逼近非线性流固相互作用的线性分区有限元方法的稳定性与误差估计

Bangwei She* Tian Tian† Karel T˚uma‡

摘要

在任意拉格朗日–欧拉（ALE）框架下，我们提出并分析了一种用于流体–壳体相互作用的线性分区有限元方法。对于流体速度、压力和结构速度，我们分别采用 P1-气泡/P1/P1单元。我们在不假设结构发生无穷小变形且不忽略流体对流效应的情况下，证明了该格式的稳定性并给出了误差估计。数值实验进一步验证了理论收敛阶。

KEYWORDS: 流固相互作用、分区格式、稳定性、误差估计、有限元方法

MSC(2010): 35Q30, 76N99, 74F10, 65M12, 65M60

arXiv:2601.02847v1 [math.NA] 6 Jan 2026

1 引言

流固相互作用（FSI）的计算建模近几十年来受到广泛关注，这源于其在生物系统、航空航天工程和能源技术中的重要意义[2, 3, 21]。人们提出了大量数值方法，涵盖整体格式和模块化分区策略。整体式方法求解流体与结构耦合的大型系统，例如参见 Gee等人 [11], Hecht 和 O. Pironneau [13], 以及 Lozovskiy 等人 [16, 17]。由于流体与结构之间的强耦合，这类方法通常更加稳定。分区方法分区（有时也称为分裂法、运动学耦合方法或松耦合方法）通常成本较低，因为大型流固耦合系统被划分为两个较小的子系统，例如参见 Badia等人 [1], Buka˘c等人 [5],Hundertmark 和 Luk´a˘cov´a-Medvid'ov´a [14], Luk´a˘cov´a-Medvid'ov´a等人 [18]。为了维持稳定性，需要在相互作用界面处施加合适的边界条件；不同类型分区方法的比较见 [9]。

尽管分区格式在实践中取得了成功，但要严格分析其收敛性通常仍是一项极其微妙且技术要求很高的任务。在这方面，一系列颇具影响力的研究取得了重要进展，其中包括 Buka˘c 和 Muha [6], Burman等人 [7, 8],Fern'andez和Mullaert [10], Li等人 [15], Seboldt和Buk˘c [20], 等人的工作。这些研究通过细致处理相互作用界面，深入揭示了分区方法的稳定性和收敛机制。

由于流固耦合系统本身具有非线性，现有的分析结果通常是在简化但便于数学处理的框架下建立的，往往假设固体位移无穷小，并忽略流体方程中的对流效应。本文旨在拓展对分区格式的理论认识，使其超越这一常见设定。具体而言，我们证明了一种线性分区有限元方法的能量稳定性（见定理 3.1），并给出了其线性收敛阶（见定理4.1），且不依赖上述假设。

本文的结构安排如下。第2节介绍问题并给出我们的数值方法。第3节证明数值解的能量稳定性。第4节分析数值解向强解收敛的收敛速率。第5节展示数值实验。第6节为结论。

*首都师范大学多学科研究院（bangweishe@cnu.edu.cn）。
†北京工业大学数学、统计与力学学院（tiantian@bjut.edu.cn）
‡查理大学数学与物理学院数学研究所（ktuma@karlin.mff.cuni.cz）

2 问题描述与数值方法

本节介绍记号、函数空间以及一些初步估计。

2.1 问题表述

本文研究不可压黏性流体与薄可变形壳结构之间的相互作用。具体而言，我们将结构视为流体区域的上边界 Γ_S。由此得到一个非线性耦合系统，其流体区域随时间变化，具体如下

$$\Omega_\eta(t) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Sigma \times (0, \eta(t, x_1))\} \subset \mathbb{R}^2,\ \Sigma = (0, L),\ \text{and}\ \Gamma_S = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \eta(t, x_1)) \mid x_1 \in \Sigma\},$$

其中，$\eta = \eta(t, x_1)$ 表示上边界 $\Gamma_S(t)$ 的高度。通常，流体动力学由当前（欧拉）构形下的质量守恒方程和动量平衡方程描述，而结构动力学则在参考（拉格朗日）构形下表述。耦合流固耦合系统的运动由以下方程支配。

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{in } (0,T) \times \Omega_\eta, \\ \varrho_f \left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right) - \operatorname{div} \mathbb{T}(\mathbf{u}, p) = 0, & \text{in } (0,T) \times \Omega_\eta, \\ \varrho_s \partial_t^2 \eta + \mathcal{L}(\eta) = f, \quad \xi = \partial_t \eta, & \text{on } (0,T) \times \Sigma. \end{cases} \tag{2.1}$$

这里，$\mathbb{T} = 2\mu(\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{S}} - p\mathbb{I}$、$(\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{S}} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}})/2$、$\mathcal{L}(\eta) = -\gamma_1 \partial_{x_1}^2 \eta - \gamma_2 \partial_{x_1}^2 \zeta$、$\zeta = -\partial_{x_1}^2 \eta$、$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \boldsymbol{x})$ 和 $p = p(t, \boldsymbol{x})$ 分别表示流体速度和压力。符号 ϱ_f 和 ϱ_s 分别表示流体和结构的密度。常数 $\gamma_1 > 0$ 和 $\gamma_2 > 0$ 为给定参数。$\xi = \xi(t, \boldsymbol{x})$ 表示结构速度，$f = f(t, \boldsymbol{x})$ 表示流体柯西应力作用于结构的相互作用力。问题由初始数据

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ in } \Omega_\eta(0), \quad \eta(0, \cdot) = \eta_0 > 0,\ \xi(0, \cdot) = \xi_0 \text{ in } \Sigma, \tag{2.2}$$

以及无滑移边界条件

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 0,\ \Gamma_D = \partial\Omega_\eta \setminus \Gamma_S,\ \text{and}\ \partial_{x_1}\eta|_{\partial\Sigma} = 0$$

以及界面上的耦合条件:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_S} = \xi \mathbf{e}_2, \quad f = -\,\mathbf{e}_2 \cdot \left(J\mathbb{T}(\mathbf{u}, p) \circ \mathcal{A}_\eta\, \mathbb{F}^{-T}\right) \cdot \mathbf{e}_2, \tag{2.3}$$

其中，$\mathcal{A}_\eta$ 是一个从参考区域 Ω 到时变流体区域 Ω_η 的可逆映射，用于处理流体的欧拉描述与结构的拉格朗日描述之间的不一致性。这使我们能够在单一的公共构形 Ω 中描述整个问题。不失一般性，设 $\Omega = \Sigma \times (0,1)$。在本文中，映射 $\mathcal{A}_\eta$ 被显式构造为线性延拓:

$$\mathcal{A}_\eta : \widehat{\Omega} \mapsto \Omega_\eta, \quad (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \mapsto (x_1, x_2) = \mathcal{A}_\eta(t, \widehat{\boldsymbol{x}}) = (\widehat{x}_1, \eta\, \widehat{x}_2), \tag{2.4a}$$

其对应的雅可比矩阵和行列式为

$$\mathbb{F} = \nabla_{\widehat{x}} \mathcal{A}_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \widehat{x}_2 \frac{\partial \eta}{\partial \widehat{x}_1} & \eta \end{pmatrix}, \qquad J = \det(\mathbb{F}) = \eta. \tag{2.4b}$$

在此处及下文中，对于定义在当前区域上的任意一般函数 v，其到参考区域的拉回记为 $\widehat{v} = v \circ \mathcal{A}_\eta$。

函数空间我们采用 $W^{k,p}(D)$、$W^{k,p}_0$ 和 $L^p(D)$ 的标准记法，分别表示一般区域 D 上的索伯列夫空间、迹为零的索伯列夫空间和勒贝格空间。此外，我们引入以下耦合空间，以恢复界面上的无滑移条件。

$$\widehat{W} = \left\{ (\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \psi) \in W^{1,2}(\widehat{\Omega}) \times W^{1,2}(\Sigma) \mid \widehat{\boldsymbol{\varphi}} = 0 \text{ on } \Gamma_D,\ \psi(\widehat{x}_1)\mathbf{e}_2 = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\widehat{x}_1, 1) \right\}.$$

采用上述记号并通过坐标变换，我们给出参考区域 Ω 上流固耦合问题（2.1）–（2.3）的弱形式，参见例如 [19]。

定义 2.1（参考区域 Ω 上的弱形式）。我们称下式为参考区域 Ω 上流固耦合问题的弱形式。

$$\int_{\widehat{\Omega}} \widehat{q} \nabla \widehat{\mathbf{u}} : \mathbb{M} \, \mathrm{d}\widehat{x} = 0 \quad \textit{for all } q \in L^2_0(\widehat{\Omega}); \tag{2.5a}$$

$$\begin{aligned} &\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left(J \partial_t \widehat{\mathbf{u}} + \partial_t J \frac{\widehat{\mathbf{u}}}{2} \right) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \, \mathrm{d}\widehat{x} + \frac{1}{2} \varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\nabla \widehat{\mathbf{u}}) - \widehat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}) \right) \cdot \mathbb{F}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{v}} J \, \mathrm{d}\widehat{x} \\ &+ \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{\mathbb{T}}(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p}) : \left(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mathbb{F}^{-1} \right) J \, \mathrm{d}\widehat{x} + \varrho_s \int_{\Sigma} \partial_t \xi \psi \, \mathrm{d}x_1 + a_s(\eta, \zeta, \psi) = 0, \end{aligned} \tag{2.5b}$$

对所有 $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \psi) \in \widehat{W}$，其中 $\widehat{\mathbf{v}} = \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{w}}$，$\widehat{\mathbf{w}} = \partial_t \mathcal{A}_\eta$，$\zeta = -\partial^2_{x_1} \eta$，$\mathcal{A}_\eta$ 以及 $\mathbb{F}$ 均由（2.4）给出，且

$$\begin{aligned} a_s(\eta, \zeta, \psi) &= \int_{\Sigma} (\gamma_1 \partial_{x_1} \eta + \gamma_2 \partial_{x_1} \zeta) \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1, \\ \widehat{\mathbb{T}}(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p}) &= \mathbb{T}(\mathbf{u}, p) \circ \mathcal{A}_\eta = 2\mu (\nabla \widehat{\mathbf{u}} \mathbb{F}^{-1})^{\mathrm{S}} - \widehat{p} \mathbb{I}, \quad \mathbb{M} = J \mathbb{F}^{-T}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

有限元空间 令 Σ_h 为顶部边界 $\Gamma_S = \Gamma_S \circ \mathcal{A}_\eta$ 上的曲面网格，令 $\mathcal{T}_h$ 为参考区域 Ω 上形状正则且准一致的三角剖分，其中 h 表示 $\mathcal{T}_h$中所有单元的最大直径。我们用 $K \in \mathcal{T}_h$ 表示 $\mathcal{T}_h$ 中的任意单元，用 $\sigma \in \Sigma_h$ 表示 Σ_h中的任意面单元。此外，我们在 Ω 上引入以下函数空间

$$\begin{aligned} \widehat{V}^f_h &= \left\{ \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \in W^{1,2}(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^d) \middle| \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \in \mathcal{P}^1(K) \oplus B_1(K),\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, \widehat{\varphi}_1|_{\widehat{\Gamma}_S} = 0 \right\}, \\ B_1(K) &= \left\{ \phi \in \mathcal{P}^3(K) \middle| \phi(a_i) = 0, \quad \text{where } a_i,\ i = 1,2,3, \text{ are vertices of } K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ \widehat{Q}^f_h &= \left\{ \widehat{q} \in C^0(\widehat{\Omega}) \middle| \widehat{q} \in \mathcal{P}^1(K),\ \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad V^s_h = \left\{ \psi \in W^{1,2}_0(\Sigma) \middle| \psi \in \mathcal{P}^1(\sigma),\ \forall \sigma \in \Sigma_h \right\}, \end{aligned}$$

