arXiv:2601.02817v1 [math.FA] 6 Jan 2026

Berezin 扇形算子简介及其在 Berezin 数不等式中的应用

SAIKAT MAHAPATRA、SWETA MUKHERJEE、ANIRBAN SEN、RIDDHICK BIRBONSHI 和 KALLOLPAUL

Abstract. 我们引入了一类称为 Berezin 扇形算子的新型算子，它推广了经典扇形算子。我们在 Hardy-Hilbert 空间上给出了示例，表明存在 Berezin 扇形算子但并非扇形算子的算子，并且 Berezin 扇形指标可以严格小于经典指标。我们推导了这类算子的 Berezin 数不等式，包括幂不等式的一个弱版本，并研究了 Dirichlet 空间上有限秩算子和加权移位算子的 Berezin 值域的几何性质。我们还提出了一个问题：对于 Dirichlet 空间上的复合微分算子，是否也可以进行类似的构造。

Contents

1. 引言 1
2. Berezin 扇形算子 3
3. Berezin 扇形算子的不等式 9
4. 幂不等式与 Berezin 扇形算子 14
5. 其他观察 19
6. 结论 22
声明 23
参考文献 23

1. Introduction

如果一个算子的数值域位于复平面右半部的一个锥内，且该锥的顶点位于原点，则称该算子为扇形算子。由于扇形算子在数值半径不等式研究中发挥着重要作用，因而受到了广泛关注。多年来，许多研究人员从不同的几何视角对这些算子进行了研究，并针对数值半径得到了若干有趣的界，这些界显著改进了已有结果，参见 [1, 13, 19, 30, 35]。本文的主要目标是引入 Berezin 扇形算子，其中扇形算子是其特殊情形。我们在 Hardy-Hilbert 空间中给出了这些算子的说明性示例

2020 数学主题分类。主要分类：47A30, 47B12, 47B32；次要分类：47A05, 47B38。关键词和短语。Berezin 值域、Berezin 数、再生核希尔伯特空间、扇形算子、不等式。

并为这一类算子建立了 Berezin 数不等式，从而改进了再生核希尔伯特空间上一般有界线性算子的已有不等式。

设 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 表示复可分希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上所有有界线性算子构成的 C^*-代数，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。任意 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 都可以唯一分解为 $T = \Re(T) + i\Im(T)$，其中 $\Re(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$，且 $\Im(T) = \frac{1}{2i}(T - T^*)$。这种分解称为笛卡尔分解。若对所有 $x(\neq 0) \in \mathscr{H}$，$T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 满足 $\langle Tx, x\rangle > 0$，则称其为正算子，记作 $T > 0$。对于 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，$|T|$ 表示正算子 $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$。$T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的数值域和数值半径分别记作 $W(T)$ 和 $w(T)$，并分别定义为 $W(T) = \{\langle Tx, x\rangle : x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$ 以及 $w(T) = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$。

非空集合 $\mathscr{X}$ 上的再生核希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 是由定义在 $\mathscr{X}$ 上的所有复值函数构成的希尔伯特空间，并具有如下性质：对于每个$\lambda \in \mathscr{X}$，定义在 $\mathscr{H}$上的线性求值泛函 $\phi \to \phi(\lambda)$ 都是连续的（见 [34]）。里斯表示定理保证，对于每个 $\lambda \in \mathscr{X}$，存在唯一的 $k_\lambda \in \mathscr{H}$，使得对于所有 $\phi \in \mathscr{H}$，$\phi(\lambda) = \langle \phi, k_\lambda\rangle$。函数族 $\{k_\lambda : \lambda \in \mathscr{X}\}$ 是 $\mathscr{H}$的所有再生核构成的集合。$\mathscr{H}$的所有归一化再生核构成的集合为函数族 $\hat{}\{k_\lambda = k_\lambda/\|k_\lambda\| : \lambda \in \mathscr{X}\}$.

本文中，$\mathscr{H}$表示集合 $\mathscr{X}$上的一个再生核希尔伯特空间~。对于每个 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，$T$的 Berezin 变换（见 [8, 9]）是定义在 $\mathscr{X}$ 上的函数 $\widetilde{T}$，其定义为

$$\widetilde{T}(\lambda) = \langle T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \text{ for all } \lambda \in \mathscr{X}.$$

T 的 Berezin 值域定义为

$$\mathbf{Ber}(T) := \{\widetilde{T}(\lambda) : \lambda \in \mathscr{X}\},$$

见 [28]。对于 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，量 $\mathbf{ber}(T)$ 和 $\|T\|_{ber}$，分别称为 T 的 Berezin 数和 Berezin 范数，其定义为

$$\mathbf{ber}(T) := \sup\left\{|\widetilde{T}(\lambda)| : \lambda \in \mathscr{X}\right\}$$

and

$$\|T\|_{ber} := \sup\left\{|\langle T\hat{k}_\lambda, \hat{\mu}_y\rangle| : \lambda, \mu \in \mathscr{X}\right\},$$

见 [7, 27]。从定义可知，对于任意 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，

$$\mathbf{Ber}(T) \subseteq W(T) \text{ and } \mathbf{ber}(T) \leq w(T).$$

与数值域不同，Berezin 值域一般不具有凸性。Berezin 值域的凸性最早在 [16] 中得到研究，随后又在多篇文献中进行了探讨 [4, 5, 28, 36]。此外，[12] 证明了正算子的 Berezin 数与 Berezin 范数相等。关于 Berezin 数不等式的最新进展，请参见 [10, 11, 31, 32]。

本文结构如下：除引言外，全文共分五节。第2节介绍一类称为 Berezin 扇形算子的新型算子，它推广了经典的扇形算子概念。本节还给出了 Hardy–Hilbert 空间中的若干例子，并阐述定义这一新类算子的动机。第3节推导了若干

适用于 Berezin 扇形算子的 Berezin 数不等式，并改进了若干已知不等式。第4节专门讨论 Berezin 数的幂不等式：我们为实部和虚部满足相应幂不等式的 Berezin 扇形算子建立了新的不等式，并进一步提出这些不等式的弱版本。最后，第5 节概述 Berezin 值域的一些基本特征，例如有限秩算子和 Dirichlet 空间上的加权移位算子的凸性，以及关于实轴和虚轴的对称性。由于这些算子的 Berezin 值域呈现出与 Hardy–Hilbert 空间中所见性质相似的特征，我们最后提出一个问题：能否为 Dirichlet 空间上的某些复合微分算子构造类似的 Berezin 扇形算子?

2. Berezin sectorial operators

本节首先回顾文献 [3] 中给出的扇形算子的经典定义。

定义 2.1。 设 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 和 $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}: \ |\arg z| \leq \theta\}$ 是复平面 $\mathbb{C}$中的一个扇形，其顶点位于原点，半角为 θ。那么，希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的线性算子 T 称为顶点为 $z = 0$、半角为 θ的扇形算子，若 $W(T) \subseteq S_\theta$。

受扇形算子定义的启发，我们定义一类新的有界线性算子，称为 Berezin 扇形算子:

定义 2.2。 再生核希尔伯特空间 $\mathscr{H}$上的线性算子 T 称为顶点为 $z = 0$ 、半角为 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$的 ***Berezin*** 扇形算子，若$\boldsymbol{Ber}(T) \subseteq S_\theta$，也就是说， T 的 ***Berezin*** 值域完全包含在复平面右半部的一个锥内，该锥的顶点位于原点，半角为 θ。这类算子记作 Π_θ^{Ber}.

由定义可直接得出，每个扇形算子都是 Berezin 扇形算子，因此后者是前者的一种自然推广。然而，反之并不成立，并非每个 Berezin 扇形算子都是扇形算子。为说明 Berezin 扇形算子，我们首先考虑 Hardy-Hilbert 空间上的复合微分算子；对此，有必要估计 Berezin 值域和数值域。

回忆一下，开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 Hardy-Hilbert 空间记为 $H^2(\mathbb{D})$，其定义为

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ with } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

$H^2(\mathbb{D})$ 是一个再生核希尔伯特空间，其中在 $w \in \mathbb{D}$ 处的核函数（称为 Szeg˝o 核）为

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \bar{w}z} \text{ for all } z \in \mathbb{D}.$$

此外，一阶导数的点值泛函所对应的核函数为

$$k'_w(z) = \frac{d}{d\bar{w}}\left(\frac{1}{1-\bar{w}z}\right) = \frac{z}{1-\bar{w}z} \text{ for all } z \in \mathbb{D},$$

见 [17, 定理 2.16]. 对于解析自映射 ϕ 在 $\mathbb{D}$上的复合微分算子 D_ϕ在 $H^2(\mathbb{D})$ 定义为 $D_\phi(f) = f' \circ \phi$. 众所周知，若$\|\phi\|_\infty < 1$ 则 D_ϕ 在 H^2 (见 [33]) 有界，且对于 $\phi(z) = \rho z$ 其中 $0 < \rho < 1$,

$$\|D_\phi\| = \left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor \rho^{\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor - 1},$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示最大整数函数（见 [21, 定理 2]）。现在，我们确定作用于 $H^2(\mathbb{D})$ 上的算子 D_ϕ 的 Berezin 值域，其中 $\phi(z) = \rho z$且 $\rho \in (0, 1)$。

命题2.3。若 $\phi(z) = \rho z$ 其中 $\rho \in (0, 1)$ 则

$$\boldsymbol{Ber}(D_\phi) = \overline{B(0, r_1(\rho))},$$

其中

$$r_1(\rho) = \frac{(3 - \sqrt{9\rho^2 - 14\rho + 9} - \rho)\sqrt{6\rho + 2\sqrt{9\rho^2 - 14\rho + 9} - 6}}{\sqrt{\rho}(3\rho + \sqrt{9\rho^2 - 14\rho + 9} - 5)^2}.$$

