arXiv:2601.02809v1 [math.PR] 6 Jan 2026

齐次超度量空间上的扩散：ALESSANDROFIGÀ-TALAMANCA 的贡献

WOLFGANG WOESS

摘要。Alessandro Figà-Talamanca（1938—2023）是一位颇具影响力的意大利数学家，多年来一直是意大利调和分析学派的学术领军人物。自20世纪70年代末起，他便专注于自由群和树上的调和分析。在科学研究生涯后期，他也开始关注齐次超度量空间上的扩散过程，例如局部域和全不连通阿贝尔群。这与这些空间同树及其边界之间的密切联系有关，尤其涉及通过树上的离散时间游走来构造此类过程。本文对他这部分工作及相关的大量文献作了相当详细的评述。本文旨在收入 Figà-Talamanca 精选论文集，并与此类评论文章一同出版。

1. 引言

本文对 A. Figà-Talamanca 及其合作者的下列文章以及相关文献作出评述。

Figà-Talamanca, A. 1994. 紧超度量空间上的扩散，《非紧李群及其若干应用》（圣安东尼奥，1993），北约高级科学研究所丛书C辑：数学与物理科学，第429卷，Kluwer，多德雷赫特，第157–167页。Baldi, P., E. Casadio Tarabusi, and A. Figà-Talamanca. 2001年. 齐次树和双曲半平面上过程的命中分布所产生的稳定律，《太平洋数学杂志》**197**，第2期，257–273。Del Muto, M. and A. Figà-Talamanca. 2004年.局部紧超度量空间上的扩散，《数学论述》**22**，第3期，197–211。Del Muto, M. and A. Figà-Talamanca. 2006. 全不连通阿贝尔群上的各向异性扩散，《太平洋数学杂志》**225**，第2期，221–229。

Alessandro Figà-Talamanca 晚年的工作涉及超度量空间上的扩散过程，以及通过树上的随机游走对这些过程的描述。相关研究始于 Figà-Talamanca（1994）、（2001）关于紧空间的工作。这两篇论文的主要内容相同。本文主要 refer to 第一篇。[1] Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001）的第一部分在非紧情形下采用了类似的方法，但目标略有不同。两篇主要论文是 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）、（2006）。目前已有

日期：2026年1月6日。2020 数学主题分类号。60B15；35S05、43A90、60J60。关键词和短语。超度量空间、扩散过程、拉普拉斯算子、树的边界、随机游走。[1]第二篇写于第一篇之前不久，原为一次会议迷你课程的讲义，但其论文集晚得多才出版。

大量关于超度量空间上的扩散和拉普拉斯型算子的文献，内容丰富多样，所采用的记号差异很大，且相互引用颇多，但这些引用未必建立在相互阅读的基础之上。作为本文作者，我只是通过 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess（2014）以及 Bendikov、Cygan 和 Woess（2019）相对短暂地参与了这一引人入胜的研究领域，因此将在此尝试勾勒出一幅共同的图景，将 Figà-Talamanca 的上述论文与其他重要工作的大量文献中的一部分联系起来，并将不同的记号和术语转换到同一框架中。由于并不期待每位潜在读者都熟悉超度量空间与树之间的关系，本文的论述相当详细，从基础知识开始。

2. Ultrametric spaces and trees

超度量空间是一个度量空间（$\mathcal{X}$，ρ），它满足的不是三角不等式，而是更强的超度量不等式

$$\rho(x,z) \le \max\{\rho(x,w), \rho(w,z)\}.$$

因此，若 $y \in B(x,\ r)$，即以 x 为中心、半径为 r 的闭球，则 $B(x,\ r) = B(y,\ r)$。闭球要么互不相交，要么其中一个包含另一个。我们总是假设该空间是可分的，且闭球是紧的。这意味着对任意 $x \in \mathcal{X}$，集合

$$\Lambda(x) = \{\rho(x,y) : y \ne x\}$$

在 $(0,\ \infty)$ 中没有聚点，因此 $\Lambda = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \Lambda(x)$ 是可数的。这里我们还假设 $\mathcal{X}$ 没有孤立点。

经典例子是 p-adic 数域，其中 p 是素数。在介绍更多例子之前，我们先说明一个众所周知的事实：超度量空间可以实现为树的边界。关于这一基本等价关系，有许多参考文献，例如 Rammal、Toulouse 和 Virasoro（1986），以及 Figà-Talamanca（1997）。

设 T 是一棵无限局部有限树，其无向边集为 $E = E_T$。我们用 u、v、.....表示其顶点，用 $[u,v] \equiv [v,u]$ 表示边，其中也将 $u \sim v$ 记作邻接关系。顶点 u 的度 $\deg(u)$ 是其邻点的数量。图距离 $d(u,v)$ 是顶点 u 和 v 之间唯一最短路径（测地弧）$\pi(u,v)$ 的长度（边数）。T 中的测地射线是单侧无限路径 $[u_0, u_1, u_2, \dots]$，其中 $u_i \sim u_{i-1}$，且没有顶点重复出现。若两条测地射线的对称差是有限的，即它们仅在有限的初始部分上不同，则称它们等价。T 的一个端是射线的一个等价类，而 T 的所有端组成边界 ∂T，后文记作 $\mathcal{X}$。我们用 x、y、z 等表示 ∂T 的元素。对于每个 $u \in T$ 和 $x \in \partial T$，恰有一条测地射线 $\pi(u,x)$ 从 u 出发并代表 x。

A）紧情形。我们选取一个参考顶点（原点）$o \in T$。对于任意顶点 u，我们将其到 o的图距离记作$|u|$。若 $u \ne o$，则 u' 是 u的前驱，也就是 u在 π上（$o,\ u$）的邻点。若 $x,\ y \in T \cup \partial T$互不相同，则 $x \wedge y$表示π（$o,\ x$）与 $\cap\pi$（$o,\ y$）上的公共顶点中距离 o最远的那个，即，

$$\pi(o,x) \cap \pi(o,y) = \pi(o, x \wedge y).$$

现在我们任取一个实数 $q>1$，并定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0\,, & \text{if } x=y\\ q^{-|x\wedge y|}\,, & \text{if } x\neq y.\end{cases}$$

这使得 $\mathcal{X}=\partial T$ 成为一个紧致可分超度量空间。该度量下的闭球（开紧球）如下：令 $u\in T$，并令

$$\partial T_u=\{x\in\partial T:\pi(o,x)\text{ passes through }u\}.$$

这是闭球 $B(x,\ q^{-n})$，其中 $n=|x|$。特别是，诱导拓扑不依赖于 q的选取，而且还有其他多种方法可以定义具有相同紧开球集合的拓扑等价超度量。我们还可以看到以下情况：如果存在 $u\in T\setminus\{o\}$，使得 $\deg(u)=2$，那么 $\partial T_u=\partial T_{u'}$，因此这个半径为 $q^{-|u|}$ 的球也具有半径 $q^{-|u|+1}$。我们避免这种情况：对于紧情形，我们假设对所有 $u\in T\setminus\{o\}$，$\deg(u)\geq 3$。

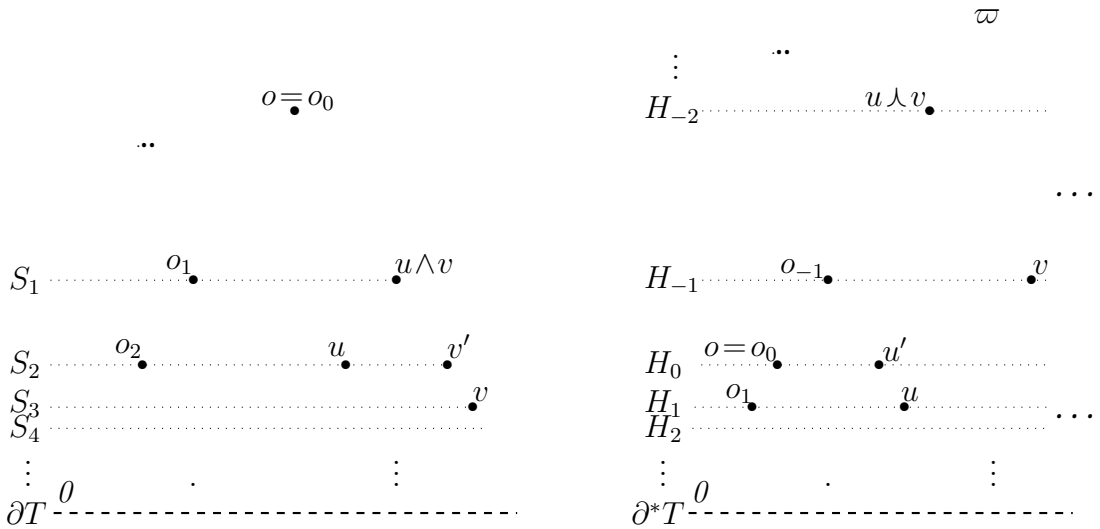
反过来，从一个没有孤立点的紧致超度量空间 $\mathcal{X}$ 出发。考虑集合

$$T=\{u=B(x,r):x\in\mathcal{X},r\in\Lambda(x)\}.$$

它是可数的。设 $r_0=\max\Lambda=\max\Lambda(x)$，使得对每个 x，$o:=B(x,r_0)=\mathcal{X}$。回想一下，球是开紧的。每个球 $u=B(x,r)\in T\setminus\{o\}$ 都有唯一的前驱球$u'=B(x,r')$，其中 $r'=\min\Lambda(x)\cap(r,\infty)$；而 u 的后继数目，即以前驱球为 u 的球的数目，是有限的。它总是 ≥ 2，因为我们假设 $\mathcal{X}$ 没有孤立点。这赋予 T 一棵无限树的结构，其中对所有顶点 $u\neq o$，$\deg(u)\geq 3$。T 的任一端都由一个无限递减球列描述。它们的交集是唯一的一个 $x\in\mathcal{X}$，也是这些球各自的中心。若 $x,y\in\mathcal{X}$互不相同，则在 T中，它们的汇合点 $u=x\wedge y$是 $u=B(x,r)=B(y,r)$，其中 $r=\rho(x,y)$（根据超度量的选取，不一定具有$q^{-|x\wedge y|}$的形式）。

为后续使用，我们从 $\mathcal{X}\equiv\partial T$ 中选取一个元素，记作 0（之后将成为一个单位元），并写作 $\pi(o,0)=[o=o_0,o_1,o_2,\dots]$。

B）非紧情形。我们从上述树 T 出发，并假设对每个顶点都有 $\deg(u)\geq 3$。我们选取一个参考端 $\varpi\in\partial T$，并考虑去心边界



$\partial^* T = \partial T \setminus \{\varpi\}$。对于每个 $x \in \partial^* T$，都存在唯一一条由顶点组成的双无限测地线 $\pi(\varpi, x) = [\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots]$，满足 $u_i \sim u_{i-1}$，使得 $[u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots] = \pi(u_k, x)$ 且 $[u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots] = \pi(u_k, \varpi)$。我们再次固定一个元素 $0 \in \partial^* T$，并将 $\pi(\varpi, 0)$ 中的元素记为 o_k、 $k \in \mathbb{Z}$，特别是 $o = o_0$。

对于不同的 $x, y \in T \cup \partial^* T$，我们用 $x \curlywedge y$ 表示 $\pi(x, \varpi)$ 和 $\pi(y, \varpi)$ 上的第一个公共顶点，也就是说，

$$\pi(x \curlywedge y, \varpi) = \pi(x, \varpi) \cap \pi(y, \varpi).$$

它始终定义良好。此外，对于 $u \in T$，有 $u \curlywedge u = u$。对于任意顶点 u，我们定义其等高线编号 $\mathsf{hor}(u) = d(u, u \curlywedge o) - d(o, u \curlywedge o)$。对于 $k \in \mathbb{Z}$，等高线为 $H_k = \{u \in T : \mathsf{hor}(u) = k\}$。$H_k$ 中的每个元素 u 在 H_{k-1} 中恰有一个邻点；借用紧情形中的术语，我们称之为前驱 u'，并且它在 H_{k+1} 中有 $\mathsf{deg}(u) - 1$ 个后继。再次选取 $q > 1$，并将 $\partial^* T$ 上的度量定义为

