非厄米秩一扰动简史*

Guillaume Dubach´CMLS，法国帕莱索 91120，巴黎综合理工学院
guillaume.dubach@polytechnique.edu

Jana Reker´UMPA，里昂高等师范学院，法国里昂 69007，意大利大道 46 号´ jana.reker@ens-lyon.fr

2026年1月7日

arXiv:2601.02834v1 [math.PR] 6 Jan 2026

摘要

随机矩阵的低秩扰动在过去二十年里一直是众多研究的核心。尤其是非厄米情形，尽管在一般文献中涉及较少，但由于其在物理学和神经元网络研究中的应用，这里将予以特别关注。下面简要综述。

1 引言

这是一个古老得如同世界本身的想法——好吧，别夸张了：至少和线性代数一样古老。考虑一个矩阵 $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$，我们将用另一个矩阵 $R \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ 对其进行扰动（例如加性扰动）。于是，我们关注矩阵 $M+R$ 的谱，并将其与 M 和 R 的谱进行比较。这一基本思想可以有多种变体。不过，在下文中，我们将仅限于以下情形：首先，扰动 R 将是秩一 的——不得不承认，这大大简化了分析[1]。其次，尽管有非常丰富的文献研究 M 和 R 为正规矩阵的情形（例如二者都是厄米矩阵，如著名的 BBP转变 [2]），但我们将在此考察非正规的情形，即：

1. 元素独立同分布（i.i.d.）且无特殊对称性的矩阵情形；2. 以反厄米方式受到扰动的厄米矩阵情形（模型 $H + \mathrm{i}\Gamma$）；3. 最后，酉矩阵受到非酉矩阵乘法扰动的情形（模型 UA）。

*同名文章的预印本（≪作者版本≫），该文发表于《´SMF公报 182.[1]这些秩一扰动看似过于简单，实则正如我们将看到的，早已具有极其丰富的结构；Peter Forrester 最近为此撰写了一篇精彩的综述文章 [10]。[2]名称取自 Baik、Ben Arous 和 P´ech´，以纪念那篇开创性文章 [1]。

这些不同情形的共同点在于，对我们而言， M 始终是一个随机矩阵；我们将连续改变扰动 R ，以考察特征值动力学。这些特征值沿着复平面中的随机轨迹运动。

我们感兴趣的主要现象是一个或多个离群特征值的出现。由于这个英语词在法语中尚无确切对应词，我们将直接使用原词；不过，首先有必要明确其定义：原则上，凡是远离谱中其余部分，或远离被视为随机谱典型区域的特征值，都称为离群特征值。此外，在大多数情况下，我们预期该特征值是可以定位的（例如，可以对其涨落进行界定）。更确切地说，若存在两个区域 D_1 和 D_2 ，使得以高概率，

(i) $\lambda_1 \in D_1$;

(ii) $\lambda_2, \cdots, \lambda_N \in D_2$;

(iii) 且满足 D_1 远离 D_2。

区域 D_1， D_2 可以是随机的，也可以是确定性的。它们还取决于 N 矩阵的大小 N ，而我们通常关注的是矩阵大小趋于无穷的情形。在此背景下，“高概率”指的是其补事件的概率小于 N 的任意负次幂的事件；区域 D_1 与 D_2 之间的分离则会根据 N 处于不同的尺度。

在下文介绍的每个模型中，离群特征值的位置都是应用中的核心问题——这是个好消息，因为现有技术也最直接地帮助我们解决这一问题。但还有其他自然的问题更难处理。要精确研究离群特征值的涨落、轨迹形状，或离群特征值在 M 的谱中的起源，需要进行更深入的分析。而且，在非厄米领域，需要区分两类特征向量，因此这些问题促使我们研究特征值、右特征向量和左特征向量之间的耦合动力学。

2 Ginibre迷宫：非厄米随机矩阵扰动

首先来谈谈没有任何特殊对称性的随机矩阵 M。Rajan 和 Abbott 的文章 2006 [28], 指出，这种模型与神经网络[3]研究相关；该文由此引发了人们对这种矩阵的秩一扰动 的兴趣。Rajan 和 Abbott 的出发点是戴尔定律，该定律指出，给定一个神经元，它对所有其他神经元要么具有抑制性，要么具有兴奋性。这在他们的模型中表现为一个秩一矩阵，具体如下：

[3]具体而言，这些是真实的神经元网络；但这些应用处于计算神经科学与人工神经元网络研究的交界处，前者旨在理解大脑的运作，后者则着眼于人工智能。近期文章 [31]介绍了低秩扰动在这些领域中的另一项自然应用。

为了对突触矩阵（描述神经元之间的相互作用）建模，他们从一个 R均值矩阵出发，其中兴奋性神经元对应的列中的所有元素都取某个正值 $\mu_E > 0$，而抑制性神经元对应的列中的所有元素都取某个负值 $\mu_I < 0$。这样便构成了一个秩一矩阵，随后再对其加入随机噪声´ G （各元素基本上相互独立），以描述围绕均值的预期涨落。我们希望了解 $G + R$这一理想化突触矩阵模型的特征值分布`´。这当然与前文阐述的一般思路一致´´，但有一点不同——不是数学上的，而是表述上的：对我们而言，被视为随机矩阵´ G的低秩"扰动"的是该矩阵R ´。从形式上说，这种视角上的差异不会带来任何改变；无论如何，我们都希望考察该系统在所有可能的状态下的表现：例如，我们将研究 ´$G + tR$，其中 t 参数既可以固定，也可以连续变化。

Rajan 和 Abbott 提出的问题，Terence Tao 曾在美国数学研究所举办的一次研讨会上提及；Alice Guionnet 和 Percy Deift 也参加了这次研讨会。Alice Guionnet 最近与 Mylène Maïda 和 Florent Benaych-Georges 一起研究了厄米情形下的一个类似问题；而 Percy Deift 则据说支持使用 Sylvester 恒等式的想法，即对于任意 $A \in \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{C})$ 和 $B \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{C})$，有

$$\det(I_n + AB) = \det(I_d + BA), \tag{2.1}$$

这使得在秩固定的扰动的一般情形下，可以降低问题的维数。这些讨论促成了 Tao 的论文，下面我们将介绍其中关于秩为 $d = 1$ 的扰动的一些代表性结果。

考虑一個`矩阵 G，其元素是独立同分布的复随机变量´。例如，可以取复高斯随机变量，这种矩阵称为复 Ginibre 矩阵，以纪念 Jean Ginibre [19] 关于这一模型的早期经典成果´^。因此，为了明确起见，我们考虑：´´

$$(G_{ij})\ i.i.d., \quad G_{ij} \overset{d}{=} \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \tfrac{1}{N}). \tag{2.2}$$