证明。 D_ϕ 在 $z = re^{i\zeta} \in \mathbb{D}$ 处的Berezin 符号为

$$\widetilde{D_\phi}(z) = \frac{1}{\|k_z\|^2}\langle D_\phi k_z, k_z\rangle = (1 - |z|^2)k'_z(\rho z) = (1 - r^2)\frac{\rho r}{(1 - \rho r^2)^2}e^{i\zeta}.$$

考虑函数 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^+$，其定义为 $f(r) = (1 - r^2)^{\rho r (1-\rho r^2)^2}$. 显然，$f$ 是连续的，并且在两个端点处均为零。因此，f 在（0，1）内取得其最大值。f 的最大值为

$$\max_{r\in(0,1)} f(r) = \frac{(3 - \sqrt{9\rho^2 - 14\rho + 9} - \rho)\sqrt{6\rho + 2\sqrt{9\rho^2 - 14\rho + 9} - 6}}{\sqrt{\rho}(3\rho + \sqrt{9\rho^2 - 14\rho + 9} - 5)^2} = r_1(\rho).$$

f 的连续性意味着 $\mathbf{Ber}(D_\phi) = \overline{B(0, r_1(\rho))}$。

□

接下来我们求 D_ϕ 的数值域，其中 $\phi(z) = \rho z$，且 $\rho \in (0, 1)$。为此，我们首先注意到，与标准正交基 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ 相对应的 D_ϕ 的矩阵表示为，其中 $e_n(z) = z^n$,

$$D_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 2\rho & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 3\rho^2 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 4\rho^3 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

显然，此处 D_ϕ 是一个有界的加权移位算子。该加权移位算子 D_ϕ 与 $e^{i\theta}D_\phi$ 对所有 $\theta \in \mathbb{R}$，均酉等价，因此 D_ϕ 是一个以原点为中心的圆盘（见 [39]）。此外，我们还有，该 D_ϕ 的权重序列有界且收敛于 0。因此， D_ϕ 是紧算子，并且 $0 \in W(D_\phi)$。所以，D_ϕ 的数值域是一个以原点为中心的闭圆盘（[29, 推论 1]）。因此，这一观察刻画了 D_ϕ的数值域形状，但没有提供其大小的任何信息。由于确定精确的数值半径极为困难，我们转而为其建立上下界。

众所周知，$\frac{\|T\|}{2} \leq w(T)$（见 [25]）。因此，得到 $w(D_\phi)$的如下界，即，

$$\frac{1}{2}\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor \rho^{\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor - 1} \leq w(D_\phi). \tag{2.1}$$

为获得上界，我们回顾一个涉及 Aluthge变换 的已知估计，该估计将在下一个结果中使用。设 T 是希尔伯特空间上的有界线性算子，且 $T = U|T|$ 是其极分解，其中$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$，并且 U是偏等距算子。 T的 Aluthge变换 $\widetilde{T}$定义为

$$\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}}.$$

在 [40, 定理 2.1] 中证明了，有界线性算子的数值半径上界可以通过其 Aluthge变换的数值半径得到。特别地，以下不等式成立：

$$w(T) \leq \frac{1}{2}(\|T\| + w(\widetilde{T})). \tag{2.2}$$

现在，我们可以证明以下包含关系。

命题2.4。若 $\phi(z) = \rho z$ 满足 $\rho \in (0,1)$ 则

$$\overline{B(0, r_2(\rho))} \subseteq W(D_\phi) \subseteq \overline{B(0, r_3(\rho))},$$

其中

$$r_2(\rho) = \frac{1}{2}\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor \rho^{\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor - 1}$$

and

$$r_3(\rho) = \frac{1}{2}\left(\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor \rho^{\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor - 1} + \sqrt{\left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor} \rho^{\left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor - \frac{1}{2}} \right).$$

证明。 D_ϕ的Aluthge变换为 $\widetilde{D_\phi} = |D_\phi|^{\frac{1}{2}} U |D_\phi|^{\frac{1}{2}}$，其中

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \end{pmatrix}$$

and

$$|D_\phi| = (D_\phi^* D_\phi)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & w_2 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & w_3 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

其中 $w_n = n\rho^{n-1}$、 $n = 1$，2， $\cdots$。因此，

$$\widetilde{D_\phi} = \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{w_3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{w_3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{w_1 w_2} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & \sqrt{w_2 w_3} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{w_3 w_4} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & \alpha_2 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \alpha_3 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \ \alpha_n = \sqrt{w_n w_{n+1}} = \sqrt{n(n+1)}\rho^{n-\frac{1}{2}}.$$

$\widetilde{\ }$由于， $\|D_\phi\| = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ 所以现在我们计算数列$\{\alpha_n\}$的上确界。注意，函数 $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ 由 $f(x) = x(x+1)\rho^{2x-1}$给出，在 $(1, \infty)$ 中恰有一个临界点，且该点是局部最大值。最大值将在满足下述条件的最大自然数 $n \geq 2$ 处取得

$$n(n-1)\rho^{2n-3} \leq n(n+1)\rho^{2n-1},$$

等价地，

$$n \leq \left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor.$$

因此，我们有

$$\|\widetilde{D_\phi}\| = \sqrt{\left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor + 1 \right)} \rho^{\left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor - \frac{1}{2}}.$$

现在，由不等式（2.2），可得

$$w(D_\phi) \leq \frac{1}{2} \left(\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor \rho^{\left\lfloor \frac{1}{1-\rho} \right\rfloor - 1} + \sqrt{\left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor} \rho^{\left\lfloor \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \right\rfloor - \frac{1}{2}} \right). \tag{2.3}$$

因此，根据前面的论证以及由（2.3）给出的界，即可得到该结果。

□

在下列图中：

- 红色圆圈（ ）表示包含数值域的圆盘边界。
- 绿色圆圈（ ）表示数值域所包含的圆盘边界。
- Berezin 值域由蓝色（ ）圆盘表示。

对于符号为 $\phi(z)$ 的复合微分算子 $D_\phi = \frac{1}{2}z$，图 1 表示 Berezin 值域、数值域所包含的圆盘，以及包含数值域的圆盘。

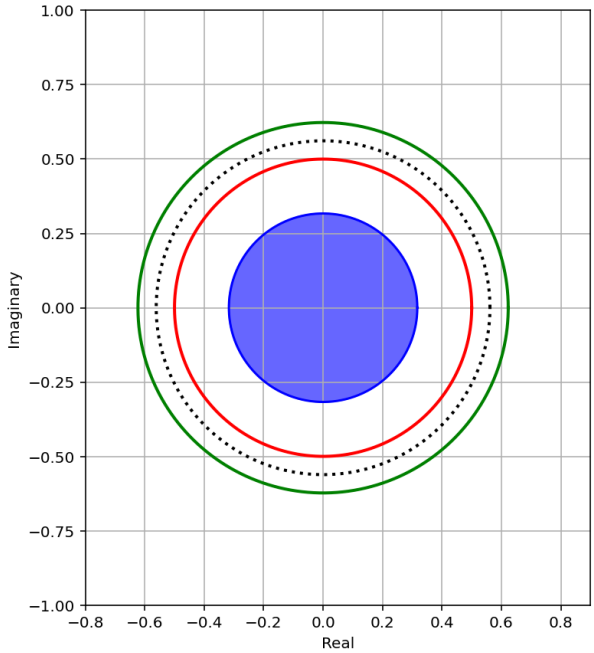

FIGURE 1

图 2 表示算子 $D_\phi + 0.41I$，的相同情形，其中 $\phi(z) = \frac{1}{2}z$.显然，该算子不是扇形算子。然而，**Berezin**$(D_\phi + 0.41I) \subseteq S_{\frac{\pi}{3.55}}$，因此它是扇形指标为 $\frac{\pi}{3.55}$. 的 Berezin 扇形算子

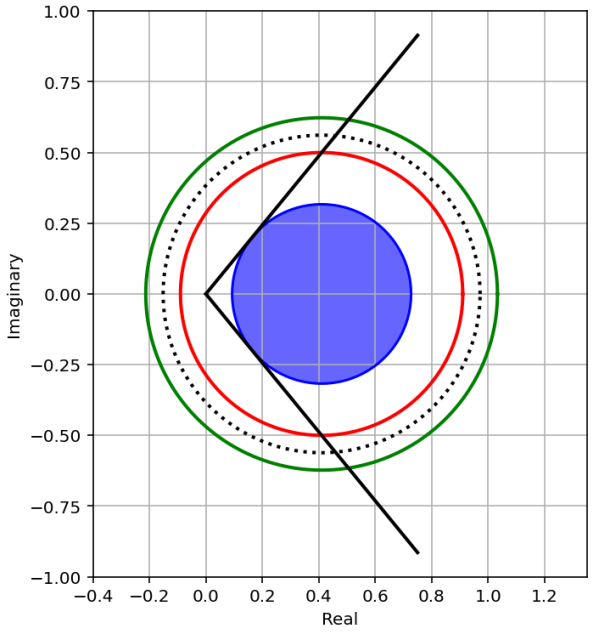

FIGURE 2

图3 表示算子 $D_\phi + 0.66I$，的相同情形，其中 $\phi(z) = \frac{1}{2}z$.显然，该算子是扇形算子，其扇形指标为 $\frac{\pi}{2.54}$，同时也是指标为 $\frac{\pi}{6.27}$.的 Berezin 扇形算子