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y \\ q^{-\mathsf{hor}(x \curlywedge y)}, & \text{if } x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$

这使 $\mathcal{X} = \partial^* T$ 成为一个非紧、可分且没有孤立点的超度量空间，其中球既开又紧。任意球都具有以下形式：对于一个顶点 u，令 $\partial^* T_u = \{x \in \partial^* T : u \in \pi(\varpi, x)\}$。相对于上述度量，其半径 $\equiv$ 直径 ρ 为 $q^{-\mathsf{hor}(u)}$。同样，也可以使用其他具有相同紧开球族的超度量。

反过来，给定具有上述性质的超度量空间 $\mathcal{X}$。我们再次取所有闭（开且紧）球的集合，并将其作为顶点集。根据距离集 Λ 及其子集 $\Lambda(x)$ 的性质，每个球 B 都包含在一个唯一的、半径 $\equiv$直径更大的球 B' 中，后者是它的前驱；并且由于紧性，它是有限多个球的不交并，而它是这些球的前驱。这就构成了树结构。同样，由于没有孤立点，每个 $x \in \mathcal{X}$ 都是一个递降球列的交集，这些球在树中构成一条测地线，其极限点（射线的等价类）为 x。[2]

为统一紧情形与非紧情形的记号，对于顶点 $u \in T$，我们记

$$\mathsf{q}(u) = \big|\{v \in T : v' = u\}\big|$$

表示向前度；除紧情形下 $u = o$ 时外，它等于 $\mathsf{deg}(u) - 1$，此时 $\mathsf{q}(o) = \mathsf{deg}(o)$。

在基本的非紧例子中，$\mathcal{X} = \mathbb{Q}_\mathsf{p}$（即 p 进数环；当 p 为素数时，它是一个域），其关联树的每个顶点恰有 p 个后继。我们选择 0 作为 $\mathbb{Q}_\mathsf{p}$ 中的单位元。于是，$\mathsf{hor}(x \curlywedge 0)$ 是 $x \in \mathbb{Q}_\mathsf{p} \setminus \{0\}$ 的赋值。对于 (1) 中的超度量，这里选择底数 $q = \mathsf{p}$。

此处讨论的 Figà-Talamanca 的工作涉及这样的情形：空间 $\mathcal{X}$ 是齐次的，即其等距变换群具有传递性。对于关联树而言，这意味着该群在层集上具有传递性；在紧情形下，层集是球面 $S_k = \{u \in T : |u| = k\} (k \in \mathbb{N})$；而在非紧情形下，则是等高线 H_k $(k \in \mathbb{Z})$。特别地，k^{th} 层集中的所有顶点 u 都具有相同的向前度 $\mathsf{q}(u) = \mathsf{q}_k$，并且

[2]我们指出，孤立点也可以处理；它们会作为树的叶出现（度为 1 的顶点），并纳入边界。

作为 $\mathcal{X}$中的球，它们具有相同的直径 $\equiv$ 半径 r_k。等距变换群的任何在 $\mathcal{X}$ 上自由作用的传递闭子群都是局部紧且全不连通的；在非紧情形下，它是一个可数的紧子群族之并（在 T中，这些子群是顶点 o_{-k}、 $k \in \mathbb{N}$的稳定子）。反之，如果 $\mathcal{X}$ 本身就是这样的群，那么关联树在其层集上的度是常数。特别地，存在能够实现任意给定向前度序列 $\mathbf{q}_k \geq 2$的 $Abelian$群。一个重要例子是 Hewitt 和 Ross（1963）中记作 $\Omega_{\mathbf{a}}$ 的非紧群。这里，$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是任意的自然数序列 ≥ 2，关联树满足：在 H_k上，$\mathbf{q}_k = \mathbf{a}_k$。它包含记作 $\Delta_{\mathbf{a}}$的紧子群；就树上的作用而言，该子群是 $\Omega_{\mathbf{a}}$中顶点 $o = o_0$ 的稳定子，并且对应于边界中的 $\partial^* T_o$。当对于所有 $k \in \mathbb{Z}$都有 $\mathbf{a}_k = p \geq 2$ 时，有 $\Omega_{\mathbf{a}} = \mathbb{Q}_{\mathbf{p}}$，即 p进数环中的（加法群）（当 p 为素数时为域），见上文；而 $\Delta_{\mathbf{a}}$ 是 p 进整数的群（环）。

3. 超度量空间上的拉普拉斯算子

Figà-Talamanca（1994）以及 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）、（2006）的主要目的，是通过在相应树上的随机游走来构造适应空间结构的扩散过程，该树的边界被认同为 $\mathcal{X}$。所得结果是一个半群 $(P_t)_{t>0}$ 转移算子，并伴有相对于自然参考测度 m 的热核 $p_t(x, y)$。与该半群相对应的是其无穷小生成元 $-\mathfrak{L}$，其中 $\mathfrak{L}$ 是一个非负定的、通常为无界算子，常被称为 $L^2(\mathcal{X}, \mathrm{m})$ 上的拉普拉斯算子 （或者称为拉普拉斯算子的负算子）。在所有相关研究中， $\mathfrak{L}$都具有纯点谱，其特征函数具有紧支集。因此，为了了解 Del Muto 和 Figà-Talamanca 的构造如何融入更广泛的研究体系，我们首先概述基本的超度量拉普拉斯算子，并比较它们的谱性质。随后，在第 4 节中，我们将考察通过树上的随机游走所采取的方法。

A）层级拉普拉斯算子。在按时间顺序回顾这些进展之前，我们先介绍一种较新的模型。鉴于其简洁性，该模型优雅而简明，即层级拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$，它们是超度量空间上各向同性马尔可夫半群的无穷小生成元的相反数。Bendikov、Grigor′yan 和 Pittet（2012），以及 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess（2014）两篇论文的前两位作者对其进行了系统研究；另见 Bendikov（2018）和 Grigor′yan（2023）的综述及其中的参考文献。无需具体指定度量，我们需要以下内容。

(i) $\mathcal{B}$ 所有开紧球的集合（等价地，树 T）；(ii) 定义在 $\mathcal{X}$ 上的非原子拉东测度 m，使得对每个球都有 $\mathrm{m}(B) > 0$，且当 $\mathcal{X}$ 非紧时，$\mathrm{m}(\mathcal{X}) = \infty$；以及 (iii) 一个选择函数 $C : \mathcal{B} \to (0, \infty)$，使得对每个球 B 及每个 $x \in \mathcal{X}$

$$\lambda(B) = \sum_{\tilde{B}\in\mathcal{B} : B\subseteq\tilde{B}} C(\tilde{B}) < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{B\in\mathcal{B} : x\in B} C(B) = \infty .$$

就 T 而言，在非紧情形下，函数 C 必须沿每条测地线 $\pi(u, \varpi)$ 可求和；而沿每条射线 $\pi(u, x)$ 的和必须为无穷大，其中 $x \in \partial T \equiv \mathcal{X}$ 表示紧情形， $x \in \partial^* T \equiv \mathcal{X}$ 表示非紧情形。

[3]在非紧情形下，有时会去掉假设 $\mathrm{m}(\mathcal{X}) = \infty$。

相应的层级拉普拉斯算子定义在 f 测试函数空间 $\mathrm{Loc_c}(\mathcal{X})$中，该空间由 $\mathcal{X}$ 上所有具有紧支集的局部常值函数构成，其定义为

$$\mathfrak{L}f(x) = \sum_{B\in\mathcal{B}\,:\,B\ni x} C(B)\int_B \big(f(x)-f(y)\big)\,\frac{d\mathsf{m}(y)}{\mathsf{m}(B)}. \tag{2}$$

关于以下内容，参见 Bendikov 和 Krupski（2014）以及 Bendikov、Grigor'yan、Pittet 和 Woess（2014）；请注意，后者文献中的各向同性马尔可夫半群恰好是由层级拉普拉斯算子诱导的半群。

定理3.1。 算子 $\mathfrak{L}$（2）在 $L^2(\mathcal{X},\,\mathsf{m})$上稠密定义且对称，并存在一组完备的、线性无关且紧支撑的特征函数。后者由所有具有前驱球 $D'=B$ 的函数 $f_{B,\,D}$, $D\in\mathcal{B}$ 组成，其定义如下：

$$f_{B,D} = \frac{1}{\mathsf{m}(D)}\mathbf{1}_D - \frac{1}{\mathsf{m}(B)}\mathbf{1}_B\,. \tag{3}$$

相应的特征值为 $\lambda(B)$。此外，当 $\mathsf{m}(\mathcal{X})<\infty$ 时，还需添加函数$\mathbf{1}_X$，其相应特征值为0。

~对于不同的 B，B，函数 $f_{B,\,D}$ 与 $f_{\tilde B,\,\tilde D}$ 正交；而对于固定的 B，有限多个函数 $f_{B,\,D}$ ($D'=B$) 并不正交，当然可以将其正交化。特别地，$\big(\mathfrak{L},\ \mathrm{Loc_c}(\mathcal{X})\big)$ 是本质自伴的。

回想一下这里的树图景：球可以与顶点 $u\in T$ 对应，而与"超出" u 的端点集合对应。在这个意义上，我们也将写作 $f_{B,\,D}=f_{v,\,u}$，其中 $u'=v$，这里 B 对应于 v，而 u 对应于 D。于是，只要指定 $\mathsf{m}(v)$，测度 m 就完全确定，满足

$$\mathsf{m}(v) = \sum_{u\in T:u'=v}\mathsf{m}(u).$$

在齐性情形下，m 的自然选择是在 $\mathcal{X}$ 的等距变换群作用下保持不变的唯一测度（相差一个常数倍）。用树来表示，这个群由所有保持每个层 S_k（即作为集合的 H_k）不变的图自同构组成。我们可以令 $\mathsf{m}(o)=1$ 进行归一化，使得

$$\mathsf{m}(u)=\mathsf{m}_k=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathsf{q}_0\cdots\mathsf{q}_{k-1}}, & \text{if } u\in S_k\,,\ \text{resp. } u\in H_k\,,\ k\ge 0\,,\\[2ex] \mathsf{q}_{-1}\cdots\mathsf{q}_{-k}\,, & \text{if } u\in H_k\,,\ k<0\ \ (\text{non-compact case}).\end{cases} \tag{4}$$

在 $\mathcal{X}$ 上，这当然意味着要为所有 $B\in\mathcal{B}$ 指定 $\mathsf{m}(B)$。当 $\mathcal{X}$ 本身是一个全不连通局部紧群时，m 就是哈尔测度。我们用 $\mathcal{B}_k$ 表示半径相同的球的集合 r_k，它们对应于树中的 k^{th} 层集；用 $B_k(x)$ 表示 $\mathcal{B}_k$ 中包含 $x\in\mathcal{X}$ 的球，尤其是 $B_k=B_k(0)$，它在树中对应于 ∂T_{o_k}，即 $\partial^* T_{o_k}$。对于齐次分层拉普拉斯算子，我们还要求选择函数 C 在群作用下不变，也就是说，它在每个 $\mathcal{B}_k$ 上取常值 C_k。因此，我们得到一个单调的特征值序列[4]

$$\lambda(B)=\lambda_k \ \text{ for } \ B\in\mathcal{B}_k \quad\text{with}\quad 0<\lambda_k<\lambda_{k+1} \quad\text{and}\quad \lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty\,. \tag{5}$$

