arXiv:2601.02839v1 [math.GT] 6 Jan 2026

曲线图与裤子图之间插值图的大尺度几何

ERIKA KUNO、RIN KURAMOCHI、KENTO SAKAI

Abstract. 我们从大尺度几何的角度研究曲线图与裤子图之间的两类插值图。其中一类由 Erlandsson 和 Fanoni 引入，另一类由 Mahan Mj 引入。这两类图是在不同背景下独立发展起来的。本文给出了计算它们拟平坦秩的显式公式。这些公式取决于底层曲面的亏格、边界分支数以及插值参数。我们还将这些插值图的几何分类为双曲、相对双曲和厚情形。我们的方法依赖于多曲线的无扭图理论，该理论由 Vokes 和 Russel 发展而来。

1. 引言

令 $\Sigma = \Sigma_{g,\,b}$ 为一个连通、紧致且可定向的曲面，其亏格为 g，有 b个边界分支。本文将本质简单闭曲线的同痕类简称为曲线。Σ 的裤子分解 是一个多曲线，其补集的所有分支均为裤子（因此该多曲线有 $3g-3+b$ 个分支）。在映射类群、3维流形和 Teichm¨uller 理论的背景下，顶点对应于Σ 上的曲线或多曲线的图，其大尺度几何得到了广泛研究。

Harvey [Har81] 定义了曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$，它是一个图，其顶点是 Σ 上的曲线。若对应于两个顶点的曲线在 Σ上互不相交，则 $\mathcal{C}(\Sigma)$中的这两个不同顶点之间连有一条边。我们将图中的每条边的长度设为一。Masur 和 Minsky [MM99] 最先证明了曲线图是 Gromov 双曲的。在最初的证明之后，又出现了各种其他证明（例如，参见 [Bow06, Ham07, Aou13, CRS14, Bow14, HPW15],also [Kun16]，其中包括针对不可定向曲面的情形）。

日期：2026年1月7日。2020 数学主题分类。57K20，20F65，20F67。

作为另一种与拓扑曲面相关的图，Hatcher 和 Thurston[HT80] 引入了 Σ的裤子图 $\mathcal{P}(\Sigma)$。这里， Σ 的裤子图是一个图，其顶点是 Σ 的裤子分解。若对应的裤子分解相差一次基本移动，即在补子曲面中以一条与其交数最小的曲线替换恰好一条曲线，则 $\mathcal{P}(\Sigma)$中的两个顶点之间连有一条边。我们在 $\mathcal{P}(\Sigma)$上赋予组合度量，使每条边的长度为 1。Brock [Bro03] 证明了裤子图与配备 Weil–Petersson度量的 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}^{\mathrm{WP}}(\Sigma)$拟等距。在 [BM08a], 中证明，拟等距嵌入 $\mathcal{T}_{\mathrm{WP}}(\Sigma)$的欧几里得空间的最大维数为$\lfloor \frac{3g-2+b}{2} \rfloor$。特别地，如果 $\Sigma(= 3g-3+b)$的复杂度大于或等于 3，则 $\mathcal{P}(\Sigma)$不是 Gromov 双曲的。Brock和Farb [BF06],、Behrstock [Beh06], 和 Aramayona [Ara06] 分别独立证明了：如果 Σ 的复杂度等于 2，则$\mathcal{P}(\Sigma)$是 Gromov 双曲的。

Erlandsson 和 Fanoni [EF17], 以及 Mahan Mj [Mj09] 分别以两种不同的方式定义了多曲线图，使其介于曲线图与裤子图之间。

首先，我们引入由 Erlandsson 和 Fanoni [EF17], 定义的 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，其中 Σ k 从 1 变化到 $3g-3+b$。 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$的顶点是$\Sigma$ 上恰好由 k 个分量组成的多曲线。若两个不同顶点对应的多曲线交数最小，则在 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$中这两个顶点之间连一条边（详见定理 2.1）。

另一方面，Mahan Mj [Mj09] 定义了整数 ξ 介于 -1 和 $3g-4+b$之间时的复杂度-ξ 图$\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$。复杂度-$\xi$ 图是在裤子图 $\mathcal{P}(\Sigma)$的基础上添加额外边得到的。具体而言， $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$的顶点是裤子分解；若两个不同顶点对应的裤子分解满足以下任一条件，则在它们之间连一条边：(i) 满足裤子图中的邻接条件；或 (ii) 移除某个复杂度至少为 ξ 的子曲面后，两者相同（详见定理 2.3）。根据定义，当 ξ 为 -1 或 0 时，条件 (ii) 无法满足。因此，复杂度-(-1)图和复杂度-0 图均与通常的裤子图 $\mathcal{P}(\Sigma)$相同。此外，复杂度-$(3g-4+b)$图与曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$拟等距 [Mj09，注 1.4。1]。因此，从大尺度几何的角度看，复杂度-ξ图介于曲线图与裤子图之间。

我们为曲线图与裤子图之间的两个插值图赋予组合度量。 k-多曲线图与复杂度为ξ 的图显然是不同的多曲线图

。然而，从大尺度几何的角度来看，这两个多曲线图是等价的。令 ξ_0 表示$\Sigma = \Sigma_{g的b}$的复杂度，即 $\xi_0 := 3g - 3 + b$。

定理 A. 对于每个满足 $1 \leq k \leq \xi_0$ 的整数 k， k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 与复杂度为 $(\xi_0 - k)$ 的图 $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$ 拟等距。

度量空间的一种拟等距不变量是拟平坦秩，其定义为可拟等距嵌入度量空间的欧几里得空间的最大维数。由于这两个插值图拟等距，它们具有相同的所有拟等距不变量，包括拟平坦秩。

定理 B. 设 k 是一个满足 $1 \leq k \leq \xi_0$ 的整数。那么， k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 与复杂度为 $(\xi_0 - k)$ 的图 $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$ 的拟平坦秩等于

(1.1)
$$m(g,b,k) := \begin{cases} \min\left\{\left\lfloor \frac{2g-2+b}{a(3g-2+b-k)} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3g-2+b}{3g-1+b-k} \right\rfloor\right\} & (b,k) \neq (0,1) \\ 1 & (b,k) = (0,1), \end{cases}$$

其中 $a(x) := \lceil (2x+1)/3 \rceil$ （当 $x \in \mathbb{Z}$ 时）。

该定理的核心部分依赖于 [Vok22] 的结果。在论文 [Vok22], 中, Vokes 引入了适用于顶点对应多曲线的图的无扭转性 概念（见定理 2.4）。她证明了，多曲线的无扭图是一个层级双曲空间。这一结果使我们能够将 Behrstock、Hagen 和 Sisto [BHS17, BHS19], 所发展的层级双曲空间理论应用于多曲线的无扭图。该理论揭示了层级双曲空间的许多拟等距性质。根据 [Vok22], ， 多曲线无扭图 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的大尺度几何由 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的见证子曲面 集合决定。 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的一个见证是 Σ 的一个子曲面，它与 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 每个顶点对应的多曲线都相交。根据 [Vok22，推论 1.3 和 1.4], ， $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的拟平坦秩不超过 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的两两不相交见证子曲面的最大数量。我们在定理 B 中证明， k-多曲线图$\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的两两不相交见证子曲面的最大数量为 $m(g,\ b,\ k)$。我们还证明了存在一个拟等距嵌入 $\mathbb{Z}^{m(g,b,k)} \to \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$。值得注意的是，通常很难给出拟平坦秩的上界，而我们的上界依赖于 [Vok22, BHS21] 的结果。此外，Mahan Mj [Mj09] 证明了该

复杂度-ξ 图的拟平坦秩等于复杂度至少为 $\xi+1$ 的两两不相交子曲面的最大数量。根据这一结果，我们通过定理 A 得到了定理 B 的另一种证明。请注意，我们不能将 Vokes [Vok22] 的结果直接应用于复杂度-ξ图，因为它不满足多曲线无扭图的条件。

论文 [Vok22、RV22] 对无扭转多曲线图进行了分类，涵盖双曲、相对双曲和厚三种情形。利用这一结果，我们得到了 k-多曲线图的分类。

推论C。 设 $\Sigma = \Sigma_{g,b}$ 是一个连通、紧致且可定向的曲面，其亏格为 g，有 b 个边界分支，并假设 $3g-3+b$ 至少为 2。设 k 为满足 $1 \leq k \leq 3g-3+b$ 的整数。那么，以下条件决定了 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 是双曲、相对双曲还是厚：

(1) **双曲情形**。 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ 是双曲的，当且仅当 $m(g,b,k) = 1$。(2) **相对双曲情形**。 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ 是相对双曲的，当且仅当

- g 为偶数， b 为至少 2 的偶数，并且 $k = (3g+b)/2$，
- g 为偶数， $b = 0$，并且 $k \in \{3g/2, (3g+2)/2\}$，
- g 为奇数， $b \in \{0, 2\}$，且 $k = (3g+3)/2$，或者
- g 为奇数， b 为至少 3 的奇数，并且 $k = (3g+b)/2$。

(3) **厚情形**。 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,\ b})$ 是厚的，当且仅当 (1) 和 (2) 均不成立。

利用定理 A 和推论C，我们验证了 Mahan Mj 的猜想1。Mahan Mj 引入复杂度-ξ 图的动机在于，它为映射类群 Mod(Σ) 的锥化凯莱图$\Gamma(\Sigma,\ \xi)$ 提供了一个拟等距模型，其中锥化取自与复杂度至多为 ξ [的子曲面相关联的映射类子群的左陪集。因此，$(\xi_0 - \xi)$-多曲线图也为该锥化凯莱图提供了一个拟等距模型。

关于相关研究，Hamenst¨adt [Ham14] 引入了非分离 k-多曲线图 $\mathcal{NC}^{[k]}(\Sigma)$，并证明当 $k < g/2+1$时， $\mathcal{NC}^{[k]}(\Sigma)$ 是双曲的。此外，Russel 和 Vokes [RV22]将 $\mathcal{NC}^{[k]}(\Sigma)$ 的大尺度几何分为双曲、相对双曲和厚情形。