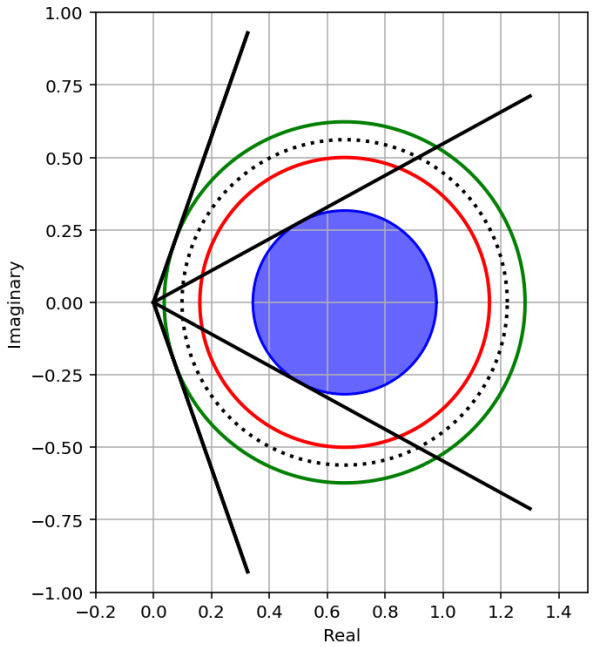

FIGURE 3

这些例子表明，即使在经典意义下并非扇形的算子，也可以转化为 Berezin 扇形算子。值得注意的是，

Berezin 扇形指标通常严格小于经典扇形指标，如算子 $D_\phi + 0.66I$, 所示，其中 $\phi(z) = \frac{1}{2}z$. 如前所述，在此情况下，经典扇形指标为 $\frac{\pi}{2.54}$, 而 Berezin 扇形指标则降至 $\frac{\pi}{6.27}$, 这凸显了通过 Berezin 扇形方法可获得更精确的界。这些观察促使我们从几何视角研究 Berezin 扇形算子的 Berezin 数不等式，并将 Berezin 数不等式推广到经典意义下非扇形的算子。

3. Inequalities for Berezin sectorial operators

本节将推导若干涉及 Berezin 扇形算子的 Berezin 数的不等式。我们从以下引理开始，并利用它得到后续结果。

引理 3.1. 设 $T \in \Pi_\theta^{Ber}$。则

$$\sin\theta\, \boldsymbol{ber}(T) \geq \boldsymbol{ber}(\Im(T)).$$

证明。对于 $\theta = 0$，根据假设可直接得到所需的不等式：$T \in \Pi_\theta^{\mathbf{Ber}}$意味着 $\Im(A) = 0$。接下来，考虑 $\theta \neq 0$，并设 $\hat{k}_\lambda$ 是 $\mathscr{H}$ 的归一化再生核。于是有

$$\begin{aligned}
\left|\langle T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right| &= \sqrt{\langle \Re(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^2 + \langle \Im(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^2} \\
&\geq \sqrt{\cot^2\theta\, \langle \Im(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^2 + \langle \Im(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^2} \\
&= \csc\theta \left|\langle \Im(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right|.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\sin\theta\, \mathbf{ber}(T) \geq \left|\langle \Im(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right|. \tag{3.1}$$

因此，对所有 $\lambda \in \mathscr{X}$ 取上确界，即得所需的不等式。□

现在，我们得到 Berezin 数的一个下界。

定理 3.2. 设 $T \in \Pi_\theta^{Ber}$ 满足 $\theta \neq 0$。则

$$\boldsymbol{ber}(T) \geq \frac{\csc\theta}{2}\boldsymbol{ber}\left(\Re(T) \pm \Im(T)\right) + \frac{\csc\theta}{2}\Big(\boldsymbol{ber}(\Im(T)) - \boldsymbol{ber}(\Re(T))\Big).$$

证明。设 $\hat{k}_\lambda$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个归一化再生核。于是，利用 T 的笛卡尔分解，我们有

$$\left|\langle T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right|^2 = \left|\langle \Re(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right|^2 + \left|\langle \Im(T)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right|^2.$$

由此，我们推得

$$\mathbf{ber}(T) \geq \mathbf{ber}(\Re(T)). \tag{3.2}$$

因此，结合引理3.1 和不等式（3.2），我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{ber}(T) &\geq \max\left\{\mathbf{ber}(\Re(T)), \csc\theta \mathbf{ber}(\Im(T))\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{ber}(\Re(T)) + \csc\theta \mathbf{ber}(\Im(T))\right) + \frac{1}{2}\left|\mathbf{ber}(\Re(T)) - \csc\theta \mathbf{ber}(\Im(T))\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\csc\theta}{2}\left(\mathbf{ber}(\Re(T))+\mathbf{ber}(\Im(T))\right)+\frac{(1-\csc\theta)}{2}\mathbf{ber}(\Re(T))\\
&\qquad +\frac{1}{2}\left|\mathbf{ber}(\Re(T))-\csc\theta\mathbf{ber}(\Im(T))\right|\\
&\geq \frac{\csc\theta}{2}\mathbf{ber}\big(\Re(T)\pm\Im(T)\big)-\frac{\csc\theta}{2}\mathbf{ber}(\Re(T))\\
&\qquad +\frac{1}{2}\left|\mathbf{ber}(\Re(T))-(\mathbf{ber}(\Re(T))-\csc\theta\mathbf{ber}(\Im(T)))\right|\\
&= \frac{\csc\theta}{2}\mathbf{ber}\left(\Re(T)\pm\Im(T)\right)+\frac{\csc\theta}{2}\Big(\mathbf{ber}(\Im(T))-\mathbf{ber}(\Re(T))\Big),
\end{aligned}$$

如所需。 □

设 $T\in\Pi_\theta^{\mathbf{Ber}}$满足 $\Im(T)<0$。那么，由 T 的笛卡尔分解显然可知， $iT\in\Pi_\theta^{\mathbf{Ber}}$也成立。反过来，若 T 且 $iT\in\Pi_\theta^{\mathbf{Ber}}$，则 $\Im(T)<0$。设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 满足

$$\mathbf{Ber}(T)\subseteq\left\{re^{-i\theta}:\theta_1\leq\theta\leq\theta_2\right\}, \tag{3.3}$$

其中 $r>0$ 且 θ_1， $\theta_2\in(0,-\frac{\pi}{2})$。那么， T和 $iT\in\Pi_\theta^{\mathbf{Ber}}$的扇形指标分别为 θ_2 和 $\frac{\pi}{2}-\theta_1$。

推论 3.3. 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 满足性质 （3.3） 。那么

$$\boldsymbol{ber}(T)\geq\frac{\csc\theta}{2}\boldsymbol{ber}\left(\Re(T)\pm\Im(T)\right)+\frac{\csc\theta}{2}\left|\boldsymbol{ber}(\Re(T))-\boldsymbol{ber}(\Im(T))\right|,$$

其中 $\theta=$最大值$\{\theta_2,\frac{\pi}{2}-\theta_1\}$.

证明。 由于 T 和 iT 属于 $\Pi_\theta^{\mathbf{Ber}}$，利用定理 3.2 可得，

$$\mathbf{ber}(T)\geq\frac{\csc\theta}{2}\mathbf{ber}\big(\Re(T)\pm\Im(T)\big)+\frac{\csc\theta}{2}\big(\mathbf{ber}(\Im(T))-\mathbf{ber}(\Re(T))\big) \tag{3.4}$$

and

$$\mathbf{ber}(T)\geq\frac{\csc\theta}{2}\mathbf{ber}\big(\Re(T)\pm\Im(T)\big)+\frac{\csc\theta}{2}\big(\mathbf{ber}(\Re(T))-\mathbf{ber}(\Im(T))\big). \tag{3.5}$$

因此，结合不等式（3.4）和（3.5），我们得到所需的不等式 .

□

注 3.4。 由于 csc $\theta>1$ 对任意 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$。因此，推论 3.3 给出

$$\begin{aligned}
\mathbf{ber}(T) &\geq \frac{\csc\theta}{2}\mathbf{ber}\big(\Re(T)\pm\Im(T)\big)+\frac{\csc\theta}{2}\big|\mathbf{ber}(\Re(T))-\mathbf{ber}(\Im(T))\big|\\
&\geq \frac{1}{2}\big(\mathbf{ber}(\Re(T))\pm\mathbf{ber}(\Im(T))\big)+\frac{1}{2}\big|\mathbf{ber}(\Re(T))-\mathbf{ber}(\Im(T))\big|.
\end{aligned}$$

因此，我们想指出，推论3.3 给出的界比 [37, 定理 3.1], 中已有的界更尖锐，即

$$\mathbf{ber}(T)\geq\frac{1}{2}\big(\mathbf{ber}(\Re(T))\pm\mathbf{ber}(\Im(T))\big)+\frac{1}{2}\big|\mathbf{ber}(\Re(T))-\mathbf{ber}(\Im(T))\big|.$$

在下一个结果中，若两个算子的乘积算子是具有非零扇形指标的 Berezin 扇形算子，我们将得到它们乘积的一个下界。

定理 3.5. 设 $S,T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 且 $T^*S \in \Pi_\theta^{Ber}$满足 $\theta \neq 0$。那么对于任意$\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\boldsymbol{ber}(T^*S) \geq \max\{\beta_1, \beta_2\},$$

$$\begin{aligned} where \quad \beta_1 &= \frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\||S+i\alpha T|^2\|_{ber} - \|S^*S+\alpha^2T^*T\|_{ber}\Big), \\ and \quad \beta_2 &= \frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\|S^*S+\alpha^2T^*T\|_{ber} - \||S-i\alpha T|^2\|_{ber}\Big). \end{aligned}$$