[4]在某些参考文献中，标记方式是相反的，也就是说，它们用 $-k$ 代替 k。在这里，较大的 k 意味着较小的球和较大的特征值。

在这里， $k \in \mathbb{Z}$ 适用于非紧情形。在紧情形中， $k \in \mathbb{N}_0$，并且还有额外的特征值 $\lambda = 0$，其特征函数为 $\mathbf{1}_{\mathcal{X}}$。此时，对于 $f \in \mathsf{Loc_c}(\mathcal{X})$，齐次分层拉普拉斯算子写作

$$\mathfrak{L} f(x) = \sum_k C_k \big(f(x) - \Pi_k f(x) \big) , \quad \text{where} \quad \Pi_k f(x) = \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k(x)} f \, d\mathsf{m} . \tag{6}$$

注意，按照式 (4) 取归一化测度 m 时， $\mathfrak{L}$ 由特征值序列决定。

据作者所知，上述类型中最早被研究的算子是 Taibleson（1975）在 $\mathbb{F}^n$ 上研究的谱乘子，其中 $\mathbb{F}$ 是一个局部域。为求简便，并且由于这已涵盖所有必要信息，我们只考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_\mathsf{p}$，其中 p 为素数。对于

$$x = \sum_{k \geq m} a_k \, \mathsf{p}^k \in \mathbb{Q}_\mathsf{p} \quad (m \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, ..., \mathsf{p} - 1\}), \tag{7}$$

其 p 进范数为 $|x|_\mathsf{p} = \mathsf{p}^{-m}$，当 $a_m \neq 0$ 时，以及 $|0|_\mathsf{p} = 0$。 $\mathbb{Q}_\mathsf{p}^n$ 上的超度量由范数（到 0的距离） $|(x_1, \dots, x_n)|_\mathsf{p} = \max\{|x_j|_\mathsf{p} \colon \, j = 1, \dots, n\}$ （ $x = (x_1, \dots, x_n)$）诱导。因此，每个开紧球都有 p^n 个后继，所以在关联树中，对所有 k， $\mathsf{q}_k = \mathsf{p}^n$ 。

$\mathbb{Q}_\mathsf{p}^n$ 上的傅里叶变换由任意特征诱导；对于上述的 $x \in \mathbb{Q}_\mathsf{p}$ ，我们可以选择

$$\chi(x) = \exp 2\pi i \{x\}_\mathsf{p} , \quad \text{where} \quad \{x\}_\mathsf{p} = \sum_{k \leq -1} a_k \, \mathsf{p}^k \in \mathbb{Q} \tag{8}$$

是 x的小数部分。阿贝尔群 $\mathbb{Q}_\mathsf{p}^n$ 是自对偶的，对于 $f \in L^1(\mathbb{Q}_\mathsf{p}^n)$，傅里叶变换为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_\mathsf{p}^r} \chi(x \cdot \xi) \, f(x) \, dx ,$$

其中，对于 x， $\xi \in \mathbb{Q}_\mathsf{p}^n$和 dx， $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \cdots + x_n \xi_n$ 指的是哈尔测度 m；参见（4）。 $\widehat{\ }$对于逆变换，我们只需注意，对于 $f \in \mathsf{Loc_c}(\mathcal{X})$， $f(x) = f(-x)$。对于 $\alpha > 0$， *Taibleson* 算子 $\mathfrak{D}^\alpha$ 定义为

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha f}(\xi) = |\xi|_\mathsf{p}^\alpha \widehat{f}(\xi) , \quad f \in \mathsf{Loc_c}(\mathbb{Q}_\mathsf{p}^n).$$

该算子是关于哈尔测度的齐次分层拉普拉斯算子，其特征值序列为 $\lambda_k = \mathsf{p}^{k\alpha}$；参见 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess（2014年）[§5.3]。计算得

命题 3.1。 $\mathfrak{D}^\alpha f(x) = \mathsf{p}^{\alpha} - 1 \quad \mathsf{p}^{-\alpha - n} \int_{\mathbb{Q}_\mathsf{p}^n} \frac{f}{(x) - f(y)|x - y|_\mathsf{p}^{\alpha}} dy.$

对于 $n = 1$，它最初被引入为 p 进分数阶导数算子，Vladimirov 和 Volovich（1989）、Vladimirov、Volovich 和 Zelenov（1994）对此进行了广泛研究；更多参考文献可见 Kochubei（2001）和 Zúñiga-Galindo（2025）的著作。

B）球对称拉普拉斯算子。 在齐性情形中，重点关注在 $\mathcal{X}$ 的等距变换群作用下保持不变的转移半群；该群具有二重传递性（即在距离相等的点对上传递）。我们称它们为球对称

的，因为它们与上文提到的各向同性过程并不完全相同。[5]这意味着存在一个定义在 $\mathcal{X} \equiv \partial T$（分别为 $\equiv \partial^* T$）上的概率测度卷积半群 $(\mu_t)_{t>0}$，它们由起始点为0的转移所确定。这里0 是 $\mathcal{X}$ 的单位元；当该空间被视为阿贝尔群时，情况如上所述；否则见下文的（11）式。 μ_t 必须相对于哈尔测度 m 具有如下形式的密度

$$f_t = \sum_k \frac{c_{k,t}}{\mathsf{m}_k} \mathbf{1}_{B_k} \tag{9}$$

与 $c_{k,t} > 0$ 和 $p_t(x,\cdot) = \delta_x * f_t$。卷积源自阿贝尔群，并不依赖于具体选择哪个群以传递且自由的方式作用。这是 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）采用的观点。另一种观点，如 Figà-Talamanca（1994）所采用的，是考虑整个等距变换群 $\mathfrak{G}$ of $\mathcal{X}$；它是局部紧且全不连通的，可视为保持每个层集不变的树的自同构群。若 $\mathfrak{K}$ 是0的稳定子，则 $\mathcal{X} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$。 $\mathcal{X}$ 上的函数可视为 $\mathfrak{G}$ 上的函数，且这些函数在 $\mathfrak{K}$的左陪集上为常数。因此，$\mathfrak{G}$ 上的卷积可诱导为 $\mathcal{X}$上的函数。现在从这个意义上说，提升到 $\mathfrak{G}$ 的密度 f_t 是双-$\mathfrak{K}$-不变的；又由于 $\mathfrak{G}$ 是二重传递的，双-$\mathfrak{K}$-不变函数的卷积代数是交换的：$(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$ 是一个 Gelfand 对，参见 Lang（1975），或更具体地说，参见 Letac（1982）。这个卷积代数的元素可由一组正交的公共特征函数对角化。这些就是 Gelfand 对的球函数 。关于这些函数的介绍及其计算方法，参见 Letac（1982）。将 Figà-Talamanca（1994）的记号与 (3) 中的记号联系起来，我们有

$$\left(\tfrac{1}{\mathsf{m}_k} - \tfrac{1}{\mathsf{m}_{k-1}}\right) \varphi_k = f_{B_{k-1}, B_k}\,.$$

在非紧情形下， $k \in \mathbb{Z}$。在紧情形下， $k \in \mathbb{N}$，还需要常数球函数 $\phi_0 = \mathbf{1}_{B_0}$，其中 $B_0 = \mathcal{X}$。这是 Figà-Talamanca（1994）研究的情形。首先，在每个层集 S_k上构造一个随机游走，然后令 $k \to \infty$并进行缩放，便可得到定义在 $\mathcal{X} \equiv \partial T$ 上的 $\mathfrak{K}$-不变卷积半群（μ_t）$_{t>0}$。我们将在下一节回到随机游走。目前，我们只考察由转移半群的生成元 $-\mathfrak{L}$ 所生成的结果（非负定）拉普拉斯算子 $\mathfrak{L}$。

命题 3.2。 [Figà-Talamanca（1994）] 对于参数 $q > 1$的任意取值，算子 $\mathfrak{L}$ 满足 $\mathfrak{L}\varphi_k = q^{k-1}\varphi_k$。因此， $\mathfrak{L}$ 是与特征值序列 $\lambda_k = q^k$ 相关联的齐次分层拉普拉斯算子，适用于 $k \geq 0$。[6]

就式(6)的投影 Π_k 而言，

$$\mathfrak{L} f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \big(\Pi_{k+1} f - \Pi_k f\big). \tag{10}$$

对于作为测试函数空间的 $f \in \mathrm{Loc_c}(\mathcal{X})$，可以验证，式（10）与式（6）中齐次分层拉普拉斯算子的定义一致。事实上， f 必须是球的示性函数的线性

[5]考虑到 $\mathcal{X} = \mathbb{Q}_\mathsf{p}$，按照 Kochubei（2001年）的用法，这里采用“旋转不变”一词；但在像本文这样的更一般情形中，这个说法不太恰当，因此本文作者使用“球对称”一词。[6]Figà-Talamanca（1994）给出的值 q^{k-1} 源于以下事实：在我们的编号方式中，与φ_k 对应的特征值是 λ_{k-1}。

组合；如果 $f=\mathbf{1}_{B_n\,(x)}$，那么对于 $k\geq n$有 $\Pi_{k+1}f-\Pi_k f=f-\Pi_k f=0$，因此所涉及的求和范围为 $k=0$、.....、n，并且可以重新排列和式中的各项，从一个公式转换到另一个公式。

当所有向前度都相同时，这一构造涵盖了 $\mathbb{Z}_{\mathsf{p}}^n$ 上的 Taibleson-Vladimirov 算子，其中 $\mathbb{Z}_{\mathsf{p}}$ 是 $\mathbb{Q}_{\mathsf{p}}$ 中的 p 进整数环，p 为任意整数 ≥ 2。

同年，Albeverio 和 Karwowski（1994）发表了关于 $\mathbb{Q}_{\mathsf{p}}$ 上扩散过程的重要著作；该著作有一篇先行研究（1991），而这篇先行研究又在稍有不同的方向上承接了 Evans（1989）的工作。

可以排除 *Figà-Talamanca* 当时读过 *Albeverio* 和 *Karwowski* 的论文这一可能性。那时没有互联网，也没有 *arXiv*。*Math.Reviews* 往往要在文章发表很久之后才刊出书评，而那篇先行研究所在论文集的标题又让人难以想象他会在那里找到那篇论文。无论如何，值得注意的是，*Albeverio* 和 *Karwowski*（*1991*）、（*1994*）都引用了 *Figà-Talamanca* 较早的文章（*1984*）。在后续研究中，*Figà-Talamanca* 和 *Albeverio* 彼此引用，但这些笔记的作者不知道两人是否曾经见过面。似乎在 *1992—93* 年，*Figà-Talamanca* 也并不了解 *Evans*（*1989*）的论文，或者说，并不了解该论文与紧树边界上的扩散之间并不那么直接的联系。无论如何，两人曾在 *1992* 年的会议上相遇，该会议的论文集收录了 *Figà-Talamanca* 的迷你课程笔记（*2001*年）；而 *Del Muto* 和 *Figà-Talamanca* 后来的工作确实提到了 *Evans*。

在回到更具年代顺序的论述之前，我们先介绍更多调和分析内容，取自 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2006）；他们引用了 Pontryagin（1966）和 Evans（1989）。若将 $\mathcal{X}$（非紧）视为阿贝尔群 $\mathcal{G}$，则存在一组由紧开子群 $\mathcal{G}_k$ ($k\in\mathbb{Z}$)构成的双重序列，使得

$$\mathcal{G}_k\subset\mathcal{G}_{k-1}\,,\quad \bigcup_k\mathcal{G}_k=\mathcal{G}\,,\quad \bigcap_k\mathcal{G}_k=\{0\}\,,\ \text{ and }\ |\mathcal{G}_k/\mathcal{G}_{k+1}|=\mathsf{q}_k\geq 2. \tag{11}$$

