机器学习增强的粉末经管道输送时静电荷分布测量

C. Wilms[a, b, *], W. Xu[a], G. Ozler[a, b], S. Jantač[a], S.Schmelter[c] 和H.Grosshans[a, b]

[a]德国联邦物理技术研究院（*PTB*），布伦瑞克 *Bundesallee 100，38116*，德国[b]马格德堡奥托·冯·格里克大学，仪器与环境技术研究所，*Universitätsplatz 2，39106* 马格德堡，德国[c]德国联邦物理技术研究院（*PTB*），柏林 *Abbestraße 2–12，10587*，德国

arXiv:2601.02852v1 [physics.flu-dyn] 6 Jan 2026

文章信息

关键词：工业爆炸 粉末加工 静电学 测量 模拟 浅层神经网络（SNN）机器学习（ML）

摘要

粉末在管道中输送时积累的静电荷可能引发灾难性的粉尘爆炸。我们近期开发的激光光学测量技术能够测定粉末沿一维（1D）路径的电荷。然而，由于光学通道有限，通常无法获取管道完整二维（2D）横截面上的电荷分布，而这正是过程安全的关键参数。为估算输送管道中粉末的完整电荷分布，我们提出了一种采用浅层神经网络（SNN）的机器学习（ML）方法。该机器学习算法使用从四种不同的湍流管道流三维直接数值模拟中提取的横截面数据进行训练，这些模拟采用了不同的粒径。通过使用仿真数据进行训练，该机器学习算法能够仅依据一维测量结果，估算管道横截面上的粉末电荷分布。结果显示，重建后的二维横截面的平均 L^1误差为1.63%。

1. 引言

气力输送广泛应用于工业领域，利用空气等流体作为输送介质来输送物料，通常是粉末和颗粒物料。与机械输送机相比，这类输送系统在自动化、维护和安装成本以及布局灵活性方面更具优势（Lim 等，2006年）。然而，静电荷积累可能带来严重的运行风险，因为放电可能引燃粉尘并引发爆炸（Ding 等，2024年）。因此，必须对气力输送系统进行良好控制，以应对这一风险。为此，至少有两个方面至关重要：（a）了解安全运行边界与材料性质、环境条件等因素之间的关系；（b）进行精确监测，以评估系统是否处于安全运行条件下。

目前，粒子的电荷 Q 可以通过法拉第桶进行非侵入式测量，也可以将输送管道接地，通过测量区段内粒子经过时发生的电荷转移产生电流来测量（Matsusaka 和 Masuda，2006年；Ndama 等人，2011）。尽管这些原理简单且成本低廉，但它们只能测量粒子的平均电荷，而平均电荷可能与实际电荷有很大差异。例如，双极性颗粒的电荷会相互抵消，使法拉第筒读数接近于零。然而，从安全角度来看，这会造成误判，因为局部和瞬时的电荷极值可能导致放电。要解决这一问题，需要对颗粒电荷分布进行空间分辨测量。Xu 等人(2024年）提出了一种新技术，可测量沿壁面法向的一维（1D）路径上的时间平均颗粒电荷分布。为此，研究人员在具有一定厚度的二维（2D）切片内照亮并追踪多个粒子。第二步，在管道两侧相对的位置布置两个透明电极，施加均匀电场。带电粒子会对施加的电场作出响应，且带电越强，响应越明显。通过将无电场时粒子速度和粒子加速度的时间平均测量值相减，流体对粒子的平均作用力便会抵消，从而能够确定粒子的电荷。

*通讯作者：christoph.wilms@ptb.de (C. Wilms)https://www.ptb.de/cms/asep(C. Wilms)ORCID: 0009-0007-9643-9390 (C. Wilms)；0000-0003-3105-4848 (W. Xu)；0000-0002-4196-7600 (G. Ozler)；0000-0001-5682-2255 (S. Jantač)；0000-0001-8426-9602 (S. Schmelter)；0000-0001-6441-7225 (H. Grosshans)