ˆ证明。 设 k_λ 是 $\mathscr{H}$ 的归一化再生核。则有

$$\begin{aligned} \|(S+i\alpha T)\hat{k}_\lambda\|^2 &= \langle S^*S\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle + \alpha^2\langle T^*T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle + 2\alpha\big\langle(\Im(T^*S)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\big\rangle \\ &= \langle(S^*S+\alpha^2T^*T)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle + 2\alpha\big|\big\langle\Im(T^*S)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\big\rangle\big| \\ &\leq \|S^*S+\alpha^2T^*T\|_{ber} + 2\alpha\sin\theta\mathbf{ber}(T^*S). \ \Big(\text{by inequality (3.1)}\Big) \end{aligned}$$

因此，对所有 $\lambda \in \Omega$ 取上确界，得到

$$\frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\||S+i\alpha T|^2\|_{ber} - \|S^*S+\alpha^2T^*T\|_{ber}\Big) \leq \mathbf{ber}(T^*S) \tag{3.6}$$

再次

$$\begin{aligned} \big\||S-i\alpha T|^2\big\|_{ber} &\geq \langle|S-i\alpha T|^2\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle \\ &= \langle S^*S\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle + \alpha^2\langle T^*T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle - 2\alpha\Im\langle T^*S\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle \\ &\geq \langle(S^*S+\alpha^2T^*T)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle - 2\alpha|\Im\langle S^*T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle| \\ &\geq \langle(S^*S+\alpha^2T^*T)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle - 2\alpha\sin\theta\mathbf{ber}(T^*S). \ \Big(\text{by inequality (3.1)}\Big) \end{aligned}$$

因此，对所有 $\lambda \in \Omega$ 取上确界，得到

$$\frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\|S^*S+\alpha^2T^*T\|_{ber} - \||S-i\alpha T|^2\|_{ber}\Big) \leq \mathbf{ber}(T^*S) \tag{3.7}$$

最后，结合不等式（3.6）和（3.7），即可得到所需结果。

□

以下两个不等式可由定理 3.5 分别取 $T=S^*$ 和 $T=I$立即得到。

推论 3.6. ***(i)*** 若 $S^2 \in \Pi_\theta^{ber}$且 $\theta \neq 0$，则

$$\boldsymbol{ber}(S^2) \geq \max\{\beta_1, \beta_2\},$$

$$\begin{aligned} where \quad \beta_1 &= \frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\||S+i\alpha S^*|^2\|_{ber} - \|S^*S+\alpha^2SS^*\|_{ber}\Big), \\ and \quad \beta_2 &= \frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\|S^*S+\alpha^2SS^*\|_{ber} - \||S-i\alpha S^*|^2\|_{ber}\Big). \end{aligned}$$

(ii) 若 $S \in \Pi_\theta^{ber}$且 $\theta \neq 0$，则

$$\boldsymbol{ber}(S) \geq \max\{\beta_1, \beta_2\},$$

$$where \quad \beta_1 = \frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\||S+i\alpha I|^2\|_{ber} - \|S^*S+\alpha^2 I\|_{ber}\Big),$$
$$and \quad \beta_2 = \frac{\csc\theta}{2\alpha}\Big(\|S^*S+\alpha^2 I\|_{ber} - \||S-i\alpha I|^2\|_{ber}\Big).$$

注 3.7。 (i) 根据 [12, 推论 2。24], 不等式

$$\frac{1}{2}\Big(\|S+iT\|^2_{\mathbf{ber}} - \|S^*S+T^*T\|_{\mathbf{ber}}\Big) \leq \mathbf{ber}(T^*S). \tag{3.8}$$

成立。注意 $\|S+i\alpha T\|^2_{ber} \leq \||s+i\alpha T|^2\|_{ber}$ 且 $\csc\theta > 1$ 对任意 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$。因此，对于 $\alpha = 1$，定理 3.5 改进了（3.8）中的界。

(ii) 在 $A = S$ 和 $B = iT$ 中取 [23, 定理 5.1]，，我们得到

$$\frac{1}{2}\mathbf{ber}(S^*S+T^*T) - \frac{r^2}{2} \leq \mathbf{ber}(T^*S), \tag{3.9}$$

其中 $\|S-iT\| \leq r$。注意 $\||T-iS|^2\|_{ber} \leq \|T-iS\|^2$ 且 $\cos\theta > 1$ 对任意$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$。因此，对于 $\alpha = 1$，定理 3.5 改进了（3.9）中的界。

(iii) 根据 [14, 定理 3.2]，，有以下不等式成立：

$$\|S+iT\|^2_{\mathbf{ber}} - \Big(\|S\|^2_{ber} + \|T\|^2_{ber} + \mathbf{ber}_{\frac{1}{2}}(S^*S)\mathbf{ber}_{\frac{1}{2}}(T^*T)\Big) \leq \mathbf{ber}(T^*S). \tag{3.10}$$

设 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 且 $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 作用于 $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2$。注意到 $T^*S \in \Pi^{\mathbf{Ber}}_{\frac{\pi}{4}}$。那么不等式 (3.10) 给出下界 $6(\sqrt{2}-1) \leq \mathbf{ber}(T^*S)$，而定理 3.5 则给出更精确的估计 $6 \leq \mathbf{ber}(T^*S)$。因此，定理 3.5 给出的下界严格优于 (3.10)。

在下面的定理中，我们证明涉及 Berezin 数和算子范数的不等式。假设算子 $B : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 是一个可逆的有界线性算子，且其有界逆算子为 B^{-1}。那么容易观察到

$$\sqrt{\langle B^*Bx, x\rangle} \geq \|B^{-1}\|^{-1}\sqrt{\langle x, x\rangle} \text{ for all } x \in \mathscr{H}.$$

定理 3.8. 设 $T, S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 且 $S^*T \in \Pi^{ber}_{\theta}$。若 S 可逆，则

$$\||T|^2\|^{\frac{1}{2}}_{ber} \leq \|S^{-1}\|\Big(\sin\theta\, \boldsymbol{ber}(S^*T) + \frac{1}{2}\big\||T-iS|^2\big\|_{ber}\Big).$$

ˆ证明。 设 k_λ 是 $\mathscr{H}$ 的归一化再生核。那么我们有

$$\begin{aligned} \big\||T-iS|^2\big\|_{ber} &\geq \langle |T-iS|^2\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\ &= \langle T^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle + \langle S^*S\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle - 2\Im\langle S^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle \\ &\geq \sqrt{\langle T^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\langle S^*S\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle} - 2|\Im\langle S^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle|. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由于， S可逆，因此 $\sqrt{\langle T^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\langle S^*S\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle} \geq \|S^{-1}\|^{-1}$。这意味着

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\langle T^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle}\|S^{-1}\|^{-1} &\leq \langle T^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle + \|S^{-1}\|^{-2} \\ &\leq \langle T^*T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle + \langle S^*S\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle. \end{aligned} \tag{3.12}$$

现在，由不等式（3.11）和（3.12）可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle|T|^2\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle} &\leq \|S^{-1}\|\Big(|\Im\langle S^*T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle|+\frac{1}{2}\||T-iS|^2\|_{ber}\Big)\\ &\leq \|S^{-1}\|\Big(\sin\theta\mathbf{ber}(S^*T)+\frac{1}{2}\||T-iS|^2\|_{ber}\Big).\end{aligned}$$

因此，对所有 $\lambda\in\Omega$ 取上确界，即可得到所需的界。 □

注 3.9。 取 $B=iS$ 于 [38, 定理 2。20], 不等式变为

$$\||T|^2\|_{ber}^{\frac{1}{2}}\leq\|S^{-1}\|\Big(\mathbf{ber}(S^*T)+\frac{1}{2}\||T-iS|^2\|_{ber}\Big). \tag{3.13}$$

由于 $\sin\theta<1$ 对于 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$ 因此定理 3.11 给出的界优于式（3.13）中的界。

在定理 $S=T^*$ 中取 3.11，可得到以下推论。

推论 3.10。 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 且 $T^2\in\Pi_\theta^{ber}$，则

$$\||T|^2\|_{ber}^{\frac{1}{2}}\leq\|T^{-1}\|\Big(\sin\theta\boldsymbol{ber}(T^2)+\frac{1}{2}\||T-iT^*|^2\|_{ber}\Big).$$

引理 3.11。 [18] 设 $(\mathscr{H};\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个复内积空间，且 $x,y\in\mathscr{H}$。那么对任意 $t\in\mathbb{R}$，以下不等式成立：

$$0\leq\|x\|^2\|y\|^2\leq\frac{1}{4}\Big(\Im\langle x,y\rangle+\Re\langle x,y\rangle\Big)^2+\frac{\|y\|^2}{2}\Big(\|x-ty\|^2+\|x-ity\|^2\Big).$$

定理 3.12。设 $T\in\Pi_\theta^{Ber}$且 $t\in\mathbb{R}$。那么

$$\||T|^2\|_{ber}\leq\frac{1}{4}(\sin\theta+1)^2\boldsymbol{ber}^2(T)+\frac{1}{2}\inf_{t\in\mathbb{R}}\Big(\big\||T-tI|^2\big\|_{ber}+\big\||T-itI|^2\big\|_{ber}\Big).$$

证明。 设 k_λ 是 $\mathscr{H}$的归一化再生核，且 $t\in\mathbb{R}$。现在，取 $\hat{x}=Tk_\lambda$ 和 $y=k_\lambda$，代入引理 3.11，得到

$$\begin{aligned}\|T\hat{k}_\lambda\|^2 &\leq \frac{1}{4}\Big(\Im\langle T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle+\Re\langle T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\|T\hat{k}_\lambda-t\hat{k}_\lambda\|^2+\|T\hat{k}_\lambda-it\hat{k}_\lambda\|^2\Big)\\ &\leq \frac{1}{4}\Big(|\Im\langle T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle|+|\Re\langle T\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle|\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\||T-tI|^2\|_{ber}+\||T-itI|^2\|_{ber}\Big)\\ &\leq \frac{1}{4}\big(\sin\theta+1\big)^2\mathbf{ber}^2(T)+\frac{1}{2}\Big(\||T-tI|^2\|_{ber}+\||T-itI|^2\|_{ber}\Big).\end{aligned}$$