由哈尔测度可得到一个合适的关联超度量，并将其归一化，使 $\mathsf{m}(\mathcal{G}_0)=1$：令 $|0|_{\mathcal{G}}=0$ 且 $|x|_{\mathcal{G}}=\mathsf{m}(\mathcal{G}_k)$，其中 $x\in\mathcal{G}_k\setminus\mathcal{G}_{k+1}$，于是 $\rho(x,\ y)=|x-y|_{\mathcal{G}}$。$\mathcal{G}_k$ 的陪集构成由球组成的层集 $\mathcal{B}_k$，它是关联树中的 k^{th} 条等高线 H_k，而 q_k 是相应的向前度（后继的数量）。特别地，$B_k=\mathcal{G}_k$。令 Γ 为 $\mathcal{G}$的特征群。它是以下紧开子群的并集

$$\Gamma_k=\{\chi\in\Gamma:\chi(x)=1\text{ for all }x\in\mathcal{G}_{-k}\}\,,\quad\text{and}\quad|\Gamma_k/\Gamma_{k+1}|=\mathsf{q}_{-k}\,.$$

$\mathcal{G}$ 上任意标准平稳过程的马尔可夫半群，都是由上述概率测度的卷积半群 $(\mu_t)_{\,t>0}$ 所诱导的；一般而言，该卷积半群不一定是球对称的，并满足 $\lim_{t\to 0}\mu_t=\delta_0$。于是可得莱维–欣钦公式，参见 Parthasarathy（1967年）。在当前情形下，该公式可略作简化，如 Kochubei（2001年）所示：存在定义在 $\mathcal{G}$ 上的正拉东测度 F，即 Lévy 测度，使得 $\mathsf{a}_k=\mathsf{F}(\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}_k)<\infty$ 对所有 k 均成立，并且

$$\widehat{\mu}_t(\chi)=\exp\left(-t\int_{\mathcal{G}}\big(1-\chi(x)\big)\,d\,\mathsf{F}(x)\right). \tag{12}$$

在上述（9）中的球对称情形下，即在整个等距变换群作用下保持 μ_t 不变，傅里叶分析会进一步简化，正如 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）所证明的：

定理 3.2. [Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）] 球变换为

$$\langle \mu_t \, , \varphi_k \rangle = \exp\left(-t \int_{\mathcal{G}} \big(1 - \varphi_k(x)\big) \, d\,\mathsf{F}(x) \right). \tag{13}$$

测度F 相对于m 在每个集合 $\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{G}_{k+1} = B_k \setminus B_{k+1}$ 上都有常数密度，因此完全由数值$\mathsf{a}_k = \mathsf{m}(\mathcal{G} \setminus B_k)$确定，这些数值必须满足

$$0 \le \mathsf{a}_k \le \mathsf{a}_{k+1} \quad and \quad \lim_{k \to -\infty} \mathsf{a}_k = 0. \tag{14}$$

任意此类序列都定义了一个可行的 *Lévy* 测度。相应的拉普拉斯算子满足$\mathfrak{L}\varphi_k = \lambda_{k-1}\varphi_k$ ，其中

$$\lambda_k = \int_{\mathcal{G}} \big(1 - \varphi_{k+1}(x)\big) \, d\,\mathsf{F}(x) = \frac{1}{\mathsf{q}_k - 1} (\mathsf{q}_k \mathsf{a}_{k+1} - \mathsf{a}_k) \, .$$

特征值的计算见 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004年）[第 208] 页。我们强调，定理 3.2 给出了所有具有正则转移半群的球对称拉普拉斯算子。另见 Evans（1989）。对于 $\mathbb{Q}_\mathsf{p}$ 这一特例，Albeverio 和赵（2000年）已经证明了这一点。

我们看到，在球面对称情形下，只需要满足条件 (14) 的序列 (a_k)。在非紧情形中，对所有 k 都应有 $\mathsf{a}_k > 0$ ，而在这种情况下， $\lambda_k > 0$，同时始终有 $\lim_{k\to-\infty} \lambda_k = 0$，这使我们能够再次写出

$$\mathfrak{L} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \big(\Pi_{k+1} f - \Pi_k f \big) \, , \quad f \in \mathsf{Loc}_c(\mathcal{X})$$

（含 $\mathcal{X} = \mathcal{G}$）。不过请注意， λ_k 不一定是单调递增的。特别是，球对称拉普拉斯算子及其相关的扩散过程超出了齐次层级拉普拉斯算子及其各向同性马尔可夫过程的范畴；参见 Bendikov、Grigor'yan、Pittet 和 Woess（2014）[推论 5.9]。

回到历史发展脉络，在 Albeverio 和 Karwowski 的重要著作（1991）、（1994）中，他们在 $\mathbb{Q}_\mathsf{p}$ 上构造并分析了此类马尔可夫过程；随后，Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）在论文第一部分中给出了上述阿贝尔群上的一般构造。我们将在下一节讨论论文的第二部分。这两篇文献都没有直接以上述方式指定无穷小生成元。Albeverio 和 Karwowski 没有使用调和分析，而是从树 $\equiv$ 的等高线上开始构造过程，$\mathcal{B}_k$ 球的集合，引入并积分柯尔莫哥洛夫方程。随后，他们分析了生成元以及相关的狄利克雷型。[7]

在 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004年）之前，Albeverio、Karwowski 和 Zhao（1999）将他们先前在 $\mathcal{X} = \mathbb{Q}_\mathsf{p}$ 上的构造推广到了非群不变情形。与前文一样，p 不必是素数。该树在每个 H_k 上都满足 $\mathsf{q}_k = \mathsf{p}$，并且在 $\partial^* T \equiv \mathbb{Q}_\mathsf{p}$ 上有一个记作 ρ 的测度，它相对于式（4）给出的哈尔测度绝对连续。由此得到的过程及相关拉普拉斯算子仅依赖于超度量结构，并不假设存在群作用下的不变性。然而，除了他们的柯尔莫哥洛夫方程（2.6ab）中"="之后漏掉了负号之外，他们

[7]本笔记的作者不同意 Grigor'yan (2023)[第 206] 页中的这一表述；该表述似乎声称，对于 $\mathbb{Q}_\mathsf{p}$，与层级拉普拉斯算子相关的各向同性马尔可夫过程类"与 Albeverio 和 Karwowski 所构造的过程相一致"。

重新考察了距离传递情形，而他们的“反之亦然”表述 [命题 3.2]似乎有误：他们声称，单调特征值序列刻画了球对称（“旋转不变的”）马尔可夫半群或拉普拉斯算子。错误似乎在于命题 3.2 前几行中的说法：序列 $\big(a(M)\big)$ 的单调性——此处指 Lévy 序列（a_k）——会蕴含特征值序列（h_M）的单调性（此处为 λ_k）。[8] 事实上，球对称拉普拉斯算子比式（6）中的齐次层级算子更为一般。

后来，Albeverio 和 Karwowski（2008）将他们的构造推广到了任意树上，无需群作用。随后，Kigami 发表了两篇重要论文，见下文。特别是，Kigami（2013）提供了最具一般性的构造之一，延续了本文所述工作的思路，但在随后 12 年的繁忙研究活动中，Kigami 的这项工作多少有些被忽视。

4. 树上的随机游走及其边界上的过程

Figà-Talamanca（1994）、Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）、（2006），以及 Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001）所采用的方法，始终限于群不变情形，其核心是从与超度量空间相关联的树上的某些最近邻随机游走出发，并利用它们取缩放极限，从而在树的边界上得到马尔可夫半群。

为了更好地理解这一点，我们先再次回顾后来将树上的随机游走与边界过程联系起来的研究。这包括 Kigami (2010)、(2013) 的重要成果，以及 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess (2014)[§§6–8] 的研究；在此之前，Woess (2012) 曾发表过一篇未刊笔记。上述研究均未假设群不变性。

一个出发点可以是 Douglas 积分 (1931)：开单位圆盘上调和函数的“能量”可以用泊松表示写成边界（单位圆）上的积分。这将布朗运动的狄利克雷型转化为圆上的狄利克雷型——Kigami (2010) 的引言对此作了非常清楚的阐述，其中讨论了紧情形。随后，他从树上的暂态最近邻随机游走 $(Z_n)_{n\ge 0}$ 出发，其中 Z_n 是时刻 n的随机顶点。这是一个具有电网络解释的可逆马尔可夫链，参见 Woess (2009)[第 4 章和 9]：令 $P=\big(p(u,v)\big)_{u,v\in T}$ 为该随机游走的随机转移矩阵，且当且仅当 $u\sim v$ 时，$p(u,v)>0$。那么，存在正权重 $c(u)$，使得$c(u,v)=c(v,u)$ 对所有 u,v 都成立，其中 $c(u,v)=c(u)p(u,v)$。相应的狄利克雷型为

$$\mathcal{D}_T(g_1\,,g_2)=\frac{1}{2}\sum_{u,v\in T} c(u,v)\big(g_1(u)-g_1(v)\big)\big(g_2(u)-g_2(v)\big)$$

对于函数 $g_1\,,g_2\colon\ T\to\mathbb{R}$ 具有有限“能量” $\mathcal{D}_T(g_i,g_i)$。记 $P^n=\big(p^{(n)}(u,v)\big)_{u,v\in T}$，格林核为

$$G(u,v)=\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(u,v)\,,$$

因此，对所有 $u,\ v$，由暂留性可得 $0<G(u,\ v)<\infty$。调和函数具有泊松积分表示的马丁边界就是树的边界，参见 Cartier（1972）。特别地，随机游走 Z_n 几乎必然收敛到一个取值于边界的

[8]这绝不会影响 Albeverio 和 Karwowski 的其他所有结果的正确性。

随机变量 Z_∞。当起始点为根顶点 o 时，我们将其分布记为 ν_o。有 $\nu_o(\partial T) = 1$，且对于 $u \neq o$,

$$\nu_o(\partial T_u) = F(o,u)\frac{1-F(u,u')}{1-F(u',u)F(u,u')}\,,$$

其中，$F(u,\ v) = G(u,\ v)/G(v,\ v)$ 是随机游走从 u 出发时曾到达 v 的概率。令 $K(u,\ v) = F(u,\ v)/F(o,\ v)$ 为 Martin 核。它可以连续延拓到 ∂T，其形式为

$$K(u,x) = K(u,u\wedge x)\,,\quad K(o,x) = 1.$$

于是，每个有界调和函数 h 都有唯一的积分表示

$$h(u) = h_f(u) = \int_{\partial T} f(u)K(u,x)\,d\nu_o(x)\,,$$

其中 $f \in L^\infty(\partial T,\ \nu_o)$。类似的表示（其中 f 不一定有界）对每个具有有限能量的调和函数同样成立。现在假设，对于所有 $v \in T$，$F(v,\ v') < 1$，从而 ν_o 的支撑为整个 ∂T。我们还可以假设格林核在无穷远处趋于零，因此 h_f 为 ∂T 上每个连续函数在 $T\cup\partial T$ 上的连续延拓。[9] 鉴于上述结果，$\mathcal{D}_T$ 导出狄利克雷型

$$\mathcal{D}_{\partial T}(f_1\,,f_2) = \mathcal{D}_T(h_{f_1}\,,h_{f_2}).$$

Kigami（2010）计算了其积分核，并证明该型在 $L^2(\partial T,\ \nu_o)$ 上是正则的：根据狄利克雷型理论——参见 Fukushima、Oshima 和 Takeda（2011）——它在 ∂T 上诱导出一个对称扩散过程。事实上，该积分核就是 Doob（1962）的 *Naïm* 核，由 Silverstein（1974）调整到可逆马尔可夫链的情形。在树上的随机游走情形中，它有一个简单的表达式和证明，见 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess（2014年）[§6]:

命题 4.1. ∂T 上的 *Naïm* 核为

$$\Theta_o(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c(o)}{G(o,o)F(o,x\wedge y)F(x\wedge y,o)} & \text{if } x\neq y\,,\\ +\infty & \text{if } x = y\,. \end{cases}$$