致谢。作者谨向 Hidetoshi Ma-sai 致谢。本项工作始于他提出的一个问题。第三作者感谢 Mahan Mj 解答有关插值图的问题。第二和第三作者也感谢 Nariya Kawazumi 的宝贵讨论与鼓励。第一作者受 JSPS KAKENHI Grant Number 21K13791 资助。第三作者受 JSPS KAKENHI Grant Number 25KJ0069 资助。

2. Preliminaries

2.1. 曲线、多曲线与子曲面。设 $\Sigma = \Sigma_{g,\ b}$ 为一个连通、紧致且可定向的亏格为 g、具有 b 个边界分支的曲面。Σ 上的简单闭曲线，如果不与一点或 Σ的某个边界分支同伦，则称为本质曲线。本文将本质简单闭曲线的同痕类简称为曲线。Σ上的多曲线是 Σ上两两不相交的曲线所组成的集合。如果一条多曲线的分支数为 k，则称其为 k-多曲线。子曲面 $S \subset \Sigma$ 是本质的，如果 S 的每个边界分支都是 Σ 上的本质曲线，或者与 Σ的某个边界分支同伦。在本文中，子曲面均指子曲面的同痕类。

对于本质子曲面 $S \subset \Sigma$，我们将复杂度 $\xi(S)$定义为 S上两两不交的本质曲线的最大数量。若S有连通分支 S_1、……、 S_N，则 S的复杂度等于 $\sum_{i=1}^{N} \xi(S_i)$。根据欧拉特征可知， $\xi(\Sigma) = 3g-3+b$，且一个 $\xi(\Sigma)$-多曲线给出 Σ的裤子分解。我们通常将 $\xi(\Sigma)$-多曲线称为裤子分解。

设 $S \subset \Sigma$ 是一个复杂度为正的本质子曲面。这里我们回顾子曲面投影 $\pi_S\colon\ \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma) \to 2^{\mathcal{C}(S)}$的定义，该定义由 [MM99、MM00] 引入（另见 [Vok22]）。首先，我们定义单条曲线 $\gamma \in \mathcal{C}(\Sigma)$的 $\pi_S(\gamma) \in 2^{\mathcal{C}(S)}$。假设 γ 与 ∂S处于最小位置，即连通分支的数量 $\gamma \cap S$和交数 $i(\gamma, \partial S)$分别达到最小值。若 $\gamma \subset S$，则定义 $\pi_S(\gamma) = \{\gamma\}$。若 γ 与S不相交，则定义 $\pi_S(\gamma) = \varnothing$。否则，我们定义 $\pi_S(\gamma) \in 2^{\mathcal{C}(S)}$ 为 $\gamma \cap S$的所有弧分支 c 对应的闭正则邻域的边界曲线的集合之并。对于一个 k-多曲线$\alpha = \{\alpha^1, \dots, \alpha^k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们将 $\pi_S(\alpha) \in 2^{\mathcal{C}(S)}$ 定义为 $1 \le i \le k$上$\pi_S(\alpha^i)$的并集。

2.2. 度量几何。设 (X, d_X)、(Y, d_Y) 为度量空间。对于$K \ge 1$ 和 $L \ge 0$，映射 $f\colon\ X \to Y$ 是一个 (K, L)-拟等距

嵌入，如果对于任意 $x_1, x_2 \in X$，

$$\frac{1}{K} d_X(x_1, x_2) - L \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2) + L.$$

映射 $f\colon X \to Y$是一个拟等距嵌入，如果它是某些 $K \geq 1, L > 0$对应的 (K, L)-拟等距嵌入。映射 $f\colon X \to Y$对于 $C > 0$ 是 C-拟稠密的，如果 C的 $f(X)$-邻域包含 Y的全部元素。拟等距嵌入 $f\colon X \to Y$是一个拟等距，如果对于某个 $C > 0$， f是 C-拟稠密的。如果两个度量空间 X 和 Y之间存在拟等距映射，则称它们拟等距。

度量空间 X 的拟平坦秩是拟平坦的最大维数 n，也就是说，是拟等距嵌入 $\mathbb{Z}^n \to X$的最大维数。

沿用 [Far98、BF06]，我们回顾相对双曲性的概念。设 X 为一个测地度量空间， $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 X 的一族由 $\alpha \in A$索引的连通子集。对于每个 $\alpha \in A$，引入一个新点 v_α，并用一条长度为 $1/2$的边将 H_α 中的每个点与 v_α 连接。记 X 为由此得到的集合，并赋予由这些边诱导的路径度量。距离函数记为 d_e。由此得到的度量空间 (X, d_e) 称为沿 $\mathcal{H}$的电度量空间（或锥化度量空间）。如果锥化度量空间 X 是双曲度量空间，则称度量空间 X 相对于 $\mathcal{H}$弱双曲。此外，如果 X 相对于 $\mathcal{H}$ 弱双曲，且点对 $(X, \mathcal{H})$ 满足有界区域穿透性质（定义见 [Far98、BF06]），则称 X 相对于 $\mathcal{H}$ （强）双曲（参见 [BM08b、BDM09、Sis12]）。对于测地度量空间 X，若存在 X 的子集族 $\mathcal{H}$，使得 X 相对于 $\mathcal{H}$双曲，则简称 X 为相对双曲。

度量空间的厚度概念由 Behr- stock、Druțu 和 Mosher [BDM09] 引入（另见 [RV22，定义 2.19]）。厚度是阻碍度量空间成为相对双曲空间的一种几何障碍 [BDM09]。

2.3. **插值图**。在 [EF17], 中，Erlandsson 和 Fanoni 引入了 k-多曲线图的概念，并证明了 k-多曲线图的自同构群是扩展映射类群。

定义 2.1。对于每个满足 $1 \leq k \leq 3g - 3 + b$ 的整数 k，我们将 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$定义如下：

- $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的顶点是 Σ 上的所有 k-多曲线。
- 如果 α， $\beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 由 $\nu := \alpha \cap \beta$ 上的一个 $(k-1)$-多曲线以及单条曲线 Σ 和 $\alpha \setminus \nu$ 组成，则两个顶点 $\beta \setminus \nu$ 之间由一条边相连

当 $k \leq 3g-3+b$ 时它们不相交；当 $\Sigma \setminus \nu$ 时，它们在 $k = 3g-3+b$ 上以最小方式相交。

根据这个定义，我们看到 $\mathcal{C}^{[1]}(\Sigma)$ 是曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$，而 $\mathcal{C}^{[3g-3+b]}(\Sigma)$ 是裤子图 $\mathcal{P}(\Sigma)$。我们为 k-多曲线图配备组合度量 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}$，规定每条边的长度为 1。

另一方面，Mahan Mj 引入了其他介于曲线图和裤子图之间的图 [Mj09]。

定义 2.2. 设 α 是 Σ 上的一个裤子分解。如果 ∂S 中的每条曲线都属于 α 或与 Σ 的边界同伦，则称本质子曲面 $S \subset \Sigma$ 与 α 相容。

定义 2.3. 对于每个满足 $-1 \leq \xi \leq 3g-4+b$ 的整数 ξ，我们将复杂度为 ξ 的图（也称为插值图） $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$ 定义如下：

- Σ的所有裤子分解都是 $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$的顶点。
- 若满足以下任一条件，则两条裤子曲线 α、β 之间由一条边连接：（i）它们在裤子图中由一条边连接；或（ii）存在一个复杂度至多为 ξ 、与 α 和 β均相容的本质子曲面 $S \subset \Sigma$，且在其补集上，α 与 β 重合。

我们在插值图 $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$上赋予组合度量$d_{\mathcal{P}^{[\xi]}}$，其定义为每条边的长度均为1。当 $\xi = -1$或为0时，条件（ii）意味着 α 和 β 作为裤子分解彼此重合。因此，$\mathcal{P}^{[-1]}(\Sigma)$和 $\mathcal{P}^{[0]}(\Sigma)$均与裤子图$\mathcal{P}(\Sigma)$重合。另一方面，当 $\xi = \xi_0 - 1$ ($\xi_0 := 3g-3+b$)时，插值图 $\mathcal{P}^{[\xi_0-1]}(\Sigma)$显然不同于曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$。然而，正如 [Mj09], 所指出的，插值图$\mathcal{P}^{[\xi_0-1]}(\Sigma)$与曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$拟等距。

2.4. **无扭曲多曲线图**。Vokes 引入了无扭曲多曲线图的概念 [Vok22]。设 Σ 为一个连通、紧致且可定向的曲面。设 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 为 Σ 上的多曲线图，即一个非空图，其顶点是 Σ 上的多曲线。我们赋予 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 由 $d_{\mathcal{G}}$ 定义的组合度量，其中每条边的长度均设为 1。我们经常滥用记号，用同一个符号同时表示图及其顶点集。

连通本质子曲面 $S \subset \Sigma$是多曲线图$\mathcal{G}(\Sigma)$的见证，如果 $\mathcal{G}(\Sigma)$的每个顶点都与 S有本质交；也就是说，对每个 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\} \in \mathcal{G}(\Sigma)$，每个同痕类 α^j 的任意代表 c^j 的并集$\bigcup_{j=1}^{m} c^j$都与 S相交。

定义 2.4。 多曲线图 $\mathcal{G}(\Sigma)$若满足以下条件，则称为无扭转 （或分层的）。

(1) 图 $\mathcal{G}(\Sigma)$是连通的。(2) 映射类群在 $\mathcal{G}(\Sigma)$的顶点上的作用诱导出 $\mathcal{G}(\Sigma)$的自同构。(3) 若两个顶点 α，$\beta \in \mathcal{G}(\Sigma)$之间有一条边相连，则交数 $i(\alpha$，$\beta)$有一个统一常数 R作为上界。(4) $\mathcal{G}(\Sigma)$的见证子曲面集合不包含环带。

在论文 [Vok22], Vokes中，Vokes证明了以下定理。

定理 2.5 ([Vok22，定理 1.1])。 设 $\mathcal{G}(\Sigma)$是与 Σ相关联的无扭曲多曲线图。设 $\mathfrak{S}(\mathcal{G}(\Sigma))$是不相交见证的不相交并的全体构成的集合。那么，$\mathcal{G}(\Sigma)$关于将子曲面投影到 $\mathfrak{S}(\mathcal{G}(\Sigma))$中各子曲面的曲线图上所定义的子曲面投影，是一个分层双曲空间。