对 $\lambda\in\mathscr{X}$ 取上确界，得到

$$\||T|^2\|_{ber}\leq\frac{1}{4}(\sin\theta+1)^2\mathbf{ber}^2(T)+\frac{1}{2}\Big(\big\||T-tI|^2\big\|_{ber}+\big\||T-itI|^2\big\|_{ber}\Big).$$

由于上述不等式对所有 $t\in\mathbb{R}$ 都成立，对 $t\in\mathbb{R}$ 取下确界即可得到所需结果。□

注 3.13。 在 [23, 推论 4。1]中推导得

$$\||T|^2\|_{ber}\leq\frac{1}{2}\mathbf{ber}^2(T)+\frac{1}{2}\inf_{t\in\mathbb{R}}\Big(\||T-tI|^2\|_{ber}+\||T-itI|^2\|_{ber}\Big). \tag{3.14}$$

显然，若 $\theta<$ 正弦$^{-1}(\sqrt{2}-1)$，则定理 3.12 给出的界优于（3.14）中的界。

4. Power inequalities and Berezin sectorial operators

对于任意有界线性算子 T，其数值半径满足幂不等式（[26]），即

$$w(T^n) \leq w(T)^n \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

因此，对于作用在再生核希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的任意有界算子 T，有

$$\mathbf{ber}(T^n) \leq \left(\frac{w(T)}{\mathbf{ber}(T)}\right)^n \mathbf{ber}^n(T) \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

由此自然产生一个问题：不等式

$$\mathbf{ber}(T^n) \leq \mathbf{ber}^n(T) \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

一般情况下是否成立?

在 [15, 定理 3], 中，作者在加权 Bergman 空间上构造了某些酉算子，并利用它们证明不等式 $\mathbf{ber}(T^2) \leq \mathbf{ber}^2(T)$ 不成立；此外，他还证明它甚至满足相反的不等式$\mathbf{ber}(T^2) > \mathbf{ber}^2(T)$。此外，正如 [23], 所示，属于某个范数闭子代数的一些特定算子也满足这一幂不等式。在 [22], 中还证明，在某些条件下，该不等式对 Hardy 希尔伯特空间和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子成立。

在下一个结果中，我们将在某些特殊条件下证明加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的幂不等式。为此，我们首先回顾一下， $\alpha > -1$, $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ 表示开单位圆盘上由满足如下条件的全纯函数组成的加权 Bergman 空间： $\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty$, 其中$dA$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的归一化 Lebesgue 测度，且 $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$。加权 Bergman 空间在点$w \in \mathbb{D}$ 处的再生核为

$$k^\alpha_w(z) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^{\alpha+2}}.$$

令 P_α 为 $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ 到 $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ 上的正交投影。设 $L^\infty(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ 是由 $\mathbb{D}$ 上的所有复可测函数 ϕ 组成的空间，满足

$$\|\phi\|_{\infty,\alpha} = \sup\{c \geq 0 : A_\alpha(\{z \in \mathbb{D} : |\phi(z)| > c\}) > 0\} < \infty.$$

对于 $\phi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA_\alpha)$，由下式定义的 $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ 上的算子 T_ϕ

$$T_\phi f = P_\alpha(\phi f), \ f \in A^2_\alpha$$

称为 A^2_α 上符号为 ϕ. 的 Toeplitz 算子。显然， T_ϕ 是 $L^2_\alpha(dA_\alpha)$ 上的有界线性算子，且$\|T_\phi\| \leq \|\phi\|_{\infty,\alpha}$, 参见 [41]。

命题 4.1。 设 ϕ 在 $\mathbb{D}$ 上调和，且 T_ϕ 是$A^2_\alpha(\mathbb{D})$上的 *Toeplitz* 算子。则对任意整数 $n \geq 1$, 下列不等式成立

$$\boldsymbol{ber}(T^n_\phi) \leq \boldsymbol{ber}^n(T_\phi).$$

证明。 由于 ϕ 在 $\mathbb{D}$上调和，由此根据 [36, 定理 2。1], 可得 $T_{\phi}(w) = \widetilde{\phi}(w)$，对于 $w \in \mathbb{D}$ 因此 $\mathbf{ber}(T_{\phi}) = \|\phi\|_{\infty}$。现在，

$$\mathbf{ber}(T_{\phi}^{n}) \leq \|T_{\phi}^{n}\| \leq \|T_{\phi}\|^{n} = \|\phi\|_{\infty}^{n} = \left(\sup_{\lambda\in\mathbb{D}} |\widetilde{\phi}(\lambda)|\right)^{n} = \mathbf{ber}(T_{\phi})^{n}.$$

因此，对于任意 $n \geq 1$，我们有 $\mathbf{ber}(T_{\phi}^{n}) \leq \mathbf{ber}^{n}(T_{\phi})$。 □

注 4.2. 如果 ϕ 在 $\mathbb{D}$ 上是调和函数，且 T_{ϕ} 是定义在 $A_{\alpha}^{2}(\mathbb{D})$上的 *Toeplitz* 算子，那么我们有 $\Re(\phi)$ 是调和函数，且 T_{ϕ} 的实部也是定义在 $A_{\alpha}^{2}(\mathbb{D})$上的 Toeplitz 算子。因此，根据命题 4.1，我们得到

$$\mathbf{ber}^{n}\left(\Re(T_{\phi})\right) \leq \mathbf{ber}^{n}\left(\Re(T_{\phi})\right).$$

对于任意整数 $n \geq 1$。类似地，对 T_{ϕ}. 的虚部也可采用相同的论证。

这里，我们为实部和虚部满足 Berezin 数幂不等式的 Berezin 扇形算子的 Berezin 数和 Berezin 范数建立若干不等式。所有此类算子构成的集合记为 $\Pi^{\mathbf{Ber}, P}_{\theta}$ 并定义为

$$\begin{aligned}\Pi_{\theta}^{\mathbf{Ber},P} = \Big\{T \in \Pi_{\theta}^{\mathbf{ber}} : &\mathbf{ber}\left(\Re^{n}(T)\right) \leq \mathbf{ber}^{n}\left(\Re(T)\right), \\ &\mathbf{ber}\left(\Im^{n}(T)\right) \leq \mathbf{ber}^{n}\left(\Im(T)\right) \ \forall n \in \mathbb{N}\Big\}.\end{aligned}$$

显然，如果 ϕ 在 $\mathbb{D}$ 上是调和函数，且 $M \in \mathbb{R}$ 满足 $\|\phi\|_{\infty} < M$，那么 $T_{\phi+M} \in \Pi^{\mathbf{Ber}, P}_{\theta}$.

引理 4.3. 令 $T \in \Pi^{Ber, P}_{\theta}$ 满足 $\theta \neq 0$。则

$$\boldsymbol{ber}^{2}(T) \geq \frac{\csc^{2}\theta}{4}\|T^{*}T + TT^{*}\|_{ber} + \frac{\csc^{2}\theta}{2}\Big(\boldsymbol{ber}^{2}(\Im(T)) - \boldsymbol{ber}^{2}(\Re(T))\Big).$$

证明。 设 $T \in \Pi^{\mathbf{Ber}, P}_{\theta}$。由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{ber}^{2}(T)\\ \geq\ &\max\left\{\mathbf{ber}^{2}(\Re(T)), \csc^{2}\theta\mathbf{ber}^{2}(\Im(T))\right\}\\ =\ &\frac{\mathbf{ber}^{2}(\Re(T)) + \csc^{2}\theta\mathbf{ber}^{2}(\Im(T))}{2} + \frac{\left|\mathbf{ber}^{2}(\Re(T)) - \csc^{2}\theta\mathbf{ber}^{2}(\Im(T))\right|}{2}\\ =\ &\frac{\csc^{2}\theta}{2}\left(\mathbf{ber}^{2}(\Re(T)) + \mathbf{ber}^{2}(\Im(T))\right) + \frac{(1-\csc\theta)}{2}\mathbf{ber}^{2}(\Re(T))\\ &+\frac{1}{2}\left|\mathbf{ber}^{2}(\Re(T)) - \csc\theta\mathbf{ber}^{2}(\Im(T))\right|\\ \geq\ &\frac{\csc^{2}\theta}{2}\Big(\mathbf{ber}(\Re^{2}(T)) + \mathbf{ber}(\Im^{2}(T))\Big) + \frac{(1-\csc\theta)}{2}\mathbf{ber}^{2}(\Re(T))\\ &+\frac{1}{2}\left|\mathbf{ber}^{2}(\Re(T)) - \csc\theta\mathbf{ber}^{2}(\Im(T))\right|\\ \geq\ &\frac{\csc^{2}\theta}{2}\mathbf{ber}(\Re^{2}(T) + \Im^{2}(T)) - \frac{\csc^{2}\theta}{2}\mathbf{ber}^{2}(\Re(T))\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left|\mathbf{ber}^2(\Re(T)) - \left(\mathbf{ber}^2(\Re(T)) - \csc^2\theta \mathbf{ber}^2(\Im(T))\right)\right|$$
$$= \frac{\csc^2\theta}{4}\|T^*T + TT^*\|_{ber} + \frac{\csc^2\theta}{2}\Big(\mathbf{ber}^2(\Im(T)) - \mathbf{ber}^2(\Re(T))\Big).$$

证明至此完成。 □

应用引理4.3，我们建立了广义交换子和反交换子算子的 Berezin 数上界。回顾一下，算子 $ST - TS$表示交换子，而 $ST + TS$表示反交换子。现在我们观察以下标量不等式

$$\big(ab + cd\big)^2 \leq \big(a^2 + c^2\big)\big(b^2 + d^2\big), \quad \text{where } a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