基于激光的电荷测量方法的缺点在于，需要付出大量工作才能量化整个横截面上的电荷。该系统无法一次性测量整个横截面，而必须移动激光平面，通过多次测量扫描该截面。这种工作量在工业应用中似乎难以实现，尤其是因为它需要为流动区域提供大范围的光学通道。

为了改进Xu等人（2024年）提出的方法，本文提出了一种数据驱动方法，可根据单次线测量预测完整的流向法向电荷分布。对含颗粒湍流管道流进行的计算流体动力学（CFD）模拟提供了必要的训练数据。下文将介绍所开发的机器学习（ML）算法，并评估其潜力。这一流程使基于激光的粒子电荷测量能够应用于工业领域，并有助于降低气力输送系统运行中的危险。

2. 方法

本节将在2.1中介绍管道流模拟的设置，在2.2中介绍用于预测颗粒电荷分布的机器学习算法，并在2.3中介绍从CFD模拟中提取的训练数据和验证数据。

2.1. CFD 模拟

训练数据和验证数据提取自四项针对体积雷诺数为.....的湍流管道流开展的直接数值模拟

$$Re = \frac{h^* u_\mathrm{b}^* \rho_\mathrm{f}^*}{\mu^*} = 2700 \tag{1}$$

半管道高度为 h^*，体积速度为 u^* b，流体密度为 ρ^* f，动力黏度为 μ^*。 * 表示有量纲量。摩擦雷诺数为

$$Re_\tau = \frac{h^* u_\tau^* \rho_\mathrm{f}^*}{\mu^*} \approx 180 \tag{2}$$

摩擦速度为 u_τ^*。粒子的材料密度为 $\rho_\mathrm{p} = \rho_\mathrm{p}^*/\rho^*$ f$= 1150/1.2$，恢复系数为 $e = 1.0$，数密度为 $N_\mathrm{p} = 800h^{-3}$，其中 $h = h^*/h^*$。在四次模拟中，粒子尺寸分别取值为 $D_\mathrm{p} = D_\mathrm{p}^*/h^* = 2.5{\times}10^{-3}$、 $5{\times}10^{-3}$、$7.5{\times}10^{-3}$ 和 $1{\times}10^{-2}$。

模拟采用有限差分开源求解器*pafiX* (Grosshans 和 Papalexandris,2017年; Grosshans 等人, 2020年). 气相运动由纳维–斯托克斯方程描述，静电场由高斯定律描述，两者均在交错网格上的欧拉框架下处理。粒子因静电场而产生的运动，则在拉格朗日框架下根据牛顿运动定律计算。两相之间采用四向耦合，即流体作用于粒子、粒子作用于流体，以及粒子之间和粒子与壁面之间的相互作用，详见Grosshans 和 Papalexandris (2017年)。流体对粒子的作用包括升力（Saffman,1965年;Mei, 1992）和阻力（Schiller 和 Naumann,1933年）。有关求解器的更多细节，请参见Grosshans 和 Papalexandris(2017年) 和Grosshans 等人(2020年)。

欧拉网格的分辨率为 $256\times144\times144$ 个网格点，分别沿 x^*、 y^*和 z^* 方向分布，对应于管道中心处的 $\Delta x^+ = 8.44$、$\Delta y_\mathrm{c}^+ = \Delta z_\mathrm{c}^+ = 3.93$ 以及壁面处的 $\Delta y_\mathrm{w}^+ = \Delta z_w^+ = 0.05$。 $^+$ 表示壁面单位，其通过 u_τ^* 和运动黏度 $\nu^* = \mu^*/\rho^*$ f进行归一化得到。坐标以 h^*进行归一化。计算域尺寸为 $12h^* \times 2h^* \times 2h^*$，流向采用周期性边界条件，展向采用壁面边界条件。控制方程采用时空二阶离散格式。时间步长会动态调整，使CFL数保持为0.25。