关于分层双曲空间的定义，参见 [BHS17、Vok22]。 $\mathcal{G}(\Sigma)$的分层双曲性带来了 $\mathcal{G}(\Sigma)$的许多几何性质。我们回顾 Vok22] 中的一些结果 [。

定理 2.6 （距离公式， [Vok22，推论 1.2]）。 设 $\mathcal{G}(\Sigma)$是 Σ上的无扭曲多曲线图，令 $\mathfrak{X}(\mathcal{G}(\Sigma))$为 $\mathcal{G}(\Sigma)$的所有连通见证子曲面的集合。那么存在常数 $C_0 > 0$，使得对于任意 $C \geq C_0$，都存在 $K_1 \geq 1$， $K_2 > 0$ ，使得对于任意顶点 α，$\beta \in \mathcal{G}(\Sigma)$，有

$$d_{\mathcal{G}}(\alpha, \beta) \asymp_{K_1,K_2} \sum_{S\in\mathfrak{X}} [d_{\mathcal{C}(S)}(\pi_S(\alpha), \pi_S(\beta))]_C.$$

这里， $d_{\mathcal{C}(S)}(\pi_S(\alpha)\ \pi_S(\beta)) = \mathrm{diam}^{\mathcal{C}(S)}(\pi_S(\alpha) \cup \pi_S(\beta))$，而$A \asymp_{K_1,\ K_2} B$表示

$$K_1^{-1}B - K_2 \leq A \leq K_1 B + K_2$$

并且 $[\cdot]_C$ 是截断函数，即：当 $x \geq C$时， $[x]_C \coloneqq x$；否则， $[x]_C \coloneqq 0$。

定理 2.7 ([Vok22，推论 1.4])。 设 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 是 Σ 上的无扭曲多曲线图，并设 ν 为 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的两两不相交的见证子曲面数量的最大值。那么， ν 等于满足以下条件的最大整数 n：存在 $K > 0$ ，使得对于任意 $R > 0$，都可以取一个 $(K$， $K)$-拟等距嵌入 $B_R^n \to \mathcal{G}(\Sigma)$，其中 $B_R^n \subset \mathbb{R}^n$ 是一个半径为 R的 n维欧氏球。

定理 2.8 ([Vok22，推论 1.5])。 设 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 是一个无扭曲多曲线图。若不存在 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的一对不相交见证，则 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 是 Gromov 双曲的。

在 [RV22], 中，将无扭曲多曲线图分类为双曲、相对双曲或厚情形。若子曲面$S \subset \Sigma$ 的补集 $\Sigma \setminus S$ 是连通的，则称其为余连通 。

定理 2.9 ([RV22，定理 2.25])。 设 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 是一个无扭曲多曲线图。则有以下结论：

(1) **双曲情形**。 图 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 是双曲的，当且仅当它不存在一对互不相交的见证子曲面。(2)**相对双曲情形**。 图 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 是相对双曲的，当且仅当它存在一对互不相交的见证子曲面，并且对于 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 的任意两个互不相交且余连通的连通见证子曲面 $Z, W \subset \Sigma$ ，都有 $\Sigma \setminus Z = W$。

除 (1) 和 (2) 外，在所有情形下，图 $\mathcal{G}(\Sigma)$ 都是一个厚度量空间。

3. Two kinds of interpolating graphs

设$\Sigma = \Sigma_{g,b}$ 是一个亏格为 g 、具有 b 个边界分支的连通紧致可定向曲面， ξ_0 表示 Σ的复杂度，即 $\xi_0 = 3g - 3 + b$。Mahan Mj 在 Mj09，备注 1.4] 中给出了曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$ 与复杂度为 (ξ_0-1) 的图 $\mathcal{P}^{[\xi_0-1]}(\Sigma)$ 之间的拟等距映射。我们自然地将这一拟等距扩展为 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 与复杂度为 $(\xi_0 - k)$ 的图 $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$ 之间的拟等距。对于每个 k-多曲线 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们任取一个扩展 α 的裤子分解 $\tilde{\alpha}$（即 $\alpha \subset \tilde{\alpha}$）。我们定义映射 I: $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma) \to \mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$，使得 $I(\alpha) = \tilde{\alpha}$。

定理 3.1。 令 $\xi_0 = 3g-3+b$。固定满足 $1 \leq k \leq \xi_0-1$ 的整数 k。则，对于任意 α， $\beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，有

$$C_k^{-1} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) - 1 \leq d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}(I(\alpha), I(\beta)) \leq 2 d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta), \tag{3.1}$$

其中 $C_k = \min\{k, \xi_0 - k\}$。此外，映射 I 是 1-拟稠密的。特别地，对于 $k = 1$， ……， ξ_0， $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 与 $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$ 彼此拟等距。

首先，我们准备以下引理。

引理 3.2。 令 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\alpha}'$ 为 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的任意裤子分解扩展。那么 $d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}') = 1$。

证明。 设 $S = \Sigma \setminus N\left(\bigcup_{i=1}^k \alpha^i\right)$，其中 $N\left(\bigcup_{i=1}^k \alpha^i\right)$ 表示 $\bigcup_{i=1}^k \alpha^i$的正则邻域。于是， $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\alpha}'$ 在子曲面 S上重合。由于 S 的复杂度为 $\xi_0 - k$，顶点 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\alpha}'$ 由 $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$的一条边相连。□

定理 *3.1* 的证明。 在映射 I的定义中，需要选择 α的一个扩展；然而，根据定理 3.2，这会使像在度量 $d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}$中的距离至多改变 1。此外，定理 3.2 蕴含映射 I 是 1-拟稠密的。

假设 k-多曲线 $\alpha = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\}$ 和 $\beta = \{\beta^1, \ldots, \beta^k\}$ 由 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的一条边相连。那么 $k-1$ 个 α 和 β 的分量重合，其余分量彼此不相交。必要时重新标记各分量后，我们可以假设 α^1 与 β^1 不相交，且对于 $2 \leq i \leq k$，有 $\alpha^i = \beta^i$。由于曲线 β^1，α^1，α^2，... ...，α^k两两不相交，我们可以取一个裤子分解 P，使其扩展这些 $k+1$ 条曲线。裤子分解 P 和 $I(\alpha)$ 都是 α 的扩展；同样，P 和 $I(\beta)$ 都是 β 的扩展。由定理 3.2 可得

$$d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}(I(\alpha), P) = d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}(I(\beta), P) = 1.$$

因此，对于满足 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) = 1$ 的 α，$\beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们得到

$$d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}(I(\alpha), I(\beta)) \leq 2.$$

这就证明了 (3.1) 中的右侧不等式。

接下来，我们证明左侧不等式。固定两个 k-多曲线$\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，并令 $n := d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}(I(\alpha)\ I(\beta))$。取一条连接 $I(\alpha)$ 与 $I(\beta)$ 的测地线 $\{P_i\}_{i=0}^n \subset \mathcal{C}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$，其中 $P_0 = I(\alpha)$ $P_n = I(\beta)$，且对每个满足 $1 \leq i \leq n-1$ 的 i，$d_{\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}}(P_{i-1}, P_i) = 1$。固定一个满足 $2 \leq i \leq n$ 的整数 i。现在，P_{i-1} 和 P_i 满足定理 2.3 中条件 (i) 或 (ii) 之一。在这两种情况下，这两个裤子分解在一个复杂度为 $\xi_0 - k$ 的子曲面 $S \subset \Sigma$ 之外重合。换言之，存在一个 k- 多曲线 $\gamma_i = \{\gamma_i^1, \ldots, \gamma_i^k\} \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，它包含于 $\Sigma \setminus S$，且同时包含于 P_{i-1} 和 P_i。因此，P_{i-1} 同时包含 γ_{i-1} 和 γ_i。于是，我们有

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\gamma_{i-1}, \gamma_i) \leq \min\{k, \xi_0 - k\} =: C_k,$$

由于 γ_i 是通过将 γ_{i-1} 中的一条曲线替换为 γ_i 中的一条曲线而从 γ_{i-1} 得到的，且此类替换的次数有上界 C_k。此外，$P_0 = I(\alpha)$ 同时包含 α 和 γ_1，而 $P_n = I(\beta)$ 同时包含 β 和 γ_n。因此，我们得到

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \beta) &\leq d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\alpha, \gamma_1) + \sum_{i=2}^{n} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\gamma_{i-1}, \gamma_i) + d_{\mathcal{C}^{[k]}}(\gamma_n, \beta) \\ &\leq (n+1)C_k. \end{aligned}$$

这就推出了（3.1）中的左侧不等式。 □

基于 [MM99, 定理 1.3], Mahan Mj [Mj09] 引入了复杂度-ξ 图 $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$，作为映射类群 Mod(Σ) 的电化凯莱图关于复杂度小于或等于 ξ的子曲面的拟等距模型。

遵循 [Mj09], ，我们回顾 Mod(Σ) 的电化凯莱图构造。固定一个整数 ξ，使得 $-1 \leq \xi \leq 3g-4+b$。令 $\mathfrak{S}_\xi(\Sigma)$ 表示 Σ 的所有复杂度至少为 ξ 的本质子曲面的集合。令 S_1、.....、S_k 为商 $\mathrm{Mod}(\Sigma)\backslash\mathfrak{S}_\xi(\Sigma)$ 的一组完备代表系，它们是构成该代表系的子曲面。选取 Mod(Σ) 的一个有限生成集，并令 $\Gamma(\Sigma)$ 为相应的 Mod(Σ) 的凯莱图。我们沿着对于 $i=1$、.....、k 的子群 Mod(S_i) 的所有左陪集，将 $\Gamma(\Sigma)$ 锥化。所得度量空间记为 $\Gamma(\Sigma、\ \xi)$。

