}{r-\rho}\|u\|^{2-\frac{3}{q}}_{L^2(B_R)}\|\nabla u\|^{\frac{3}{q}}_{L^2(B_r)} + \frac{cNR^{\frac{3}{q}-1}}{r-\rho}\|u\|^{2-\frac{3}{q}}_{L^2(B_R)}\|\nabla u\|^{\frac{3}{2q}}_{L^2(B_r)} \\
&\quad + \frac{cNR^{\frac{3}{q}-1}}{(r-\rho)^{1+\frac{3}{2q}}}\|u\|^{2-\frac{3}{2q}}_{L^2(B_R)}\|\nabla u\|^{\frac{3}{2q}}_{L^2(B_r)} + \frac{cNR^{\frac{3}{q}-1}}{(r-\rho)^{1+\frac{3}{2q}}}\|u\|^{2-\frac{3}{2q}}_{L^2(B_R)} \\
&= I_2^1 + I_2^2 + I_2^3 + I_2^4.
\end{aligned}$$

经过直接计算，可得

$$I_2^i \le \frac{1}{32}\Phi_u(r) + c\left(\frac{R}{r-\rho}\right)^{\kappa_i}, \quad \text{for} \quad i = 1,2,3,4,$$

其中 $\kappa_1 = \frac{2q}{2q-3}$, $\kappa_2 = \frac{4q}{4q-3}$, $\kappa_3 = \frac{4q+6}{4q-3}$ 和 $\kappa_4 = \frac{2q+3}{2q}$。综上上述不等式可得

$$|I_2| \le \frac{1}{8}\Phi_u(r) + c\left(\left(\frac{R}{r-\rho}\right)^{\kappa_1} + \left(\frac{R}{r-\rho}\right)^{\kappa_2} + \left(\frac{R}{r-\rho}\right)^{\kappa_3} + \left(\frac{R}{r-\rho}\right)^{\kappa_4}\right). \tag{28}$$

由于 w 的性质，可得

$$|I_3| \le \frac{cR^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|u\|_{L^s(B_R)}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)} \le \frac{1}{32}\Phi_u(r) + c\left(\frac{R}{r-\rho}\right)^2. \tag{29}$$

and

$$\begin{aligned}
|I_4| + |I_5| &\le cR^{\frac{3s-6}{2s}}\|\nabla w\|_{L^s(B_r)}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)} + \frac{CR^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|u\|_{L^s(B_R)}\|\mathrm{div} u\|_{L^2(B_r)} \\
&\le \frac{cR^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|u\|_{L^s(B_R)}\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}\frac{CR^{\frac{3s-6}{2s}}}{r-\rho}\|u\|_{L^s(B_R)}\|\mathrm{div} u\|_{L^2(B_r)} \\
&\le \frac{1}{32}\Phi_u(r) + c\left(\frac{R}{r-\rho}\right)^2.
\end{aligned} \tag{30}$$

结合 (25) 和 (27)-(30)，可得

$$\Phi_u(\rho) \le \frac{1}{4}\Phi_u(r) + cf\left(\frac{R}{r-\rho}\right), \quad \frac{R}{2} \le \rho < r \le R,$$

其中 $c = c(s,\ q,\ \|u\|_{\dot{M}^{s,6}},\ \|\rho u\|_{\dot{M}^{p,3}_w})$ 且 $f(z) = z^{\kappa_1} + z^{\kappa_2} + z^{\kappa_3} + z^{\kappa_4} + z^2 + z$。因此，迭代引理推出卡乔波利型不等式

$$\int_{B_{R/2}} (\mu|\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)|\mathrm{div} u|^2)\mathrm{d}x \le c(s,q,\|\rho u\|_{\dot{M}^{p,3}_w}, \|u\|_{\dot{M}^{s,6}}),$$

这意味着 $u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$。

现在，Sobolev 嵌入表明存在一个常数向量 C ，使得 $u - C \in L^6(\mathbb{R}^3)$。我们断言 $C = 0.$。事实上，如果 $C \neq 0$，显然有

$$\begin{aligned}
R^{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{s}\right)}\|u\|_{L^s(B_R(x))} &\ge R^{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{s}\right)}\|C\|_{L^s(B_R(x))} - R^{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{s}\right)}\|u - C\|_{L^s(B_R(x))} \\
&\ge cR^2 - \|u - C\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \to \infty, \quad \text{as} \quad R \to \infty.
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因为 $u \in \dot{M}^{s,\,6}(\mathbb{R}^3)$。

将 (25) 中的 $r = R$ 和 $\rho = \frac{R}{2}$ 代入，得到

$$\mu \int_{B_R} \phi |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + (\mu+\lambda) \int_{B_R} \phi |\mathrm{div} u|^2 \mathrm{d}x = I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) + I_4(R) + I_5(R). \tag{31}$$

由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned} |I_1(R)| &\le cR^{-1} \|\rho u\|_{L^{q,\infty}(B_R)} \|u\|^2_{L^{2q',2}(B_R \setminus B_{R/2})} \\ &\le cR^{\frac{3}{q}-2} \|u\|^{2-\frac{3}{q}}_{L^2(B_R \setminus B_{R/2})} (\|\nabla u\|^{\frac{3}{q}}_{L^2(B_R \setminus B_{R/2})} + 1) \\ &\le c\|u\|^{2-\frac{3}{q}}_{L^6(B_R \setminus B_{R/2})} (\|\nabla u\|^{\frac{3}{q}}_{L^2(B_R \setminus B_{R/2})} + 1). \end{aligned} \tag{32}$$