其中，$\mathcal{P}^n(K)$（分别为 $\mathcal{P}^n(\sigma)$）表示在 K（分别在 σ）上次数不超过 n 的多项式。为处理四阶项，我们引入离散拉普拉斯算子 $\zeta_h = -\partial^2_{x_1,h} \eta_h \in V^s_{0,h} := V^s_h \cap L^2_0(\Sigma)$，其由下式唯一确定

$$\int_{\Sigma} \zeta_h \, \psi \, \mathrm{d}x_1 + \int_{\Sigma} \partial_{x_1} \eta_h \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1 = 0 \quad \text{for all } \psi \in V^s_h. \tag{2.7}$$

采用上述记号，对于所有 $\psi \in V^s_h$，有

$$a_s(\eta_h, \zeta_h, \psi) = \int_{\Sigma} (\gamma_1 \partial_{x_1} \eta_h + \gamma_2 \partial_{x_1} \zeta_h) \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1 = \int_{\Sigma} (\gamma_1 \zeta_h - \gamma_2 \partial^2_{x_1,h} \zeta_h) \psi \, \mathrm{d}x_1. \tag{2.8}$$

接下来，回顾 Boffi 等人 [4] 和 Schwarzacher 等人 [19]，我们知道存在一个插值算子 $\Pi^Q_h \colon L^2(\widehat{\Omega}) \mapsto Q^f_h$ 和一个里斯投影算子 $\mathcal{R}^s_h \colon W^{1,2}(\Sigma) \mapsto V^s_h$，使得

$$\left\| \Pi^Q_h p - p \right\|_{W^{k,s}} \lesssim h \left\| p \right\|_{W^{k+1,s}}, \ k = 1,2, \ s \in [1, \infty],$$

$$\int_{\Sigma} \partial_{x_1} (\mathcal{R}^s_h \eta - \eta) \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1 = 0 \quad \forall \, \psi \in V^s_h \quad \text{with} \int_{\Sigma} \mathcal{R}^s_h \eta \, \mathrm{d}x_1 = \int_{\Sigma} \eta \, \mathrm{d}x_1 \text{ for all } \eta \in W^{1,2}(\Sigma),$$

$$\int_\Sigma (\partial_{x_1,h}^2 \mathcal{R}_h^s \eta - \partial_{x_1}^2 \eta)\, \psi \,\mathrm{d}x_1 = 0 \quad \forall\, \psi \in V_h^s \text{ and } \eta \in W^{2,2}(\Sigma),$$
$$\|\partial_{x_1} \mathcal{R}_h^s \eta\|_{L^2(\Sigma)} \lesssim \|\partial_{x_1}\eta\|_{L^2(\Sigma)} \quad \left\|\partial_{x_1,h}^2 \mathcal{R}_h^s \eta\right\|_{L^2(\Sigma)} \lesssim \left\|\partial_{x_1}^2 \eta\right\|_{L^2(\Sigma)} \quad \left\|\partial_{x_1,h}^2 \mathcal{R}_h^s \eta - \partial_{x_1}^2 \eta\right\|_{L^2(\Sigma)} \lesssim h \|\eta\|_{W^{3,2}(\Sigma)}\,, \tag{2.9}$$

其中，$a \lesssim b$ 表示 $a \le cb$，其中 c是一个与计算参数 τ 和 h无关的正常数。

此外，我们回顾一下针对流体速度的插值算子 Π_h^f：$W^{k,p}(\widehat{\Omega}) \mapsto \widehat{V}_h^f$，它由 [19] 给出，并满足狄利克雷边界条件。

定理 2.2。 *([19, 定理 5.6])* 设 $\Omega_{\eta_h} \subset \mathbb{R}^2$ 为一个子图，网格 $\mathcal{T}_h$ 和 Σ_h 分别定义在区域 $\widehat{\Omega}$ 和 Σ 上，且形状正则并准一致。此外，设 $\Gamma_S = \{(x_1, \eta_h(x_1)) | x_1 \in \Sigma\}$满足 $\min_\Sigma \eta_h \ge \delta$ 和 $\|\partial_{x_1}\eta_h\|_{L^\infty} \le L$。进一步假设 $\min_\Sigma \eta \ge \delta$ 和 $\|\partial_{x_1}\eta\|_{L^\infty} \le L$。那么存在

$$\Pi_h^f : \left\{(\widehat{\mathbf{u}}, \xi) \in \widehat{W} \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Omega_\eta\right\} \to \widehat{W}_{\eta_h} := \left\{(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \psi) \in \widehat{V}_h^f \times V_h^s \,\middle|\, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\widehat{x}_1, 1) = \psi(\widehat{x}_1)\mathbf{e}_2\right\}$$

满足条件，使得 $\gamma < \infty$

$$\begin{aligned} \left\|\widehat{\mathbf{u}} - \Pi_h^f \widehat{\mathbf{u}}\right\|_{L^\gamma(\widehat{\Omega})} + h \left\|\nabla(\widehat{\mathbf{u}} - \Pi_h^f \widehat{\mathbf{u}})\right\|_{L^2(\widehat{\Omega})} &\lesssim h^2 \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{W^{2,2}(\widehat{\Omega})} + h^2 \|\xi\|_{W^{2,2}(\Sigma)} + h \|\eta - \eta_h\|_{W^{1,2}(\Sigma)}\,, \\ \left\|\Pi_h^f \widehat{\mathbf{u}}\right\|_{L^\gamma(\widehat{\Omega})} + \left\|\nabla \Pi_h^f \widehat{\mathbf{u}}\right\|_{L^2(\widehat{\Omega})} &\lesssim \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{W^{1,2}(\widehat{\Omega})} + \|\xi\|_{W^{1,2}(\Sigma)} + \|\eta - \eta_h\|_{W^{2,2}(\Sigma)}\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中界限对 $\frac{1}{\delta}$、L、$\frac{L}{\delta}$ 呈线性依赖。此外，我们发现 $\Pi_h^f \mathbf{u}(x_1, 1) = (0, \mathcal{R}_h^s \xi(x_1))$ 在 Σ 上，并且

$$\int_{\widehat{\Omega}} \widehat{q} \nabla \Pi_h^f \mathbf{u} : \mathbb{M}(\eta_h)\, dx = 0 \quad \forall\, \widehat{q} \in \widehat{Q}_h^f. \tag{2.11}$$

2.2 数值方法

现在我们准备好 提出一种有限元方法，对弱形式（2.5）进行离散化 .

线性分区格式。
对于 $k = 0$，通过 $\eta_h^1 = \eta_h^0 + \tau \xi_h^0$.For $k = 1, 2, \cdots$预测结构的初始运动，将流固耦合问题求解为两个子问题。

步骤 1 – 流体子问题：求解 $(\widehat{p}_h^k, \widehat{\mathbf{u}}_h^k) \in \widehat{Q}_h^f \times \widehat{V}_h^f$

$$\int_{\widehat{\Omega}} \widehat{q} \nabla \widehat{\mathbf{u}}_h^k : \mathbb{M}_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} = 0, \tag{2.12a}$$

$$\begin{aligned} &\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} (J_h^k D_t \widehat{\mathbf{u}}_h^k + \frac{1}{2} D_t J_h^k \widehat{\mathbf{u}}_h^{k*}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\nabla \widehat{\mathbf{u}}_h^k) - \widehat{\mathbf{u}}_h^k \cdot (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}})\right) \cdot (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1} J_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} \\ &+ \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{\mathbb{T}}(\widehat{\mathbf{u}}_h^k, \widehat{p}_h^k) : \left(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right) J_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{\varrho_s}{\tau} \int_\Sigma (\widehat{\mathbf{u}}_h^k - \xi_h^{k-1}\mathbf{e}_2) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \,\mathrm{d}x_1 + a_s(\eta_h^k, \zeta_h^k, \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{e}_2) = 0 \end{aligned} \tag{2.12b}$$

对于所有 $(\widehat{q}, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}) \in \widehat{Q}_h^f \times \widehat{V}_h^f$，其中 $D_t v^k := (v^k - v^{k-1})/\tau$ 是时间差分，$\widehat{\mathbf{u}}_h^{k*} = 2\widehat{\mathbf{u}}_h^{k-1} - \widehat{\mathbf{u}}_h^k$，$\widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1} = \widehat{\mathbf{u}}_h^{k-1} - \widehat{\mathbf{w}}_h^k$，以及 $\widehat{\mathbb{T}}$ 和 $\mathbb{M}_h^k = \mathbb{M}(\eta_h^k)$ 均在 (2.6) 中给出。此外，ζ_h 由 (2.7) 定义，a_s 由 (2.8) 给出。

步骤 2 – 结构子问题：求解 $(\xi_h^k = D_t \eta_h^{k+1}, \eta_h^{k+1}) \in V_h^s \times V_h^s$，使得

$$\frac{\varrho_s}{\tau} \int_\Sigma \xi_h^k \psi \,\mathrm{d}x_1 + a_s(\eta_h^{k+1}, \zeta_h^{k+1}, \psi) = \frac{\varrho_s}{\tau} \int_\Sigma \widehat{\mathbf{u}}_h^k \cdot \mathbf{e}_2 \psi \,\mathrm{d}x_1 + a_s(\eta_h^k, \zeta_h^k, \psi) \tag{2.12c}$$

对所有 $\psi \in V_h^s$。

注记 2.3。 我们的格式以 $\mathcal{O}(\tau^2)$ 阶截断误差逼近界面上的无滑移速度条件。将 $\widetilde{\xi}_h^k = \xi_h^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k$ 记为

$$\Delta_\xi^k = D_t(\gamma_1\zeta_h^{k+1} - \gamma_2\partial_{x_1,h}^2\zeta_h^{k+1}) = \partial_{x_1,h}^2(\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k - \gamma_1\xi_h^k) \tag{2.13}$$

并取 $\psi = \widehat{\mathbf{u}}_h^k\cdot\mathbf{e}_2 - \widetilde{\xi}_h^k \in V_h^s$ 作为(2.12c)中的测试函数，我们得到 $\int_\Sigma|\widehat{\mathbf{u}}_h^k\cdot\mathbf{e}_2 - \widetilde{\xi}_h^k|^2\,\mathrm{d}x_1 = 0$. 由于 $\widehat{\mathbf{u}}_h^k$ 的第一分量在顶部边界上为零，因此我们得到界面上速度的以下修正的无滑移条件

$$\widehat{\mathbf{u}}_h^k = \widetilde{\xi}_h^k\mathbf{e}_2. \tag{2.14}$$

将(2.12b)与(2.12c)乘以耦合测试函数($\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \psi = \widehat{\varphi}_2|_\Sigma$) 相加可得

$$\begin{aligned}\varrho_f\int_{\widehat{\Omega}} D_t\widehat{\mathbf{u}}_h^k\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}}J_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{1}{2}\varrho_f\int_{\widehat{\Omega}} D_tJ_h^k\widehat{\mathbf{u}}_h^{k*}\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{1}{2}\varrho_f\int_{\widehat{\Omega}}\left(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot(\nabla\widehat{\mathbf{u}}_h^k) - \widehat{\mathbf{u}}_h^k\cdot(\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\right)\cdot(\mathbb{F}_h^k)^{-1}\cdot\widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1}J_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x}\\ + \int_{\widehat{\Omega}}\widehat{\mathbb{T}}(\widehat{\mathbf{u}}_h^k,\widehat{p}_h^k):\left(\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right)J_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x} + \varrho_s\int_\Sigma D_t\xi_h^k\widehat{\varphi}_2\,\mathrm{d}x_1 + a_s(\eta_h^{k+1},\zeta_h^{k+1},\widehat{\varphi}_2) = 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

3 稳定性

本节研究格式（2.12）的能量稳定性。流固耦合系统在时间 t^k 的总能量为

$$E_h^k = \frac{\rho_f}{2}\int_{\widehat{\Omega}}\eta_h^k|\widehat{\mathbf{u}}_h^k|^2\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{\varrho_s}{2}\left\|\xi_h^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\gamma_1}{2}\left\|\partial_{x_1}\eta_h^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\gamma_2}{2}\left\|\partial_{x_1,h}^2\eta_h^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2.$$