对于参考测度 ν_o，相应的拉普拉斯算子在 $\mathsf{Loc}_c(\partial\mathcal{T})$ 上定义为

$$\mathfrak{L}f(x) = \int_{\partial T}\big(f(x)-f(y)\big)\Theta_o(x,y)\,d\nu_o(y).$$

它是 $L^2(\partial T,\nu_o)$ 上的层级拉普拉斯算子，其特征函数为 $f_{B,D} = f_{v,u}$，其中 $u' = v$ 如(3)所示，且 $B = \partial T_v$和 $D = \partial T_u$。特征值为 $\lambda(v) = 1/G(v,o),\ \ v\in T$。此外，常函数**1** 的特征值为0。

Kigami（2013）随后研究了非紧情形下的类似构造，其中$\mathcal{X} = \partial^* T$ 通过将参考点移动到 ϖ来实现。上述构造可针对任意“根”顶点进行

[9]Kigami 并未使用这一第二项假设，但无论如何，$\lim_{v\to x} G(v,o) = 0$ 对 ν_o-几乎处处的$x\in\partial T$成立，参见 Woess（2009）[定理 9.43]。

以替代 o，尤其是 o的 n^{th} 前驱 o_n。定义 $\partial^* T$ 上的拉东测度 m（针对紧 $A \subset \partial^* T$）以及重缩放的 Naïm 核 J（针对 $x,\ y \in \partial^* T$），定义如下：

$$\mathsf{m}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_{o_n}(A)}{\nu_{o_n}(\partial^* T_o)} \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} J(x,y)\,\Theta_{o_n}(x,y)\big(\nu_{o_n}(\partial^* T_o)\big)^2$$

当 $A \subset \partial^* T_{o_k}$ 时，这两个序列分别在 $n \geq k$ 和 $x \curlywedge y \in \partial^* T_{o_k}$ 处稳定，参见 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess (2014年)[§7.3]。于是可以写成 $J(x,y) = \mathfrak{j}(x \curlywedge y)$，其中$\mathfrak{j}(v) = \vartheta^2 G(v,v)/\big(K(v,\varpi)^2 c(v)\big)$，其中 $\vartheta > 0$ 已知。如果格林核在无穷远处趋于零，那么对于 $f_1, f_2 \in \mathrm{Loc}_c(\partial^* T)$，狄利克雷型 $\mathcal{D}_{\partial T}(f_1, f_2)$ 可以用相对于测度 m 的积分核 $J(\cdot,\cdot)$ 重写。相应的拉普拉斯算子为

$$\mathfrak{L} f(x) = \int_{\partial T} \big(f(x) - f(y)\big)\, J(x,y)\, d\mathsf{m}(y)\,,$$

特征函数仍然全都是 $f_{v,u}$，其 $u' = v$ 为 $\lambda(v)$，相应的特征值为 $= K(v,\varpi)/\vartheta, v \in T$。

Kigami（2010）、（2013）以及 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess（2014）证明，反过来，每个定义在 ∂T（分别为 $\partial^* T$）上的层级拉普拉斯算子及其相应的转移半群，都可以通过上述方式由随机游走导出，至多相差一个常数因子的时间变换。

在群不变情形下，ν_o 和 m 分别是相应的 Haar 测度，跳跃核 Θ_o 和 J 具有群不变性，特征值 $\lambda(v)$ 仅取决于 v 的层集指标，因此可以得到所有齐次层级拉普拉斯算子及其相应的扩散过程。

现在终于讲到 Figà-Talamanca（1994）、Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001）以及 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）、（2006）的构造核心。这些构造同样依赖于在与超度量空间（分别与全不连通阿贝尔群）相关联的树上的离散时间随机游走，但采用了不同的方式，即通过卷积半群 $(\mu_t)_{t>0}$。

A) Figà-Talamanca（1994）。在紧齐次情形下，作者从一个概率参数 $p \in (0,\ 1/2)$ 开始（也考虑了退化情形 $p = 1/2$，但其意义较小；$p \in (1/2,\ 1)$ 不会导致扩散）。随机游走以概率 $p(o,\ u) = 1/\mathsf{q}_0$，从根 o 移动到其任意一个邻点 u。对于顶点 $u \in S_k\ (k \geq 1)$，随机游走以概率 $p(u,\ u') = p$ 向上移动，而以概率 $p(u,\ v) = (1-p)/\mathsf{q}_k$ 向下移动到 u 的任意一个后继 v。这种随机游走是暂态的。

现在将树截断至第 S_n 层，移除满足 $|v| > n$ 的顶点 v。对于 $u \in S_n$，调整转移概率 $p(u,\ v)$，使随机游走以概率 1 移至 u'。随后在 S_n 上构造一个马尔可夫链：对于 $u,\ v \in S_n$，$p_n(u,\ v)$ 表示从 u 出发的截断树上的随机游走首次重新进入 S_n 时位于 v 的概率。计算如下：令 $q = (1-p)/p$，并回顾式 (4) 中的 m_k。

$$p_n(u,v) = \sum_{j=\max\{1,k\}}^{n-1} \left(\frac{q-1}{q^j - 1} - \frac{q-1}{q^{j+1}}\right) \frac{\mathsf{m}_n}{\mathsf{m}_{n-j}} + \frac{q-1}{q^n - 1}\mathsf{m}_n\,, \quad \text{if } |u \wedge v| = n-k\,.$$

我们选取参考点 $o_n \in S_n$，并在 $\mathcal{X}$ 上定义概率测度 σ_n，其密度为[10]

$$f_n(x) = \sum_{u \in S_n} \frac{p_n(o_n, u)}{\mathsf{m}_n} \mathbf{1}_{\partial T_u} \tag{15}$$

相对于式 (4) 的测度。因此，在上述 Gelfand 对方法中，或者等价地，若 $\mathcal{X} = \mathcal{G}$ 是一个全不连通阿贝尔群，σ_n 是一个球对称概率测度，且 $p_n(go_n,\ ho_n) = \sigma_n(g^{-1}h\,\partial T_{o_n})$。其作为卷积算子的特征值可通过球函数计算：

$$\langle \sigma_n\,, \varphi_k \rangle = \begin{cases} 1\,, & k = 0\,, \\ 1 - \dfrac{q-1}{q^{n-k+1}-1}\,, & k = 1, \dots, n-1\,, \\ 0\,, & k \geq n\,. \end{cases}$$

不超过 $k = n$ 的那些是 $\big(p_n(u,\ v)\big)_{u,\ v \in S_n}$ 的特征值。

定理 4.1。 [Figà-Talamanca（1994）] 设 $k(n) = (q^n - 1)/(q-1)$，于是对于 $\big(p_n(u, v)\big)_{u,\ v \in S_n}$ 的第二大特征值，

$$\langle \sigma_n\,, \varphi_1 \rangle^{\lfloor tk(n) \rfloor} \to e^{-t} \quad from\ below,$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示下一个较小的整数。那么对于任意 $t > 0$，卷积幂序列

$$\sigma_n^{(\lfloor tk(n) \rfloor)} \to \mu_t\,, \quad as\ \ n \to \infty\,,$$

其中 $(\mu_t)_{t>0}$ 是卷积半群，它导出了 (10) 的拉普拉斯算子，其中 $\lambda_k = q^k$。

我们将其与通过 Naïm 核从上述初始转移矩阵为 $\big(p(u,\ v)\big)$ 的随机游走得到的边界过程进行比较：在我们的球对称情形中，$\nu_o = \mathsf{m}$ 与这里的测度相同（相对于根 o 所见的 ∂T 上的均匀分布），特征函数也相同；对于 $v \in S_k$，容易算得 $G(v,\ o) = q^{1-k}/(q-1)$，因此按我们的编号，特征值序列为 $\lambda_k = (q-1)q^k$。于是，这两个过程只相差一个常数因子 $q-1$ 所导致的时间变换：若 (μ_t) 是 Figà-Talamanca（1994）构造的卷积半群，而 $\tilde{\mu}_t$ 是与边界过程相对应的卷积半群，则 $\tilde{\mu}_t = \mu_{(q-1)t}$。

此前，*A. Figà-Talamanca* 曾向本笔记的作者指出几处印刷错误：在 *Figà-Talamanca*（*1994*）中，第 *162* 页第 $6-$ 行和第 $5-$ 行，以及第 *164* 页第 *8* 行和第 *9* 行，应为 $p \neq 1/2$ 和 $p = 1/2$（而不是 2）。第 *166* 页 *L3*，按该文的记号，最后一项应除以 $\rho_n - 1$。

B) Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001年）。三位作者在这项工作的第一部分中，将上述相同的方法应用于非紧情形。在这里，$\mathcal{X}$ 是一个局部域，而按水平（“层次”）顺序排列的关联树满足：对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathsf{q}_k = \mathsf{q}$。为简单起见，考虑 $\mathbb{Q}_\mathsf{p}$，使得 $\mathsf{q} = \mathsf{p}$，但这并不重要，q 可以是任意整数 ≥ 2。目标是在 $\mathbb{Q}_\mathsf{p} = \partial^* T$ 上构造 α-稳定随机变量，其中 $\alpha > 0$。将该随机变量记为 U，将其分布记为 μ，并回顾

[10] It 记作 μ_n Figà-Talmanca；为避免与 μ_t 混淆，我们将 σ_n 她记作 e.

维数为 $n=1$ 时（任意的 n 同样适用），式（8）中的特征 χ。随后， U（分别为 μ ）需要满足

$$\mathbf{E}\big(\chi(\xi U)\big)=\widehat{\mu}(\xi)=e^{-c|\xi|^{\alpha}}\quad\text{for all }\ \xi\in\widehat{\mathbb{Q}}_{\mathsf{p}}=\mathbb{Q}_{\mathsf{p}} \tag{16}$$

对于某个常数 $c>0$，其值无关紧要。这里，$\mathbf{E}$ 表示期望。值得注意的是，对于任意 $\alpha>0$，都存在非平凡解；而在 $\mathbb{R}$ 的情形下，它必须是 $\alpha\leq 2$。构造方法与上述紧情形类似。具体而言， $\mu=\mu_1$ 属于 $\partial^{*}T$上的一个卷积半群 $(\mu_t)_{t>0}$。作者从 T 上的最近邻随机游走开始，其中相对于 ϖ的前驱满足：

$$p(u,u')=\frac{1}{1+\mathsf{p}^{\alpha}}\quad\text{and}\quad p(u',u)=\frac{\mathsf{p}^{\alpha}}{\mathsf{p}(1+\mathsf{p}^{\alpha})}.$$

树在 H_n处截断，移除满足 $\mathrm{hor}(v)>n$的顶点 v。调整 $u\in H_n$ 处的出边转移概率 $p(u,\ v)$，使随机游走以概率 1 移向 u'。然后考虑 H_n 上的诱导随机游走，其中 $p_n(u,\ v)$表示从 u 出发首次返回 H_n 发生在 v的概率。其计算方法与紧情形类似，并且以同样的方式将$p_n(o_n,\cdot)$提升为 $\mathbb{Q}_{\mathsf{p}}$ 上的球对称概率测度 σ_n，其密度为 f_n，如式 (15) 所示（分别以 H_n 和 $\partial^{*}T_u$ 替换 S_n 和 ∂T_u）。然后作者计算

$$\langle\sigma_n\,,\varphi_k\rangle=\langle f_n\,,\varphi_k\rangle=\begin{cases}1-\dfrac{\mathsf{p}^{\alpha}-1}{\mathsf{p}^{(n+1-k)\alpha}-1}\,, & k<n\,,\\[2mm] 0\,, & k\geq n\,.\end{cases}$$