使用相同的论证可得

$$\begin{aligned} |I_2(R)| \le c\Big(& \|u\|^{1-\frac{3}{2q}}_{L^6(B_R \setminus B_{R/2})} \|u\|^{1-\frac{3}{2q}}_{L^6(B_R)} \|\nabla u\|^{\frac{3}{q}}_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^6(B_R \setminus B_{R/2})} \|u\|^{1-\frac{3}{2q}}_{L^6(B_R)} \\ & + \|u\|^{1-\frac{3}{2q}}_{L^6(B_R \setminus B_{R/2})} \|u\|^{1-\frac{3}{2q}}_{L^6(B_R)} \|\nabla u\|^{\frac{3}{2q}}_{L^2(B_R)} \\ & + \|u\|_{L^6(B_R \setminus B_{R/2})} \|u\|^{1-\frac{3}{2q}}_{L^6(B_R)} \|\nabla u\|^{\frac{3}{2q}}_{L^2(B_R)} \Big), \end{aligned} \tag{33}$$

and

$$|I_3(R)| + |I_5(R)| \le c\|u\|_{L^6(B_R \setminus B_{R/2})} \|\nabla u\|_{L^2(B_R)}. \tag{34}$$

由 (3) 可知

$$|I_4(R)| \le cR\|\nabla w\|_{L^6(B_R)} \|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \le c\|u\|_{L^6(B_R \setminus B_{R/2})} \|\nabla u\|_{L^2(B_R)}. \tag{35}$$

应用不等式 (32)-(35) 得到 $\lim_{R\to+\infty} I_k(R) = 0$ 对于 $k = 1$，2，3，4，5，这意味着

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + (\mu+\lambda) \int_{\mathbb{R}^3} |div u|^2 dx \\ & \quad = \lim_{R\to\infty} (\mu \int_{B_R} \phi |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + (\mu+\lambda) \int_{B_R} \phi |\mathrm{div} u|^2 \mathrm{d}x) = 0. \end{aligned}$$

由于 $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$，定理5的证明得以完成。 □

利益冲突声明

我们感谢李海亮教授在本研究中给予的诸多有益讨论和持续关注。李海亮的研究部分得到了国家自然科学基金项目（编号：11931010、12226326）以及首都师范大学多学科研究院重点研究项目的资助。Quansen Jiu 部分得到了国家自然科学基金项目（编号：11931010、12061003）的资助。

参考文献

[1] H. Bahouri, J. Chemin, R. Danchin《傅里叶分析与非线性偏微分方程》，施普林格（2011）。[2] D. Chae，关于 $\mathbb{R}^N$中可压缩纳维–斯托克斯方程刘维尔型结果的评述，Non- linearity 25 (5) (2012) 1345-1349。[3] D. Chamorro，O. Jarrin，P.-G. Lemari-Rieusset，勒贝格空间和莫雷空间中的定常纳维–斯托克斯方程的一些刘维尔定理，《亨利·庞加莱研究所年刊 C：非线性分析》。爱思唯尔马松 38 (3) (2021) 689-710。[4] E. Feireisl，《黏性可压缩流体动力学》，牛津大学出版社（2004）。[5] G. Galdi，《纳维–斯托克斯方程数学理论导论：稳态问题》，施普林格科学与商业媒体（2011）。

[6] A. Ladyzhenskaya，《黏性不可压缩流动数学理论》，Gordon and Breach（1969）。[7] Z.-Y. Li，P.-C. Niu，关于定常可压缩纳维–斯托克斯方程刘维尔型定理的札记，Applied Mathematics Letters 144 (2021) 106908。[8] D. Li，X.-W. Yu，关于可压缩纳维–斯托克斯方程的一些刘维尔型定理，Discrete and Continuous Dynamical Systems 34 (11) (2014) 4719-4733。[9] H.-L. Li，L.-Y. Shou，可压缩纳维–斯托克斯–欧拉系统的整体存在性与最优时间衰减率，SIAM J. Math. Anal. 55 (3) (2023) 1810-1846。[10] P. Lions，《流体力学中的数学专题：第2卷：可压缩模型》，牛津大学出版社（1996）。[11] A. Novotny，I. Straskraba，《可压缩流动数学理论导论》，牛津大学出版社（2004）。[12] G. Seregin，稳态纳维–斯托克斯方程的一个刘维尔型定理，Journees equations aux derivees partielles (2016) 1-5。[13] G. Seregin，定常纳维–斯托克斯方程的刘维尔型定理，Nonlinearity 29 (8) (2016) 2191。[14] G. Seregin，关于稳态纳维–斯托克斯方程刘维尔型定理的评述，Algebra Anal 30 (2) (2018) 238-248。[15] G. Seregin，L. Silvestre，V. Sverak，A. Zlatos，关于无散漂移，Journal of Differential Equations 252 (1) (2012) 505-540。[16] E. M. Stein，《奇异积分与函数的可微性》，普林斯顿大学出版社（1970）。[17] E. M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿数学系列 43（1993）。[18] Z.-P. Xin，紧支集密度可压缩纳维–斯托克斯方程光滑解的爆破，Commun. Pure Appl. Math. 51 (3) (1998) 229-240。

Beijing, People's Republic of China
Email address: jiuqs@cnu.edu.cn

Beijing, People's Republic of China
Email address: 2250501015@cnu.edu.cn

Beijing, People's Republic of China
Email address: yzh00620math@163.com