定理 3.1 (能量估计)。 设 $\{(\widehat{p}_h^k, \widehat{\mathbf{u}}_h^k, \xi_h^k, \eta_h^{k+1})\}_{k=1}^N$ 为格式(2.12)的解。对于所有 $m = 1,\ldots,N$，有以下能量估计

$$E_h^m + D_{num1}^m + \tau\sum_{k=1}^m\left(2\mu\int_{\widehat{\Omega}}\eta_h^k|(\nabla\widehat{\mathbf{u}}_h^k(\mathbb{F}_h^k)^{-1})^{\mathrm{S}}|^2\,\mathrm{d}\widehat{x} + D_{num2}^k\right) = E_h^0 + D_{num1}^0, \tag{3.1}$$

其中， D_{num1}^k 和 D_{num2}^k 是数值耗散，定义为

$$\begin{aligned}D_{num1}^k =& \frac{\tau^2}{2}\left(\gamma_1\left\|\partial_{x_1}\xi_h^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \gamma_2\left\|\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right) + \frac{\tau^2}{2\varrho_s}\int_\Sigma|\gamma_1\zeta_h^{k+1} - \gamma_2\partial_{x_1,h}^2\zeta_h^{k+1}|^2\,\mathrm{d}x_1,\\ D_{num2}^k =& \frac{\tau}{2}\varrho_f\int_{\widehat{\Omega}}\eta_h^{k-1}|D_t\widehat{\mathbf{u}}_h^k|^2\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{\varrho_s\tau}{2}\left\|D_t\xi_h^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\gamma_1\tau}{2}\left\|\partial_{x_1}\xi_h^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\gamma_2\tau}{2}\left\|\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\\ &+ \frac{\tau^3}{2}\int_\Sigma\left(|\partial_{x_1}D_t\xi_h^k|^2 + |\partial_{x_1,h}^2D_t\xi_h^k|^2 + \frac{1}{\varrho_s}|D_t(\gamma_1\zeta_h^{k+1} - \gamma_2\partial_{x_1,h}^2\zeta_h^{k+1})|^2\right)\mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

证明。 在数值方法中取测试函数为 $(\widehat{q},\widehat{\boldsymbol{\varphi}}) = (\widehat{p}_h^k, \widehat{\mathbf{u}}_h^k)$ 和 $\psi = \xi_h^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k$，其中 $\Delta_\xi^k = \partial_{x_1,h}^2(\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k - \gamma_1\xi_h^k)$ 由 (2.13) 给出，并回顾 $J_h = \eta_h$，可得

$$\begin{aligned}\varrho_f\int_{\widehat{\Omega}} D_t\widehat{\mathbf{u}}_h^k\cdot\widehat{\mathbf{u}}_h^k\eta_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{\varrho_f}{2}\int_{\widehat{\Omega}} D_t\eta_h^k\widehat{\mathbf{u}}_h^{k*}\cdot\widehat{\mathbf{u}}_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x} + 2\mu\int_{\widehat{\Omega}}\eta_h^k|(\nabla\widehat{\mathbf{u}}_h^k(\mathbb{F}_h^k)^{-1})^{\mathrm{S}}|^2\,\mathrm{d}\widehat{x}\\ + \varrho_s\int_\Sigma D_t\xi_h^k\xi_h^k\,\mathrm{d}x_1 + \underbrace{\tau^2\int_\Sigma D_t\xi_h^k\Delta_\xi^k\,\mathrm{d}x_1}_{=:T_1} + a_s(\eta_h^{k+1},\zeta_h^{k+1},\xi_h^k) + \underbrace{\frac{\tau^2}{\varrho_s}a_s(\eta_h^{k+1},\zeta_h^{k+1},\Delta_\xi^k)}_{=:T_2} = 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

接下来，利用代数等式 $(a-b)a = (a^2-b^2)/2 + (a-b)^2/2$ ，可以很容易地验证以下恒等式

ties:

$$\varrho_s\int_\Sigma D_t\xi_h^k\xi_h^k\,\mathrm{d}x_1 = \frac{\varrho_s}{2}\int_\Sigma D_t|\xi_h^k|^2\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\varrho_s\tau}{2}\int_\Sigma|D_t\xi_h^k|^2\,\mathrm{d}x_1,$$

$$\varrho_f\int_{\widehat{\Omega}} D_t\widehat{\mathbf{u}}_h^k\cdot\widehat{\mathbf{u}}_h^k\eta_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{\varrho_f}{2}\int_{\widehat{\Omega}} D_t\eta_h^k\widehat{\mathbf{u}}_h^{k*}\cdot\widehat{\mathbf{u}}_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x} = \varrho_f D_t\int_{\widehat{\Omega}}\frac{1}{2}\eta_h^k|\widehat{\mathbf{u}}_h^k|^2\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{\varrho_f\tau}{2}\int_{\widehat{\Omega}}\eta_h^{k-1}|D_t\widehat{\mathbf{u}}_h^k|^2\,\mathrm{d}\widehat{x},$$

$$a_s(\eta_h^{k+1},\zeta_h^{k+1},\xi_h^k) = D_t\left(\frac{\gamma_1}{2}\left\|\partial_{x_1}\eta_h^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\frac{\gamma_2}{2}\left\|\partial_{x_1,h}^2\eta_h^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)$$
$$+\frac{\gamma_1\tau}{2}\int_\Sigma|\partial_{x_1}\xi_h^k|^2\,\mathrm{d}x_1+\frac{\gamma_2\tau}{2}\int_\Sigma|\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k|^2\,\mathrm{d}x_1.$$

类似地，我们将 T_1 和 T_2 改写如下。

$$\begin{aligned}T_1&=\tau^2\int_\Sigma D_t\xi_h^k\Delta_\xi^k\,\mathrm{d}x_1=\tau^2\int_\Sigma D_t\xi_h^k\partial_{x_1,h}^2(\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k-\gamma_1\xi_h^k)\,\mathrm{d}x_1\\&=\frac{\tau^2}{2}D_t\int_\Sigma\left(\gamma_2|\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k|^2+\gamma_1|\partial_{x_1}\xi_h^k|^2\right)\mathrm{d}x_1+\frac{\tau^3}{2}\int_\Sigma\left(\gamma_2|D_t\partial_{x_1,h}^2\xi_h^k|^2+\gamma_1|D_t\partial_{x_1}\xi_h^k|^2\right)\mathrm{d}x_1,\\T_2&=\frac{\tau^2}{\varrho_s}a_s(\eta_h^{k+1},\zeta_h^{k+1},\Delta_\xi^k)=\frac{\tau^2}{\varrho_s}\int_\Sigma(\gamma_1\zeta_h^{k+1}-\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\zeta_h^{k+1})D_t(\gamma_1\zeta_h^{k+1}-\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\zeta_h^{k+1})\,\mathrm{d}x_1\\&=\frac{\tau^2}{2\varrho_s}D_t\int_\Sigma|\gamma_1\zeta_h^{k+1}-\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\zeta_h^{k+1}|^2\,\mathrm{d}x_1+\frac{\tau^3}{2\varrho_s}\int_\Sigma|D_t(\gamma_1\zeta_h^{k+1}-\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\zeta_h^{k+1})|^2\,\mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

因此，将上述等式汇总并代入（3.2），可得

$$D_t(E_h^k+D_{num1}^k)+2\mu\int_{\widehat{\Omega}}\eta_h^k|(\nabla\widehat{\mathbf{u}}_h^k(\mathbb{F}_h^k)^{-1})^{\mathrm{S}}|^2\,\mathrm{d}\widehat{x}+D_{num2}^k=0.\tag{3.3}$$

最后，计算 $\tau\sum_{k=1}^m$（3.3）得到（3.1），从而完成证明。 □

为确保能量具有意义（即为正），我们假设 $\eta_h^k>0$。更确切地说，我们假设对所有 $t^k\in[0,T]$

$$\eta_h\geq\underline{\eta}>0.\tag{3.4}$$

注意，这一假设可通过误差估计结合数学归纳法得到论证，参见我们先前的结果 [19, 定理 6。2]根据定理3.1和（3.4），我们得到以下一致估计。

推论 *3.2.* 设初始数据满足 $\widehat{u}_0\in W^{1,2}(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2)$ $\eta_0\in W^{1,2}(\Sigma)$，且 $\xi_0\in W^{1,2}(\Sigma)$。设 $(\widehat{p}_h,\widehat{u}_h,\xi_h,\eta_h)=\{(\widehat{p}_h^k,\widehat{u}_h^k,\xi_h^k,\eta_h^{k+1})\}_{k=1}^N$ 是格式 *(2.12)* 的一个解，其中 $(\tau,h)\in(0,1)^2$，并且 *(3.4)* 成立。则有以下一致有界性。

$$\begin{aligned}&\|\xi_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}+\|\partial_{x_1}\eta_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}+\left\|\partial_{x_1,h}^2\eta_h\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}\lesssim 1,\\&\left\|\eta_h^{-1}\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Sigma)}+\|\eta_h\|_{L^\infty((0,T)\times\Sigma)}+\|\partial_{x_1}\eta_h\|_{L^\infty((0,T)\times\Sigma)}\lesssim 1,\\&\|\mathbb{F}_h\|_{L^\infty((0,T)\times\Sigma;\mathbb{R}^{2\times2})}+\left\|\mathbb{F}_h^{-1}\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Sigma;\mathbb{R}^{2\times2})}\lesssim 1,\\&\|\widehat{\mathbf{u}}_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\widehat{\Omega}))}+\left\|(\nabla\widehat{\mathbf{u}}_h(\mathbb{F}_h)^{-1})^{\mathrm{S}}\right\|_{L^2((0,T)\times\widehat{\Omega})}\lesssim 1,\\&\|\nabla\widehat{\mathbf{u}}_h\|_{L^2((0,T)\times\widehat{\Omega})}\lesssim 1,\quad\|\widehat{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;L^{q_1}(\widehat{\Omega}))}\lesssim 1,\\&\|\xi_h\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Sigma))}\lesssim\|\nabla\widehat{\mathbf{u}}_h\|_{L^2((0,T)\times\widehat{\Omega})}\lesssim 1,\\&\|\widehat{\mathbf{w}}_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\widehat{\Omega}))}+\|\widehat{\mathbf{w}}_h\|_{L^2(0,T;L^\infty(\widehat{\Omega}))}\lesssim 1,\\&\|\widehat{\mathbf{v}}_h\|_{L^2(0,T;L^{q_1}(\widehat{\Omega}))}+\|\widehat{\mathbf{v}}_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\widehat{\Omega}))}\lesssim 1,\quad\|\widehat{\mathbf{v}}_h\|_{L^{q_2}(0,T;L^{q_1}(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2))}\lesssim 1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

对于任意 $q_1\in[1,\infty)$ 和 $q_2\in[1,\infty)$。

4 误差估计

本节研究格式（$\widehat{p}_h$， $\widehat{\mathbf{u}}_h$， ξ_h， η_h）的数值解与其目标光滑解（$\widehat{p}$， $\widehat{\mathbf{u}}$ ξ， η）之间的误差。这里假设（2.1）–（2.3）存在如下类别的光滑解：

以下类别

$$\begin{cases}\eta > \underline{\eta},\ \eta \in W^{1,2}(0,T;W^{4,2}(\Sigma)) \cap W^{2,2}(0,T;W^{2,2}(\Sigma)),\\ \widehat{\mathbf{u}} \in L^\infty(0,T;W^{1,2}(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2)) \cap L^2(0,T;W^{2,2}(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2))\\ \partial_t \widehat{\mathbf{u}} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2)), \partial_t^2 \widehat{\mathbf{u}} \in L^2((0,T)\times\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2)\\ \widehat{p} \in L^\infty(0,T;L^2(\widehat{\Omega})),\ \nabla p \in L^2((0,T)\times\widehat{\Omega}).\end{cases} \tag{4.1}$$