利用这个不等式，可以得到以下结果。

定理 4.4。设 S、T、X、$Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，其中 $S \in \Pi^{Ber}_{,\theta}{}^{P}$且 $\theta \neq 0$。则 n

$$\boldsymbol{ber}(SXT \pm TYS)$$
$$\leq 2\sin\theta \left\|T^*|X|^2T + T|Y^*|^2T^*\right\|_{ber}^{\frac{1}{2}} \left(\boldsymbol{ber}^2(S) - \frac{\csc^2\theta}{2}\left(\boldsymbol{ber}^2(\Im(S)) - \boldsymbol{ber}^2(\Re(S))\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ˆ证明。设 k_λ 是 $\mathscr{H}$的归一化再生核。于是有

$$\begin{aligned}\left|\langle (SXT \pm TYS)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right| &\leq |\langle SXT\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle| + |\langle TYS\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle| \\ &= |\langle XT\hat{k}_\lambda, S^*\hat{k}_\lambda\rangle| + |\langle S\hat{k}_\lambda, (TY)^*\hat{k}_\lambda\rangle|. \end{aligned}\tag{4.2}$$

现在，结合不等式（4.1）应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}&|\langle XT\hat{k}_\lambda, S^*\hat{k}_\lambda\rangle| + |\langle S\hat{k}_\lambda, (TY)^*\hat{k}_\lambda\rangle| \\ &\leq \langle SS^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle T^*|X|^2T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle S^*S\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle T|Y^*|^2T^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\langle (S^*S + SS^*)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle (T^*|X|^2T + T|Y^*|^2T^*)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|S^*S + SS^*\|_{ber}^{\frac{1}{2}}\left\|T^*|X|^2T + T|Y^*|^2T^*\right\|_{ber}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sin\theta\left\|T^*|X|^2T + T|Y^*|^2T^*\right\|_{ber}^{\frac{1}{2}} \\ &\left(\mathbf{ber}^2(S) - \frac{\csc^2\theta}{2}\left(\mathbf{ber}^2(\Im(S)) - \mathbf{ber}^2(\Re(S))\right)\right)^{\frac{1}{2}} \text{(by Lemma 4.3)}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

因此，由不等式（4.2）和（4.3）可得

$$\begin{aligned}\left|\langle (SXT \pm TYS)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right| &\leq 2\sin\theta\left\|T^*|X|^2T + T|Y^*|^2T^*\right\|_{ber}^{\frac{1}{2}} \\ &\left(\mathbf{ber}^2(S) - \frac{\csc^2\theta}{2}\left(\mathbf{ber}^2(\Im(S)) - \mathbf{ber}^2(\Re(S))\right)\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

对所有 $\lambda \in \mathscr{X}$ 取上确界，即得所需不等式。□

通过令 $X = Y = I$，可由定理 4.4 得到以下推论。

推论 4.5. 设 $S, T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ 其中 $S \in \Pi^{Ber}_{,\theta}{}^{P}$且 $\theta \neq 0$。那么

$$\boldsymbol{ber}(ST \pm TS)$$

$$\leq \ 2\sin\theta\,\|T^*T+TT^*\|_{ber}^{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{ber}^2(S)-\frac{\csc^2\theta}{2}\left(\boldsymbol{ber}^2(\Im(S))-\boldsymbol{ber}^2(\Re(S))\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

注 4.6。 在 [24, 定理 4], 中建立了以下不等式:

$$\mathbf{ber}^p(AB^*\pm CD^*)\leq\frac{1}{2}\left\|(AA^*+CC^*)^p+(BB^*+DD^*)^p\right\|_{ber},\ \forall\ p\geq 1,$$

其中 $A,\ B,\ C,\ D\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$。现在，若在上述不等式中取 $A=S$、 $B=T^*$、 $C=T$、 $D=S^*$ 和 $p=1$ ，则可得

$$\mathbf{ber}(ST\pm TS)\ \leq\ \frac{1}{2}\left\|T^*T+S^*S+TT^*+SS^*\right\|_{ber}. \tag{4.4}$$

考虑 $S=\begin{pmatrix}1+i0.2 & 0\\ 0 & 2+i0.5\end{pmatrix}$ 和 $T=\begin{pmatrix}0.7 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。显然， $S\in\Pi^{\mathbf{Ber},\ P}_{\frac{\pi}{12}}$。

由不等式（4.4），可得 $\mathbf{ber}(ST\pm TS)\leq 4.25$，而推论 4.5 给出了更精确的估计，即 $\mathbf{ber}(ST\pm TS)\leq 2.91$。因此，推论 4.5 给出的界比不等式（4.4）更紧。

应用推论 4.5，我们得到以下结果。

推论 4.7. 设 $S,T\in\Pi^{\boldsymbol{Ber},\ P}_{\theta}$ 且 $\theta\neq 0$。则

$$\boldsymbol{ber}(ST\pm TS)\leq\min\{\beta_1,\beta_2\},$$

其中

$$\beta_1\leq 2\sin\theta\,\|T^*T+TT^*\|_{ber}^{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{ber}^2(S)-\frac{\csc^2\theta}{2}\left(\|\Im(S)\|_{ber}^2-\|\Re(S)\|_{ber}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\beta_2\leq 2\sin\theta\,\|S^*S+SS^*\|_{ber}^{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{ber}^2(T)-\frac{\csc^2\theta}{2}\left(\|\Im(T)\|_{ber}^2-\|\Re(T)\|_{ber}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明。 证明可直接由推论 4.5 交换 S 和 T得到。□

接下来，我们推导 $\Pi^{\mathbf{Ber},\ P}_{\theta}$ 中可交换算子的和与积的 Berezin 数不等式。首先，回顾以下标量不等式

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_j^2\right),\quad \text{where } a_j,b_j\in\mathbb{R}. \tag{4.5}$$

应用上述不等式，我们证明以下定理。

定理 4.8. 设 $S_j,T_j\in\Pi^{\boldsymbol{Ber},\ P}_{\theta}$, $j=1,2,\cdots n$ 满足 $S_jT_j=T_jS_j$。则

$$\boldsymbol{ber}^2\left(\sum_{j=1}^{n}S_jT_j\right)\leq\left(1+\sin^2\theta\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{ber}^2(S_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{ber}^2(T_j)\right).$$

ˆ证明。 设 k_λ 是 $\mathscr{H}$的归一化再生核。于是利用不等式（4.1）和（4.5），可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_{j=1}^{n} S_jT_j\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right|^2 \\
=\ & \frac{1}{4}\left|\left\langle \left(\sum_{j=1}^{n} S_jT_j + T_jS_j\right)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle\right|^2 \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\langle S_jT_j\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right| + \left|\langle T_jS_j\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right|\right)\right)^2 \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\langle T_j^*T_j\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle S_jS_j^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle S_j^*S_j\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle T_jT_j^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2 \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\langle S_j^*S_j\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle + \langle S_jS_j^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\left(\langle T_j^*T_j\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle + \langle T_jT_j^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle (S_j^*S_j + S_jS_j^*)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\right\rangle\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle (T_j^*T_j + T_jT_j^*)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\right\rangle\right) \\
=\ & \left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle \left(\Re^2(S_j) + \Im^2(S_j)\right)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\right\rangle\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left\langle \left(\Re^2(T_j) + \Im^2(T_j)\right)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\right\rangle\right) \\
\leq\ & \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{ber}\left(\Re^2(S_j) + \Im^2(S_j)\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{ber}\left(\Re^2(T_j) + \Im^2(T_j)\right)\right) \\
\leq\ & \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{ber}^2(\Re(S_j)) + \mathbf{ber}^2(\Im(S_j))\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{ber}^2(\Re(T_j)) + \mathbf{ber}^2(\Im(T_j))\right)\right) \\
\leq\ & (1+\sin^2\theta)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{ber}^2(S_j)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{ber}^2(T_j)\right) \quad \text{(by Lemma 3.1)}.
\end{aligned}
$$

现在，对所有 $\lambda \in \mathscr{X}$取上确界，可得所需不等式。对 $n = 1$ 应用定理 4.8，我们得到以下推论。□

推论 4.9。 设 S、$T \in \Pi^{Ber}{}_{\theta}{}^{P}$满足 $ST = TS$。则

$$\boldsymbol{ber}(ST) \leq (1+\sin^2\theta)\boldsymbol{ber}(S)\boldsymbol{ber}(T).$$

注 4.10。 设 S、$T \in \Pi^{\mathbf{Ber}}{}_{\theta}{}^{P}$满足 $ST = TS$。由此可知，$\mathbf{ber}(ST)$ 的上界随参数 θ变化，并在$\mathbf{ber}(S)\mathbf{ber}(T)$与 $2\mathbf{ber}(S)\mathbf{ber}(T)$之间插值。当 S和 T 均为正数时，有$\mathbf{ber}(ST) \leq \mathbf{ber}(S)\mathbf{ber}(T)$；若 $\theta \to \frac{\pi^-}{2}$，则该上界变为$\mathbf{ber}(ST) \leq 2\mathbf{ber}(S)\mathbf{ber}(T)$。

我们用以下不等式结束本节。该不等式可由前述结果通过数学归纳法立即得出。从弱意义上说，

该不等式可视为某类扇形算子的幂不等式。

命题 4.11. 若 $T \in \Pi^{Ber}_{,\ \theta}{}^{P}$ 则对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{ber}(T^n) \leq (1+\sin^2\theta)^{n-1}\boldsymbol{ber}^n(T).$$