在零时刻，将未带电粒子播撒到预先计算得到的充分发展湍流管道流中。粒子与壁面碰撞后会随时间积累电荷。粒子间碰撞会导致电荷在空间中分布，但不会改变系统的总电荷。该过程采用一种简单且稳健的方法进行建模，其中从壁面转移至粒子的电荷 ΔQ^* 描述如下：

$$\Delta Q_n^* = C_1 A_\mathrm{pw}^* \left(Q_\mathrm{sat}^* - Q_n^*\right) \tag{3}$$

以及在粒子间接触过程中通过

$$\Delta Q_n^* = C_2 A_\mathrm{pp}^* \left(Q_m^* - Q_n^*\right). \tag{4}$$

碰撞前粒子的电荷分别表示为 Q_n^* 和 Q_m^*，接触面积与总颗粒表面积之比分别表示为 A_{pw}^* 和 A_{pp}^*，并通过赫兹碰撞模型计算。 C_1 和 C_2 为比例因子，本例中为 0.1。

总共计算了 7×10^4 个时间步。这涵盖了从开始计算到首批粒子达到预先设定的饱和电荷 $Q_{\mathrm{sat}}^* = 50\mathrm{fC}$，且平均电荷约为$Q_{\mathrm{sat}}^*$的 80% 为止的时间。下文将粒子电荷 Q^* 以归一化形式显示为 $Q = Q^*/Q_{\mathrm{sat}}^*$，见图1(a) 和 1(c)。

2.2. 机器学习算法

本节介绍从模拟中提取数据，以及基于神经网络的机器学习模型。

图1(a) 展示了流向法向切片中的粒子及其电荷，该切片厚度为 $h = 3/8$；子图 (c) 则呈现了管道内的所有粒子。模拟过程中，每隔 1000 个时间步保存一次拉格朗日颗粒场快照，对应于 $\Delta t^+ \approx 0.52$。每次模拟总共得到 70 个快照。对于每个快照，使用 $128\times21\times21$ 个网格点，将结果场映射到规则等距笛卡尔网格上。映射时，对每个网格点，取最近的 10 个粒子计算距离加权平均值。下一步，沿流向提取 128 个等距切片。图1(b) 展示了映射到规则网格上的瞬时粒子电荷场。为模拟实验测量装置所需的时间平均，在流动方向上进行空间平均，从而每个时间步得到一个切片，见图1(d)。这些切片构成了机器学习数据库。因此，该数据库包含 280 个二维切片，分辨率为 21×21 个网格点。

机器学习算法的目标是根据单一路径数据预测二维场。为此，Erichson 等人(2020年开发了一种基于浅层神经网络（脉冲神经网络）的机器学习算法，本文后续将采用该算法。与深度神经网络相比，脉冲神经网络的优势在于所需训练数据集较小、训练速度较快且过拟合风险较低。然而，隐藏层较少限制了脉冲神经网络从数据中学习复杂特征（如视觉和人类语言）的能力，因此存在欠拟合风险（BianchiniandScarselli，2014年）。因此，当脉冲神经网络无法充分最小化损失函数时，适合将其切换为深度神经网络。

该网络通过两个全连接隐藏层对一维路径的输入进行解码，得到二维场输出。第一个隐藏层包含40个神经元，第二个隐藏层包含45个神经元。两个隐藏层都采用批次标准归一化，并使用10%的丢弃率。该算法基于 PyTorch（Van Rossum 和 Drake，2009年）使用 Python 3.10 实现（Paszke 等人，2019年），代码见Wilms 等人(2024年)。有关更多详情，请参阅Erichson 等人(2020年)。为提高预测效果，神经网络使用归一化数据集进行训练。因此，依据一维路径对一维输入和二维输出场进行标准归一化。以一维路径为基准进行归一化，是为了能够在预测后对输出数据重新归一化。对于每个训练好的模型，采用自助法，通过以神经元权重的新初始条件重复训练20次来提高稳健性。