该矩阵的特征值 G 在分布意义下收敛于 Girko 圆律，这意味着当 $N \to \infty$时，典型特征值的位置在分布意义下趋近于单位圆盘上的均匀随机点´。已知（尤其可参见 Djalil Chafa¨ı [5] 的研究），低秩扰动不会改变圆律，至少在宏观层面如此；也就是说，典型特征值的行为不会受到影响`´。然而，这种扰动可能产生离群特征值´´；Tao 的一项结果证实了这一点，前提是扰动本身具有一个足够大的非零特征值^。更确切地说，这种情形是扰动为秩一正定厄米矩阵：´^`

定理 2.1 (Tao [32])。 设 v 为独立于 G 的单位向量， μ 为一个固定的标量。那么谱为

$$G + \mu\sqrt{N}vv^*$$

包含一个唯一的离群特征值 $\lambda_1 = \mu\sqrt{N} + o(1)$，而谱的其余部分以高概率包含在圆盘 $D(0, 1 + o(1))$ 中，并在 $N \to +\infty$ 时弱收敛至圆律。

[4]关于这一经典恒等式的证明，参见 Oraux X-ENS [12]。

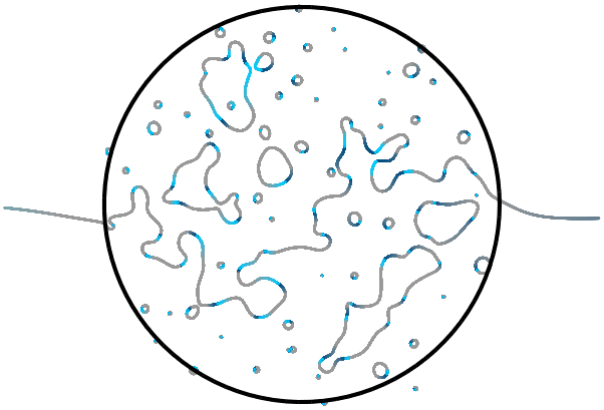

图 1. $G + tvv^*$ 的轨迹：尺寸为 100×100 的 Ginibre 矩阵 G。

将值 $\mu\sqrt{N}$ 替换为时间参数 $t \in \mathbb{R}$，并考虑矩阵特征值的轨迹

$$G(t) = G + tvv^*, \quad t \in \mathbb{R},$$

`一个 $N$ 固定´值。下图展示了这些轨迹，其中颜色 ´经过´调整，使其在 $t \to -\infty$ 处趋向浅蓝色，在 $t \to +\infty$ 处趋向深蓝色，中间经过灰色。首先可以看出，两侧的极限谱相同；乍看之下这有点令人惊讶，但实际上合乎逻辑。对于任意 $N$固定´值， $t \to \pm\infty$ 的特征值极限相同，它们收敛到可以计算出的值[5]。从视觉上看，特征值的轨迹彼此衔接，在 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$中形成环路；最大的环路 ´是离群特征值的轨迹，它经过无穷远点 `。

Tao 的这一结果只是严谨地证明了一种十分自然的直觉；说实话，这并不令人意外。不过，Rajan 和 Abbott 的论文及模拟也发现了一种相当出人意料的情形：某些秩一扰动可以产生多个离群特征值，而不只是一个；这些离群特征值并未按上文定义的意义彼此充分分离。Tao 的另一个定理证实并进一步阐明了这一现象。下面给出一个非常相近的表述：

定理 2.2。 设 v 为一个固定的单位向量， w 为一个与 G独立的均匀随机单位向量， μ 为一个固定的标量，那么.....的谱为

$$G + \mu\sqrt{N}vw^*$$

有一定数量（随机）的阶为(1) 的离群特征值，其分布渐近地对应于某个高斯整函数序列的零点分布。

这种情况下的轨迹图如下所示，与前一种情况的差异相当明显。那么：单位圆盘之外的这个点云从何而来

[5]它们是计算过程中引入的函数 $\mathscr{W}_N$ 的零点。[6]唯一的区别是，文章 [32] 考虑了向量 w上的另一种分布，这种分布更适合 [28]突触矩阵的背景；但其基本思路完全相同。

，又为什么在 $w = v$ 时不会出现？启发式解释如下。我们考虑随机过程

$$G(t) := G + tvw^*,$$

对于向量 v 和 w，稍后可以具体指定它们。

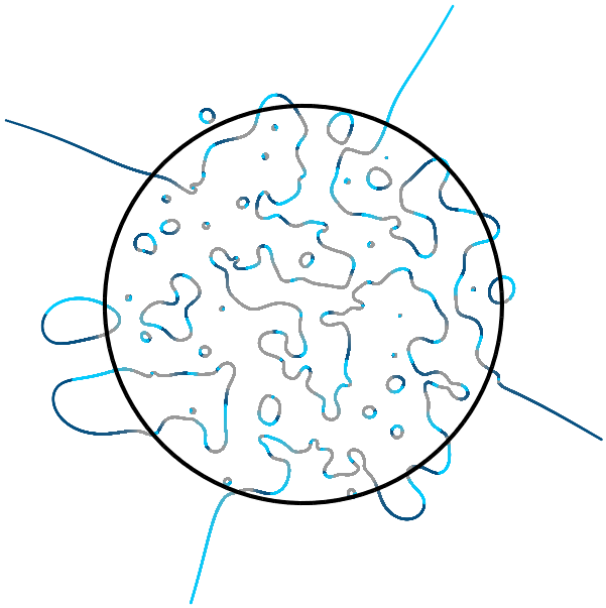

图 2. 对于大小为 100×100 的 Ginibre 矩阵 G，在 w 服从均匀分布的情况下，$G + tvw^*$ 的轨迹。

为了刻画 $G(t)$ 的谱，我们首先对任意 $z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(G)$ 和 $t \neq 0$ 写出：

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow \det(G(t) - zI_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(I_N + (G - zI_N)^{-1} tvw^*) = 0, \end{aligned}$$

然后我们利用一个初等性质；英语世界以其令人咋舌的句法灵活性将其简称为矩阵行列式引理：

$$\det(I_N + (G - zI_N)^{-1} tvw^*) = 1 + tw^*(G - zI_N)^{-1} v. \tag{2.3}$$

请注意，这是 Sylvester 恒等式（2.1）的一个特例；在这里，由于 vw^* 是秩一的，我们也可以通过考察这些算子的特征值直接验证它。因此得到以下等价关系：

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow 1 + tw^*(G - zI_N)^{-1} v = 0 \\ &\Leftrightarrow w^*(zI_N - G)^{-1} v = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

换言之，受扰矩 ′阵 G（t）的谱对应于随 `机亚纯函 ′数的等值线 ′

$$\mathscr{W}_N(z) := w^*(zI_N - G)^{-1} v. \tag{2.4}$$

[7]这种方法相当自然，也同样适用于厄米情形，例如 ′中讨论的那些情形 ′ [2, 3]。

该函数取决于随机变量´、´和 G；通常，它有 v 个极点，即 w的特征值。对于谱半径之外的任意`（注意，对于固定的 N，只需取 G即可 z），可以写成：

$$\mathscr{W}_N(z) = \frac{w^* v}{z} + \sum_{k\geq 1} \frac{w^* G^k v}{z^{k+1}}. \tag{2.5}$$