在介绍主要结果之前，我们先为每个时间步 $k \in\{1,\dots,N_T\}$定义以下误差项。

$$\begin{aligned} e_p^k &= \widehat{p}_h^k - \widehat{p}^k = (\widehat{p}_h^k - \Pi_h^Q \widehat{p}^k) + (\Pi_h^Q \widehat{p}^k - \widehat{p}^k) =: \delta_p^k + I_p^k,\\ e_{\mathbf{u}}^k &= \widehat{\mathbf{u}}_h^k - \widehat{\mathbf{u}}^k = (\widehat{\mathbf{u}}_h^k - \Pi_h^f \widehat{\mathbf{u}}^k) + (\Pi_h^f \widehat{\mathbf{u}}^k - \widehat{\mathbf{u}}^k) =: \delta_{\mathbf{u}}^k + I_{\mathbf{u}}^k,\\ e_\xi^k &= \xi_h^k - \xi^k = (\xi_h^k - \mathcal{R}_h^s \xi^k) + (\mathcal{R}_h^s \xi^k - \xi^k) =: \delta_\xi^k + I_\xi^k,\\ e_\eta^k &= \eta_h^k - \eta^k = (\eta_h^k - \mathcal{R}_h^s \eta^k) + (\mathcal{R}_h^s \eta^k - \eta^k) =: \delta_\eta^k + I_\eta^k,\\ e_\zeta^k &= \zeta_h^k - \zeta^k = (\zeta_h^k + \partial_{x_1,h}^2 \mathcal{R}_h^s \eta^k) + (-\partial_{x_1,h}^2 \mathcal{R}_h^s \eta^k - \zeta^k) =: \delta_\zeta^k + I_\zeta^k. \end{aligned} \tag{4.2}$$

现在我们可以给出本文的主要结果了。

定理 *4.1*（收敛速率）。设 $\{(\widehat{p}_h^k, \widehat{u}_h^k, \xi_h^k, \eta_h^{k+1})\}_{k=1}^{N_T}$ 为分裂格式 *(2.12)* 的解，且 $(\widehat{u}\ \widehat{p}, \xi, \eta)(t),\ t \in (0,T)$ 是属于类 *(4.1)* 的 *(2.1)–(2.3)* 的强解。则对任意 $m \in \{1,\cdots,N_T\}$，有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} |e_{\mathbf{u}}^m|^2 \eta_h^m \,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\varrho_s |e_\xi^m|^2 + \gamma_1 |\partial_{x_1} e_\eta^{m+1}|^2 + \gamma_2 |e_\zeta^{m+1}|^2\right) \mathrm{d}x_1 \\ &\qquad + 2\mu\tau \sum_{k=1}^m \int_{\widehat{\Omega}} \left|\nabla e_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right|^2 \mathrm{d}\widehat{x} \lesssim \tau^2 + h^2. \end{aligned}$$

特别地，我们得到以下收敛速率

$$\begin{aligned} &\|e_{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^2))} + \|e_\xi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))} + \|\partial_{x_1} e_\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))} + \|e_\zeta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))} \\ &\qquad + \|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2((0,T)\times\widehat{\Omega};\mathbb{R}^{2\times 2})} \lesssim \tau + h. \end{aligned}$$

证明。 首先，我们将弱形式（2.5b）从数值格式（2.15）中相减，得到

$$\begin{aligned} &\int_{\widehat{\Omega}} \varrho_f (\eta_h^k D_t e_{\mathbf{u}}^k + \frac{1}{2} D_t \eta_h^k e_{\mathbf{u}}^{k*}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \,\mathrm{d}\widehat{x} + 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} \left(\nabla e_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right)^{\mathrm{S}} : \left(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right) \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} \\ &+ \varrho_s \int_\Sigma D_t e_\xi^k \psi \,\mathrm{d}x_1 + a_s(e_\eta^{k+1}, e_\zeta^{k+1}, \psi) = -\sum_{i=1}^7 R_i^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \psi), \end{aligned} \tag{4.3}$$

详见附录A.1 ，具体细节如下。

$$
\begin{aligned}
R_1^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\psi) &= \varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left(e_\eta^k \partial_t \widehat{\mathbf{u}}^k + \eta_h^k (D_t \widehat{\mathbf{u}}^k - \partial_t \widehat{\mathbf{u}}^k)\right)\cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\widehat{x},\\
R_2^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\psi) &= \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left((e_\xi^{k-1} - \tau D_t \xi^k)\widehat{\mathbf{u}}^{k*} - \tau \partial_t \eta^k D_t \widehat{\mathbf{u}}^k\right)\cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}\widehat{x},\\
R_3^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\psi) &= \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot(\nabla e_{\mathbf{u}}^k) - e_{\mathbf{u}}^k\cdot(\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\right)\cdot(\mathbb{F}_h^k)^{-1}\widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1}\eta_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x}\\
&\quad + \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot(\nabla\widehat{\mathbf{u}}^k) - \widehat{\mathbf{u}}^k\cdot(\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\right)\cdot\left((\mathbb{F}_h^k)^{-1}\widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1}\eta_h^k - (\mathbb{F}^k)^{-1}\widehat{\mathbf{v}}^k\eta^k\right)\mathrm{d}\widehat{x},\\
R_4^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\psi) &= \int_{\widehat{\Omega}} e_p^k \nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}} : \mathbb{M}_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x} + \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{p}^k \nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}} : (\mathbb{M}_h^k - \mathbb{M}^k)\,\mathrm{d}\widehat{x},\\
R_5^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\psi) &= 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} \left((\nabla\widehat{\mathbf{u}}(\mathbb{F}_h^k)^{-1})^{\mathrm{S}} : (\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbb{F}_h^k)^{-1})\eta_h^k - (\nabla\widehat{\mathbf{u}}(\mathbb{F})^{-1})^{\mathrm{S}} : (\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbb{F}^k)^{-1})\eta^k\right)\mathrm{d}\widehat{x},\\
R_6^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\psi) &= \varrho_s \int_{\Sigma} (D_t\xi^k - \partial_t\xi^k)\psi\,\mathrm{d}x_1,\\
R_7^k(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\psi) &= -\gamma_1 \int_{\Sigma} \partial_{x_1}^2(\eta^{k+1} - \eta^k)\,\psi\,\mathrm{d}x_1 - \gamma_2 \int_{\Sigma} \partial_{x_1}^2(\zeta^{k+1} - \zeta^k)\,\psi\,\mathrm{d}x_1.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

注意，在 Σ 上有

$$
\delta_{\mathbf{u}}^k = \widehat{\mathbf{u}}_h^k - \Pi_h^f\widehat{\mathbf{u}}^k = \widetilde{\xi}_h^k\mathbf{e}_2 - \Pi_h^f\widehat{\mathbf{u}}^k = (\xi_h^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\mathbf{e}_2 - \Pi_h^f\widehat{\mathbf{u}}^k = (\delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\mathbf{e}_2,
\tag{4.5}
$$

其中我们使用了投影 Π_h^f 的性质：

$$
\mathcal{R}_h^s\xi^k\mathbf{e}_2 = \Pi_h^f\widehat{\mathbf{u}}^k|_\Sigma.
$$

现在，我们通过令 $\widehat{\boldsymbol{\varphi}} = \delta_{\mathbf{u}}^k$ 和 $\psi = \delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k$ 代入（4.3），即可开始证明。注意，它们是一对容许测试函数，因为（4.5）给出 $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|_\Sigma = \psi\mathbf{e}_2$。然后对从 $k=1$ 到 m 的项求和，得到

$$
\begin{aligned}
&-\tau\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^7 R_i^k(\delta_{\mathbf{u}}^k, \delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\\
=&\tau\sum_{k=1}^m \int_{\widehat{\Omega}} \varrho_f(\eta_h^k D_t e_{\mathbf{u}}^k + \frac{1}{2}D_t\eta_h^k e_{\mathbf{u}}^{k*})\cdot\delta_{\mathbf{u}}^k\,\mathrm{d}\widehat{x} + 2\mu\tau\sum_{k=1}^m\int_{\widehat{\Omega}} \left(\nabla e_{\mathbf{u}}^k(\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right)^{\mathrm{S}} : \left(\nabla\delta_{\mathbf{u}}^k(\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right)\eta_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x}\\
&+\tau\sum_{k=1}^m \varrho_s\int_\Sigma D_t e_\xi^k(\delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\,\mathrm{d}x_1 + \tau\sum_{k=1}^m a_s(e_\eta^{k+1}, e_\zeta^{k+1}, \delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k).
\end{aligned}
$$

此外，将（A.3h）应用于上述右端项，可将上述等式改写为

$$
\begin{aligned}
&-\tau\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^7 R_i^k(\delta_{\mathbf{u}}^k, \delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k) = \tau\sum_{k=1}^m\int_{\widehat{\Omega}} \varrho_f\left(\eta_h^k D_t(\delta_{\mathbf{u}}^k + I_{\mathbf{u}}^k) + \frac{1}{2}D_t\eta_h^k(\delta_{\mathbf{u}}^{k*} + I_{\mathbf{u}}^{k*})\right)\cdot\delta_{\mathbf{u}}^k\,\mathrm{d}\widehat{x}\\
&\quad + 2\mu\tau\sum_{k=1}^m\int_{\widehat{\Omega}} \left(\nabla(\delta_{\mathbf{u}}^k + I_{\mathbf{u}}^k)(\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right)^{\mathrm{S}} : (\nabla\delta_{\mathbf{u}}^k(\mathbb{F}_h^k)^{-1})\eta_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x}\\
&+\tau\sum_{k=1}^m \varrho_s\int_\Sigma D_t(\delta_\xi^k + I_\xi^k)(\delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\,\mathrm{d}x_1 + \tau\sum_{k=1}^m a_s(e_\eta^{k+1}, e_\zeta^{k+1}, \delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\\
&= \delta_E^m - \delta_E^0 + \tau\sum_{k=1}^m\delta_D^k + \tau\sum_{k=1}^m\delta_N^k + G_f + G_s + G_{sL},
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

其中

$$
\delta_E^k = \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{2}\varrho_f\eta_h^k|\delta_{\mathbf{u}}^k|^2\,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\varrho_s|\delta_\xi^k|^2 + \gamma_1|\partial_{x_1}\delta_\eta^{k+1}|^2 + \gamma_2|\delta_\zeta^{k+1}|^2\right)\mathrm{d}x_1,
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_D^k =& 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} \eta_h^k |\big(\nabla \delta_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\big)^{\mathrm{S}}|^2 \,\mathrm{d}\widehat{x},\\
\delta_N^k =& \frac{\tau}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \eta_h^{k-1} |D_t \delta_{\mathbf{u}}^k|^2 \,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{\tau}{2}\int_{\Sigma} \Big(\varrho_s |D_t \delta_\xi^k|^2 + \gamma_1 |D_t \partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1}|^2 + \gamma_2 |D_t \delta_\zeta^{k+1}|^2\Big)\,\mathrm{d}x_1 \geq 0,\\
G_f =& \tau \sum_{k=1}^m \int_{\widehat{\Omega}} \varrho_f \big(\eta_h^k D_t I_{\mathbf{u}}^k + \frac{1}{2} D_t \eta_h^k I_{\mathbf{u}}^{k*}\big)\cdot \delta_{\mathbf{u}}^k \,\mathrm{d}\widehat{x}\\
&+ 2\mu\tau \sum_{k=1}^m \int_{\widehat{\Omega}} \big(\nabla I_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\big)^{\mathrm{S}} : (\nabla \delta_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1}) \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x},\\
G_s =& \gamma_1 \tau \sum_{k=1}^m \int_{\Sigma} \partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1} \partial_{x_1} (D_t \eta^{k+1} - \partial_t \eta^k)\,\mathrm{d}x_1 - \gamma_2 \tau \sum_{k=1}^m \int_{\Sigma} \delta_\zeta^{k+1} \partial_{x_1}^2 (D_t \eta^{k+1} - \partial_t \eta^k)\,\mathrm{d}x_1\\
&+ \tau \sum_{k=1}^m \int_{\Sigma} \varrho_s D_t I_\xi^k (\delta_\xi^k + \frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\,\mathrm{d}x_1,\\
G_{sL} =& \tau^3 \sum_{k=1}^m \left(\int_{\Sigma} D_t \delta_\xi^k \Delta_\xi^k \,\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{\varrho_s} a_s(\delta_\eta^{k+1}, \delta_\zeta^{k+1}, \Delta_\xi^k)\right).
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