2.3. 训练数据和验证数据

脉冲神经网络的训练数据和验证数据取自上述四组模拟。模拟开始时，将未带电粒子均匀播撒在充分发展湍流管道流中。由于摩擦起电，所有粒子的平均电荷随时间增加，直至达到预设的饱和电荷 $Q_{\mathrm{sat}} = 1$，见图2。粒径较小的粒子更快达到饱和电荷。为验证脉冲神经网络的性能，我们训练了三个不同版本。因此，训练数据有所不同，而所有模型使用相同的验证数据。验证数据包括粒径为$D_{\mathrm{p}} = 1\times10^{-2}$ 的案例中的所有时间步，以及其他三组模拟中的特定时间步，即 $t^+_{v_{1\ldots6}} = 5.68$、10.85、16.02、21.19、26.36和31.53。这部分数据未纳入三个模型的训练数据。

第一个模型 $M1$ 使用所有可用时间步（$0 \le t^+ \le 36.17$）进行训练，第二个模型 $M2$ 使用较小的训练数据集进行训练，该数据集包含最新的 35 个时间步（$18.09 \le t^+ \le 36.17$）；第三个模型 $M3$ 则使用最初的 35 个时间步（$0 \le t^+ \le 18.09$）进行训练，但排除了三个验证时间步。因此， $M1$ 在涉及粒径 $D_{\mathrm{p}} = 2.5\times10^{-3}$、 5×10^{-3} 和 7.5×10^{-3} 的插值任务上进行了验证，而 $M2$ 和 $M3$ 则需要在验证中应对一些外推情况，且训练数据较少。粒径为 $D_{\mathrm{p}} = 1\times10^{-2}$的情况对这三个模型来说都是外推。

训练时，从每个切片中提取两条一维路径（位于 $x = 0$ 和 $z = 0$处）。因此， $M1$ 使用 384 对数据进行训练，而 $M2$ 和 $M3$ 则使用 192 对数据进行训练。验证时，在相同位置提取一维路径，得到 176 条一维验证路径（ 1 种情况包含 140 条路径，另有 3 种情况各包含 12 条路径）。

通过 L^1 误差和 Q 误差对脉冲神经网络的重建场进行量化：

$$L^1\text{-error} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| 1 - Q_{\text{ref},i} / Q_{\text{rec},i} \right| \right) / n \quad ; \quad \overline{Q}\text{-error} = \left| 1 - \overline{Q_{\text{ref}}} / \overline{Q_{\text{rec}}} \right| \tag{5}$$

其中， n 表示二维网格上的点数， Q_{ref} 表示真实值二维场， Q_{rec} 表示重建场。横线 $(\cdot)$ 表示空间平均值。后一个指标可与最先进的测量结果进行比较，这有助于验证其在实际应用中的可靠性。