我们关注 `之外的离群特征值集合，

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| > 1+\epsilon,\ \mathscr{W}_N(z) = \frac{1}{t} \right\}.$$

在第一种情形（$w = v$）中，(2.5) 的第一项为 z^{-1}，而快速分析表明，该表达式的其余部分的典型量级为 $N^{-1/2}$，这与 i.i.d. 输入（2.2）的矩阵归一化 G相符。因此， G (*t*) 的谱刻画变为

$$\frac{1}{t} = \mathscr{W}_N(z) = \frac{1}{z} + O(N^{-\frac{1}{2}}) \tag{2.6}$$

因此，我们有理由预期，在 $z = t$的某个邻域内存在唯一一个离群特征值。借助 Rouché 定理，并为近似 (2.6) 赋予精确的概率意义，这一推理可以变得完全严谨。

在第二种情形（定理 2.2）中，若 w 是均匀随机选取的，且独立于 v，则 $w^* v$ 也是一个 $N^{-1/2}$阶的项，并且可以用经典技巧证明，经过适当归一化的 (2.5) 的系数收敛到相互独立的高斯随机变量：

$$\forall k \geq 0,\ \sqrt{N} w^* G^k v \xrightarrow[N\to\infty]{d} g_k.$$

记 g 相应的高斯整´函数：

$$g(z) = \sum_{k\geq 0} g_k z^k. \tag{2.7}$$

因此，我们得到了[10] 收敛

$$\sqrt{N}\mathscr{W}_N(z) \xrightarrow[N\to\infty]{d} g\left(\frac{1}{z}\right).$$

[8]将条件限定在事件 Sp(G) $\subset$ D(0, $1+\epsilon$) 上并无问题，因为我们知道，该事件的补集概率呈指数级小于 N：典型而言，独立同分布矩阵的矩阵元不会产生离群特征值，这一点最近已在最优假设下得到出色证明 [4].[9]这里回顾这一重要定理：若 f 和 g 是区域 Ω 上的全纯函数，且沿着 Ω 内的简单闭曲线 $\gamma \subset$ 满足 $|f-g| < |g|$，那么 f 和 g 在构成该曲线内部的紧集 K 上具有相同数目的零点。这个结果有一些广为人知且十分实用的应用，纽约遛狗的人对此深有体会：若想 ´避免狗绳缠上树，只要确保狗绳始终短于遛狗人与树之间的距离即可。不过，有些爱说风凉话的人声称，这条原则在复分析兴起之前就 ´已为人所知并付诸实践。[10]这并不令人意外，只是有几点技术细节由 Krishnapur [24]解决了，我们就不再赘述，以免劳烦读者。

这恰好对应于定理 2.2 的论断：对于固定的 $t = \mu\sqrt{N}$， $G(t)$ 的特征值在极限下对应于函数零点的倒数

$$g(z) - \frac{1}{\mu},$$

通常数量有限，阶数为 1。

除了上述应用（[28, 31]）于生物神经网络建模之外，某些矩阵的低秩扰动也出现在人工神经网络的研究中，尤其是 GPT-4 等著名大语言模型的研究中。例如，可以提及 LoRA（低秩近似 [21]）技术，它能够以较低成本将一个最初为某类任务训练的模型调整为执行另一种任务；通过向 GPT-4 提供其初始数据库中没有的信息，我们便可以对其进行个性化定制。更一般地说，随着扰动强度超过某个阈值而出现一个或多个离群特征值的现象，可以理解为类似于经过一定程度的训练后获得某种能力；无论是通过强化学习 算法学习玩打砖块的系统，还是人类学习数学，都会观察到这类阈值效应。

纯粹从数学角度来看，尤其是从概率论的角度来看，这些轨迹的形态、其连接的规模与长度，特别是在 $v = w$ 情形下离群特征值之间唯一的路径，都是可以合理选取来进行量化的随机参数。

作为开篇补充，这些轨迹遵循一个相当引人注目的方程，如下所示：

$$\lambda_j''(t) = 2\lambda_j'(t) \sum_{k \neq j} \frac{\lambda_k'(t)}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad t > 0, \tag{2.8}$$

其中，初始值 $\lambda_i(0)$ $\lambda_i'(0)$ 由矩阵 G 和扰动决定——换言之，所有随机性都包含在这些初始条件中，`从这些条件出发，系统便会发生确定性演化（但由于奇点的存在，当两个特征值彼此接近时，演化可能会呈现混沌）。要详细研究这些轨迹，“只需”成功地将对初始随机性的相当精确的了解与对方程 (2.8) 的定量研究结合起来——毕竟它不过是一个常微分方程.....有兴趣者不妨一试！

3 音乐椅：厄米随机矩阵的反厄米扰动

这一模型的历史依据将我们引向量子混沌散射理论（量子混沌散射），该理论研究的对象包括在混沌混响室中开展的实验，例如那些曾在

[11]按照´ `冯·诺伊曼的那句名言：在数学´中，我们并非理解事物，而是逐渐习惯它们。

`尼斯物理研究所[12] 进行的实验（例如参见奠基性论文 [33] 及较近期的研究 [20, 27]）。这是一种体积庞大、操作复杂的设备，但其运行原理与微波炉基本相似：一个源发射电磁波，电磁波经腔室壁面反射。不过，混沌混响室（如图 3 所示）并非像微波炉那样产生驻波（以便可控地加热食物），而是需要具备多处不规则结构，以更复杂且难以预测的方式散射波。

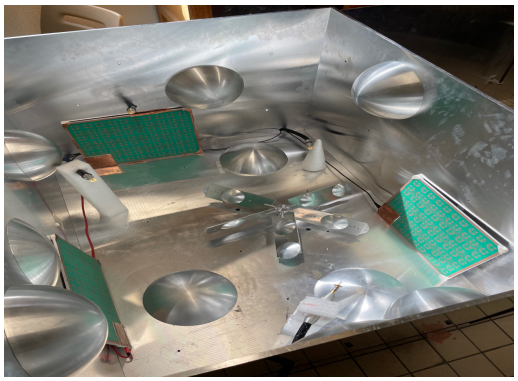

图 3。 用于观察量子散射混沌现象的实验装置示例。来源：U. Kuhl。

概括而言，电磁波的散射可由一个算符描述，该算符通过方程将入射波转换为出射波

$$\psi_{out} = S\psi_{in}. \tag{3.1}$$

散射算符 S (scattering operator) 编码了整个过程，并与哈密顿量 H相关。哈密顿量是一个自伴算符，其谱对应于封闭量子系统的能级。然而，无法以确定性的方式追踪每一束波（根据定义，对于混沌系统而言，这是不可能的），因此人们转而采用统计模型：这时随机矩阵便派上了用场！一个用于建模 H 的理想候选是一个元素服从高斯分布且基本上独立同分布的厄米矩阵，唯有厄米对称性例外（这就是所谓的 GUE，即高斯酉系综）。工作假设是，在`趋于 $N \to \infty$的极限下，可以得到哈密顿量的谱。实际上，散射并非完全孤立的过程，量子系统可以与环境交换能量。因此，开放量子系统不直接使用矩阵 H ，而是与一个不再自伴的有效哈密顿量 $H_{eff} = H + \mathrm{i}\Gamma$ 相关（详情见 [17] ）。在最简单的情形下，系统通过预先指定的 M 通道´与环境相互作用，并且有 $\Gamma = VV^*$，其中包含一个矩阵 $V \in \mathbb{C}^{N\times M}$。这些考量促使物理学家（以及随后跟进的数学家）关注厄米矩阵的低秩反厄米扰动。和之前一样，最简单、最为人熟知的情形是秩一反厄米扰动，此时会出现一个离群特征值。在物理学中，对这一离群特征值（也称为宽共振）如何产生的研究，属于一项更广泛研究实践的一部分，这项实践称为共振俘获。