接下来，我们将（4.6）重新表述为以下形式。

$$
\delta_E^m - \delta_E^0 + \tau \sum_{k=1}^m \delta_D^k + \tau \sum_{k=1}^m D_{num}^k + G_{sL} = -\tau \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^7 R_i^k - G_f - G_s. \tag{4.8}
$$

然后，根据杨氏不等式，H¨older不等式、定理2.2中的插值误差以及一致有界性（3.5），我们对上述方程右端进行估计，得到

$$
\begin{aligned}
\left|\tau \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^7 R_i^k + G_f + G_s\right| \lesssim \tau^2 + h^2 + c\tau \sum_{k=1}^m \delta_E^k + 2\alpha\mu\tau \sum_{k=1}^m \int_{\widehat{\Omega}} \left|\nabla \delta_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right|^2 \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x}\\
+ \tau^3 \sum_{k=1}^m \Big(\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \left\|\partial_{x_1,h}^2 \delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \Big),
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

见附录A.4。

此外，将上述估计代入（4.8），并注意到初始误差 $\delta_E^0 = 0$，依据引理A.3中给出的 G_{sL} 的估计、 η 和 η_h 的下界，并令

$$
\widetilde{\delta}_E^k = \delta_E^k + \frac{\tau^2\gamma_1^2}{2\varrho_s} \left\|\delta_\zeta^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\tau^2\gamma_2^2}{2\varrho_s} \left\|\partial_{x_1,h}^2 \delta_\zeta^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2,
$$

我们得到

$$
\widetilde{\delta}_E^m + (1-\alpha) 2\mu\tau \sum_{k=1}^m \int_{\widehat{\Omega}} \left|\nabla \delta_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right|^2 \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} \lesssim \tau^2 + h^2 + \tau \sum_{k=1}^m \widetilde{\delta}_E^k.
$$

任取 $\alpha \in \in (0,\ 1)$，并利用Gronwall不等式，可得

$$
\delta_E^m + \tau \sum_{k=1}^m \delta_D^k \leq \widetilde{\delta}_E^m + \tau \sum_{k=1}^m \delta_D^k \lesssim \tau^2 + h^2.
$$

回顾插值误差（见第 2 节）以及强解的正则性（4.1），我们得到

$$
\frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} |I_{\mathbf{u}}^m|^2 \eta_h^m \,\mathrm{d}\widehat{x} + \frac{1}{2}\int_{\Sigma} \Big(\varrho_s |I_\xi^m|^2 + \gamma_1 |\partial_{x_1} I_\eta^{m+1}|^2 + \gamma_2 |I_\zeta^{m+1}|^2\Big)\,\mathrm{d}x_1
$$

$$+\tau\sum_{k=1}^{m}\left(2\mu\int_{\widehat{\Omega}}\left|\nabla I_{\mathbf{u}}^{k}(\mathbb{F}_{h}^{k})^{-1}\right|^{2}\eta_{h}^{k}\,\mathrm{d}\widehat{x}\right)\lesssim h^{2}.$$

Fi最后，由于三角不等式，我们将前面两个估计相加，得到 t

$$\frac{1}{2}\varrho_{f}\int_{\widehat{\Omega}}|e_{\mathbf{u}}^{m}|^{2}\eta_{h}^{m}\,\mathrm{d}\widehat{x}+\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left(\varrho_{s}|e_{\xi}|^{2}+\gamma_{1}|\partial_{x_{1}}e_{\eta}^{m+1}|^{2}+\gamma_{2}|e_{\zeta}^{m+1}|^{2}\right)\mathrm{d}x_{1}$$
$$+\tau\sum_{k=1}^{m}\left(2\mu\int_{\widehat{\Omega}}\left|\nabla e_{\mathbf{u}}^{k}(\mathbb{F}_{h}^{k})^{-1}\right|^{2}\eta_{h}^{k}\,\mathrm{d}\widehat{x}\right)\quad\lesssim\tau^{2}+h^{2}.$$

注意，上述证明在时间区间（0，T）上成立，前提是 $\eta_h^k>\eta>0$。按照 [19, 定理 62], 证明中的方法，利用数学归纳法可得：如果 $\eta_h(0)>\eta$，则（3.4）只要光滑解存在并满足下界$\eta>\eta$，就一直成立。

– –

□

5 数值实验

在本节中，我们评估格式（2.12）的数值性能，并验证理论收敛阶。该格式使用 Firedrake 有限元软件包实现 [12]；代码公开发布于 [22]。

5.1 实验 1：外力驱动的大变形

^计算区域 Ω 是一个大小为 2×1 的矩形，在 x_1方向上施加周期边界条件。在底部边界上，我们施加无滑移条件 $\mathbf{u}=0$。在顶部边界上，x_1方向的速度设为零，而在 x_2 方向施加时变力。所有未知量在 $t=0$时均初始化为零。我们设定 $\mu=0.01$、$\varrho_f=\varrho_s=1$和 $\gamma_1=\gamma_2=0.1$。流动由外力 g 驱动，该外力在 x_1上呈周期性，并施加于顶部边界，直至 $t=0.2$，以产生较大的结构变形。在 $t=0.2$之后，外力关闭，系统开始松弛。该外力表示为

$$g(x_1,t)=\begin{cases}200\,t\sin(2\pi x_1), & t\le 0.2,\\ 0, & t>0.2.\end{cases}$$

数值模拟的快照见图1。

5.2 实验 2：收敛率

对 $t\in[0,1]$ 采用六种时间步 $\tau=5\times10^{-3}$, 2.5×10^{-3}, 1.25×10^{-3}, 6.25×10^{-4}, 3.125×10^{-4} 和 $\tau_{\min}=10^{-4}$ 进行数值模拟，并使用六种特征尺寸分别为 $h=2.83\times10^{-1}$, 1.41×10^{-1}, 7.07×10^{-2}, 3.54×10^{-2}, 1.77×10^{-2} 和 $h_{\min}=8.84\times10^{-3}$的网格。采用在最细网格上以最小时间步计算得到的解作为参考解。

对于每种网格加密和时间步，通过计算定理右侧出现的所有项，将数值解与参考解进行比较4.1，即

$$\|e_{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(L^2)},\quad\|e_{\xi}\|_{L^\infty(L^2)},\quad\|e_{\eta}\|_{L^\infty(L^2)},\quad\|\nabla e_{\eta}\|_{L^\infty(L^2)},\quad\|e_{\zeta}\|_{L^\infty(L^2)},\quad\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2(L^2)}.$$

网格尺寸 h（采用最细的时间步）下的收敛情况总结于表1；时间步 τ（采用最细的网格）下的收敛情况则见表2。相应的收敛图见图2。结果表明，所有误差量相对于时间步均呈线性收敛；对于$\|e_{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(L^2)}$、$\|e_{\xi}\|_{L^\infty(L^2)}$、$\|e_{\eta}\|_{L^\infty(L^2)}$ 和 $\|e_{\zeta}\|_{L^\infty(L^2)}$，空间收敛为二次收敛，而$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2(L^2)}$ 和 $\|\nabla e_{\eta}\|_{L^\infty(L^2)}$ 则呈线性空间收敛。

因此，对于这个特定示例，观察到的收敛率高于定理 4.1 的预测；该定理仅证明了空间和时间上的线性收敛。

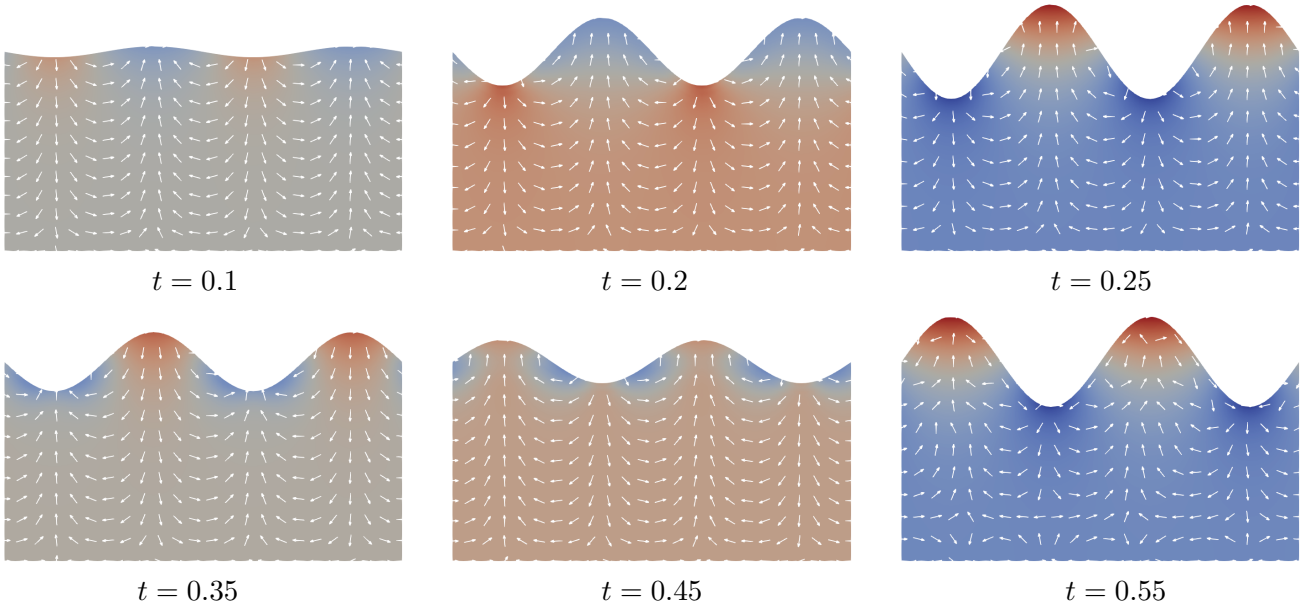

图 1：数值模拟在不同时间点的快照。颜色刻度表示压力，箭头表示速度场的方向。

表 1：网格加密时的误差收敛（使用固定时间步 $\tau = \tau_{\min}$）；参考解：$h_{\min} = 8.84 \times 10^{-3}$, $\tau_{\min} = 10^{-4}$。

h	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|e_\xi\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|e_\eta\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|\nabla e_\eta\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|e_\zeta\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2(L^2)}$
2.83×10^{-1}	1.17×10^{0}	2.75×10^{0}	2.17×10^{-1}	1.37×10^{0}	8.99×10^{0}	1.22×10^{1}
1.41×10^{-1}	3.16×10^{-1}	5.63×10^{-1}	5.83×10^{-2}	3.69×10^{-1}	2.35×10^{0}	7.48×10^{0}
7.07×10^{-2}	1.07×10^{-1}	1.35×10^{-1}	1.47×10^{-2}	1.34×10^{-1}	5.82×10^{-1}	4.11×10^{0}
3.54×10^{-2}	2.89×10^{-2}	3.20×10^{-2}	3.51×10^{-3}	6.57×10^{-2}	1.38×10^{-1}	2.12×10^{0}
1.77×10^{-2}	6.44×10^{-3}	6.43×10^{-3}	7.11×10^{-4}	2.94×10^{-2}	2.78×10^{-2}	1.03×10^{0}

表 2：随着时间步细化的误差收敛（使用固定网格尺寸 $h = h_{\min}$）；参考解：$h_{\min} = 8.84 \times 10^{-3}$, $\tau_{\min} = 10^{-4}$。