3. 结果与讨论

首先，我们通过将重建剖面与真实值进行比较，直观地分析了脉冲神经网络的能力。图 3展示了从管道中心（$y = 0$）提取的一维剖面在全部六个

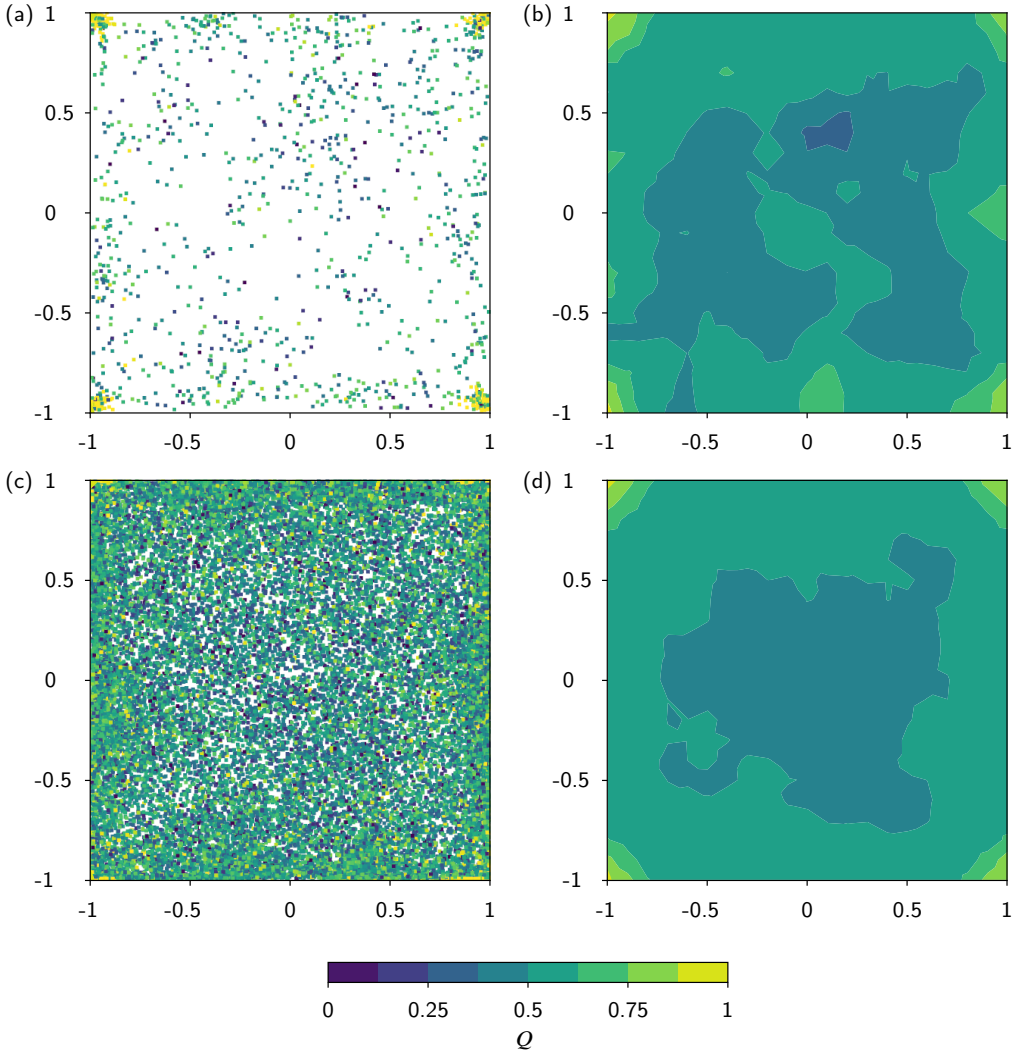

图 1： 粒子按其电荷着色：(a) 厚度为 $h = 3/8$ 的流向法向切片，以及 (c) 管道内的所有粒子。(a) 中粒子映射到规则网格的示意图见 (b)，(c) 对应 (d)。