[12]INPHYNI，蔚蓝海岸大学

设： H 一个复厄米矩阵， v 一个单位向量， $t > 0$ 一个时间参数，并考虑扰动矩阵

$$G(t) = H + \mathrm{i}tvv^*. \tag{3.2}$$

我们关注 $G(t)$ 的谱，其轨迹如下所示。

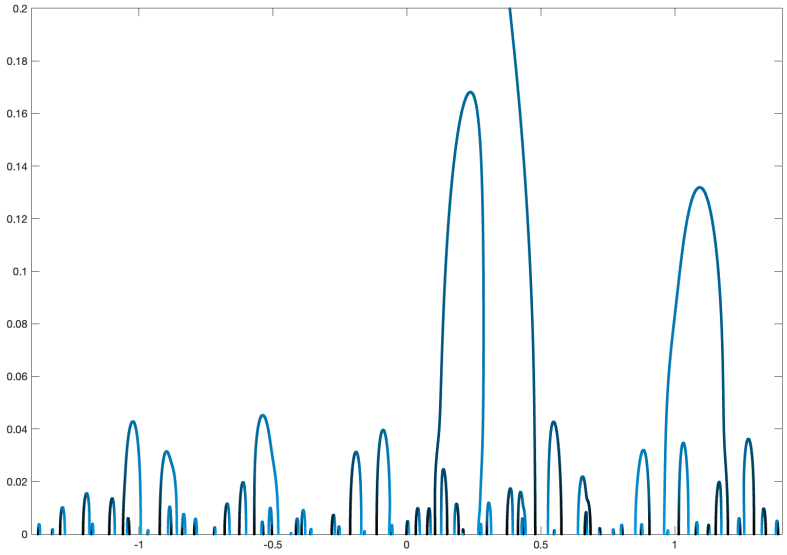

图 4. H 一个 100×100 阶 GUE 矩阵的特征值轨迹。参数 t 的演变通过颜色变化表示，从黑色（t=0）到蓝色（$t \to \infty$）。

从物理学家的角度来看，人们早已知道，在 $t = 1$ 附近会发生相变：例如，Dittes、Heyes 和 Rotter 的开创性研究 [6] 提到了这一临界时间尺度 `；此后，这一现象也已通过实验得到验证（参见尤其是 [26]）。

从数学角度来看，当 H 是一个高斯酉系综矩阵时，可以得出以下结果：

- 对于 $t = 0$， $G(0) = H$的特征值在分布上接近半圆律，其密度为 ´，定义在 $[-2, 2]$上。
- 对于 $t \leq 1$，不存在离群特征值，也就是说`，可以证明所有特征值以很高的概率都与实轴保持接近（距离为 $\frac{1}{N}$ 阶）。
- 对于任意固定的 $t > 1$，都有一个唯一且明显分离的离群特征值；例如，以下结果便是一个例子：

定理 3.1 (O'Rourke 和 Matchett Wood [25])。 对于固定的 $t > 1$ 和 $\epsilon > 0$ ´，以高概率会在 $\mathrm{i}(t - \frac{1}{t})$ 的某个邻域内出现一个离群特征值 λ_1。对于谱的其余部分，我们有

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall j \geq 2,\ \mathrm{Im}\lambda_j < \frac{N^\epsilon}{N},$$

而实部 $(\mathrm{Re}(\lambda_j))_{j=2}^N$ 在极限 $N \to \infty$ 下总是收敛到半圆律。

- 最后，当 $t \to \infty$时，离群特征值趋于无穷大，而其他特征值则收敛到实数值[13]。

这些特征值的总体行为印证了音乐椅这一比喻：它们在上半平面中沿着相对难以预测的轨迹移动，随后又回到实轴上；但其中一个特征值（离群特征值）被排除在这一群体之外。

Re值得注意的是，对于这个系统，迹的虚部是已知的：

$$\sum_{j\geq 1} \mathrm{Im}(\lambda_j) = \mathrm{ImTr}(H + \mathrm{i}tvv^*) = t.$$

此外，由于这些虚部均为正，原本预期会出现在 $\mathrm{i}t$ 邻域附近的离群特征值，实际上略微位于其下方，接近典型位置 $\mathrm{i}(t - \frac{1}{t})$。其他特征值的虚部则只能分得离群特征值留下的一点残羹，量级为 $\frac{1}{t}$。

为了研究这个系统，取 z 上半平面中的点（$\mathrm{Im}(z) > 0$），并像之前一样应用矩阵行列式引理。可得

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow \det(G(t) - zI_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(I_N + (H - zI_N)^{-1}\mathrm{i}tvv^*) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \mathrm{i}tv^*(H - zI_N)^{-1}v = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathscr{W}_N(z) := v^*(H - zI_N)^{-1}v = \frac{\mathrm{i}}{t}. \end{aligned}$$

到目前为止，计算与之前相同，但从现在起，必须调整方法，因为在我们感兴趣的范围内展开 $v^*(H - zI_N)^{-1}v$ 未免过于草率。幸运的是，我们无意间又回到了一个熟悉的对象。在关于厄米随机矩阵的浩瀚文献中，局部律占据着重要地位：其目标是在 z位于谱上方时，尽可能以小的虚部估计预解式$(H - zI_N)^{-1}$。基本思路是，在适当的范围内，预解式的迹接近半圆分布的斯蒂尔切斯变换：

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(H - zI_N)^{-1} \simeq m_{\mathrm{sc}}(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{x=-2}^{2} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - z}\mathrm{d}x.$$

那么，好吧。我们的函数 $\mathscr{W}_N$ 固然不是预解式的迹，但它属于同一类。它是预解式的一种对角系数，有一个专门的定理对此进行研究，称为各向同性局部律 [22]，该定理可为近似提供依据

$$\mathscr{W}_N(z) \simeq m_{\mathrm{sc}}(z)$$

[13]这些极限对应于 $N - 1$ 的子式的 H特征值。特别是，它们与初始的特征值交错。

在某个区域内成立（其误差项比经典局部律的误差项更大：这一对象比预解式的迹更不稳定）。不过，当误差项足够小时，我们仍然预期离群特征值会接近方程的一个解

$$m_{\mathrm{sc}}(z) = \frac{\mathrm{i}}{t}.$$

对于高斯酉系综矩阵或任何其他收敛到半圆律的矩阵，这一预言恰好对应于定理 3.1 的 $\mathrm{i}(t - \frac{1}{t})$。然而，值得注意的是，按照同样的逻辑，也可以构造出一些情形，使得对于某些 t 会出现多个离群特征值；典型情况是极限分布不是半圆律，且斯蒂尔切斯变换不是单射 [29]。