τ	$\|e_{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|e_\xi\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|e_\eta\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|\nabla e_\eta\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|e_\zeta\|_{L^\infty(L^2)}$	$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2(L^2)}$
5.00×10^{-3}	2.51×10^{-1}	5.49×10^{-1}	4.20×10^{-2}	2.64×10^{-1}	1.66×10^{0}	1.59×10^{0}
2.50×10^{-3}	1.34×10^{-1}	2.85×10^{-1}	2.19×10^{-2}	1.38×10^{-1}	8.66×10^{-1}	8.43×10^{-1}
1.25×10^{-3}	6.75×10^{-2}	1.40×10^{-1}	1.08×10^{-2}	6.80×10^{-2}	4.29×10^{-1}	4.22×10^{-1}
6.25×10^{-4}	3.15×10^{-2}	6.54×10^{-2}	5.02×10^{-3}	3.16×10^{-2}	1.99×10^{-1}	1.97×10^{-1}
3.12×10^{-4}	1.29×10^{-2}	2.68×10^{-2}	2.05×10^{-3}	1.29×10^{-2}	8.11×10^{-2}	8.06×10^{-2}

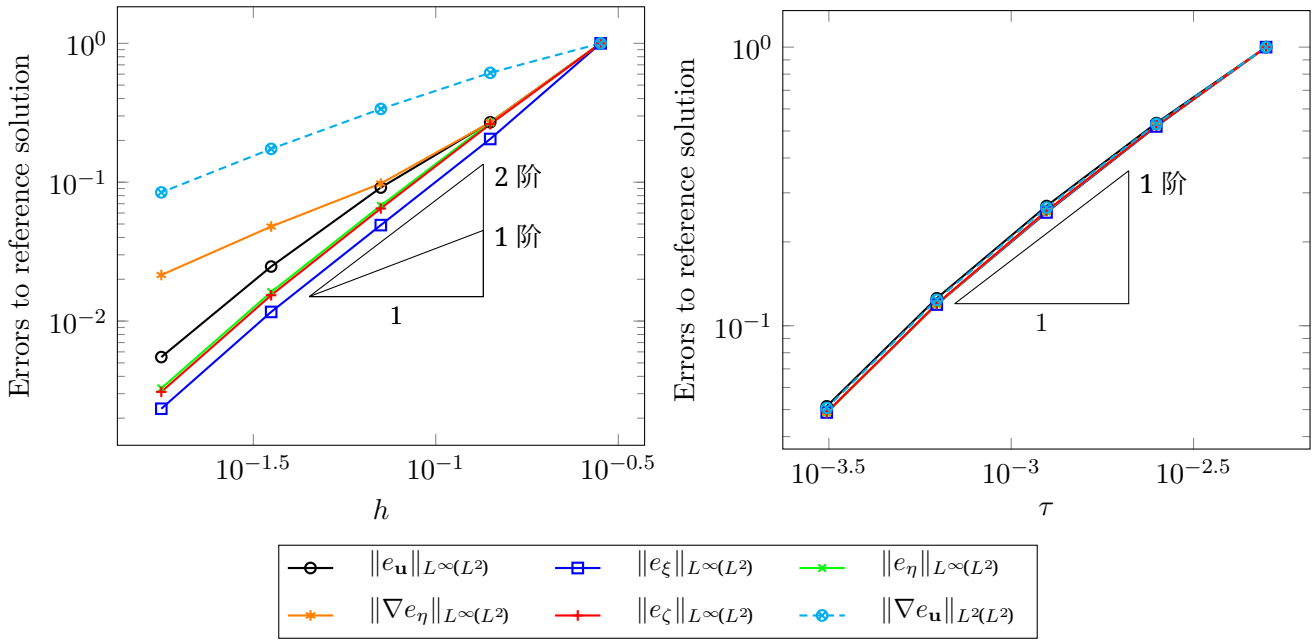

图2：$\|e_{\mathbf{u}}\|_{L^\infty(L^2)}$、$\|e_\xi\|_{L^\infty(L^2)}$、$\|e_\eta\|_{L^\infty(L^2)}$、$\|\nabla e_\eta\|_{L^\infty(L^2)}$、$\|e_\zeta\|_{L^\infty(L^2)}$ 以及$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2(L^2)}$ 的网格（左）和时间步（右）收敛性。为便于比较，将误差图平移到从同一点开始。

5.3 实验3：与来自 [19]的整体式格式进行比较

该数值格式（2.12）表现出时间线性收敛和速度二次收敛。这与整体式 Scheme-R 格式所观察到的收敛率一致 [19]。主要区别在于算法结构：Scheme-R 分为两个步骤。步骤 1 对流体和固体进行整体求解，$\widehat{\ }$得到（$\mathbf{u}$ ζ， p）$\in \Omega$；步骤 2 通过求解拉普拉斯方程，将位移 η 扩展至整个区域。

相比之下，当前格式（2.12）并不以整体方式求解流固相互作用。$\widehat{\ }$相反，它将问题分解为：步骤1求解Ω中的流体（$\mathbf{u}$ p），步骤2在Γ_S上求解固体（ζ， ξ），步骤3将位移扩展 η 到整个区域。

在最细网格上，Scheme-R 的步骤 1 涉及 410 880 个自由度，而分裂格式（2.12）在步骤 1 中使用 359360 个自由度，在步骤 2 中使用 640 个自由度，从而在形式上减小了待求解子问题的规模。

在同一个最细网格上，我们比较多个时间步$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2(L^2)}$ 下的误差$\|\nabla e_\eta\|_{L^\infty(L^2)}$ 和τ。与上一小节一样，误差是相对于参考解测量的；这里的参考解由最细网格上采用最小时间步的整体式 Scheme-R $h_{\min} = 8.84\times10^{-3}$ 获得 $\tau = 10^{-4}$。时间收敛性如图 3所示，其中两种格式表现出相同的收敛速率，分裂格式仅相差一个常数。为了确保比较公平，整体式格式已在 Firedrake 中重新实现。

尽管分裂公式减少了每个子问题中的未知数，但在这种二维-一维构型中，总CPU时间并不低于整体式格式。Ω 与 Σ之间额外的$\widehat{\ }$插值和投影步骤带来了额外的计算开销，抵消了求解规模较小系统的优势。然而，在高维情形下（例如，三维流体与二维结构耦合），预计分裂方法将带来更显著的计算优势。

6 结论

本文针对不可压黏性流体与薄可变形结构之间的相互作用，提出并分析了一种线性分区有限元格式。该方法允许流体

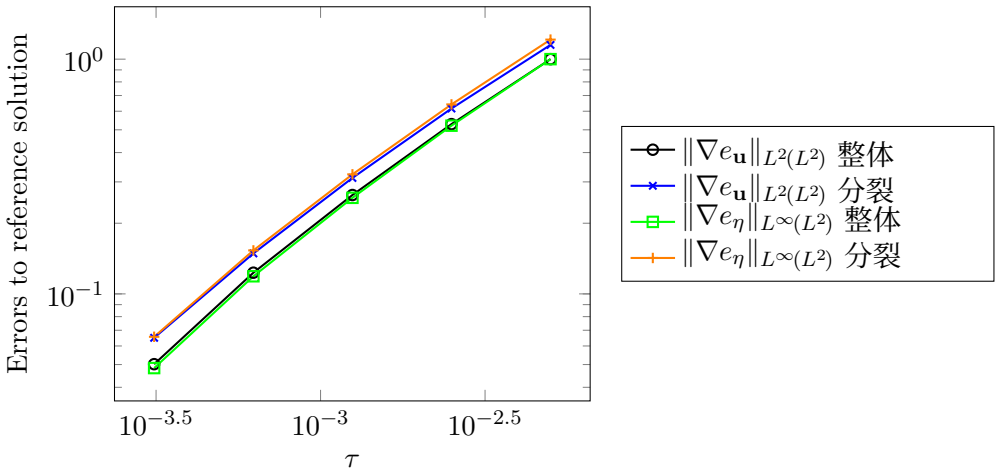

图3：$\|\nabla e_{\mathbf{u}}\|_{L^2(L^2)}$ 和$\|\nabla e_{\eta}\|_{L^\infty(L^2)}$的整体格式与分裂格式时间步收敛性比较。

和结构子问题独立求解，同时在界面处保持速度的隐式耦合，从而确保离散层面的稳定性。我们的分析证明了无条件能量稳定性，并确立了空间和时间上的最优收敛速率，且无需假设结构变形无限小，也不必忽略流体的非线性对流。除理论结果外，数值实验还验证了预测的收敛阶，并展示了所提出分区方法的稳健性和实用性。

资助

B. She 的工作得到中国国家自然科学基金（项目编号：12201437）的资助。K. T˚uma 得到捷克共和国科学基金会资助的项目（编号：23-05207S）以及捷克共和国查理大学研究中心项目（编号：UNCE/24/SCI/005）的支持。T. Tian 的工作得到中国国家自然科学基金（项目编号：12401508）的资助。

参考文献

[1] S. Badia、F. Nobile、C. Vergara。基于 Robin 传递条件的流固分区求解流程。*J. Comput. Phys.***227**：7027–7051，2008年。[2] Y. Bazilevs、K. Takizawa 和 T. E. Tezduyar。《计算流固相互作用：方法与应用》。*John Wiley & Sons Ltd*，2013年，xvii+384页。[3] T. Bodnar、G. P. Galdi 和 ˇS. Neˇcasov´a（编）。流固相互作用与生物医学应用。Birkh¨auser/Springer，巴塞尔，2014年。[4] D. Boffi、F. Brezzi 和 M. Fortin。《混合有限元方法及其应用》。Springer，2013年。[5] M. Buka ˇc、S. ˇCani´c 和 B. Muha。流体与复合结构相互作用问题的分区格式。*J. Comput. Phys.*，**281**：493–517，2015年。[6] M. Buka ˇc 和 B. Muha。流固相互作用中运动学耦合格式及其扩展的稳定性与收敛性分析。*SIAM J. Numer. Anal.***54**(5)：3032–3061，2016年。[7] E. Burman、R. Durst 和 J. Guzm´an。采用 Robin-Robin 耦合的分裂方法求解流固相互作用问题的稳定性与误差分析。*Numer. Methods Partial Differ. Equ.***38**(5)：1396–1406，2022年。

[8] E. Burman、R. Durst 和 J. Guzm´an。不可压缩流固相互作用的全离散松耦合 Robin-Robin 格式：稳定性与误差分析。Numer. Math. 151(4)：807–840，2022年。[9] M. A. Fern´andez。不可压缩流固相互作用的增量位移校正格式：稳定性与收敛性分析。Numer. Math. 123(1)：21–65，2013年。[10] M. A. Fern´andez 和 J. Mullaert。不可压缩流固相互作用中一类分裂格式的收敛性与误差分析。IMA J. Numer. Anal. 36(4)：1748–1782，2016年。[11] M. Gee、U. K¨uttler 和 W. Wall。用于流固相互作用的真正整体式代数多重网格。Internat. J. Numer. Methods Engrg. 85：987–1016，2011年。[12] D.A. Ham、P.H.J. Kelly、L. Mitchell、C.J. Cotter 等。Firedrake 用户手册，2023年。[13] F. Hecht 和 O. Pironneau。一种能量稳定的整体式欧拉流固有限元方法。Int. J. Numer. Meth. Fluids. 85：430–446，2017年。[14] A. Hundertmark-Zauˇskov´a 和 M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a。顺应性血管中剪切依赖型非牛顿流体的数值研究。Comput. Math. App. 60(3)：572–590，2010年。[15] B. Li、W. Sun、Y. Xie 和 W. Yu。薄结构相互作用松耦合有限元格式的最优 L^2 误差分析。SIAM J. Numer. Anal.62(4)：1782–1813，2024年。[16] A. Lozovskiy、M. A. Olshanskii、V. Salamatova 和 Y. V. Vassilevski。一种无条件稳定的半隐式流固相互作用有限元方法。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 297：437–454，2015年。[17] A. Lozovskiy、M. A. Olshanskii 和 Y. V. Vassilevski。整体式流固相互作用有限元方法的分析与评估。Comput. & Fluids. 179：277–288，2019年。[18] M. Luk´aˇcov´a-Medvid'ov´a、G. Rusnakov´a 和 A. Hundertmark-Zauˇskov´a。血流动力学中流固相互作用的运动学分裂算法。Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 265：83–106，2013年。[19] S. Schwarzacher、B. She 和 K. T˚uma。用于近似非线性流固相互作用的线性数值格式的稳定性与误差估计。Numer. Math. 157(3)：1023–1077，2025年。[20] A. Seboldt 和 M. Bukaˇc。一种用于流体与厚结构相互作用的非迭代区域分解方法。Numer. Methods Partial Differ. Equ. 37(4)：2803–2832，2021年。[21]T. E. Tezduyar。《计算流固相互作用与流动模拟前沿》。Birkh ¨auser/Springer，xvi +480页，2018年。[22]K. T˚uma。《稳定性与误差估计：用于近似非线性流固相互作用的线性分区有限元方法》配套代码。Zenodo，2025年。doi:10.5281/zenodo.17358159。