令 $\xi_0 = 3g-3+b$。Masur 和 Minsky [MM99] 证明了曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$ 与 $\Gamma(\Sigma、\ \xi_0-1)$ 拟等距，而 Mahan Mj[Mj09] 证明了对于每个满足 $-1 \leq \xi \leq \xi_0-1$ 的 ξ，$\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$ 与 $\Gamma(\Sigma、\ \xi)$ 拟等距。结合这些结果与定理 3.1，我们得到如下总结。

推论3.3。以下度量空间彼此拟等距：

- 多曲线图 k $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$,
- 复杂度为(ξ_0-k)的图 $\mathcal{P}^{[\xi_0-k]}(\Sigma)$，以及
- 电化凯莱图 $\Gamma(\Sigma,\ \xi_0-k)$。

4. Quasi-isometric geometry of interpolating graphs

4.1. 两类插值图的双曲性。固定一个满足 $1 \leq k \leq 3g-3+b$的整数 k。对于 k-多曲线图$\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，我们得到如下结论。

命题4.1。对于连通本质子曲面 $S \subset \Sigma$，以下条件等价：

(1) 子曲面 S 是 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$的见证。(2) 复杂度 $\xi(S)$至少为 $3g-3+b$ –($k-1$)。

证明。我们假设条件 (1) 的否定成立；也就是说，本质子曲面 S 不是 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的见证。于是，我们可以在 Σ 上找到至少 k 条两两不交且位于 S 之外的本质曲线。由于 Σ 上两两不交的本质曲线总数为 $3g-3+b$，因此 S 上两两不交的本质曲线的最大数量至多为 $3g-3+b-k$。这意味着 $\xi(S)$ 至多为 $3g-3+b-k$。因此，条件 (1) 的否定蕴含条件 (2) 的否定。反方向也可以验证，因此得到所需结论。□

Erlandsson 和 Fanoni 证明了 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}$（Σ）是连通的，因此 $\mathcal{C}^{[k]}$（Σ）满足定理 2.4[EF17，引理 2.2] 中的条件 (1)。我们验证 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}$（Σ）满足定理 2.4 中的条件 (2)–(4)。

命题 4.2。 The k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 是无扭转的。

令 $m(g, b, k)$ 表示 $\Sigma_{g,b}$ 中复杂度至少为 $3g - 3 + b -(k - 1)$ 的两两不交子曲面的最大数量。由定理 2.8 可得以下结论。

定理 4.3。 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ 是 Gromov 双曲的，当且仅当 $m(g, b, k) = 1$。

在第 5.1 节中，我们给出计算数量$m(g, b, k)$ 的公式。

4.2. **拟平坦嵌入**。 令 $m = m(g, b, k)$ 表示 Σ 上复杂度至少为 $3g - 3 + b - (k - 1)$ 的两两不交子曲面的最大数量。本小节中，遵循 [BF06]，并使用距离公式（定理 2.6），我们直接构造一个拟等距嵌入 $\mathbb{Z}^m \to \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$。

定理 4.4。 存在一个拟等距嵌入 $\mathbb{Z}^m \to \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$。

注 4.5。 在 [Mj09], 中，Mahan Mj 确定了复杂度-ξ 图 $\mathcal{P}^{[\xi]}(\Sigma)$ 的拟平坦秩。结合这一结果与定理 3.1，我们可以得到 k-多曲线图的拟平坦秩；不过，我们遵循 [BF06] 的构造，直接给出一个嵌入到 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 中的拟等距嵌入的构造。

定理 4.4 的证明。设 $S_1, \dots, S_m \subset \Sigma$ 是两两不相交、复杂度为 $3g-3+b-(k-1)$ 的子曲面。由于 $k = 3g-3+b$ 的情形已在 [BF06], 中证明，我们可以假设每个 S_i 的复杂度 $\xi(S_i)$ 至少为 2。由定理 4.1，子曲面 S_1 不是 $\mathcal{C}^{[k-1]}(\Sigma)$ 的见证，因为 $\xi(S_1) \leq 3g - 3 + b - (k - 2)$。因此，我们可以选取一个 $(k - 1)$-多曲线 γ，使得 γ 的每个分支都位于 $\Sigma \setminus S_1$ 中，并且与 ∂S_i 的每个分支不相交或平行，其中 $i = 1, \dots, m$ 均成立。此外，对每个满足 $2 \leq i \leq m$ 的 i，我们可以假设子曲面 S_i 含有 γ 的至少一个分支，且该分支是 S_i 中的一条本质曲线。我们在 S_1 中再取一条本质曲线 c。于是 $\alpha := \{c\} \cup \gamma$ 是 Σ 上的一个 k-多曲线。我们将构造一个拟平坦 $Q\colon \mathbb{Z}^m \to \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$，使得 $Q(0) = \alpha$。设 $a_i(0)$ $b_i^1(0) \dots, b_i^{l_i}(0) \in \alpha$ 为本质地包含于 S_i 中的曲线。在 S_1 上有唯一一条曲线 $c \in \alpha$，记为 $a_1(0)$。令 $\gamma_0 \subset \alpha$ 表示位于 $\bigcup_{i=1}^m S_i$ 外部的曲线族。

对每个 $i = 1、\ldots、 m$，令 $a_i\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{C}(S_i)$ 为一条双无限测地曲线；对每个满足 $1 \le i \le m$ 的 i，其初始点为 $a_i(0)$。对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 以及满足 $2 \le i \le m$ 的整数 i，我们取一个 l_i-多曲线

$$\{b_i^1(k), \ldots, b_i^{l_i}(k)\} \in \mathcal{C}^{[\ell_i]}(S_i)$$

使得每个 $b_i^j(k)$ $(1 \le j \le l_i)$ 都与 $a_i(k)$ 不相交（可能 $l_i = 0$）。令 $\gamma_i(k)$ 表示 (l_i+1)-曲线 $\{a_i(k)\ b_i^1(k) \ldots, b_i^{l_i}(k)\} \in \mathcal{C}(S_i)$。对于每个 $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$，我们定义

$$Q(k_1, \ldots, k_m) = \gamma_0 \cup \gamma_1(k_1) \cup \gamma_2(k_2) \cup \cdots \cup \gamma_m(k_m) \in \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma).$$

我们证明映射 $Q\colon \mathbb{Z}^m \to \mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 是一个拟等距嵌入。

首先，由于 $Q(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ 与 $Q(k_1 \pm 1, k_2, \ldots, k_m)$ 显然不相交，它们之间的 $\mathcal{C}^{[k]}$-距离等于 1。因此我们得到

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(k_1, k_2, \ldots, k_m), Q(j_1, k_2, \ldots, k_m)) \le |k_1 - j_1|.$$

接下来，固定满足 $2 \le i \le m$ 的 i。对于每个 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$，我们考虑距离 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k})\ Q(\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{e}_i))$，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是 $\mathbb{Z}^m$ 的第 i 个标准基。现在，子曲面 S_1 在 S_1 中至多包含 $3g-3+b-(k-1)$ 条本质曲线。由于 l_i+1 至多为 $3g-3+b-(k-1)$，我们可以在 S_1 中取 l_i 条本质曲线 $c_1, \ldots, c_{l_i}$，使得 $a_1(k_1)\ c_1, \ldots, c_{l_i}$ 两两不相交。将 $Q(\boldsymbol{k})$ 中的曲线 $b_i^1(k_i) \ldots, b_i^{l_i}(k_i)$ 替换为 $c_1, \ldots, c_{l_i}$，并将所得的 k-多曲线记为 $Q(\boldsymbol{k})'$。于是，$Q(\boldsymbol{k})$ 与 $Q(\boldsymbol{k})'$ 之间的距离至多为 l_i。此外，我们将$Q(\boldsymbol{k})'$ 中的 $a_i(k_i)$ 移至 $a_i(k_i \pm 1)$，然后将 $c_1, \ldots, c_{l_i}$ 替换为 $b_i^1(k_i \pm 1) \ldots, b_i^{l_i}(k_i \pm 1)$（其中符号 $\pm$ 始终一致取用）。于是，替换后的多曲线为 $Q(\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{e}_i)$。由于 $Q(\boldsymbol{k})'$ 与 $Q(\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{e}_i)$ 相差 $l_i + 1$ 条曲线，距离 $d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k})', Q(\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{e}_i))$ 至多为 $l_i + 1$。因此，我们有

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k}), Q(\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{e}_i)) &\le d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k}), Q(\boldsymbol{k})') + d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k})', Q(\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{e}_i)) \\ &\le 2l_i + 1 \\ &\le 2(3g - 3 + b - k) + 1 =: C_{g,b,k}. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k}), Q(\boldsymbol{j})) \le C_{g,b,k} d_{\mathbb{Z}^m}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}), \tag{4.1}$$

其中 $d_{\mathbb{Z}^m}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) = \sum_{i=1}^m |k_i - j_i|$。

另一方面，根据定理 2.6，存在 $C_0 > 0, K_1 \ge 1, K_2 > 0$，使得

$$K_1 d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k}), Q(\boldsymbol{j})) + K_2 \ge \sum_{S \in \mathfrak{X}(\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma))} [d_S(\pi_S(Q(\boldsymbol{k})), \pi_S(Q(\boldsymbol{j})))]_{C_0},$$

其中，对于子集 $A, B \subset \mathcal{C}(\Sigma)$，$d_S(A, B) := \mathrm{diam}^{\mathcal{C}(S)}(A \cup B)$。对于每个满足 $1 \leq i \leq m$ 的 i，

$$\begin{aligned} d_{S_i}(\pi_{S_i}(Q(\boldsymbol{k})), \pi_{S_i}(Q(\boldsymbol{j}))) &= \mathrm{diam}_{\mathcal{C}(S_i)}(\gamma_i(k_i) \cup \gamma_i(j_i)) \\ &\geq d_{\mathcal{C}(S_i)}(a_i(k_i), a_i(j_i)) \\ &= |k_i - j_i|. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} K_1 d_{\mathcal{C}^{[k]}}(Q(\boldsymbol{k}), Q(\boldsymbol{j})) + K_2 &\geq \max_{1 \leq i \leq m} |k_i - j_i| \\ &\geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} |k_i - j_i| = \frac{1}{m} d_{\mathbb{Z}^m}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}). \end{aligned}$$