与上文的 $k(n)$ 相对应，这里 $j(n)=\mathsf{p}^{(n+1)\alpha}/(\mathsf{p}^{\alpha}-1)$，而卷积幂序列 $\sigma_n^{(\lfloor j(n)\rfloor)}$收敛到所需的测度 μ。这就是核心内容；作者的表述更偏向概率论：

定理4.2。 [Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001年）] 设 $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{Q}_{\mathsf{p}}$ 上一列分布为 σ_0 的独立同分布随机变量。则 $\mathsf{p}^{n}V_k$ （$\mathbb{Q}_{\mathsf{p}}$ 中的乘积）的分布为 σ_n，并且

$$U_n=\mathsf{p}^{n}\sum_{k=1}^{j(n)}V_k$$

依分布收敛到一个随机变量。其分布 μ 具有密度

$$f(x)=\frac{\mathsf{p}-1}{\mathsf{p}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathsf{p}^{k}e^{-\mathsf{p}^{k\alpha}}\varphi_k(x)\,,$$

相对于哈尔测度，并且 $\widehat{\mu}$ 满足 (16)。

若改为考虑 $\mu_t=\lim_n\mu_n^{(\lfloor tj(n)\rfloor)}$，则它是一个扩散半群；此时，它与命题 3.1 中的 Taibleson-Vladimirov算子相关联，也就不足为奇了。再者，由原始随机游走经重标度 Naïm 核$J(x,y)$ 得到的边界过程，其中原始随机游走在与 $\mathbb{Q}_{\mathsf{p}}$ 相关联的树上具有转移矩阵 $\big(p(u,v)\big)$，与半群 (μ_t) 对应的过程相同，只差一个常数因子的时间变换；参见 Bendikov、Grigor′yan、Pittet 和 Woess（2014年）§8.3]。

正如作者在引言中所说（读者在了解了迄今为止所解释的一切之后也应当明白这一点），同样的方法适用于任意局部域 $\mathbb{F}$、向量

空间 $\mathbb{F}^n$，稍作修改后也适用于一般的全不连通阿贝尔群，如文献 (11) 中所述。Del Muto 和 Figà-Talamanca (2006) 在文末提到了进一步的推广。

我们指出，*Baldi*、*Casadio Tarabusi* 和 *Figà-Talamanca*（*2001*年）引用了 *Taibleson*（*1975*年），却没有引用 *Vladimirov* 和 *Volovich*（*1989*年）。事实上，*Mitchell H. Taibleson* 是一位知名的调和分析学家，也经常造访罗马；而 *Figà-Talamanca* 显然并不了解 *Vladimirov* 的工作。反过来，*Bendikov*、*Grigor'yan*、*Pittet* 和 *Woess*（*2014*年）没有引用 *Figà-Talamanca* 迄今的任何成果；作者在此谨记下这一疏漏（后来已在相关工作中弥补），并对此承担责任。

我们还要提及 Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001年）论文中较短的第二部分：它与超度量分析无关，但运用了 hor 循环有序的树（尤其是正则树）与双曲上半平面之间广泛而深刻的类比。作者展示了带有向下漂移的双曲布朗运动如何在实数直线上产生极限分布（此处，实数直线是 $\partial^* T$ 的几何类比），这些极限分布属于 α-稳定随机变量的吸引域。

C) Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004年）。现在我们回到这里所评述的 Figà-Talamanca 论文中被引用最多的一篇。对于群不变的非紧情形中的构造，作者也使用了树上的最近邻随机游走，但其转移概率并非沿所有边都为 >0。回想一下，我们用 $o_k (k \in \mathbb{Z})$ 表示双无限测地线 $\pi(\varpi,\ 0)$ 上从 ϖ 到 $0 \in \partial^* T$ 的 H_k 中的顶点。令 T_k 为 T 的子树，其由根 o_k 以及所有以 o_k 为祖先（迭代前驱）但不以 o_{k+1} 为祖先的顶点所张成。这些 T_k 两两不相交，其并集为整个 T，包含所有边，但位于测地线 $\pi(\varpi,\ 0)$ 上的边除外。接下来按如下方式构造随机游走。我们可以从式（14）的序列 $(\mathsf{a}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 开始，该序列定义了一个球对称 Lévy 测度；这里假设 $\mathsf{a}_k > 0$ 严格递减，且 $\mathsf{a}_k \to \infty$ 如 $k \to \infty$。然后令 $\mathsf{f}_k = \mathsf{a}_k / \mathsf{a}_{k+1}$（Del Muto 和 Figà-Talamanca 分别记作 ζ_k、ζ_i）。这些数用于定义一个最近邻随机游走，其

$$
\begin{aligned}
&p(u,u') = \frac{\mathsf{f}_k}{1+\mathsf{f}_k} \ \text{ for } \ u \in T_k\,, \quad p(u',u) = \frac{1}{\mathsf{q}_{\mathsf{hor}(u')}} \cdot \frac{1}{1+\mathsf{f}_k} \ \text{ for } \ u \in T_k\,,\ u' \neq o_k\,, \\
&p(o_k\,, o_{k+1}) = 0\,, \qquad\qquad p(o_k,u) = \frac{1}{\mathsf{q}_k - 1} \cdot \frac{1}{1+\mathsf{f}_k} \ \text{ for } \ u \in T_k\,,\ u' = o_k\,.
\end{aligned} \tag{17}
$$

这些数的选取方式使得，对于任意 $u \in T_k$，$\mathsf{f}_k = F(u,\ u')$ 表示从 u 开始的随机游走曾到达前驱 u'的概率。现在固定 n，并在 $\mathcal{X} = \partial^* T$ 上构造一个概率测度 μ_n。Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004年）通过在 H_n 上定义离散概率测度来描述这一过程。与前面的构造相反，在$u \in H_n \setminus \{o_n\}$ 处考虑的是：对于上述从o_{n-1}开始、在 T 上的随机游走，H_n 的最后一次（而不是像之前那样第一次）访问发生在 u 的概率。（如果我们希望随机游走从 o_n 开始，那么可以像之前一样截取树 H_n，并将从 o_n 到 o_{n-1} 的转移概率重新定义为 $=1$。）

这里我们采用一种与作者略有不同的解释。首先注意到，根据假设，$\mathsf{a}_k \to \infty$ 存在任意大的 k，使得 $\mathsf{f}_k < 1$。由于 $p(o_k\,, o_{k+1}) = 0$，该随机游走是暂态的，因此对于任意起始点，Z_n 几乎必然会收敛到一个 $\mathsf{a}\partial T$-值随机变量 Z_∞。当起始点为 o_{n-1} 时，其分布记为

ν_n。那么， Z_∞ 属于 $\partial^* T_{o_k} \setminus \partial^* T_{o_{k+1}}$ （ T_k的端点集合）的概率为[11]

$$\nu_n(\partial^* T_{o_k} \setminus \partial^* T_{o_{k+1}}) = \frac{\mathsf{a}_{k+1} - \mathsf{a}_k}{\mathsf{a}_n}, \quad k \le n-1, \tag{18}$$

因为到达 o_{k-1} 的概率为 $\mathsf{f}_{n-1}\mathsf{f}_{n-2}\cdots\mathsf{f}_k = \mathsf{a}_k/\mathsf{a}_n$，此后随机游走便无法返回 o_{k-1}。特别地，我们看到

$$\nu_n(\partial^* T) = \sum_{k \le n-1} \nu_{o_{n-1}}(\partial^* T_{o_k} \setminus \partial^* T_{o_{k+1}}) = 1\,,$$

因此，极限随机变量确实取值于 $\partial^* T \setminus \{0\}$。接下来，上文提到的 $H_n \setminus \{o_n\}$ 上的“最后一次离开”概率分布被提升为 $\partial^* T$ 上的球对称概率测度 σ_n ，其密度为

$$f_n = \sum_{u \in H_n \setminus \{o_n\}} \frac{\nu_n(\partial^* T_u)}{\mathsf{m}_n}\, \mathbf{1}_{\partial^* T_u}$$

与 (15) 类似。（作者将 σ_n 记作 λ_n 。）注意，对于 $u \in T_k \cap H_n$ 中的每个 $(\mathsf{q}_k - 1)\mathsf{q}_{k+1}\cdots\mathsf{q}_{n-1} = (\mathsf{m}_k - \mathsf{m}_{k+1})/\mathsf{m}_n$ 元素， $\sigma_n(\partial^* T_u)$ 都相同，其中 m_k 如 (4) 中所述。现在我们可以将 $\mathcal{X}$ 上的 σ_n 视为 Gelfand 对框架下的卷积算子，或者视为 (11) 中所述的 $\mathcal{X} = \mathcal{G}$ 为全不连通阿贝尔群这一等价框架下的卷积算子。 σ_n 的球变换计算如下

$$\langle \sigma_n\,, \varphi_k \rangle = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\mathsf{a}_n} \cdot \dfrac{\mathsf{q}_{k-1}\mathsf{a}_k - \mathsf{a}_{k-1}}{\mathsf{q}_{k-1} - 1}\,, & k < n\,, \\ 0\,, & k \ge n\,. \end{cases}$$

定理 4.3. [Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）] 对于每个 $t > 0$，卷积幂序列 $\sigma^{(\lfloor t\mathsf{a}_n \rfloor)}_n$ 收敛到一个球对称概率测度 μ_t 在$\mathcal{X}$上，并且 $(\mu_t)_{t>0}$ 是满足 (13) 的卷积半群，其对应的球对称 ***Lévy*** 测度由序列 $(\mathsf{a}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$定义。

这一构造给出了齐性情形下所有的球对称扩散半群，其中 Lévy 序列是非退化的，即对所有 k 都有 $\mathsf{a}_k > 0$ ，且 $\lim_{k\to\infty} \mathsf{a}_k = \infty$，其中包括与分层拉普拉斯算子相关的各向同性过程。

D) Del Muto 和 Figà-Talamanca（2006）。这篇论文篇幅很短，除说明性文字外只列出了三个引理，但也对作者先前的工作作出了值得注意的简化。在这种情况下，超度量空间是一个全不连通阿贝尔群 $\mathcal{G}$ ，如式（11）所示。所考察的扩散过程具有 $\mathcal{G}$ 不变性，因此再次由卷积半群（μ_t）$_{t>0}$ 给出，且满足 $\lim_{t\to 0} \mu_t = \delta_0$。不过，此时并不假设概率测度 μ_t 是球对称的（作者称之为“各向异性”）。因此，Lévy 表示（12）不能简化为球变换。尽管如此，作者表明，由随机游走诱导的一个逼近可以推广式（17）。同样假设 Lévy 测度 F 满足 $\mathsf{a}_k > 0$，且 $\lim_{k\to\infty} \mathsf{a}_k = \infty$，其中 $\mathsf{a}_k = \mathsf{F}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_k)$。子树 T_k 与上文相同。若 $u \in H_k \setminus \{o_k\}$，则球 $\partial^* T_u \subset \partial^* T = \mathcal{G}$ 具有形式 $x + \mathcal{G}_k$， $x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_k$，我们用 $\mathsf{F}(u)$ 表示 $\mathsf{F}(x + \mathcal{G}_k)$。此外，稍微滥用一下这一记号，令

[11]根据 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004），这可写为 $\lambda_n(U_{n-m})$ 其中 $n - m = k$。

$\mathsf{F}(o_k) = \mathsf{F}(\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{G}_{k+1}) = \sum_{u\in T_k:\ u'=o_k} \mathsf{F}(u) = \mathsf{a}_{k+1} - \mathsf{a}_k$。按照上文的定义，令 $\mathsf{f}_k = \mathsf{a}_k/\mathsf{a}_{k+1}$，则在 T 上随机游走的概率为

$$p(u,u') = \frac{\mathsf{f}_k}{1+\mathsf{f}_k}, \quad p(u',u) = \frac{\mathsf{F}(u)}{\mathsf{F}(u')}\cdot\frac{1}{1+\mathsf{f}_k} \ \text{ for } \ u\in T_k, \quad p(o_k, o_{k+1}) = 0. \tag{19}$$

当 $F(u') = 0$ 时，必须调整定义。在这种情况下，概率 $p(u', u)$ 按照（17）定义。然后，与之前一样，该随机游走收敛到一个 $\partial^* T\setminus\{0\}$ 值随机变量；当起始点为 o_{n-1} 时，我们将其分布记为 ν_n。同样，作者将其写作 λ_n，随后给出如下结论。

引理 4.1。对于 $u\in H_n\setminus\{o_n\}$，有 $\nu_n(\partial^* T_u) = \mathsf{F}(u)/\mathsf{a_n}$.