A 附录：有用的等式和估计

A.1 误差方程的证明(4.3)

在本部分中，我们将说明如何得到误差满足的方程 (4.3)。首先，对于任意 $k = 1, \dots, N_T$，我们从数值格式 (2.5b) 中减去弱形式 (2.15)，得到

$$\sum_{i=1}^{7} T_i^k = 0, \tag{A.1}$$

其中 T_i^k的含义如下（请注意 R_i^k， $i = 1$，.....，7 已在（4.4）中给出）

$$\begin{aligned}
T_1^k =& \varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} (\eta_h^k D_t \widehat{\mathbf{u}}_h^k - \eta^k \partial_t \widehat{\mathbf{u}}^k) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \, \mathrm{d}\widehat{x} \\
=& \varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \left(\eta_h^k D_t (\widehat{\mathbf{u}}_h^k - \widehat{\mathbf{u}}^k) + \eta_h^k (D_t \widehat{\mathbf{u}}^k - \partial_t \widehat{\mathbf{u}}^k) + (\eta_h^k - \eta^k) \partial_t \widehat{\mathbf{u}}^k \right) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \, \mathrm{d}\widehat{x} \\
=& \varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \eta_h^k D_t e_{\mathbf{u}}^k \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \, \mathrm{d}\widehat{x} + R_1^k,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_2^k =& \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} (D_t \eta_h^k \widehat{\mathbf{u}}_h^{k*} - \partial_t \eta^k \widehat{\mathbf{u}}^k) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
=& \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \Big(D_t \eta_h^k (\widehat{\mathbf{u}}_h^{k*} - \widehat{\mathbf{u}}^{k*}) + (D_t \eta_h^k - \partial_t \eta^k) \widehat{\mathbf{u}}^{k*} + \partial_t \eta^k (\widehat{\mathbf{u}}^{k*} - \widehat{\mathbf{u}}^k) \Big) \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
=& \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} D_t \eta_h^k e_{\mathbf{u}}^{k*} \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \,\mathrm{d}\widehat{x} + R_2^k, \\
T_3^k =& \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \big(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\nabla \widehat{\mathbf{u}}_h^k) - \widehat{\mathbf{u}}_h^k \cdot (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}) \big) \cdot (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1} \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
& - \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \big(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\nabla \widehat{\mathbf{u}}^k) - \widehat{\mathbf{u}}^k \cdot (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}) \big) \cdot (\mathbb{F}^k)^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{v}}^k \eta^k \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
=& \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \Big(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\nabla e_{\mathbf{u}}^k) - e_{\mathbf{u}}^k \cdot (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}) \Big) \cdot (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1} \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
& + \frac{1}{2}\varrho_f \int_{\widehat{\Omega}} \Big(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\nabla \widehat{\mathbf{u}}^k) - \widehat{\mathbf{u}}^k \cdot (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}) \Big) \cdot \Big((\mathbb{F}_h^k)^{-1} \widehat{\mathbf{v}}_h^{k-1} \eta_h^k - (\mathbb{F}^k)^{-1} \widehat{\mathbf{v}}^k \eta^k \Big) \,\mathrm{d}\widehat{x} = R_3^k, \\
T_4^k =& \int_{\widehat{\Omega}} \Big(\widehat{p}_h^k \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} : \mathbb{M}_h^k - \widehat{p}^k \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} : \mathbb{M}^k \Big) \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
=& \int_{\widehat{\Omega}} e_p^k \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} : \mathbb{M}_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} + \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{p}^k \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} : \big(\mathbb{M}_h^k - \mathbb{M}^k \big) \,\mathrm{d}\widehat{x} = R_4^k, \\
T_5^k =& 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} \Big(\big(\nabla \widehat{\mathbf{u}}_h^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \big)^{\mathrm{S}} : \big(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \big) \eta_h^k - \big(\nabla \widehat{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}^k)^{-1} \big)^{\mathrm{S}} : \big(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}^k)^{-1} \big) \eta^k \Big) \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
=& 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} \big(\nabla e_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \big)^{\mathrm{S}} : \big(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \big) \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
& + 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} \Big(\big(\nabla \widehat{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \big)^{\mathrm{S}} : (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}_h^k)^{-1}) \eta_h^k - \big(\nabla \widehat{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}^k)^{-1} \big)^{\mathrm{S}} : (\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}^k)^{-1}) \eta^k \Big) \,\mathrm{d}\widehat{x} \\
=& 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} \big(\nabla e_{\mathbf{u}}^k (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \big)^{\mathrm{S}} : \big(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}} (\mathbb{F}_h^k)^{-1} \big) \eta_h^k \,\mathrm{d}\widehat{x} + R_5^k, \\
T_6^k =& \varrho_s \int_{\Sigma} (D_t \xi_h^k - \partial_t \xi^k) \psi \,\mathrm{d}x_1 = \varrho_s \int_{\Sigma} D_t e_\xi^k \psi \,\mathrm{d}x_1 + R_6^k, \\
T_7^k =& a_s(\eta_h^{k+1}, \zeta_h^k, \psi) - a_s(\eta^k, \zeta^k, \psi) \\
=& a_s(e_\eta^{k+1}, e_\zeta^{k+1}, \psi) + \gamma_1 \int_{\Sigma} \partial_{x_1} (\eta^{k+1} - \eta^k) \partial_{x_1} \psi \,\mathrm{d}x_1 + \gamma_2 \int_{\Sigma} \partial_{x_1} (\zeta^{k+1} - \zeta^k) \partial_{x_1} \psi \,\mathrm{d}x_1 \\
=& a_s(e_\eta^{k+1}, e_\zeta^{k+1}, \psi) + R_7^k.
\end{aligned}
$$

因此，将上述 T_i项的展开式代入（A.1），并将 R_i项移至等式右端，我们得到（4.3）。

A.2 初步估计

本节给出一些初步估计和等式。首先，我们给出与时间离散算子相关的估计 D_t，该算子见格式（2.12）。证明的技术细节见 [19, 附录 B。2]。

引理 A.1. 设 $\phi \in L^2((0,T) \times D)$ 对于 $D \in \{\Sigma, \widehat{\Omega}\}$。则有

$$
\tau \sum_{k=1}^{N} \left\| D_t \phi^k - \partial_t \phi^k \right\|_{L^2(D)}^2 \lesssim \tau^2 \left\| \partial_t^2 \phi \right\|_{L^2((0,T)\times D)}^2, \tag{A.2a}
$$

$$
\tau \sum_{k=1}^{N} \left\| D_t \phi^{k+1} - \partial_t \phi^k \right\|_{L^2(D)}^2 \lesssim \tau^2 \left\| \partial_t^2 \phi \right\|_{L^2((0,T)\times D)}^2. \tag{A.2b}
$$

引理 A.2. 设 $\eta \in W^{2,2}(\Sigma)$, $\xi = \partial_t \eta$, $\zeta = -\partial_{x_1}^2 \eta$, $\eta_h \in V_h^s$, $\xi_h^k = D_t \eta_h^{k+1}$, $k = 1, \ldots, N_T$, $\zeta_h = -\partial_{x_1,h}^2 \eta_h$, 以及 $\psi \in V_h^s$。设 a_s 由以下公式给出 (2.8) 误差的记号由以下公式给出 (4.2)。则

$$\delta_\xi^k = D_t \delta_\eta^{k+1} + \mathcal{R}_h^s(D_t \eta^{k+1} - \partial_t \eta^k), \tag{A.3a}$$

$$\delta_\zeta = -\partial_{x_1,h}^2 \delta_\eta, \quad \int_\Sigma \psi \delta_\zeta \, \mathrm{d}x_1 = -\int_\Sigma \partial_{x_1,h}^2 \psi \, \delta_\eta \, \mathrm{d}x_1. \tag{A.3b}$$

$$\int_\Sigma \partial_{x_1} I_\eta \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1 = 0, \quad \int_\Sigma \partial_{x_1} I_\xi \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1 = 0, \tag{A.3c}$$

$$\int_\Sigma I_\zeta \psi \, \mathrm{d}x_1 = 0, \quad \int_\Sigma \partial_{x_1} I_\zeta \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1 = 0, \tag{A.3d}$$

$$\int_\Sigma \partial_{x_1} \delta_\zeta \partial_{x_1} \psi \, \mathrm{d}x_1 = \int_\Sigma \partial_{x_1,h}^2 \delta_\eta \partial_{x_1,h}^2 \psi \, \mathrm{d}x_1, \tag{A.3e}$$

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1} \partial_{x_1} \delta_\xi^k \, \mathrm{d}x_1 = &\int_\Sigma \left(D_t \frac{|\partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1}|^2}{2} + \frac{\tau}{2} |D_t \partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1}|^2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &+ \int_\Sigma \partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1} \partial_{x_1} (D_t \eta^{k+1} - \partial_t \eta^k) \, \mathrm{d}x_1, \end{aligned} \tag{A.3f}$$

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \partial_{x_1} \delta_\zeta^{k+1} \partial_{x_1} \delta_\xi^k \, \mathrm{d}x_1 = &\int_\Sigma \left(D_t \frac{|\delta_\zeta^{k+1}|^2}{2} + \frac{\tau}{2} |D_t \delta_\zeta^{k+1}|^2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &- \int_\Sigma \delta_\zeta^{k+1} \partial_{x_1}^2 (D_t \eta^{k+1} - \partial_t \eta^k) \, \mathrm{d}x_1, \end{aligned} \tag{A.3g}$$

$$\begin{aligned} a_s(e_\eta^{k+1}, e_\zeta^{k+1}, \delta_\xi^k) = &D_t \int_\Sigma \left(\frac{\gamma_1}{2} |\partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1}|^2 + \frac{\gamma_2}{2} |\delta_\zeta^{k+1}|^2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &+ \frac{\tau}{2} \int_\Sigma \left(\gamma_1 |D_t \partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1}|^2 + \gamma_2 |D_t \delta_\zeta^{k+1}|^2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &+ \int_\Sigma \left(\gamma_1 \partial_{x_1} \delta_\eta^{k+1} \partial_{x_1} (D_t \eta^{k+1} - \partial_t \eta^k) - \gamma_2 \delta_\zeta^{k+1} \partial_{x_1}^2 (D_t \eta^{k+1} - \partial_t \eta^k) \right) \mathrm{d}x_1. \end{aligned} \tag{A.3h}$$

A.3 次级估计

引理 A.3. 设 G_{sL} 由 (4.7)给出，则 G_{sL} 满足以下估计:

$$\begin{aligned} G_{sL} \gtrsim -\tau^2 + \frac{\tau^2 \gamma_1^2}{2\varrho_s} \left\| \delta_\zeta^{m+1} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\tau^2 \gamma_2^2}{2\varrho_s} \left\| \partial_{x_1,h}^2 \delta_\zeta^{m+1} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 - \tau \sum_{k=1}^m \delta_E^k \\ - \sum_{k=1}^m \frac{\tau^3 \gamma_1^2}{2\varrho_s} \left\| \delta_\zeta^{k+1} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 - \sum_{k=1}^m \frac{\tau^3 \gamma_2^2}{2\varrho_s} \left\| \partial_{x_1,h}^2 \delta_\zeta^{k+1} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2. \end{aligned} \tag{A.4}$$