结合不等式 (4.1)，即可得到所需结论。 □

由定理 4.4 可知，数目 $m(g,\ b,\ k)$ 为 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的拟平坦秩提供了一个下界。另一方面，定理 2.7 表明，数目 $m(g,\ b,\ k)$ 也是拟平坦秩的一个上界。因此，我们得到以下推论。

推论 4.6。设 m 为 Σ 上复杂度至少为 $3g - 3 + b - (k - 1)$ 的两两不交子曲面的最大数量。k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的拟平坦秩等于 m。

5. Arguments for subsurfaces

5.1. 见证的最大数量。令 ξ 为正整数。我们考虑在 $\Sigma = \Sigma_{g,b}$ 上的一组有限简单闭曲线，沿这些曲线将 Σ 切割成紧子曲面 $X_1, \ldots, X_m$，使得每个 X_i 的复杂度 $\xi(X_i)$ 至少为 ξ。我们用 $\mu(g, b, \xi)$ 表示此类分解中可能出现的子曲面的最大数量。本小节将明确计算 $\mu(g, b, \xi)$，如下所示。据作者所知，迄今尚无此类显式公式。

定理 5.1。除非 $b = 0$ 和 $\xi = 3g - 3$，$\mu(g, b, \xi)$ 等于

$$\min\left\{ \left\lfloor \frac{3g - 2 + b}{\xi + 1} \right\rfloor,\ \left\lfloor \frac{2g - 2 + b}{\lceil (2\xi + 1)/3 \rceil} \right\rfloor \right\}. \tag{5.1}$$

对于 $g \geq 2$，$\mu(g, 0, 3g - 3)$ 等于 1。

证明。由于当 $\xi(\Sigma) < \xi$ 时该结论显然成立，下面假设 $\xi(\Sigma) \geq \xi$。特别地，$\mu(g, b, \xi)$ 至少为一。

沿着 Σ上的一些简单闭曲线进行切割，我们得到紧子曲面 X_1，……，$X_{\mu(g,b,\xi)}$，其复杂度至少为 ξ。记 X_i 的亏格和边界分支数分别为 g_i 和

b_i。由于 X_i 的欧拉特征满足 $\chi(X_i) = 2 - 2g_i - b_i = -\xi(X_i) - 1 + g_i \leq -\xi - 1 + g_i$，我们有

$$\begin{aligned} 2 - 2g - b &= \sum_{i=1}^{\mu(g,b,\xi)} \chi(X_i) \\ &\leq -(\xi+1)\mu(g,b,\xi) + \sum_{i=1}^{\mu(g,b,\xi)} g_i \\ &\leq -(\xi+1)\mu(g,b,\xi) + g. \end{aligned}$$

因此，$\mu(g,b,\xi)$至多为 $\lfloor (3g-2+b)/(\xi+1) \rfloor$。

另一方面，除非 $b=0$ 且 $\mu(g,0,\xi) \leq 1$，否则每个 b_i 都为正。结合 $b_i \geq 1$ 以及 $3g_i - 3 + b_i = \xi(X_i) \geq \xi$ 和 $\chi(X_i) = 2 - 2g_i - b_i$，我们得到

$$\xi + 1 + \chi(X_i) \leq g_i \leq \frac{-\chi(X_i)+1}{2}.$$

特别地，最右侧大于或等于最左侧，即 $\chi(X_i) \leq -(2\xi+1)/3$。由于 $\chi(X_i)$是一个整数，$\chi(X_i) \leq -\lceil (2\xi+1)/3 \rceil$。因此可得

$$-\mu(g,b,\xi)\left\lceil \frac{2\xi+1}{3} \right\rceil \geq \sum_{i=1}^{\mu(g,b,\xi)} \chi(X_i) = 2 - 2g - b,$$

即，$\mu(g,b,\xi)$至多为 $\lfloor (2g-2+b)/\lceil (2\xi+1)/3 \rceil \rfloor$。

对于 $b=0$ 和 $\xi < 3g-3$的情形，令 $r \in \{0,1,2\}$ 为满足 $\xi \equiv r$ 模 3 的整数。那么 $\xi + 3 - r$ 至多为 $3g-3$，并且有

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{2g-2}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2(3g-3)}{3\lceil (2(\xi-r)+2r+1)/3 \rceil} \right\rfloor \\ &\geq \left\lfloor \frac{2(\xi-r+3)}{2(\xi-r)+3\lceil (2r+1)/3 \rceil} \right\rfloor \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

因此，(5.1) 至少为一。

到目前为止的论证证明，除非 $b=0$ 和 $\xi = 3g-3$，否则 $\mu(g,\ b,\ \xi)$ 有一个由 (5.1) 给出的上界。我们需要证明，量 (5.1) 也是 $\mu(g,\ b,\ \xi)$ 的下界。

首先注意，存在一条分隔的简单闭曲线，沿着它切开曲面 Σ 后可得到两个子曲面

$$X_0 = \Sigma_{g,\xi-3g+3} \quad \text{and} \quad Y_0 = \Sigma_{0,b-\xi+3g-1} \tag{5.2}$$

若 $3g-3 < \xi$。X_0 的复杂度等于 ξ。此外，我们注意到，$\lfloor (3g-2+b)/(\xi+1) \rfloor$ 可以改写为 $\lfloor (\xi(\Sigma)+1)/(\xi+1) \rfloor$。

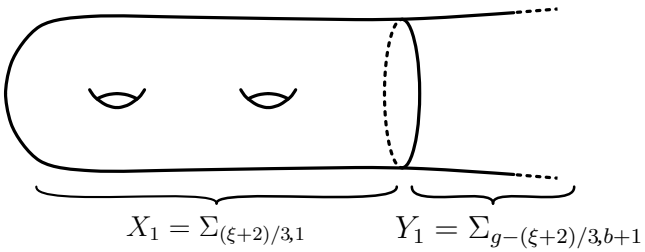


FIGURE 1.

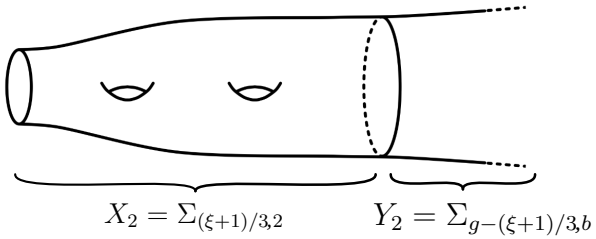


FIGURE 2.

情形 1。设 $\xi \equiv 1$ 模 3。我们将对 $\xi(\Sigma) = 3g-3+b$ 使用归纳法，证明 $\mu(g,b,\xi) \geq \lfloor (3g-2+b)/(\xi+1) \rfloor$。在 Σ 上存在一条简单闭曲线，将 Σ 切分为 X_1 和 Y_1，其中 $\xi(X_1) = \xi$。事实上，当 $g \geq (\xi+2)/3$ 如图 1 所示时，可以取 $X_1 = \Sigma_{(\xi+2)/3,1}$ 和 $Y_1 = \Sigma_{g-(\xi+2)/3,b+1}$；而当 $g < (\xi+2)/3$ 时，我们在分解 (5.2) 中设 $X_1 = X_0$ 和 $Y_1 = Y_0$。在这两种情形下，Y_1 的复杂度都等于 $\xi(\Sigma) - \xi - 1$。根据关于 Y_1 的归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned} \mu(g,b,\xi) &\geq 1 + \left\lfloor \frac{(\xi(\Sigma) - \xi - 1) + 1}{\xi+1} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\xi(\Sigma)+1}{\xi+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3g-2+b}{\xi+1} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{5.3}$$

情形 2。假设 $\xi \equiv 2$ 模 3。首先，我们通过对 $\xi(\Sigma)$ 使用归纳法，证明对于 $b > 0$，$\mu(g,b,\xi) \geq \lfloor (3g-2+b)/(\xi+1) \rfloor$。我们可以在 Σ 上取一条简单闭曲线，使曲面 Σ 被切分为两个子曲面 X_2 和 Y_2，且满足 $\xi(X_2) = \xi$。事实上，当 $g \geq (\xi+1)/3$ 时，如图 2 所示，可以取 $X_2 = \Sigma_{(\xi+1)/3,2}$ 和 $Y_2 = \Sigma_{g-(\xi+1)/3,b}$；而当 $g < (\xi+1)/3$ 时，我们在分解 (5.2) 中令 $X_2 = X_0$ 和 $Y_2 = Y_0$。两种情况下，Y_2 的复杂度都等于 $\xi(\Sigma) - \xi - 1$。因此，根据归纳假设，对于 Y_2，同样的不等式 (5.3) 成立，于是我们有 $\mu(g,b,\xi) \geq \lfloor (3g-2+b)/(\xi+1) \rfloor$。

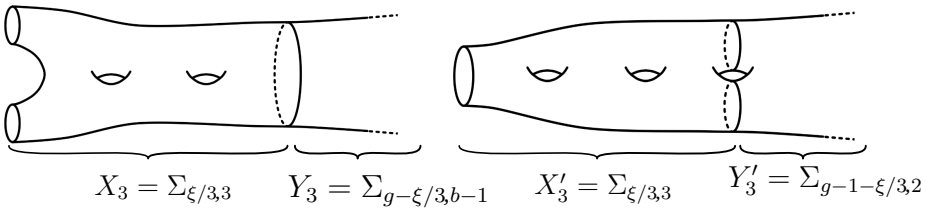


FIGURE 3. 左图和右图分别表示分解式 (5.4) 和 (5.5)。

如果 $b = 0$，我们沿一条非分离简单闭曲线切开 Σ，得到 $\Sigma_{g-1,\,2}$。因此

$$\begin{aligned}\mu(g,0,\xi) &\geq \mu(g-1,2,\xi)\\ &\geq \left\lfloor \frac{3(g-1)-2+2}{\xi+1} \right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{3g-3}{\xi+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2g-2}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil} \right\rfloor.\end{aligned}$$