5. Additional observations

设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ and $H(\mathbb{D})$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的全体全纯函数构成的空间。设 $H^\infty(\mathbb{D})$ 是定义在$\mathbb{D}$ 上的全体有界全纯函数构成的空间。令 $f \in H(\mathbb{D})$, 则 f 的 Dirichlet 积分定义为

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z).$$

令 $\mathcal{D}$ 表示由满足$\mathcal{D}(f) < \infty$ 的所有函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 构成的 Dirichlet 空间。对于 $f,\ g \in \mathcal{D},\ \mathcal{D}$ 上的内积可定义为

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)}dA(z),$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{H^2(\mathbb{D})}$ 是 Hardy-Hilbert 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上通常的内积。相应的范数定义为

$$\|f\|^2 = \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z).$$

Dirichlet 空间的再生核为 $k_w(z) = \frac{1}{zw}\log\left(\frac{1}{1-zw}\right)$, 其中$z \in \mathbb{D},\ w \in \mathcal{D}\setminus\{0\}$ 且 $k_0 = 1$。此外, 归一化再生核为$\|k_w\|^2 = \frac{1}{|w|^2}\log\left(\frac{1}{1-|w|^2}\right)$。关于 Dirichlet 空间的更多信息, 请参阅 [20]。

文献 [6] 讨论了 Berezin 值域的凸性, 以及 Hardy-Hilbert 空间和 Bergman 空间上有限秩算子的一些几何性质。在我们的第一个结果中, 我们证明了形如 $T(f) = \sum_{j=1}^n \langle f,\ g_j\rangle g_j$, 的有限秩算子的 Berezin 值域具有凸性, 其中 $f,\ g_j \in \mathcal{D}$.

定理 5.1. 设 $T(f) = \sum_{j=1}^n \langle f, g_j\rangle g_j$, 其中 $f, g_j \in \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 上的有限秩算子, 且 $g_j(z) = \sum_{m=1}^\infty a_{j,\ m}z^m$。则 T 的 *Berezin* 值域在 $\mathbb{C}$ 中是凸集。

证明. 设 $\lambda \in \mathbb{D}$。则

$$Tk_\lambda = \sum_{j=1}^n \langle k_\lambda, g_j\rangle g_j = \sum_{j=1}^n \overline{g_j(\lambda)}g_j.$$

T在 $\lambda \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ 处的 Berezin 变换为

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(\lambda) = \langle T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle &= |\lambda|^2\frac{1}{\log(\frac{1}{1-|\lambda|^2})}\langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle \\ &= |\lambda|^2\frac{1}{\log(\frac{1}{1-|\lambda|^2})}\left\langle\sum_{j=1}^n \overline{g_j(\lambda)}g_j, k_\lambda\right\rangle\end{aligned}$$

$$= |\lambda|^2 \frac{1}{\log(\frac{1}{1-|\lambda|^2})} \sum_{j=1}^{n} |g_j(\lambda)|^2.$$

对于 $\lambda = 0$, $Tk_\lambda = \overline{\sum_{j=1}^{n} g_j(0) g_j}$。因此，$T(\lambda) = 0$。由于 $g_j \in \mathcal{D}$，所以 g_j 是一个全纯函数。因此，$T(\lambda)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的实连续函数。由于 $\mathbb{D}$ 是一个连通集，因此 $\mathbb{D}$ 在 T 作用下的像是 $\mathbb{R}$ 中的一个连通集。在 $\mathbb{R}$ 中，连通集恰好是区间（包括 $\mathbb{R}$ 本身）和单点集。因此，$\mathbf{Ber}(T)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是凸的。□

现在，利用 Berezin 变换公式，我们建立了 $\mathcal{D}$ 上有限秩算子的 Berezin 值域的几何刻画。

定理 5.2。设 $T(f) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, g_j \rangle h_j$，其中 $f, g_j, h_j \in \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 上的有限秩算子，且 $g_j(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{j,\ m} z^m$ 和 $h_j(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{j,\ m} z^m$。若 g_j 和 h_j 的系数均为实数，则 $\boldsymbol{Ber}(T)$ 关于实轴对称。

证明。设 $Tf = \sum_{j=1}^{n} \langle f, g_j \rangle h_j$。则

$$Tk_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \langle k_\lambda, g_j \rangle h_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{g_j(\lambda)} h_j.$$

T 在 $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 处的 Berezin 变换为

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(\lambda) = \langle T\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle &= |\lambda|^2 \frac{1}{\log(\frac{1}{1-|\lambda|^2})} \langle Tk_\lambda, k_\lambda \rangle \\ &= |\lambda|^2 \frac{1}{\log(\frac{1}{1-|\lambda|^2})} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \overline{g_j(\lambda)} h_j, k_\lambda \right\rangle \\ &= |\lambda|^2 \frac{1}{\log(\frac{1}{1-|\lambda|^2})} \sum_{j=1}^{n} \overline{g_j(\lambda)} h_j(\lambda). \end{aligned}$$

对于 $\lambda = 0$, $\widetilde{T}(\lambda) = 0$。令 $\lambda = re^{i\theta}$，则

$$\widetilde{T}(re^{i\theta}) = r^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-r^2}\right)} \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{j,m} (re^{i\theta})^m \right)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{j,m} (re^{i\theta})^m \right) \right)$$

现在，我们计算 $\overline{T(re^{-i\theta})}$。由于 $a_{j,\ m}$ 且 $b_{j,\ m} \in \mathbb{R}$，因此有

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{T}(re^{-i\theta})} &= \overline{r^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-r^2}\right)} \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{j,m} (re^{-i\theta})^m \right)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{j,m} (re^{-i\theta})^m \right) \right)} \\ &= r^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-r^2}\right)} \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{j,m} (re^{-i\theta})^m \right) \overline{\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{j,m} (re^{-i\theta})^m \right)} \right) \\ &= r^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-r^2}\right)} \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{j,m} (re^{i\theta})^m \right)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{j,m} (re^{i\theta})^m \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \widetilde{T}(re^{i\theta}).$$

因此，$\mathbf{Ber}(T)$ 在复共轭下封闭，因而关于实轴对称。□

本文研究了 Hardy 空间和 Bergman 空间上一些加权移位算子的 Berezin 值域 [4]。在这里，我们关注 Dirichlet 空间上加权移位算子的 Berezin 值域。

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是 Dirichlet 空间 $\mathcal{D}$中的一个元素。 $\mathcal{D}$ 上的加权移位算子定义为

$$T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_{n+1} z^{n+1},$$

其中，权 $\{\beta_n\}$ 是 $\mathbb{C}$. 中的一个有界序列。由于 $\{\beta_n\}$ 有界，因此存在 $K \in \mathbb{R}$，使得 $|\beta_n| \leq K, \quad n \in \mathbb{N}$. 因此，我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|a_n\beta_{n+1}|^2 \leq K\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|a_n|^2 < \infty.$$

因此 T 是 $\mathcal{D}$. 上的有界线性算子。在接下来的结果中，我们考虑一些特定的数列，并研究 T 的 Berezin 值域的对称性等性质，特别是考察其关于实轴和虚轴的对称性。此外，我们还确定了一个特定的权，使得 Berezin 值域是一个以原点为中心、具有指定半径的圆盘。

定理 5.3. 设 T 是 $\mathcal{D}$ 上的加权移位算子。
(i) 若 $\{\beta_n\}$ 是实有界序列，则 $\boldsymbol{Ber}(T)$ 关于实轴对称。

(ii) 若 $\{\beta_n\}$ 是纯虚有界序列，则 $\boldsymbol{Ber}(T)$ 关于虚轴对称。

(iii) 若 $\{\beta_n = \frac{c}{n}\}$ 满足 $c \in \mathbb{D}$，则 T 的 *Berezin* 值域是一个以原点为圆心、半径为 $|c|$. 的圆盘

证明. T 在 $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 处的 Berezin 变换为

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(\lambda) &= \langle T\hat{k_\lambda}, \hat{k_\lambda}\rangle \\
&= |\lambda|^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)} \langle Tk_\lambda, k_\lambda\rangle \\
&= |\lambda|^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\lambda}^n}{\sqrt{n+1}} \beta_{n+1} z^{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\lambda}^n}{\sqrt{n+1}} z^n \right\rangle \\
&= |\lambda|^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)} \lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2n} \beta_{n+1}\right). \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

~对于 $\lambda = 0, \quad T(0) = 0.$

(i) 假设 $\{\beta_n\}$ 是一个实有界数列。由等式（5.1），

我们得到

$$\begin{aligned}\overline{\widetilde{T}(\lambda)} &= |\lambda|^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)} \overline{\lambda} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2n} \beta_{n+1}\right) \\ &= \widetilde{T}(\overline{\lambda}).\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{Ber}(T)$ 关于实轴对称。

（ii）假设 $\{\beta_n\}$ 是一个纯复有界序列，则由等式（5.1），我们得到

$$\begin{aligned}\overline{\widetilde{T}(\lambda)} &= -|\lambda|^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)} \overline{\lambda} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2n} \beta_{n+1}\right) \\ &= -\widetilde{T}(\overline{\lambda}).\end{aligned}$$

这意味着 $\mathbf{Ber}$（T）关于虚轴对称。（iii）假设 $\beta_n = \frac{c}{n}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$，则由关系式（5.1），我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(\lambda) &= |\lambda|^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)} \lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2n} \frac{c}{n+1}\right) \\ &= c\lambda, \text{ for } \lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$再次有 $T(0) = 0$.