与 Ginibre 迷宫（第 1 部分）一样，函数 $\mathscr{W}_N$ 刻画了 $G(t)$ 的谱，因此通过一个简单关系，理论上包含了关于特征值轨迹 $\lambda_1(t) \ldots, \lambda_N(t)$ 的所有信息。我们可以立即推导出的第一件事是，轨迹几乎从不相交。事实上，假设 $\lambda_j(t) = \lambda_k(s)$，可得

$$\frac{\mathrm{i}}{t} = \mathscr{W}_N(\lambda_j(t)) = \mathscr{W}_N(\lambda_k(s)) = \frac{\mathrm{i}}{s} \tag{3.3}$$

由此˙可´以推导出 $t = s$：这是一个确定性事实，两条轨迹只能在同一´时间 t 相交！但借助 $t = s$，相交意味着 ˙存在一个至少二阶的零点´ $\mathscr{W}_{N-\mathrm{i}\,t}$，而这可以转化为一个几何条件´[14],，最后通过维数考量得出，这一 ´事件´发生的概率´为零。

我们还可以更精确地确定´时间尺度 ˙：超过这一尺度后，几乎可以肯定地辨认出这场抢椅子游戏中的失败者。

定理 3.2 (Dubach 和 Erd˝os [7])。 在保证各向同性局部律成立的´´一般[15] 条件下，对于任意 $\epsilon > 0$ 固定的´和 $t > 1 + N^{-1/3+\epsilon}$，以高概率存在一个唯一且与其他特征值充分分离的离群特征值。

稍微展开一下这个启发式论证：回顾一下，我们有

$$\mathscr{W}_N(z) := v^*(H - zI_N)^{-1}v \tag{3.4}$$

并且，时间为 t 时的特征值恰好由下式给出

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}z > 0,\ \mathscr{W}_N(z) = \frac{\mathrm{i}}{t} \right\}.$$

[22] 的各向同性局部律给出了随机支配[16]

$$|\mathscr{W}_N(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)| \prec \frac{1}{\sqrt{N\ |\mathrm{Im}z|}}.$$

[14]可以用一个形象的说法来概括：$\mathscr{W}_N'$ 的零点是平面上有限多个随机点，而其中一个点恰好落在一条轨迹上的概率为零。[15]这涵盖了高斯酉系综的情形（高斯输入），更一般地，也适用于 Wigner 矩阵（更一般的独立同分布输入，并满足关于矩的条件）。[16]在随机矩阵理论中，如果对任意 $\epsilon > 0$，都有 $|a_n| < b_n n^{\epsilon}$ 以高概率成立，我们就称数列 a_n 在随机意义上被数列 $b_n > 0$控制（记作：$a_n \prec b_n$）。这是一个实用的概念，可用于处理变量´在极限 $n \to \infty$ 下的数量级。

对于任意 $t>0$, $\epsilon>0$，我们定义区域

$$\mathscr{R}_{t,\epsilon}=\left\{\mathrm{Re}(z)^2+\left(\mathrm{Im}(z)-\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)^2>\frac{N^{\epsilon}}{N\cdot\mathrm{Im}(z)}\right\}.$$

结合随机支配与 Rouché 定理，我们证明函数 $w(z)-\mathrm{i}t$和 $m_{sc}(z)-\mathrm{i}t$在 $\mathscr{R}_{t,\epsilon}$ 中具有相同数量的零点。特别地，离群特征值位于一个圆盘中

$$D\left(\mathrm{i}\left(t-\frac{1}{t}\right),\frac{N^{\epsilon}}{\sqrt{N\left(t-\frac{1}{t}\right)}}\right),$$

其圆心正是典型位置 $\mathrm{i}\left(t-\frac{1}{t}\right)$，而其余特征值 v 满足

$$\mathrm{Im}(\lambda_j)<\frac{N^{\epsilon}}{\left(N\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)}.$$

直接计算即可得出结论，只要 t 超过尺度 $1+O(N^{-1/3})$！因此，这一技巧可以证明，在超过某一特定时间尺度后，离群特征值与其他特征值之间存在显著分离。不过，这还不足以证明该尺度是最优的。Fyodorov、Khoruzhenko 和 Poplavskyi 的文章在不久后证实了这一点，该文精确估计了一个恰当选取的矩形中的点的平均数量：

定理 3.3（Fyodorov、Khoruzhenko 和 Poplavskyi [15]）。若定义

$$\mathscr{N}_t(y):=\mathbb{E}[\#\{\lambda\in Sp(G(t)):\mathrm{Im}(\lambda)>y\}],$$

当 $N\to\infty$ 时，有

$$\mathscr{N}_t(y)\ \sim\ \frac{1}{y}\,e^{-Ny(t+\frac{1}{t})}\ I_1(2Ny)$$

这里 I_1 表示第一类修正贝塞尔函数，且 y 可能依赖于 N。

特别地，对于 $t=1\pm O(N^{-1/3})$，这个估计证明了存在一个特征值云，其虚部的量级为 $O(N^{-1/3})$。所用的技术是相当精妙的直接计算，这得益于这样的事实：当 H 是高斯酉系综矩阵时，该系统完全可积；这一点约二十年前已由同样三位作者中的两位证明 [14]。对于高斯酉系综，我们有 $H+\mathrm{i}tvv^*$ 的特征值联合分布的显式密度：

$$\frac{1}{Z_{N,t}}\delta_{\sum\mathrm{Im}z_i=t}\ \prod_{i<j}|z_i-z_j|^2\ e^{-\frac{N}{2}(t^2+\sum\mathrm{Re}(z_k^2))}.$$

相对于上半平面 $\{\mathrm{Im}z\geq 0\}$ 中的勒贝格测度。

我们就此结束对抢椅子游戏模型的简要回顾。最后提一个非常引人入胜的开放问题：既然这是一个连续过程，且轨迹之间不会相交，那么离群特征值来自初始谱（即 $G(0)=H$）的哪一部分？所有模拟和计算都表明，主要变化发生在原点的一个小邻域内。然而，出于一些严峻的技术原因，现有方法无法严格证明离群特征值以较高概率来自这样的邻域；要解决这一问题，或许需要提出一种新的方法。