注：*Del Muto* 和 *Figà-Talamanca*（*2006*）*[*第 *227]* 页中对此的证明略有不完整。因此，这里补充一个更完整的概述。

证明。存在 $k<n$ 使得 $u\in T_k$。

（1）如果 $\mathsf{F}(o_k) = \mathsf{a}_{k+1} - \mathsf{a}_k = 0$，那么同样有 $\mathsf{F}(u) = 0$。此外，根据（18），$\nu_n(\partial^* T_u) = 0$。引理在此情形下成立。

(2) 若 *F(*o_k*)* > 0 且 $u\in S_n\cap T_k$ 满足 *F(u)* > 0，则对所有 $v\in\pi[o_k, u]\setminus\{o_k\}$，也有 *F(v)* > 0。对于这样的 v，直观上显然、但并非完全显而易见的恒等式 $\nu_n(\partial^* T_v)/\nu_n(\partial^* T_{v'}) = F(v)/F(v')$ 成立。这由 *(19)*、$F(v,v') = \mathsf{f_k}$ 这一事实，以及 *Woess (2009)[Cor. 9.57]* 给出的公式推出。结合 *Del Muto* 和 *Figà-Talamanca*（*2006*）*[p. 227]* 的三行计算，可知所述恒等式成立。

(3) 若 *F(*o_k*)* >0 且 $u\in S_n\cap T_k$ 满足 *F(u)* $=0$，则存在 $v\in\pi[o_k, u]\setminus\{o_k\}$，使得 *F(v)* $=0$，但 $F(v')\neq 0$。于是，对某个 $m\le n$，有 $v\in H_m$。对于非空集合 $A = \{\tilde u\in H_m:\ \tilde u' = v'$ 中的每个元素，若 $F(\tilde u) > 0\}$，则由上文可得 $\nu_n(\partial^* T_{\tilde u})/\nu_n(\partial^* T_{v'}) = F(\tilde u)/F(v')$。因此

$$\nu_n(\partial^* T_{v'}) = \sum_{\tilde u\in A}\nu_n(\partial^* T_{\tilde u}).$$

但这意味着 $\nu_n(\partial^* T_v) = 0$，因此也有 $\nu_n(\partial^* T_u) = 0$，该公式在这种情况下同样成立。

此时，Del Muto 和 Figà- Talamanca（2006）《调和分析》中一个出人意料地简单的论证[引理 2]表明，引理 4.1 的公式蕴含以下结论。

定理 4.4。对于与随机游走(19)相关联的概率分布序列 ν_n，对每个 $t>0$，卷积幂 $\nu^{((\lfloor t\mathsf{a}_n\rfloor)}{}_n$ 都收敛于 μ_t，其中 $(\mu_t)_{t>0}$ 是全不连通阿贝尔群 $\mathcal{G}$ 上的卷积半群，它与 ***Lévy*** 测度F相关联。

最后一节将说明该过程在什么条件下稳定，并推广 Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001年）的结果。

请注意，在 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004）、（2006）中，随机游走与前几篇论文中的随机游走截然不同。它们高度依赖超度量空间的齐性，而且看不出随机游走与边界过程之间存在任何明显的对偶关系，不像 Douglas 积分思想中通过 Naïm 核所建立的那样。定理 4.4 既推广了前一篇论文中的定理 4.3，也使其得到了简化。它说明了如何通过最近邻

随机游走，在底层树上构造出那些群上的任意具有无界 Lévy 测度的扩散过程；此外，Lévy 测度的具体形式也通过 F(u) 的取值与树相关联。

总而言之，本文评述的全部 4 篇论文中，Figà-Talamanca 关注的核心问题，是探究如何结合调和分析与树上的不同类型离散时间最近邻随机游走，以构造、近似并理解齐次超度量空间上的扩散过程。重点并不在于后续分析，例如热核渐近、薛定谔方程及偏微分方程领域的其他问题。特别是，就此而言，本文的参考文献并非意在做到完整。

关于 *Figà-Talamanca* 这项工作的引用情况，一方面，他本人有时确实是在已经形成自己的研究方法之后，才开始研究该领域已有的文献。另一方面，他的贡献虽然可能不属于主流学派，但看来与这些学派关系密切且颇受重视；这一点可从以下事实看出：在后续著作中，*Albeverio* 和 *Karwowski*、*Bendikov* 和 *Grigor′yan* 等杰出数学家及其合作者，经常将 *Figà-Talamanca* 的研究列入参考文献。每位数学家选择引用哪些文献，或许都基于颇为独特的判断与取舍；而要认可来自既有学派之外的作者所作的贡献，可能并不容易。事实上，这些笔记的作者有些意外地发现，除了一个例外，*Figà-Talamanca* 及其合作者关于超度量问题的论文，从未被那位为他们所有论文撰写 *Mathscinet* 书评的作者引用过。

相关文献来源

Albeverio, S. 和 W. Karwowski。1991。《 p进数上的扩散》，《高斯随机场》（名古屋，1990），第 86–99 页。Albeverio, S. 和 W. Karwowski。1994。《 p进数上的随机游走——生成元及其谱》，《随机过程与应用》53，第 1 期，1–22。Albeverio, S.、W. Karwowski 和 X. Zhao。1999。《p进数上随机游走的渐近性质与谱结果》，《随机过程与应用》83，第 1 期，39–59。Albeverio, S. 和 X. Zhao。2000。《关于 p进数上随机游走的不同构造之间的关系》，Markov Process. Related Fields 6，第 2 期，239–255。Albeverio, S. 和 W. Karwowski。2008。《多分支树叶上的跳跃过程》，J. Math. Phys. 49，第 9 期，093503，20 页。Bendikov, A.、A. Grigor′yan 和 C. Pittet。2012。《离散超度量空间上的一类马尔可夫半群》，Potential Anal. 37，第 2 期，125–169。Bendikov, A. D.、A. A. Grigor′yan、Ch. Pittet 和 W. Woess。2014。《超度量空间上的各向同性马尔可夫半群》，Uspekhi Mat. Nauk 69，第 4(418) 期，3–102 页（俄文，附俄文摘要）；英文译本，2014，Russian Math. Surveys 69，第 4 期，589–680。Bendikov, A. 和 P. Krupski。2014。《层级拉普拉斯算子的谱》，Potential Anal. 41，第 4 期，1247–1266。Bendikov, A.。2018。《超度量空间上类各向同性马尔可夫生成元的热核：综述》，p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 10，第 1 期，1–11。Bendikov, A.、W. Cygan 和 W. Woess。2019。《超度量空间上的振荡热核》，J. Spectr. Theory 9，第 1 期，195–226。Cartier, P. 1972。《树上的调和函数》，Symposia Mathematica，第 IX 卷，第 203–270 页。Doob, J. L. 1962。《有限狄利克雷积分函数的边界性质》，Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）12，573–621。Douglas, J. 1931。《普拉托问题的解》，Trans. Amer. Math. Soc. 33，第 1 期，263–321。

Figà-Talamanca, A. 1984。《离散结构上的调和分析》（意大利文；离散结构上的调和分析），意大利数学联合会通报 A (6) 3，第 3 期，313–334。Figà-Talamanca, A. 1997。《局部域与树》，《树与建筑上的调和函数》（纽约，1995），当代数学，第 206 卷，美国数学会，普罗维登斯，第 3–16 页。Figà-Talamanca, A. 2001。《盖尔范德对在紧超度量空间扩散问题中的一个应用》，《概率论与李群专题：边界理论》（数学研究中心），CRM会议录与讲义，第 28 卷，美国数学会，普罗维登斯，第 51–67 页。Evans, S. N. 1989。《全不连通群上莱维过程的局部性质》，《理论概率杂志》2，第 2 期，209–259。Fukushima, M.、Y. Oshima 和 M. Takeda。2011。《狄利克雷形式与对称马尔可夫过程》（扩充版），德格鲁伊特数学研究丛书，第 19 卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林。Grigor′yan, A. 2023。《通过热核分析超度量空间》，p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 15，第 3 期，204–242。Hewitt, E. 和 K. A. Ross。1963。《抽象调和分析》。第一卷：拓扑群的结构。积分理论、群表示，数学科学基础丛书，第 115 卷，施普林格出版社，柏林—哥廷根—海德堡。Kigami, J. 2010。《由树上随机游走诱导的康托尔集上的狄利克雷形式及其相关热核》，《数学进展》225，第 5 期，2674–2730。Kigami, J. 2013。《非紧康托尔集上的转移与其定义树上的随机游走》，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》49，第 4 期，1090–1129。Kochubei, A. N. 2001。《非阿基米德域上的伪微分方程与随机分析》，纯粹与应用数学专著与教科书，第 244 卷，Marcel Dekker, Inc.，纽约。Lang, S. 1975。$SL_2(R)$，Addison-Wesley Publishing Co.，雷丁（马萨诸塞州）—伦敦—阿姆斯特丹。Letac, G. 1982。《对称盖尔范德对的球函数与马尔可夫链》，《数学进展与应用概率》14，第 2 期，272–294。Parthasarathy, K. R. 1967。《度量空间上的概率测度》，概率与数理统计，第 3 卷，Academic Press, Inc.，纽约—伦敦。Pontryagin, L. S. 1966。《拓扑群》，俄文译本，Gordon and Breach Science Publishers, Inc.，纽约—伦敦—巴黎。Rammal, R.、G. Toulouse 和 M. A. Virasoro。1986。《面向物理学家的超度量性》，《现代物理评论》58，第 3 期，765–788。Rodríguez-Vega, J. J. a. Z.-G., W. A. 2008。《Taibleson 算子、 p进抛物方程与超度量扩散》，《Pacific J. Math.》237，第 2 期，327–347。Silverstein, M. L. 1974。《稳定对称马尔可夫链的分类》，《印第安纳大学数学杂志》24，29–77。Taibleson, M. H. 1975。《局部域上的傅里叶分析》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州）；东京大学出版社，东京。Vladimirov, V. S. 和 I. V. Volovich。1989。《 p进薛定谔型方程》，《数学物理快报》18，第 1 期，43–53。Vladimirov, V. S.、I. V. Volovich 和 E. I. Zelenov。1994。《 p进分析与数理物理》，苏联与东欧数学丛书，第 1 卷，世界科技出版公司，里弗埃奇（新泽西州）。Woess, W. 2009。《可数马尔可夫链》，EMS数学教科书，欧洲数学会（EMS），苏黎世。生成函数、边界理论、树上的随机游走。Woess, W. 2012。《超度量空间上的跳跃过程与树上随机游走之间的对偶性》，arXiv:1211.7216，24 页。Zúñiga-Galindo, W. A. 2025。《 p进分析——随机过程与伪微分方程》，《分析与几何进展》第 11 卷，德格鲁伊特，柏林。