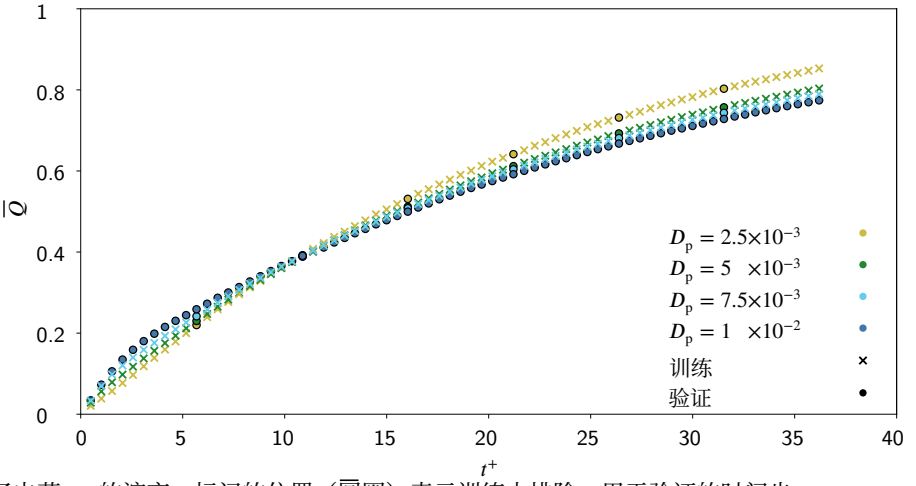

图2： 平均粒子电荷 Q 的演变。标记的位置（圆圈）表示训练中排除、用于验证的时间步。

个验证时间步上的结果。模拟中的粒径为 $D_p = 5\times10^{-3}$，采用了三种模型（$M1$、$M2$、$M3$）。此外，还绘制了相对误差。对重建结果的分析表明，无论采用哪种模型，随着时间步推进，粒子电荷场的重建都更加准确。对于晚于 $t^+_{v_2}$ 的时间步，二维场中每个预测点的相对误差均小于 20%；对于 $t^+ > t^+_{v_4}$，相对误差均小于 5%。第一时间步的最大相对误差出现在横截面的角落处。这可以从粒子充电以及信息/电荷输运的物理原理来解释。充电过程主要从管道的角落处开始。在如此早期的时间步，初始充电过程与管道中心线上的电荷分布之间似乎只有较弱的相关性。因此，由于信息尚未扩散到中心，脉冲神经网络几乎不可能准确预测角落处的情况。

图 4将分析扩展至对所有可用验证数据中不同模型的统计比较。因此，按粒径绘制随时间变化的 L^1误差 t^+。首先，无论粒径如何，较晚时间步（粒子电荷较高时）误差较小这一趋势都得到证实。由于整个场的梯度较小，较晚的时间步更容易预测。因此，场更加均匀，与最初几个时间步相比，其电荷范围不会跨越多个数量级。

对三种不同模型的比较表明，模型 $M3$ 的整体表现最佳，在所有验证数据上的平均 L^1 误差为 1.63%，其次是 $M1$（2.26%）和 $M2$（2.44%）。$M3$ 的误差较低，令人惊讶，因为它仅使用时间跨度的前半段（$0 \le t^+ \le 18.09$）进行训练。即使在时间跨度的后半段（$18.09 \le t^+ \le 36.17$），也就是 $M3$ 完全未参与训练的时期，$M3$ 的误差仍然最小（$M1$：0.98%，$M2$：1.02%，$M3$：0.63%）。因此，这一时期对 $M3$ 而言是纯粹的外推（对 $D_p = 10^{-2}$ 而言，甚至有两个参数需要外推）。根据训练数据，$M2$ 本应针对这一时间跨度进行优化。$M3$ 表现良好的一个可能解释是，它使用了更多噪声数据进行训练，因为充电过程才刚刚开始。此外，这一时期的电荷梯度较高，从而降低了过拟合的风险。

对接收到的粒子电荷场取平均，可以与传统法拉第桶进行比较，从而提高结果的可信度。需要注意的是，只有当粒子分布均匀时，结果才能直接比较；否则，就需要采用加权平均或预测粒子电荷密度。图5绘出了Q 在不同验证案例中随时间变化的绝对误差。总体而言，L^1误差的观察结果得到了证实。不过，由于取了平均，所有误差都大约减半。模型的平均误差为 1.04%，$M2$的结果为 1.04%，而 $M3$为 0.94%。

3.1. 在四分之一的场上进行训练

本研究的模拟对单极性充电过程进行建模，产生统计上对称的粒子电荷场。因此，管道的四个角都具有相同的分布。如果在实际应用中也能预先获得这类信息，那么将其纳入考虑是明智之举。因此，本节研究对……取平均的影响