情形3。设 $\xi \equiv 0$ 模3。若 $b \geq 2$，我们可以在 Σ 上取一条简单闭曲线，将 Σ 切分为两个子曲面

$$X_3 \quad \text{and} \quad Y_3 \tag{5.4}$$

其 $\xi(X_3) = \xi$。事实上，当 $g \geq \xi/3$ 如图3左图所示时，可以取 $X_3 = \Sigma_{\xi/3,\,3}$ 和 $Y_3 = \Sigma_{g-\xi/3,\,b-1}$；而当 $g < \xi/3$ 时，我们在分解（5.2）中令 $X_3 = X_0$ 和 $Y_3 = Y_0$。在这两种情形下，Y_3 的复杂度均等于 $\xi(\Sigma) - \xi - 1$。

对于 $b = 1$，可以取两条简单闭曲线，将 Σ 切分为

$$X_3' = \Sigma_{\xi/3,3} \quad \text{and} \quad Y_3' = \Sigma_{g-1-\xi/3,2} \tag{5.5}$$

如图3右图所示。

（3-I）我们将通过对 $\xi(\Sigma)$ 使用归纳法，证明 $\mu(g,\ b,\ \xi) \geq \lfloor (3g-2+b)/(\xi+1) \rfloor$ 对于 $b > \lfloor 3g/\xi \rfloor$ 成立。在此情形下，由于 $b > \lfloor 3g/\xi \rfloor$ 和 $\xi(\Sigma) \geq \xi$，b 至少为2，因此分解（5.4）成立。分别记 Y_3 的亏格和边界分支数为 g' 和 b'。于是，子曲面 Y_3 仍满足 $b' > \lfloor 3g'/\xi \rfloor$，因为 $b - 1 > \lfloor 3(g - \xi/3)/\xi \rfloor$。因此，通过与（5.3）相同的计算可得，$\mu(g,\ b,\ \xi) \geq \lfloor (3g-2+b)/(\xi+1) \rfloor$。

(3-II) 接下来，我们考虑 $0 < b \leq \lfloor 3g/\xi \rfloor$ 的情形，并通过对 $\xi(\Sigma)$ 使用归纳法，证明 $\mu(g,\ b,\ \xi) = \lfloor (2g-2)/\lceil (2\xi+1)/3 \rceil \rfloor$。根据边界分支数，可将情形进一步分为三种。

(3-II-i) 对于 $2 \leq b \leq \lfloor (2g-2)/\lceil (2\xi+1)/3 \rceil \rfloor$，使用分解 (5.4)，我们得到

$$\begin{aligned}\mu(g,b,\xi) &\geq 1+\mu\left(g-\frac{\xi}{3},b-1,\xi\right)\\ &\geq 1+\left\lfloor \frac{2\left(g-\frac{\xi}{3}\right)-2+(b-1)}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil}\right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{2g-2+b}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil}\right\rfloor.\end{aligned}$$

(3-II-ii) 考虑 $b=1$ 和 $2 \leq \lfloor 3(g-1-\xi/3)/\xi \rfloor$ 的情形。此时有分解 (5.5)。假设 $2 \leq \lfloor 3(g-1-\xi/3)/\xi \rfloor$，因此可以对 Y_3' 应用归纳假设，从而得到

$$\begin{aligned}\mu(g,1,\xi) &\geq 1+\mu\left(g-\frac{\xi}{3}-1,2,\xi\right)\\ &\geq 1+\left\lfloor \frac{2\left(g-\frac{\xi}{3}-1\right)-2+2}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil}\right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{2g-2+1}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil}\right\rfloor.\end{aligned}$$

(3-II-iii) 考虑剩下的情形，即 $b=1$ 和 $2 > \lfloor 3(g-1-\xi/3)/\xi \rfloor$。此时 $g-1$ 小于 ξ，也就是说，$g \leq \xi$。特别地，$\lfloor (2g-2+1)/\lceil (2\xi+1)/3 \rceil \rfloor$ 至多为 $\lfloor (2\xi-2+1)/\lceil (2\xi+1)/3 \rceil \rfloor < 3$。如果 $\lfloor (2g-2+1)/\lceil (2\xi+1)/3 \rceil \rfloor$ 等于 2，那么 $2g-1 \geq 2(2\xi/3+1)$，也就是说，$g \geq 2\xi/3+2$。因此有 $\xi(\Sigma_{g-1-\xi/3,2}) = 3g-\xi-4 > \xi$，而分解 (5.5) 保证 $\mu(g,1,\xi) \geq 2$。

(3-III) 最后，在 $b=0$ 的情况下，沿非分离简单闭曲线切割 Σ，得到 $\Sigma_{g-1,\,2}$。因此我们可以得出

$$\begin{aligned}\mu(g,0,\xi) &\geq \mu(g-1,2,\xi)\\ &\geq \min\left\{\left\lfloor \frac{3(g-1)-2+2}{\xi+1}\right\rfloor,\ \left\lfloor \frac{2(g-1)-2+2}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil}\right\rfloor\right\}\\ &= \left\lfloor \frac{2g-2}{\lceil (2\xi+1)/3 \rceil}\right\rfloor.\end{aligned}$$

结合上述结果，我们得到了所要证明的结论。 □

令 $m(g,\ b,\ k) = \mu(g,\ b,\ 3g-2+b+k)$，即可得到定理 B。

5.2. **相对双曲情形**。 在本小节中，我们讨论 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,\,b})$为相对双曲的情形。

定理 5.2。 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,\,b})$当且仅当参数（$g,\ b,\ k$）取表 1 所示的值时是相对双曲的。

g	b	k
偶数	偶数（≥ 2）	$(3g+b)/2$
even	0	$3g/2, (3g+2)/2$
odd	$0, 2$	$(3g+3)/2$
odd	奇数（≥ 3）	$(3g+b)/2$

TABLE 1. 使 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,\ b})$ 相对双曲的 $(g,\ b,\ k)$ 的取值。

首先，我们准备两个稍后将使用的初等引理。注意，本质子曲面 $S \subset \Sigma$的复杂度 $\xi(S)$等于 S的裤子分解中曲线的数量。

引理 5.3. 若 $X \subset \Sigma$ 是一个本质子曲面，且 $\xi(X) = \xi(\Sigma)$，则 X 同痕于 Σ。

引理 5.4. 若 $Y,\ Z \subset \Sigma$ 是互不相交的本质真子曲面，则 $\xi(\Sigma) \geq \xi(Y) + \xi(Z) + 1$。

在本小节余下部分，我们证明定理 5.2。根据定理 4.1，一个子曲面是否为 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,\ b})$ 的见证，取决于其复杂度。因此，根据定理 2.9，对每个 $g,\ b$，我们确定一个满足 $1 \leq \xi \leq 3g-3+b$ 的整数 ξ，使其满足以下条件。

(A) 存在一对互不相交、连通且本质的子曲面，其复杂度至少为 ξ；
(B) 每当余连通、连通且本质的子曲面 $Y,\ Z \subset \Sigma$ 互不相交且其复杂度至少为 ξ 时，都有 $Y^c = Z$（在同痕意义下）。

引理 5.5. 若整数 ξ 满足 $1 \leq \xi \leq 3g-3+b$ 和条件 (A)，则 ξ 小于 $(3g-3+b)/2$。

证明. 假设 ξ 满足 $\xi \geq$ 和 $(3g-3+b)/2$，且满足条件 (A)。那么，我们可以取一对互不相交的本质子曲面 $Y, Z \subset \Sigma$，其复杂度至少为 ξ。由定理 5.4 可得

$$3g-3+b = \xi(\Sigma) \geq \xi(Y) + \xi(Z) + 1 \geq 3g-2+b.$$

这就产生了矛盾。因此，我们得出结论。 □

断言 5.6. 假设 (i) g 为偶数且 $b \geq 2$ 为偶数，或 (ii)g 为奇数且 $b \geq 3$ 为奇数。那么，同时满足条件 (A) 和 (B) 的唯一整数 ξ 是 $(3g-4+b)/2$。

证明。 我们首先考虑假设 (i)。

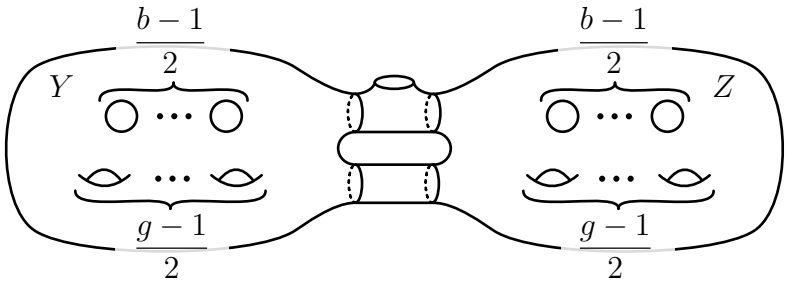


FIGURE 4.