4 UA 模型：酉矩阵的乘法扰动

同样与量子散射理论有关，我们的第三个也是最后一个模型源自对离散时间系统的研究。Fyodorov 在以下背景中引入了该模型：考虑一个与其环境相互作用的简单量子系统。对于每个（离散）时间 n，系统的状态由向量 $\psi_{sys}(n)$ 表示；此外，我们考虑信号 $\psi_{in}(n)$ 和 $\psi_{out}(n)$，它们在任意 n 时刻进入和离开该系统。于是，这个“开放”系统的演化可由以下关系描述：

$$\begin{pmatrix} \psi_{sys}(n+1) \\ \psi_{out}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{sys}(n) \\ \psi_{in}(n) \end{pmatrix} =: M \begin{pmatrix} \psi_{sys}(n) \\ \psi_{in}(n) \end{pmatrix}$$

并附带一项确保能量守恒的约束。 ′的′元素是描述环境信号与系统之间变换的 M 算子：

- M_{11}：内部演化；
- M_{12}：系统的输入信号 $\to$；
- M_{21}：系统`的输出信号；
- M_{22}：输入 $\to$ 输出传输。

经过若干次变换[17]，内部演化′呈现为

$$M_{11} = U\sqrt{I_N - \tau^*\tau},$$

o`u $U$是酉矩阵，而 $\tau^*\tau$的特征值（对于 $\tau$一个矩形矩阵 $M \times N$）与传输系数′相关，这些系数描述系统′与其环境`之间的耦合。最简单的情况下，交互通过 d 个明确界定的通道进行，扰动 $\tau^*\tau$ 呈对角形式：

$$\tau^*\tau = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_d, 0, \ldots, 0). \tag{4.1}$$

注意， $\tau = 0$ 对应于 `一个量子`封闭封 ′闭 系统（与环境没有相互作用），其演化由′一个 ′酉演化描述。为了使用适当的统计方法′来模拟其混沌动力学，需要一种分布：酉群上的 Haar 测度，也就是说，矩阵 U 在 ′（ U_N）上以均匀方式′进行采样`。在随机矩阵的历史术语中，这被称为˛CUE（即圆酉系综）。

[17]有关我们在此省略的技术细节，请读者参阅 Fyodorov 的文章 [13] 。

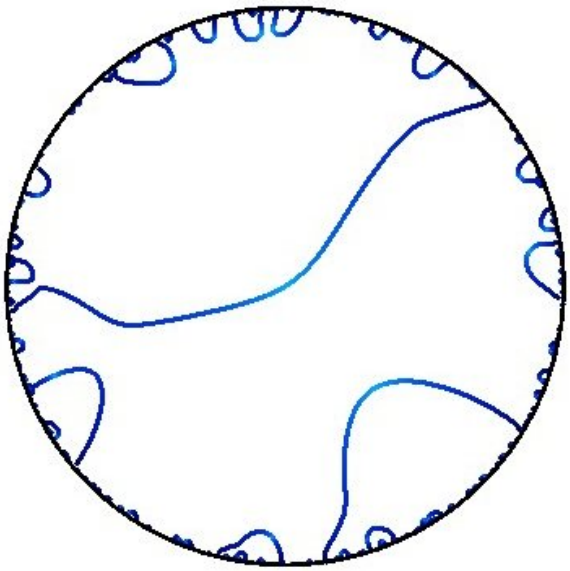

图 5. 大小为 250×250 的 UA 矩阵的轨迹。参数 t 的演变通过颜色从黑色（$|t|$=1）到蓝色（$t \to 0$）的变化表示。

以上就是背景。数学上，我们将看到，它与前面的例子既有相似之处，也存在显著差异。对于 U 一个 CUE 矩阵以及

$$A(t) := (\mathrm{I}_N - (1-t)vv^*)$$

沿单位向量 v 对单位矩阵施加低秩扰动[18]，我们考虑矩阵、其 UA 定义为

$$G(t) = UA(t), \qquad t \in [-1, 1]. \tag{4.2}$$

称为秩一乘法扰动，是指矩阵 A 与单位矩阵之差为一个秩一矩阵。特征值动力学类似于一种环形且包容的抢椅子游戏：在开始和结束时，也就是说对于 $t = \pm 1$, G，t 是酉矩阵，且所有特征值的模都为 1。在动力学过程中， $G(0)$ 的谱与一个截断酉矩阵的谱相同，并在原点处多出一个特征值。这些轨迹的示意图见图 5。

可以观察到，大多数特征值会在单位圆盘边界附近形成（非常）小的环，但有一条轨迹穿过圆盘并经过零点（当 t =0 时）。这里的主要离群特征值正是这个特征值：事实上，它离圆盘边界最远，受乘法扰动的影响最大，而且很容易与谱的其余部分区分开来。采用与第 2 节类似的论证，可以证明该模型的轨迹不会相交，并推导出一组用于描述它们的常微分方程（见 [8]）。

[18]典型情况是对角矩阵 $A(t) = \mathrm{diag}(t, 1, \ldots\ldots, 1)$，当 $d = 1$ 时，可由（4.1）得到；在这里取 $v = e_1$ 也能得到这一矩阵。这种泛化只是为了沿用与前面几种情况相近的记号。[19]事实上，并没有任何特征值被舍弃。离群特征值是穿过中心、随后又回到单位圆上的那个特征值。

这一切仅对秩一扰动成立。而且，文献中甚至给出了 (4.2) 的特征值联合密度公式。

定理 4.1 (Fyodorov [13])。 模型 UA 的特征值联合密度与

$$(1-|t|^2)^{1-N}\prod_{i<j}|z_i-z_j|^2\ \mathbf{1}_{\{|t|^2=\prod|z_i|^2\}}$$

相对于单位圆盘上的勒贝格测度 ` 成正比，其归一化常数与 t 无关。

时间尺度 $t\sim N^{-1/2}$ 在模型 UA 中起着特殊作用。对于这一 t 选择研究 (4.2), Forrester 和 Ipsen [11] 的一项结果表明，特征值的联合分布似曾相识。

定理 4.2 (Forrester 和 Ipsen [11])。 对于固定的 $\mu>0$ 和 $t=\mu N^{-1/2}$，(4.2) 的谱依分布收敛到高斯整函数级数(2.7) 的零点分布。

为了确信这一点，我们再来进行那个已经逐渐熟悉的计算。这一次，我们得到

$$\begin{aligned} z\in\mathrm{Sp}(G(t)) &\Leftrightarrow \det(G(t)-zI_N)=0\\ &\Leftrightarrow 1-(1-t)v^*(U-zI_N)^{-1}Uv=0. \end{aligned}$$

这（再次）给出了一个随机亚纯函数

$$\widetilde{\mathscr{W}_N}(z):=v^*(I_N-zU^*)^{-1}v$$

它通过关系刻画了 $G(t)$ 的谱

$$z\in\mathrm{Sp}(G(t))\Leftrightarrow\widetilde{\mathscr{W}_N}(z)=\frac{1}{1-t}.$$

与 $|z|<1$ 一样，我们可以放心地展开:

$$\widetilde{\mathscr{W}_N}(z)=\sum_{k\geq0}v^*(zU^*)^kv=1+\sum_{k\geq1}c_kz^k \tag{4.3}$$