证明. 回顾 $\Delta_\xi^k = D_t(\gamma_1 \zeta_h^{k+1} - \gamma_2 \partial_{x_1,h}^2 \zeta_h^{k+1})$（见（2.13）），可得

$$\tau \Delta_\xi^k = \gamma_1 (\delta_\zeta^{k+1} - \delta_\zeta^k) + \gamma_1 \mathcal{R}_h^s (\zeta^{k+1} - \zeta^k) - \gamma_2 \partial_{x_1,h}^2 (\delta_\zeta^{k+1} - \delta_\zeta^k) - \gamma_2 \partial_{x_1,h}^2 \mathcal{R}_h^s (\zeta^{k+1} - \zeta^k).$$

然后，我们将 G_{sL} 重新表述为

$$G_{sL} = \tau \sum_{k=1}^m (Q_{1k} + Q_{2k} + Q_{3k})$$

with

$$Q_{1k} = \tau \int_\Sigma D_t \delta_\xi^k (\gamma_1 (\delta_\zeta^{k+1} - \delta_\zeta^k) - \gamma_2 \partial_{x_1,h}^2 (\delta_\zeta^{k+1} - \delta_\zeta^k)) \, \mathrm{d}x_1$$

$$+\frac{\tau}{\varrho_s}\int_\Sigma(\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}-\gamma_1\delta_\zeta^{k+1})(\gamma_2\partial_{x_1,h}^2(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k)-\gamma_1(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k))\,\mathrm{d}x_1,$$

$$Q_{2k}=-\int_\Sigma(\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1})(\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k)-\gamma_1\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k))\,\mathrm{d}x_1,$$

$$Q_{3k}=\frac{\tau}{\varrho_s}\int_\Sigma(\gamma_1\partial_{x_1}\delta_\eta^{k+1}+\gamma_2\partial_{x_1}\delta_\zeta^{k+1})(\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k)-\gamma_1\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k))\,\mathrm{d}x_1,$$

利用（A.3a），我们得到

$$\begin{aligned}
Q_{1k}=&\frac{\tau\gamma_1^2}{2\varrho_s}\left(\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\left\|\delta_\zeta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&+\frac{\tau\gamma_1\gamma_2}{\varrho_s}\left(\left\|\partial_{x_1}\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\left\|\partial_{x_1}\delta_\zeta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1}(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&+\frac{\tau\gamma_2^2}{2\varrho_s}\left(\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1,h}^2(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&+\frac{\gamma_1\tau}{2}\left(\left\|\partial_{x_1}\delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\left\|\partial_{x_1}\delta_\xi^{k-1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1}(\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&\underbrace{+\tau\gamma_1\int_\Sigma\partial_{x_1}(\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1})\partial_{x_1}\mathcal{R}_h^s(\xi^k-D_t\eta^{k+1})\,\mathrm{d}x_1}_{T_3}\\
&+\frac{\gamma_2\tau}{2}\left(\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\xi^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1,h}^2(\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&\underbrace{+\tau\gamma_2\int_\Sigma\partial_{x_1,h}^2(\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1})\partial_{x_1,h}^2\mathcal{R}_h^s(\xi^k-D_t\eta^{k+1})\,\mathrm{d}x_1}_{T_4}.
\end{aligned}$$

根据杨氏不等式、（2.9）和（A.2b），可得

$$T_3\gtrsim-\frac{\tau\gamma_1}{4}\left\|\partial_{x_1}(\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\tau^2\gamma_1\left\|\partial_t\partial_{x_1}\xi\right\|_{L^2((t_k,t_{k+1})\times\Sigma)}^2.$$

同理，

$$T_4\gtrsim-\frac{\tau\gamma_2}{4}\left\|\partial_{x_1,h}^2(\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\tau^2\gamma_2\left\|\partial_t\partial_{x_1}^2\xi\right\|_{L^2((t_k,t_{k+1})\times\Sigma)}^2.$$

利用杨氏不等式和 H¨older 不等式、（A.2b）和（A.5），

$$\left\|\partial_{x_1,h}^2\eta\right\|_{L^2(\Sigma)}\le\left\|\partial_{x_1}^2\eta\right\|_{L^2(\Sigma)}. \tag{A.5}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}
|Q_{2k}|&\le\left\|\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1}\right\|_{L^2(\Sigma)}\left\|\gamma_1\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}+\left\|\delta_\xi^k-\delta_\xi^{k-1}\right\|_{L^2(\Sigma)}\left\|\gamma_2\partial_{x_1,h}^2\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k))\right\|_{L^2(\Sigma)}\\
&\le\frac{\varrho_s}{4}\left(\left\|\delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\delta_\xi^{k-1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)+\frac{2\gamma_1^2}{\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^2(\eta^{k+1}-\eta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\frac{2\gamma_2^2}{\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^2(\zeta^{k+1}-\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\\
&\lesssim\frac{\varrho_s}{4}\left(\left\|\delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\delta_\xi^{k-1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)+\frac{2\gamma_1^2\tau}{\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^2\xi\right\|_{L^2((t_k,t_{k+1})\times\Sigma)}^2+\frac{2\gamma_2^2\tau}{\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^4\xi\right\|_{L^2((t_k,t_{k+1})\times\Sigma)}^2.
\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}
|Q_{3k}|&\le\frac{\tau^2}{2\varrho_s}\left(\gamma_1^2\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\gamma_2^2\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&\quad+\frac{1}{2\varrho_s}\left(\gamma_1^2\left\|\partial_{x_1}\mathcal{R}_h^s(\eta^{k+1}-\eta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\gamma_2^2\left\|\partial_{x_1}\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&\lesssim\frac{\tau^2}{2\varrho_s}\left(\gamma_1^2\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\gamma_2^2\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)\\
&\quad+\frac{\gamma_1^2\tau}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^2\xi\right\|_{L^2((t_k,t_{k+1})\times\Sigma)}^2+\frac{\gamma_2^2\tau}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^4\xi\right\|_{L^2((t_k,t_{k+1})\times\Sigma)}^2.
\end{aligned}$$

因此，综合上述估计可得

$$
\begin{aligned}
G_{sL} \gtrsim\ & \frac{\tau^2\gamma_1^2}{2\varrho_s}\left\|\delta_\zeta^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^2\gamma_1^2}{2\varrho_s}\left\|\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^{k}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\frac{\tau^2\gamma_1\gamma_2}{\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}\delta_\zeta^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\\
&+\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^2\gamma_1\gamma_2}{\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^{k})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\frac{\tau^2\gamma_2^2}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^2\gamma_2^2}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1,h}^2(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^{k})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\\
&+\frac{\tau^2\gamma_1}{2}\left\|\partial_{x_1}\delta_\xi^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^2\gamma_1}{4}\left\|\partial_{x_1}(\delta_\xi^{k}-\delta_\xi^{k-1})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\frac{\tau^2\gamma_2}{2}\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\xi^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\\
&+\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^2\gamma_2}{4}\left\|\partial_{x_1,h}^2(\delta_\xi^{k}-\delta_\xi^{k-1})\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau\varrho_s}{2}\left\|\delta_\xi^{k}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^3\gamma_1^2}{2\varrho_s}\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\\
&-\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^3\gamma_2^2}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\frac{5\gamma_1^2\tau^2}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^2\xi\right\|_{L^2((0,T)\times\Sigma)}^2-\frac{5\gamma_2^2\tau^2}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1}^4\xi\right\|_{L^2((0,T)\times\Sigma)}^2\\
&-\tau^3\Big(\gamma_1\left\|\partial_t\partial_{x_1}\xi\right\|_{L^2((0,T)\times\Sigma)}^2+\gamma_2\left\|\partial_t\partial_{x_1}^2\xi\right\|_{L^2((0,T)\times\Sigma)}^2\Big)\\
\gtrsim\ & -\tau^2+\frac{\tau^2\gamma_1^2}{2\varrho_s}\left\|\delta_\zeta^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\frac{\tau^2\gamma_2^2}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{m+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\tau\sum_{k=1}^{m}\delta_E^k\\
&-\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^3\gamma_1^2}{2\varrho_s}\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2-\sum_{k=1}^{m}\frac{\tau^3\gamma_2^2}{2\varrho_s}\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2,
\end{aligned}
$$

这就证明了（A.4）。 □

A.4 估计的证明（4.9）

证明。 性质（A.3c）蕴含

$$\int_\Sigma \varrho_s D_t I_\xi^k \Delta_\xi^k \,\mathrm{d}x_1=0.$$

因此， G_f、 G_s以及 R_i（$i=1$、$\cdots$、5）的估计与 [19,附录 B4]中得到的估计一致。现在我们继续分析其余各项。

R_6^k项 由杨氏不等式和（A.2a）可得

$$
\begin{aligned}
|\tau\sum_{k=1}^{m}R_6^k| &= \left|\tau\sum_{k=1}^{m}\varrho_s\int_\Sigma(D_t\xi^k-\partial_t\xi^k)(\delta_\xi^k+\frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\,\mathrm{d}x_1\right|\\
&\lesssim \frac{\tau^2}{4\varrho_s}\left\|\partial_t^2\xi\right\|_{L^2((0,T)\times\Sigma)}^2+\tau\sum_{k=1}^{m}\int_\Sigma\varrho_s|\delta_\xi|^2\,\mathrm{d}x_1+\tau^3\sum_{k=1}^{m}\int_\Sigma|\tau\Delta_\xi^k|^2\,\mathrm{d}x_1.
\end{aligned}
$$

R_7^k项。

$$
\begin{aligned}
&\left|\tau\sum_{k=1}^{m}R_7^k\right| = \left|\tau\sum_{k=1}^{m}\gamma_1\int_\Sigma\partial_{x_1}(\eta^{k+1}-\eta^k)\partial_{x_1}(\delta_\xi^k+\frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\,\mathrm{d}x_1+\tau\sum_{k=1}^{m}\gamma_2\int_\Sigma\partial_{x_1}(\zeta^{k+1}-\zeta^k)\partial_{x_1}(\delta_\xi^k+\frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k)\,\mathrm{d}x_1\right|\\
&\lesssim \tau\sum_{k=1}^{m}\tau\Big(\left\|\partial_{x_1}^2D_t\eta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}+\left\|\partial_{x_1}^2D_t\zeta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}\Big)\left\|\delta_\xi^k+\frac{\tau^2}{\varrho_s}\Delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}\\
&\lesssim \tau\sum_{k=1}^{m}\left\|\delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\tau^3\sum_{k=1}^{m}\left\|\tau\Delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\tau^2(\left\|\partial_{x_1}^4\xi\right\|_{L^2((0,T)\times\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1}^2\xi\right\|_{L^2((0,T)\times\Sigma)}^2).
\end{aligned}
$$

注意，

$$\int_\Sigma |\tau\Delta_\xi^k|^2\,\mathrm{d}x_1 \lesssim \left\|\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1,h}^2(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2$$
$$+\left\|\partial_{x_1,h}^2\mathcal{R}_h^s(\zeta^{k+1}-\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\lesssim\left\|\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1,h}^2(\delta_\zeta^{k+1}-\delta_\zeta^k)\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\tau^2.$$

我们有

$$\tau^3\sum_{k=1}^m\left\|\tau\Delta_\xi^k\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\lesssim\tau^3\sum_{k=1}^m\left(\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right)+\tau^4.$$

因此，综合以上所有估计可得

$$\left|\tau\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^7R_i^k+G_f+G_s\right|\lesssim\tau^2+h^2+c\tau\sum_{k=1}^m\delta_E^k+2\alpha\mu\tau\sum_{k=1}^m\int_{\widehat{\Omega}}\left|\nabla\delta_{\mathbf{u}}^k(\mathbb{F}_h^k)^{-1}\right|^2\eta_h^k\,\mathrm{d}\widehat{x}$$
$$+\tau^3\sum_{k=1}^m\left(\left\|\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2+\left\|\partial_{x_1,h}^2\delta_\zeta^{k+1}\right\|_{L^2(\Sigma)}^2\right).$$

这就证明了（4.9）。

□