(1) 在 $\xi \geq (3g-2+b)/2$ 的情况下，根据定理 5.5，整数 ξ 不满足条件 (A)。

(2) 考虑 $\xi = (3g-4+b)/2$ 的情形。此时，我们可以取互不相交的本质子曲面 Y，$Z \subset \Sigma$，使其复杂度至少为 $(3g-4+b)/2$（例如，每个子曲面的亏格为 $g/2$，且有 $b/2+1$ 个边界分支）。因此，条件 (A) 得以验证。设 Y，Z 是任意一对互不相交的余连通本质子曲面，且 $\xi(Y)$ 和 $\xi(Z)$ 至少为 $(3g-4+b)/2$。若 $\xi(Y) > (3g-4+b)/2$ 或 $\xi(Z) > (3g-4+b)/2$，则由定理 5.4 可得矛盾。因此，我们必有 $\xi(Y) = \xi(Z) = (3g-4+b)/2$。再次应用定理 5.4，可得

$$\xi(Y^c) + \xi(Y) + 1 \leq 3g-3+b.$$

因此，$\xi(Y^c) \leq (3g-4+b)/2$。由于 Y 和 Z 不相交，我们得到 $\xi(Z) \leq \xi(Y^c)$。因此，由定理 5.3 可得 $Z = Y^c$。于是，条件 (B) 也得到验证。

(3) 最后，我们考虑 $\xi \leq (3g-6+b)/2$ 的情形。设 $Y = \Sigma_{g/2,\, b/2+1}$ 和 $Z = \Sigma_{g/2,b/2}$。我们将 Y 的一个边界分支和 Z 的一个边界分支分别粘合到一个裤子曲面的两个不同边界分支上。所得曲面为 $\Sigma_{g,b}$。因此，存在互不相交的余连通本质子曲面 $Y, Z \subset \Sigma$，满足 $\xi(Y)$ 和 $\xi(Z)$ 至少为 ξ，且它们的并集 $Y \cup Z$ 并不穷尽 Σ。因此，条件 (B) 无法满足。

现在我们转向陈述 (ii)。与陈述 (i) 的证明一样，我们将论证分为三种情况：(1) $\xi \geq (3g-2+b)/2$、(2) $\xi = (3g-4+b)/2$，或 (3) $\xi \leq (3g-6+b)/2$。对于情况 (1)、(2)，我们可以采用与陈述 (i) 类似的方式进行讨论。注意，在情况 (2) 中，条件 (A) 由 $b \geq 3$ 得到验证。我们考虑情况 (3)，即 $\xi \leq (3g-6+b)/2$。对于 $Y = Z = \Sigma_{(g-1)/2,\,(b-1)/2}$，将它们粘合成一个裤子曲面和一个环带，我们得到 $\Sigma_{g,b}$（见图 4）。由于 $\xi(Y) = \xi(Z) \geq \xi$，条件 (B) 不可能得到满足。□

对于本质子曲面 $X \subset \Sigma$，条件 $\xi(X) \geq (3g-4+b)/2$ 与 X 是 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的见证这一条件之间的等价性，当且仅当 k 满足

$$3g-3+b-(k-1) = \frac{3g-4+b}{2}$$

也就是说，$k = (3g+b)/2$。这证实了表 1 的第一行和第四行。

命题 5.7. 设 g 为奇数且 $b = 1$。那么，不存在满足 $1 \leq \xi \leq 3g-3+b$ 的整数 ξ 同时满足条件 (A) 和 (B)。

证明。我们首先考虑 $\xi \geq (3g-3)/2$ 的情形。设我们取复杂度至少为 ξ 的本质不相交子曲面 $Y, Z \subset \Sigma$。如果 $\xi(Y) > \xi$ 或 $\xi(Z) > \xi$ 中任一成立，则由定理 5.4 可得矛盾。因此，我们有 $\xi(Y) = \xi(Z) = (3g-3)/2$。然而，根据定理 5.1，

$$\mu(g, 1, (3g-3)/2) \leq \left\lfloor \frac{2g-1}{\lceil (3g-2)/3 \rceil} \right\rfloor = \left\lfloor 2 - \frac{1}{g} \right\rfloor \leq 1.$$

因此，条件 (A) 不成立。 □

命题 5.8. 假设以下任一情形成立：(i) g 为偶数且 b 为奇数；或 (ii) g 为奇数且 $b \geq 4$ 为偶数。那么，不存在满足 $1 \leq \xi \leq 3g-3+b$ 的整数 ξ 同时满足条件 (A) 和 (B)。

证明。如果 $\xi \geq (3g-3+b)/2$，无论是情形 (i) 还是 (ii)，根据定理 5.5，ξ 都不能满足条件 (A)。

我们考虑 $\xi < (3g-3+b)/2$ 的情形，即 $\xi \leq (3g-5+b)/2$。我们如下定义曲面 Y 和 Z：

$$\begin{aligned} Y &= \Sigma_{g/2,\,(b-1)/2}, & Z &= \Sigma_{g/2,\,(b-1)/2} && \text{in case (i)}, \\ Y &= \Sigma_{(g+1)/2,\,b/2-2}, & Z &= \Sigma_{(g-1)/2,\,b/2+1} && \text{in case (ii)}. \end{aligned}$$

然后，我们将 Y 的一个边界分支和 Z 的一个边界分支粘合到一个裤子曲面的两个不同边界分支上。所得曲面为 $\Sigma_{g,\,b}$。因此，由 $\Sigma_{g,\,b}$ 可取互不相交的余连通本质子曲面 Y，$Z \subset \Sigma$，使得 $\xi(Y)$ $\xi(Z)$ $\geq \xi$，且并集 $Y \cup Z$ 不穷尽 Σ。这意味着条件 (B) 无法满足。□

命题 5.9。设 g 为偶数且 $b = 0$。如果整数 ξ 同时满足条件 (A) 和 (B)，那么 ξ 等于 $(3g-4)/2$ 或 $(3g-6)/2$。

证明。如果 $\xi \geq (3g-2)/2$，那么根据定理 5.5，ξ 无法满足条件 (A)。

令 $\xi = (3g-4)/2$。对于 $Y = Z = \Sigma_{g/2,\ 1}$，将 Y 和 Z 的边界分支彼此粘合，得到 $\Sigma_{g,\ 0}$。由于 $\xi(Y) = \xi(Z) = (3g-4)/2$，条件 (A) 得以验证。令 Y，$Z \subset \Sigma$ 为任意一对互不相交的余连通本质子曲面，满足 $\xi(Y) \geq (3g-4)/2, \xi(Z) \geq (3g-4)/2$。那么，由于

$$\xi(Y^c) \leq \xi(\Sigma) - \xi(Y) - 1 \leq \frac{3g-4}{2} \text{ and } Z \subset Y^c,$$

我们有 $\xi(Y^c) = \xi(Z)$。因此，在同痕意义下有 $Y^c = Z$。

设 $\xi = (3g-6)/2$。对于 $\xi = (3g-4)/2$ 的情形，我们可以用相同的方法验证条件 (A)。设 Y，$Z \subset \Sigma$ 为任意一对互不相交的余连通本质子曲面，满足 $\xi(Y) \geq (3g-6)/2, \xi(Z) \geq (3g-6)/2$。那么，由于

$$\xi(Y^c) \leq \xi(\Sigma) - \xi(Y) - 1 \leq \frac{3g-2}{2} \text{ and } Z \subset Y^c,$$

我们有 $(3g-6)/2 \leq \xi(Z) \leq \xi(Y^c) \leq (3g-2)/2$。因此，我们可以假设 $(\xi(Y)\ \xi(Z))$ 等于以下之一：

(i) $\binom{\frac{3g-6}{2}, \frac{3g-6}{2}}{}, \binom{\frac{3g-6}{2}, \frac{3g-4}{2}}{}, \binom{\frac{3g-6}{2}, \frac{3g-2}{2}}{}$, (ii) $\binom{\frac{3g-4}{2}, \frac{3g-4}{2}}{}$, 或 (iii) $\binom{\frac{3g-4}{2}, \frac{3g-2}{2}}{}$。

我们考虑情形 (i)。由于 $\xi(Y)$ 可被 3 整除，子曲面 $Y \subset \Sigma$ 至少有 3 个边界分支。因此，

$$\xi(\Sigma) \geq \xi(Y) + \xi(Y^c) + 3.$$

因此，$\xi(Y^c) \leq (3g-6)/2$。由于 $Z \subset Y^c$，复杂度 $\xi(Z)$ 必须等于 $(3g-6)/2$，由此我们得出 $Z = Y^c$。

情形 (ii) 可归结为对情形 $\xi = (3g-4)/2$ 的讨论。情形 (iii) 与定理 5.4 矛盾。

假设 $\xi \leq (3g-8)/2$。令 $Y = Z = \Sigma_{(g-2)/2,2}$，我们可以沿边界将 Y 和 Z 粘合成一个四孔球面，使所得曲面为 $\Sigma_{g,0}$。因此，这种情况下无法满足条件 (B)。□

对于本质子曲面 $X \subset \Sigma$，条件 $\xi(X) \geq (3g-4)/2$ （分别为 $(3g-6)/2$）与 X 是 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的见证这一条件等价，当且仅当 k 满足

$$3g-3-(k-1) = \frac{3g-4}{2}, \left(\text{resp. } 3g-3-(k-1) = \frac{3g-6}{2}\right)$$

也就是说，当 $k = 3g/2$ 时，（分别为 $k = (3g+2)/2$）。这证实了表 1 的第二行。

命题 5.10。令 g 为奇数且 $b = 2$。那么，同时满足条件 (A) 和 (B) 的唯一整数 ξ 是 $(3g-3)/2$。

证明。如果 $\xi \geq (3g-1)/2$，那么根据定理 5.5，ξ 无法满足条件 (A)。

设 $\xi = (3g-3)/2$。对于 $Y = Z = \Sigma_{(g-1)/2,3}$，将 ∂Y 的两个分支与 ∂Z 的两个分支彼此粘合，得到 $\Sigma_{g,2}$。因此，条件 (A) 得到验证。设 $Y, Z \subset \Sigma$ 是任意一对不相交的余连通本质子曲面，满足 $\xi(Y) \geq (3g-3)/2, \xi(Z) \geq (3g-3)/2$。那么，根据定理 5.3，我们有

$$\xi(Y^c) \leq \xi(\Sigma) - \xi(Y) - 1 \leq \frac{3g-1}{2}.$$

现在，由于 $(3g-3)/2 \leq \xi(Z) \leq \xi(Y^c) \leq (3g-1)/2$。因此，我们可以假设

$$(\xi(Y), \xi(Z)) = \left(\frac{3g-3}{2}, \frac{3g-3}{2}\right) \text{ or } \left(\frac{3g-3}{2}, \frac{3g-1}{2}\right).$$

此外，我们可以假设，Y 的边界分支中至多有一个与 $\partial\Sigma$ 同伦。由于 $\xi(Y)$ 可被 3 整除，Y 的边界分支数至少为 3。因此，

$$\xi(\Sigma) \geq \xi(Y) + \xi(Y^c) + 2,$$

由此可得 $\xi(Y^c) \leq (3g-3)/2$。因此，$(\xi(Y), \xi(Z)) = ((3g-3)/2, (3g-3)/2)$，并且我们有 $Z = Y^c$。