而系数经过因子 $\sqrt{N}$ 的适当归一化后，收敛到相互独立的高斯变量。总之，经过这一番小把戏，我们又得到了高斯级数 (2.7)。时间 $t=\mu N^{-1/2}$ 的特征值在极限下对应于 $g-\mu$ 的根。

事实证明，Forrester 和 Ipsen 为得到上述收敛而考虑的这个尺度，也决定了离群特征值的出现。实际上，一切都发生在这个尺度上。

定理 4.3 (Dubach 和 Reker [8])。 对于任意 $\epsilon>0$, $|t|<N^{-1/2-\epsilon}$，都存在唯一一个与其他特征值严格分离的离群特征值。此外，´尺度 $N^{-1/2}$ 是最优的。

这个想法与前面几节介绍的论证类似：我们想用套索捕获离群特征值，并在适当的轮廓上使用 Rouché 定理。然而，模型的对称性 UA 使我们无法采用完全确定性的近似；因此必须保留少许随机性。为此，请注意，得益于 (4.3)，函数

$$\widetilde{\mathscr{W}_N}(z) = v^*(I_N - zU^*)^{-1}v$$

由一个级数给出，并记作

$$\widetilde{\mathscr{W}_N}(z) = 1 + v^*U^*vz + \widetilde{w}_2(z).$$

重要的是线性项的涨落，因此应将其单独保留。由于圆酉系综相当规则，误差在以 0 为中心、半径为 的圆盘内一致地以随机方式受到控制。更准确地说，对于任意 ，我们得到如下界

$$\widetilde{w}_2(z) < \frac{N^{\epsilon}|z|^2}{\sqrt{N}(1-|z|)} \tag{4.4}$$

以高概率成立。因此，对于

$$f(z) := \widetilde{\mathscr{W}_N} - \frac{1}{1-t},$$
$$g(z) := 1 + v^*U^*vz - \frac{1}{1-t}$$

on a

$$|f-g| = |\widetilde{w}_2|$$

并且可以验证，在区域 上

$$\widetilde{\mathscr{R}}_{t,\epsilon} = \left\{ |z| < 1 \;\middle|\; \frac{N^{\epsilon}|z|^2}{1-|z|} < |v^*U^*v|\ |z - z_t| \right\}$$

以高概率成立，其中 表示 的唯一零点。因此，我们可以在区域 . 上应用 Rouché 定理，并证明离群特征值被强烈分离。

最后，值得注意的是，这一论证也适用于 `除圆酉系综´以外的随机酉矩阵。事实上，对于满足界（4.4）~以及不等式´的任意集合，这一结论都成立：

$$N^{1/2-\epsilon} < v^*U^*v < N^{1/2+\epsilon}$$

对于任意 $\epsilon > 0$，以高概率成立。特别是，这一性质并不´取决于´ U的特征值之间的排斥：如果这些特征值服从 α-行列式点过程且满足 $\alpha \in [-1, 1]$，那么这一性质总是成立。这些点过程在具有排斥作用的点过程（行´列式情形：$\alpha = -1$）与具有吸引作用的点过程（永久情形： $\alpha = 1$）之间提供连续插值，并经过相互独立的点（$\alpha = 0$）。

UA模型无疑是通过精确计算解决新问题的希望最为切实的模型。它具有完整的旋转对称性

这在我们的分析中发挥着关键作用（尤其使我们能够直接证明尺度 $N^{-1/2}$ 的最优性），也将在 Fyodorov、Khoruzhenko 和 Prellberg [16] 即将开展的工作中发挥作用：这种对称性使我们能够援引强有力、有时甚至违背直觉的结果，例如 Kostlan 定理（见 [23, 9]）。该定理指出，二维随机点过程中的点虽然可以强烈排斥彼此，其半径却相互独立。最后，将现有结果推广到保持旋转对称性的高秩扰动，似乎也很自然。下图展示了秩二扰动下的轨迹。

随着对弱非酉乘法扰动的这些讨论，我们对随机矩阵的非厄米秩一扰动的简要概览也就此结束。

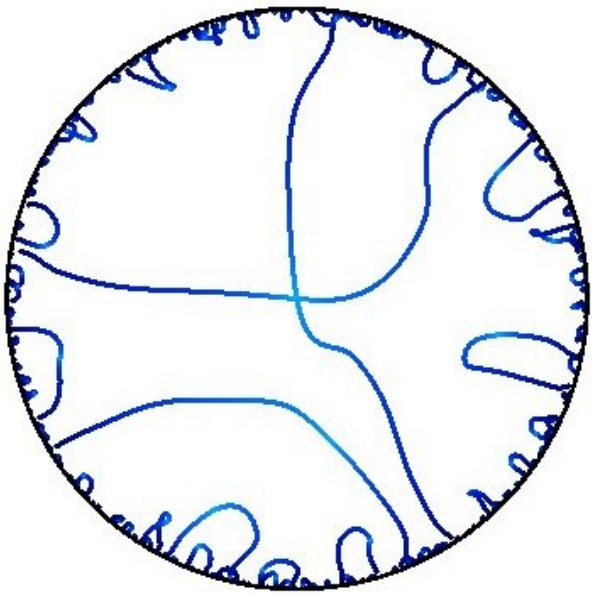

图6。 考虑带有秩二扰动的 UA 模型，可以得到两个离群特征值。

´结语：特征向量究竟是右特征向量还是左特征向量?

对于厄米矩阵 H 和特征值 $\lambda \in \mathbb{R}$，传统上倾向于优先考虑 `右特征向量´，也就是说，默认认为是满足下式的列向量 u:

$$Hu = \lambda u.$$

话虽如此，如果 u 是一个 `右特征向量，我们同样可以注意到，行向量 $u^*$ 是对应于同一特征值的 `左特征向量，也就是说:

$$u^* H = \lambda u^*.$$

换句话说，在厄米世界中，对于一个特征向量而言，`是左特征向量还是 `右特征向量，.差别并不大。而在非厄米世界中，情况就完全不同了.....如果

G 是一个可对角化复矩阵（对于常见的随机矩阵模型，这一情况以概率´1发生），我们可以 ´写出

$$G = P\Delta P^{-1}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N),$$

然后考虑´ R_1，.....， R_N P的列以及 L_1，.....， L_N P^{-1}的行，它们满足

$$GR_j = \lambda_j R_j, \quad L_j G = \lambda_j L_j.$$

因此可以看出， R_i 是右特征向量，而 L_i 是左特征向量，它们对应于同一个[20] 特征 λ_i。这两个向量可能会非常不同.....此外，这两个族通常都不是正交族——但厄米情形的正交归一性（$u_i^* u_j = \delta_{ij}$）被双正交性´所取代。事实上，

$$L_i R_j = \delta_{ij},$$

这直接由 $P^{-1}P = I_N$得出。对非厄米矩阵G 的扰动会以耦合的方式同时改变所有这些 ´元´。在上述介绍的所有模型中，特征值的导数都表示为特征值和特征向量的函数，依此类推。如何总结这些信息，使这个庞大的系统`变得（至少部分地）易于理解？可以考虑多种方法。一条重要思路是研究依赖于两类特征向量的齐次量，例如 $\mathscr{O}$ 重叠矩阵，其各个元素´由右特征向量与左特征向量之间的厄米标量积的乘积给出：

$$\mathscr{O}_{ij} = (L_i L_j^*)(R_j^* R_i).$$

但这是另一个故事.....