本章评述的 Figà-Talamanca 论文引文

FT-1994 stands for Figà-Tal$_{\text{amanca}}$ (1994 , P$_{\text{rocee}}$ dings, San Antonio 1993)
，B-CT-FT-2001 指 Baldi、Casadio Tarabusi 和 Figà-Talamanca（2001，《Pacific J. Math.》）；DM-FT-2004 指 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2004，《Expos. Math.》）；DM-FT-2006 指 Del Muto 和 Figà-Talamanca（2006，《Pacific J. Math.》）。Karwowski, W. 2023。《非阿基米德空间上的随机过程》，《量子与随机数学物理》。Sergio Albeverio，《一位数学家的冒险》，意大利维罗纳，2019年3月25–29日，第315–342页（英文）。（引用 FT-1994）。Bendikov, A., A. Grigor′yan, and S. Molchanov. 2023。《具有奇异势的层级薛定谔算子》，《Steklov 数学研究所论文集》323，12–46（英文）。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Grigor′yan, A. 2023。《通过热核分析超度量空间》，p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 15，第3期，204–242。（引用 DM-FT-2004）。Assiotis, T. 2022。《无限 p-进随机矩阵与 p-进 Hua 测度的遍历分解》，Trans. Amer. Math. Soc. 375，第3期，1745–1766。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Bendikov, A., A. Grigor′yan, and S. Molchanov. 2021。《层级薛定谔型算子：局部有界势的情形》，《算子理论与调和分析》。OTHA 2020，第二部分——概率分析模型、方法与应用。基于算子理论与调和分析现代方法、问题与应用国际会议，Cham：Springer，第43–89页。（引用 DM-FT-2004）。Eriksson, S.-L. and T. Kaarakka. 2020。《双曲调和函数与双曲布朗运动》，Adv. Appl. Clifford Algebr. 30，第5期，12。（引用 B-CT-FT-2001）。Serafin, G. 2020。《带漂移双曲布朗运动的势理论》，Probab. Math. Statist. 40，第1期，1–22。（引用 B-CT-FT-2001）。Bendikov, A. and W. Cygan. 2020。《与层级拉普拉斯算子谱相关的泊松近似》，Stoch. Dyn. 20，第5期，2050035，17。（引用 FT-1994、DM-FT-2004、DM-FT-2006）。Estala-Arias, S. 2020。《某些全不连通群上的伪微分算子与马尔可夫过程》，Statist. Probab. Lett. 164，108811，11。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Aguilar-Arteaga, V. A. and S. Estala-Arias. 2019。《阿代尔上的伪微分算子与马尔可夫过程》，p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 11，第2期，89–113。（引用 DM-FT-2004）。Bendikov, A. and W. Cygan. 2019。《层级拉普拉斯算子中心极限定理的收敛速度》，ESAIM Probab. Stat. 23，68–81。（引用 FT-1994、DM-FT-2004、DM-FT-2006）。Bendikov, A., W. Cygan, and W. Woess. 2019。《超度量空间上的振荡热核》，J. Spectr. Theory 9，第1期，195–226。（引用 FT-1994、DM-FT-2004、DM-FT-2006）。Bendikov, A. 2018。《超度量空间上类各向同性马尔可夫生成元的热核：综述》，p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 10，第1期，1–11。（引用 DM-FT-2004、DM-FT-2006）。Bendikov, A., A. Braverman, and J. Pike. 2018。《层级戴森模型中特征值的泊松统计》，Teor. Veroyatn. Primen. 63，第1期，117–144（英文，附俄文摘要）；英文译本，2018，Theory Probab. Appl. 63，第1期，94–116。（引用 FT-1994、DM-FT-2004、DM-FT-2006）。Applebaum, D. 2017。《局部紧阿贝尔群上的概率迹与泊松求和公式》，Forum Math. 29，第3期，501–517。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Yasuda, K. 2017。《p-进值非对称半稳定律与过程的极限定理》，p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 9，第1期，62–77。（引用 DM-FT-2004）。Cruz-López,M. and S. Estala-Arias. 2016。《有限阿代尔环上的不变超度量与马尔可夫过程》，$\mathbb{Q}$ 的 p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 8，第2期，89–114。（引用 DM-FT-2004）。Wittsten, J. 2015。《具有分布意义下边界值的广义轴对称势》，Bull. Sci. Math. 139，第8期，892–922。（引用 B-CT-FT-2001）。Bendikov, A. D., A. A. Grigor′yan, S. A. Molchanov, and G. P. Samorodnitskiĭ. 2015。《层级拉普拉斯算子的一类随机扰动》，Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 79，第5期，3–38（俄文，附俄文摘要）；英文译本，2015，Izv. Math. 79，第5期，859–893。（引用 FT-1994、DM-FT-2004、DM-FT-2006）。

Serafin, G. 2014。《管域中的双曲布朗运动势理论》，《数学讨论》135，第1期，27–52。（引用 B-CT-FT-2001）。Bendikov, A. D., A. A. Grigor′yan, Ch. Pittet, and W. Woess. 2014。《超度量空间上的各向同性马尔可夫半群》，Uspekhi Mat. Nauk 69，第4(418)期，3–102（俄文，附俄文摘要）；英文译本，2014，Russian Math. Surveys 69，第4期，589–680。（引用 FT-1994、DM-FT-2004、DM-FT-2006）。Mukhamedov, F. 2014。《关于一维可数状态 p-进 Potts 模型的强相变》，《统计力学杂志：理论与实验》2014，第1期，23。（引用 DM-FT-2004）。Mukhamedov, F. and H. Akın. 2013。《三阶 Cayley 树上的 p- 进 Potts 模型相变》，《统计力学杂志：理论与实验》 2013，第 7 期，30。（引用 DM-FT-2004 ）。Mukhamedov, F. 2013。《三阶 Cayley 树上 $q+1$ 状态 p-进 Potts 模型的动力系统与相变》，《数学物理分析与几何》16，第1期，49–87。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Mukhamedov, F. and H. Akın. 2013。《三阶 Cayley 树上的 p-进 Potts 模型》，《理论与数学物理》176，第3期，1267–1279（英文）。（引用 DM-FT-2004）。Mukhamedov, F. 2012。《用动力系统方法研究二阶 Cayley 树上 p-进 Potts 模型的相变》，《数学物理报告》70，第3期，385–406。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Bendikov, A., A. Grigor′yan, and C. Pittet. 2012。《离散超度量空间上的一类马尔可夫半群》，Potential Anal. 37，第2期，125–169。（引用 FT-1994、DM-FT-2004、DM-FT-2006）。Mukhamedov, F. 2012。《Cayley 树上可数状态 Potts 模型的 p-进拟 Gibbs 测度的存在性》，Journal of Inequalities and Applications 2012，12。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Grigorchuk, R. I. 2011。《有根树上群作用动力学的若干主题》，《Steklov 数学研究所论文集》273，64–175（英文）。（引用 FT-1994）。Casadio Tarabusi, E. and A. Figà-Talamanca. 2010。《树与半平面上漂移 Laplace 算子的 Poisson 核》，《数学讨论》118，第1期，147–159。（引用 B-CT-FT-2001、DM-FT-2006）。Mukhamedov, F. 2010。《Cayley 树上 $q+1$ 状态 Potts 模型的 p-进拟 Gibbs 测度》， p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications 2，第3期，241–251。（引用 DM-FT-2004）。Mukhamedov, F. 2009。《一维 p-进可数状态 Potts 模型广义 Gibbs 测度的存在性》，《 Steklov 数学研究所论文集》 265，165–176 （英文）。（引用 FT-1994 、DM-FT-2004）。Pearson, J. and J. Bellissard. 2009。《非交换黎曼几何与超度量 Cantor 集上的扩散》，《非交换几何杂志》3，第3期，447–480。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Albeverio, S. and W. Karwowski. 2008。《多分支树叶上的跳跃过程》，J. Math. Phys. 49，第9期，093503，20。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Casadio Tarabusi, E. and A. Figà-Talamanca. 2007。《齐次树上的漂移 Laplace 算子》，《美国数学学会会刊》135，第7期，2165–2175。（引用 B-CT-FT-2001）。Kaneko, H. and A. N. Kochubei. 2007。《p-进数域上的随机微分方程弱解》，《东北数学杂志》(2) 59，第4期，547–564。（引用 FT-1994、B-CT-FT-2001、DM-FT-2004）。Byczkowski, T., P. Graczyk, and A. Stós. 2007。《实双曲空间半空间的 Poisson 核》，《伊比利亚美洲数学杂志》23，第1期，85–126。（引用 B-CT-FT-2001）。Byczkowski, T. and J. Małecki. 2007。《实双曲空间中球的 Poisson 核与 Green 函数》，Potential Anal. 27，第1期，1–26。（引用 B-CT-FT-2001）。Khrennikov, A. Yu., F. M. Mukhamedov, and J. F. F. Mendes. 2007。《Cayley 树上可数状态 Potts 模型的 p-进 Gibbs 测度》，《非线性》20，第12期，2923–2937。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Kaneko, H. 2006。《局部域上的 (r,p)-容量与 Hausdorff 测度》，《数学探究》，新系列17，第2期，251–270（英文）。（引用 FT-1994、B-CT-FT-2001）。Del Muto, M. and A. Figà-Talamanca. 2006。《全不连通阿贝尔群上的各向异性扩散》，《太平洋数学杂志》225，第2期，221–229。（引用 FT-1994、DM-FT-2004）。Kaneko, H. a. Z., Xuelei. 2006a。《由 Galois 群诱导的局部域上的转移半群及其表示》，《理论概率杂志》19，第1期，221–234。（引用 B-CT-FT-2001）。Kaneko, H. 2006b。《局部域上与对称马尔可夫过程相关的 Sobolev 空间与 Dirichlet 空间》，Potential Anal. 24，第1期，87–103。（引用 B-CT-FT-2001）。Byczkowski, T. and M. Ryznar. 2006。《几何布朗运动的命中分布》，《数学研究》173，第1期，19–38。（引用 B-CT-FT-2001）。

松本 H. 和 M. Yor。2005年。布朗运动的指数泛函。*II.* 一些相关的扩散过程，《概率调查》**2**，348–384。（引用 B-CT-FT-2001）。Cohen, J. M.、F. Colonna 和 D. Singman。2004年。树的边界上的分布与测度，《数学分析与应用杂志》**293**，第 1 期，89–107。（引用 FT-1994）。M. Del Muto 和 A. Figà-Talamanca。2004年。局部紧超度量空间上的扩散，《数学展望》**22**，第 3 期，197–211。（引用 FT-1994、B-CT-FT-2001）。Kaneko, H. 2003年。在 p进数域上的非齐次随机过程，《东北数学杂志》（第二辑）**55**，第 1 期，65–87。（引用 FT-1994）。Kaneko, H. 2000年。在 p进数域上的一类空间非齐次狄利克雷空间。，《随机过程与应用》**88**，第 1 期，161–174。（引用 FT-1994）。P. Baldi、E. Casadio Tarabusi、A. Figà-Talamanca 和 M. Yor。2001年。双曲半平面上的非对称命中分布与从属永续过程，《伊比利亚美洲数学杂志》**17**，第 3 期，587–605。（引用 B-CT-FT-2001）。Albeverio, S. 和 X. Zhao。2001年。局部域上莱维过程的分解定理，《理论概率杂志》**14**，第 1 期，1–19。（引用 FT-1994、B-CT-FT-2001）。Albeverio, S. andX. Zhao。2000a年。关于 p进数上的随机游走的不同构造之间的关系，《Markov Process. Related Fields》**6**，第 2 期，239–255。（引用 FT-1994、B-CT-FT-2001）。Albeverio, S. 和 X. Zhao。2000b年。与 p进数上的随机游走相关的测度值分枝过程。，《概率年刊》**28**，第 4 期，1680–1710。（引用 FT-1994）。Albeverio, S.、W. Karwowski 和 X. Zhao。1999年。随机游走的渐近性质与谱结果，定义在p进数上，《随机过程与应用》**83**，第 1 期，39–59。（引用 FT-1994）。

离散数学研究所
格拉茨工业大学
施泰雷尔街30号 ，奥地利格拉茨 A-8010 ，奥地利
电子邮件地址: woess@tugraz.at