假设 $\xi \leq (3g-5)/2$。令 $Y = Z = \Sigma_{(g-1)/2,\ 2}$，并将 Y 的一个边界分支和 Z 的一个边界分支分别粘合到一个双孔环面的两个不同边界分支上。所得曲面为 $\Sigma_{g,\ 2}$。现在，由于 $\xi(Y) \geq \xi$ 且 $\xi(Z) \geq \xi$，在 $\xi \leq (3g-5)/2$的情况下，条件 (B) 不可能成立。□

对于本质子曲面 $X \subset \Sigma$，条件 $\xi(X) \geq (3g-3)/2$ 与 X 是 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的见证这一条件等价，当且仅当 k 满足

$$3g - 3 + b - (k-1) = \frac{3g-3}{2},$$

也就是说，$k = (3g+3)/2$。这证实了表 1 第三行中 $b = 2$ 的情形。

以下断言基本上可以用与定理 5.10 相同的方法证明。由于存在一些细微差异，为完整起见，我们给出证明。

命题 5.11. 设 g 为奇数且 $b = 0$。那么，同时满足条件 (A) 和条件 (B) 的整数 ξ 为 $(3g-5)/2$。

证明. 如果 $\xi \geq (3g-3)/2$，那么根据定理 5.5， ξ 不可能满足条件 (A)。

设 $\xi = (3g-5)/2$。对于 $Y = Z = \Sigma_{(g-1)/2,2}$，沿着边界分支粘合 Y 和 Z，得到 $\Sigma_{g,0}$。由于 $\xi(Y)$ 和 $\xi(Z)$ 等于 $(3g-5)/2$，条件 (A) 得到验证。令 $Y, Z \subset \Sigma$ 为任意一对互不相交的余连通本质子曲面，满足 $\xi(Y) \geq (3g-5)/2, \xi(Z) \geq (3g-5)/2$。那么，根据定理 5.4，我们有

$$\xi(Y^c) \leq \xi(\Sigma) - \xi(Y) - 1 \leq \frac{3g-3}{2}.$$

因此，我们可以假设

$$(\xi(Y), \xi(Z)) = \left(\frac{3g-5}{2}, \frac{3g-5}{2}\right) \text{ or } \left(\frac{3g-5}{2}, \frac{3g-3}{2}\right).$$

那么，由于 $\xi(Y) \equiv 2$ (模 3)， Y 的边界分支数至少为 2。因此，我们有

$$\xi(\Sigma) \geq \xi(Y) + \xi(Y^c) + 2.$$

因此，我们得到 $\xi(Y^c) \leq (3g-5)/2$。根据 $Z \subset Y^c$ 和 $\xi(Z) \leq \xi(Y^c)$，我们有 $(\xi(Y)\ \xi(Z)) = ((3g-5)/2, (3g-5)/2)$ 以及 $Y^c = Z$。由此验证了条件 (B)。

假设 $\xi \leq (3g-7)/2$。令 $Y = Z = \Sigma_{(g-1)/2,1}$，并将 Y 的一个边界分支和 Z 的一个边界分支分别粘合到双孔环面的两个不同边界分支上。所得曲面为 $\Sigma_{g,0}$。由于 $\xi(Y) \geq \xi$ 且 $\xi(Z) \geq \xi$，在 $\xi \leq (3g-7)/2$ 的情形下无法满足条件 (B)。□

对于本质子曲面 $X \subset \Sigma$，条件 $\xi(X) \geq (3g-5)/2$ 与 X 是 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 的见证这一条件之间的等价性，当且仅当 k 满足

$$3g-3-(k-1) = \frac{3g-5}{2},$$

也就是说，当 $k = (3g+3)/2$ 时，。这证实了表 1 第三行中的 $b = 0$ 情形。

6. Quasi-isometric relations between k-multicurve graphs

最后，我们讨论本文结果引出的若干自然问题。对于 k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$，拟平坦秩$m(g,b,k)$ 是一个拟等距不变量。固定 g 和 b 后，$m(g,b,k)$ 的值可能在不同的 k 取值下相同。特别地，存在许多 k 的取值，使得 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ 是 Gromov 双曲的。这引出了以下自然问题：如果对于不同的 k、k'， $m(g,b,k) = m(g,b,k')$，那么图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ 和 $\mathcal{C}^{[k']}(\Sigma_{g,b})$ 是否拟等距?

根据 Aramayona、Parlier 和 Webb 的近期工作 [APW25], ，我们得到以下推论。

推论 6.1. 对于任意满足 $2 \leq k \leq 3g-3+b$ 的 k， k-多曲线图 $\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma)$ 与曲线图 $\mathcal{C}(\Sigma)$ 并非拟等距。

对于满足 $m(g,b,k) = 2$ 的三元组 (g, b, k)， k-多曲线图$\mathcal{C}^{[k]}(\Sigma_{g,b})$ 在某些情况下可以是相对双曲的，在另一些情况下则是厚的，如表 1 所示；这些情况彼此并非拟等距。

References

[Aou13] Tarik Aougab. 曲线图的一致双曲性。Geom. Topol., 17(5):2855–2875, 2013.[APW25] Javier Aramayona、Hugo Parlier 和 Richard Webb. 与曲线复形不同拟等距的双曲空间。arXiv 预印本 arXiv:2507.08086, 2025.[Ara06] Javier Aramayona. 五重穿孔球面的 Weil–Petersson 几何。载于《克莱因群空间》，第 329 卷，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，第 219–231 页。Cambridge Univ. Press，Cambridge，2006.[BDM09]Behrstock, Jason, Drut¸u, Cornelia, and Mosher, Lee. 厚度量空间、相对双曲性与拟等距刚性。Math. Ann., 344(3):543–595, 2009.[Beh06] Jason A. Behrstock. 映射类群与 Teichm¨uller 空间的渐近几何。Geom. Topol., 10:1523–1578, 2006.[BF06] Jeffrey Brock and Benson Farb. Teichm¨uller 空间的曲率与秩。Amer. J. Math., 128(1):1–22, 2006.[BHS17] Jason Behrstock, Mark F. Hagen, and Alessandro Sisto. 分层双曲空间 I：立方群的曲线复形。Geom. Topol., 21(3):1731–1804, 2017.[BHS19] Jason Behrstock, Mark Hagen, and Alessandro Sisto. 分层双曲空间 II：组合定理与距离公式。Pacific J. Math., 299(2):257–338, 2019.[BHS21] Jason Behrstock, Mark F. Hagen, and Alessandro Sisto. 分层双曲空间中的拟平坦。Duke Math. J., 170(5):909–996, 2021.[BM08a] Jason A. Behrstock and Yair N. Minsky. 映射类群的维数与秩。Ann. of Math. (2), 167(3):1055–1077, 2008.[BM08b] Jeffrey Brock and Howard Masur. 粗糙与综合 Weil–Petersson 几何：拟平坦、测地线与相对双曲性。Geom. Topol., 12(4):2453–2495, 2008.[Bow06] Brian H. Bowditch. 交数与曲线复形的双曲性。J. Reine Angew. Math., 598:105–129, 2006.[Bow14] Brian H. Bowditch. 曲线图的一致双曲性。Pacific J. Math., 269(2):269–280, 2014.

[Bro03] Jeffrey F. Brock. Weil–Petersson 度量与三维双曲凸核的体积。J. Amer. Math. Soc., 16(3):495–535, 2003.[CRS14] Matt Clay, Kasra Rafi, and Saul Schleimer. 通过手术序列证明曲线图的一致双曲性。Algebr. Geom. Topol., 14(6):3325–3344, 2014.[EF17] Viveka Erlandsson and Federica Fanoni. 多曲线图之间的单纯嵌入。Michigan Math. J., 66(3):549–567, 2017.[Far98] B. Farb. 相对双曲群。Geom. Funct. Anal., 8(5):810–840, 1998.[Ham07] Ursula Hamenst¨adt. 曲线复形与 Te- ichm¨uller 空间的几何。载于《Teichm ¨uller 理论手册》第 I 卷，IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 第 11 卷，第 447–467 页。Eur. Math. Soc.，Z¨urich，2007.[Ham14] Ursula Hamenst¨adt. 非分离多曲线图的双曲性。Algebr. Geom. Topol., 14(3):1759–1778, 2014.[Har81] W. J. Harvey. 模群的边界结构。载于《黎曼曲面及相关主题：1978 年石溪会议论文集（纽约州立大学，纽约州石溪，1978 年）》，Ann. of Math. Stud. 第 97 卷，第 245–251 页。Princeton Univ. Press，Princeton, NJ，1981.[HPW15] Sebastian Hensel, Piotr Przytycki, and Richard C. H. Webb. 弧图与曲线图的 1-纤细三角形及一致双曲性。J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 17(4):755–762, 2015.[HT80] A. Hatcher and W. Thurston. 闭可定向曲面的映射类群的一个表示。Topology, 19(3):221–237, 1980.[Kun16] Erika Kuno. 不可定向曲面的曲线图的一致双曲性。Hiroshima Math. J., 46(3):343–355, 2016.[Mj09] Mahan Mj. 映射类群与插值复形：秩。J. Ramanujan Math. Soc., 24(4):341–357, 2009.[MM99] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. 曲线复形的几何 I：双曲性。Invent. Math., 138(1):103–149, 1999.[MM00] H. A. Masur and Y. N. Minsky. 曲线复形的几何 II：层级结构。Geom. Funct. Anal., 10(4):902–974, 2000.[RV22] Jacob Russell and Kate M. Vokes. 多曲线图的厚度与相对双曲性。J. Topol., 15(4):2317–2351, 2022.[Sis12] Alessandro Sisto. 关于度量相对双曲性。arXiv 预印本 arXiv:1210.8081, 2012.[Vok22] Kate M. Vokes. 多曲线图的分层双曲性。Al- gebr. Geom. Topol., 22(1):113–151, 2022.

(Erika Kuno) College of Engineering, Shibaura Institute of Technology, 3-7-5 Toyosu, Koto-ku, Tokyo 135-8548, Japan电子邮箱地址: e-kuno@shibaura-it.ac.jp

(Rin Kuramochi) Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan电子邮件地址: kuramochi-rin0311@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

(Kento Sakai) Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan电子邮件地址: kento@ms.u-tokyo.ac.jp