致谢： 本文以两位作者近期的研究成果，以及 G. D. 在亨利·庞加莱研究所举办的随机矩阵与图（MEGA）研讨班上的一场短期课程为起点。我们谨向 MEGA 的组织者和参与者致谢，尤其感谢 Raphaël Ducatez，他的笔记是本文的起点；也感谢 Margaret Bilu、Victor Dubach、Aniss Farès 和 George-Ioan Stoica 提出的许多建议。最后，我们还受益于两位杰出审稿人 Pauline Lafitte 和 Maxime Février 的认真审阅，在此向他们致以诚挚谢意！

参考文献

[1] J. Baik、G. Ben Arous 和 S. P´ech´e。非零复样本协方差矩阵最大特征值的相变。概率年刊，33(5):1643–1697，2005。[2] Florent Benaych-Georges、Alice Guionnet 和 Myl`ene Ma¨ıda。矩阵随机形变极端特征值的大偏差。概率论及相关领域，154:703–751，2012。[3] Florent Benaych-Georges 和 Raj Rao Nadakuditi。大型随机矩阵有限低秩扰动的特征值与特征向量。数学进展，227(1):494–521，2011。

[20] 值得注意，特征向量无论是`左还是`右，都具有相同的值s.

[4] Charles Bordenave、Djalil Chafa¨ı 和 David Garc´ıa-Zelada。通过特征多项式研究随机矩阵谱半径的收敛。概率论及相关领域，页码1–19，2022。[5] Djalil Chafa¨ı。非中心随机矩阵的圆律。J. Theor. Probab.，23(4):945–950，2010。[6] F.-M. Dittes、H.L. Harney 和 I. Rotter。与一个开放通道耦合的n能级系统中快衰减模态和慢衰减模态的形成。Phys. Lett. A，153(451–455)，1991。[7] G. Dubach 和 L. Erd˝os。厄米矩阵秩一扰动的动力学。Electron. Commun. Probab.，28:1–13，2023。[8]G. Dubach 和 J. Reker。酉矩阵秩一乘法扰动的动力学。`即将发表于《Random Matrices: Theory Appl.》，https://doi.org/10.1142/S2010326324500072，2024。[9] Guillaume Dubach。Ginibre特征值的幂。Electron. J. Probab.，(23):1–31，2018。[10] P. J. Forrester。随机矩阵理论中的秩1扰动——精确结果综述。Random Matrices: Theory Appl.，12(4):2330001，2023。[11] P. J. Forrester 和 J. R. Ipsen。复Kac多项式零点与截断酉矩阵特征值之间关系的推广。Prob. Theory Relat. Fields，31:833–847，2019。[12] S. Francinou、H. Gianella 和 S. Nicolas。Oraux X-ENS：代 ˙数2。[13] Y. V. Fyodorov。接近酉矩阵的随机矩阵谱与离散时间系统的散射理论。载于《无序与复杂系统》，AIP会议论文集第553卷，页码191–196。美国物理联合会，纽约州梅尔维尔，2001。[14] Y. V. Fyodorov 和 B. A. Khoruzhenko。量子混沌散射中共振相关函数的系统解析方法。Phys. Rev. Lett.，83:65–68，1999。[15] Y. V. Fyodorov、B. A. Khoruzhenko 和 M. Poplavskyi。高斯酉系综的秩一非厄米形变中的极端特征值与新出现的离群特征值。Entropy，25(74)，2023。[16] Y. V. Fyodorov、B. A. Khoruzhenko 和 T. Prellberg。条件高斯解析函数的零点、随机次酉矩阵与q级数。准备 ´中，2024。[17] Y. V. Fyodorov 和 D. V. Savin。混沌系统中的波共振散射。载于《牛津随机矩阵理论手册》，《牛津数学手册丛书》，页码703–722。牛津大学出版社，牛津，2011。[18] Yan V Fyodorov 和 Bernhard Mehlig。单通道混沌散射模型中的共振统计与非正交特征函数。Phys. Rev. E，66(4):045202，2002。[19] J. Ginibre。复、四元数与实矩阵的统计系综。J. Math. Phys.，6:440–449，1965。[20] J.-B. Gros、U. Kuhl、O. Legrand 和 F. Mortessagne。有损混沌电磁混响室：矢量场的普适统计行为。Phys. Rev. E，93:032108，2016。

[21] Edward J Hu、Yelong Shen、Phillip Wallis、Zeyuan Allen-Zhu、Yuanzhi Li、Shean Wang、Lu Wang 和 Weizhu Chen。LoRA：大语言模型的低秩适配。2021年。[22] Antti Knowles 和 Jun Yin。各向同性半圆定律与 Wigner 矩阵变形。纯粹与应用数学通讯，66(11)：1663–1749，2013年。[23] Eric Kostlan。关于高斯矩阵谱。线性代数及其应用，162：385–388，1992年。[24] M. Krishnapur。从随机矩阵到随机解析函数。概率年刊，37(1)：314–346，2009年。[25] S. O'Rourke 和 P. Matchett Wood。近厄米随机矩阵的谱。亨利·庞加莱数学研究所年刊 ´与统计学，53(3)：1241–1279，2017年。[26] E. Persson、I. Rotter、H.-J. Stoeckmann 和 M. Barth。开放微波腔中的共振俘获观测。物理评论快报，85：2478–2481，2000年。[27]Charles Poli。开放介质中的波动混沌：通过非厄米随机矩阵进行的统计方法。博士论文，尼斯-索菲亚·安蒂波利斯大学，2009年。[28] K. Rajan 和 L. F. Abbott。神经网络随机矩阵的特征值谱。物理评论快报，97(18)：188104，2006年。[29]J. Rochet。厄米随机矩阵的复离群值。概率论杂志，30(4)：1624–1654，2017年。[30] E. Rouché。关于拉格朗日级数的回忆录。帝国理工学院杂志 ´帝国理工学院 ´杂志，39(XXII)：193–224，1862年。[31] Friedrich Schuessler、Alexis Dubreuil、Francesca Mastrogiuseppe、Srdjan Ostojic 和 Omri Barak。具有相关低秩结构的随机循环网络动力学。物理评论研究，2(1)：013111，2020年。[32] T. Tao。具有有界秩扰动的独立同分布矩阵谱中的离群特征值。概率论及相关领域，155：231—263，2013年。[33] J.J.M. Verbaarschot、H.A. Weidenmuller 和 M.R. Zirnbauer。随机量子物理中的 Grassmann 积分：复合核散射情形。物理学报告，129(6)：367–438，1985年。