因此，$\mathbf{Ber}(T) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |c|\}$，正如所要求的。

□

本节的结果表明，这些算子在 Dirichlet 空间上的 Berezin 值域性质与其在 Hardy-Hilbert 空间上的性质大体相似。对于 $H^2(\mathbb{D})$，如第 2 节所述，通过对复合微分算子施加某些平移，可以构造 Berezin 扇形算子和（或）扇形算子。这自然引出了一个问题：能否对 Dirichlet 空间上的复合微分算子进行类似构造？对此，[2]研究了 Dirichlet 空间上的复合微分算子，并确定了由单项式符号诱导的算子的范数。

一个重要的观察是，如果 D_ϕ 是 $e^{i\theta}$，那么，Berezin 变换的实解析性意味着，只要 $\lim_{r\to 1^-} f(r)$ 存在，D_ϕ 的 Berezin 值域就是一个以原点为圆心、半径为

$$r_0 = \max_{r\in[0,1]} f(r).$$

特别是，如果 D_ϕ 的数值半径严格大于 r_0，则可以实现这一构造。

6. Conclusion

本文介绍了 Berezin 扇形算子，并证明它们构成的类严格大于经典扇形算子。我们的例子和

不等式凸显了 Berezin 扇形框架在改进 Berezin 数估计和理解 Berezin 值域几何方面的有效性。这些结果表明，仅凭标准扇形算子无法得到针对 Berezin 扇形算子所获得的不等式。尽管 Dirichlet 空间上若干算子的 Berezin 值域呈现出与 Hardy-Hilbert 空间中类似的性质，但能否系统地构造出 Berezin 扇形但非扇形的复合微分算子，或同时为 Berezin 扇形和扇形但指标不同的复合微分算子，仍是一个悬而未决的问题。解决这一问题或可进一步揭示 Berezin 值域几何与 Berezin 数不等式之间的相互作用。

Declarations

致谢。 本研究起源于 Anirban Sen 博士访问印度加尔各答贾达夫普尔大学数学系期间开展的研究。他对捷克科学基金会（GA CR，资助编号：25-18042S）的支持表示衷心感谢。Saikat Mahapatra 先生感谢印度政府大学拨款委员会以奖学金形式提供的经济支持。Sweta Mukherjee 女士获西孟加拉邦政府部门奖学金资助。

作者贡献： 所有作者对本稿件贡献相同，并对其进行了审阅。数据可用性：本研究期间未生成或分析任何数据集。利益冲突： 不存在利益冲突。

References

1. Alakhrass, M.：《关于扇形矩阵及其不等式》。Linear Algebra Appl., 617, 179-189, (2021)。 2. Allen, R. F., Heller, K. C. 和 Pons, M. A.：《Dirichlet 空间上的复合微分算子》。J. Math. Anal. Appl., 512 (2022), no. 2, Paper No. 126186, 18 pp. 3. Arlinskiĭ, Y. 和 Zagrebnov, V.：《数值域与拟扇形压缩算子》。J. Math. Anal. Appl., 366(1), 33-43, (2010)。 4. Augustine, A., Das, P.H., Bhunia, P. 和 Shankar, P.：《通过一类半范数研究 Berezin 值域的凸性及 Berezin 半径不等式》。Bull. Sci. Math., 103762, (2025)。 5. Augustine, A., Garayev, M. 和 Shankar, P.：《复合算子、其 Berezin 值域的凸性及相关问题》。Complex Anal. Oper. Theory, 17(8), 126, (2023)。 6. Augustine, A., Garayev, M. 和 Shankar, P.：《关于若干算子的 Berezin 值域与 Berezin 半径》。arXiv 预印本 arXiv:2411.10771, (2024)。 7. Bakherad, M. 和 Yamancı, U.：《Berezin 数不等式的新估计》。J. Inequal. Appl., 2020(1), 40, (2020)。 8. Berezin, F.A.：《算子的协变符号与逆变符号》。Math. USSR-Izv., 6(5), 1117, (1972)。 9. Berezin, F.A.：《量子化》。Math. USSR-Izv., 8(5), 1109–1163, (1974)。 10. Bhunia, P.：《谱半径、数值半径与 Berezin 半径不等式的强化》。Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, 120(1), 1-18, (2026)。 11. Bhunia, P., Sen, A., Barik, S. 和 Paul, K.：《算子矩阵的 Berezin 数与 Berezin 范数不等式》。Linear Multilinear Algebra, 72(16), 2749-2768, (2024)。

12. Bhunia, P., Paul, K. 和 Sen, A.：《涉及 Berezin 范数与 Berezin 数的不等式》。Complex Anal. Oper. Theory, 17(1), 7, (2023)。 13. Bhunia, P., Paul, K. 和 Sen, A.：《扇形矩阵的数值半径不等式》。Ann. Funct. Anal., 14(3), 66, (2023)。 14. Bhunia, P., Sen, A. 和 Paul, K.：《Berezin 数不等式的发展》。Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 39(7), 1219-1228, (2023)。 15. Coburn, L.：《Bergman 空间上的 Berezin 变换与 Weyl 型酉算子》。Proc. Amer. Math. Soc., 140(10), 3445–3451, (2012)。 16. Cowen, C.C. 和 Felder, C.：《Berezin 值域的凸性》。Linear Algebra Appl., 647, 47-63, (2022)。 17. Cowen, C.C. 和 MacCluer, B.D.：《解析函数空间上的复合算子》。博卡拉顿：CRC 出版社, 20, (1995)。 18. Dragomir, S.S.：《内积空间中 Schwarz 相关不等式集锦（II）》。J Ineq Pure Appl Math., Art 14. 7(1), 1–11, (2006)。 19. Drury, S.：《扇形算子的一个数值半径不等式》。Linear Algebra Appl., 687, 108-116, (2024)。 20. El-Fallah, O., Kellay, K., Mashreghi, J. 和 Ransford, T.：《Dirichlet 空间入门》。剑桥大学出版社 , 203,(2014)。 21. Fatehi, M. 和 Hammond, C.：《Hardy 空间上的复合微分算子》。Proc. Amer. Math. Soc., 148(7), 2893-2900, (2020)。 22. Garayev, M.T. 和 Alomari, M.W.：《算子 Berezin 数的不等式及相关问题》。Complex Anal. Oper. Theory, 15(2), 1–30, (2021)。 23. Garayev, M.T., Guediri, H., G¨urdal, M. 和 Alsahli, G.M.：《再生核希尔伯特空间上算子的若干问题》。Linear Multilinear Algebra, 69(11), 2059-2077, (2021)。 24. Guesba, M., Bhunia, P. 和 Paul, K.：《通过分块矩阵的正性得到 Berezin 数不等式》。Oper. Matrices, 18(1), 83-95, (2024)。 25. Gustafson, K. E., Rao, D. K.：《数值域》。施普林格，纽约, (1997)。 26. Halmos, P.R.：《希尔伯特空间问题集》。Springer Science & Business Media, 19, (2012)。 27. Karaev, M.T.：《函数希尔伯特空间上算子的 Berezin 符号与可逆性》。J. Funct. Anal., 238(1), 181-192, (2006)。 28. Karaev, M.T.：《再生核与 Berezin 符号技术在算子理论各类问题中的应用》。Complex Anal. Oper. Theory, 7(4), 983-1018, (2013)。 29. Lancaster, J. S.：《数值域的边界》。Proc. Amer. Math. Soc., 393-398 (1975)。 30. Li, C.K. 和 Wang, K.Z.：《数值域包含于扇形中的算子范数》。Linear Algebra Appl., 708, 173-192, (2025)。 31. Mahapatra, S., Sen, A., Birbonshi, R., Paul, K.：《通过 Moore-Penrose 逆得到 Berezin 数与 Berezin 范数不等式》。J. Pseudo-Differ. Oper. Appl., 16(3), 64, (2025)。 32. Majee, S., Maji, A. 和 Manna, A.：《数值半径与 Berezin 数不等式》。J. Math. Anal. Appl., 517(1), 126566, (2023)。 33. Ohno, S.：《Hardy 空间之间复合与微分的乘积》。Bull. Aust. Math. Soc., 73(2), 235-243, (2006)。 34. Paulsen, V.I. 和 Raghupathi, M.：《再生核希尔伯特空间理论导论》。剑桥大学出版社, (2016)。 35. Sammour, S.A., Kittaneh, F. 和 Sababheh, M.：《数值半径不等式的几何方法》。Linear Algebra Appl., 652, 1-17, (2022)。 36. Sen, A., Barik, S. 和 Paul, K.：《加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子与加权复合算子的 Berezin 值域》。Complex Anal. Oper. Theory, 19(8), Paper No. 223, (2025)。 37. Sen, A., Bhunia, P. 和 Paul, K.：《再生核希尔伯特空间算子的 Berezin 数界》。Filomat, 37(6), 1741–1749, (2023)。 38. Sen, A. 和 Paul, K.：《Berezin 数与数值半径不等式》。Vietnam J. Math., 53(2), 277-289, (2025)。

39. Stout, Q. F.：加权移位的数值域。美国数学学会会刊，88(3)，495-502，(1983)。40. Yamazaki, T.：数值半径的上界和下界及一个等号成立条件。Studia Math.，178(1)，83-89，(2007)。41. Zhu, K.：《函数空间中的算子理论》，第2版，《数学调查与专著》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，138，(2007)。(Mahapatra) Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032,West Bengal, India电子邮箱地址：smpatra.lal2@gmail.com (Mukherjee) Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032,West Bengal, India电子邮箱地址：sweta.bankati@gmail.com (Sen) Mathematical Institute, Silesian University in Opava, Na Rybníčku 1,74601 Opava, Czech Republic电子邮箱地址：anirbansenfulia@gmail.com；Anirban.Sen@math.slu.cz (Birbonshi) Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032, West Bengal, India电子邮箱地址：riddhick.math@gmail.com (Paul) Vice-Chancellor, Kalyani University, West Bengal 741235 and Professor (on lien), Department of mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032, West Bengal, India电子邮箱地址：kalloldada@gmail.com