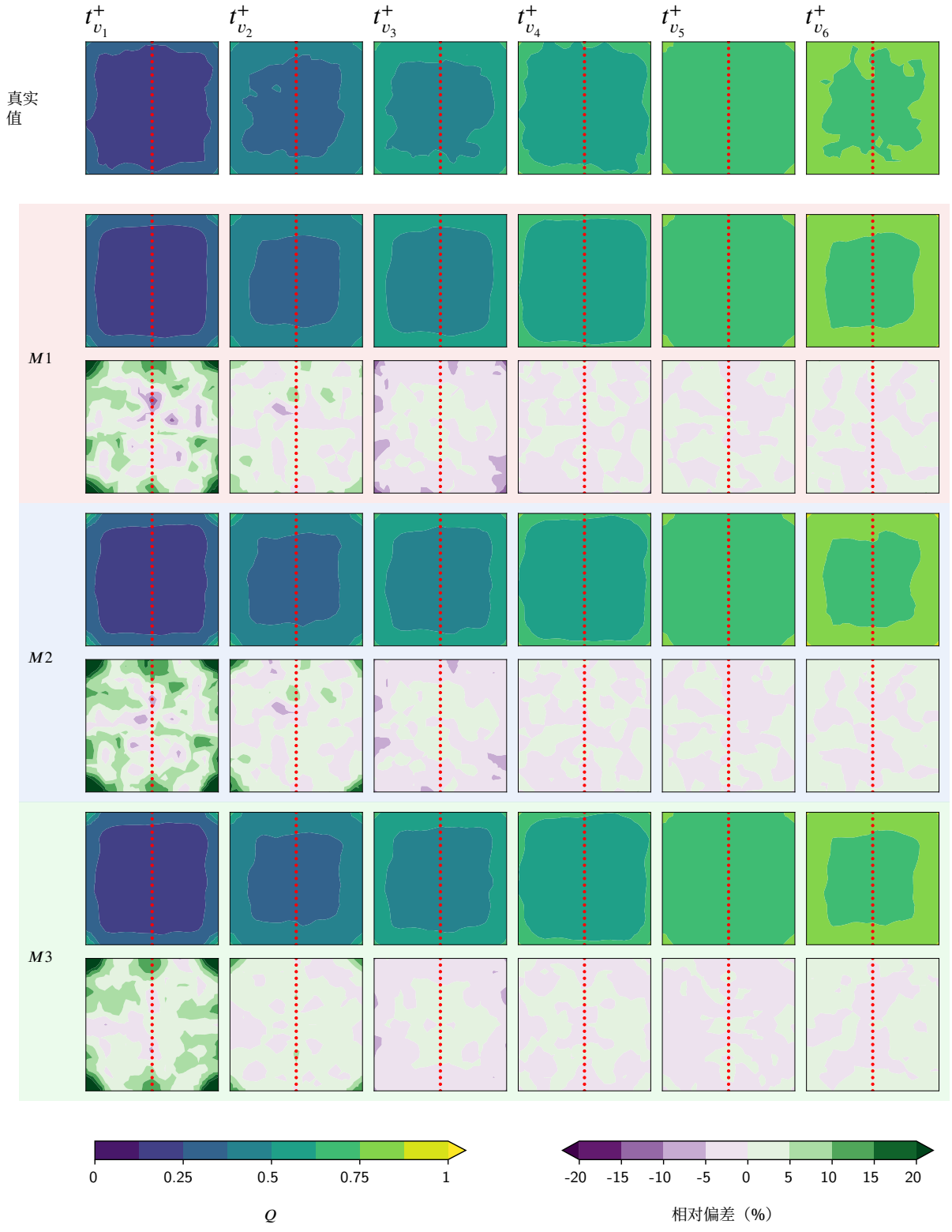

图3： 所有验证时间步中、粒径为 $D_p = 5\times10^{-3}$ 的真实值粒子电荷场（Q_{ref}）等值线图。下方第一行展示了三个模型的重建结果（Q_{rec}），其中包括相对偏差范围为 $\pm 20\%$ 的等值线图。红点表示一维路径的位置。

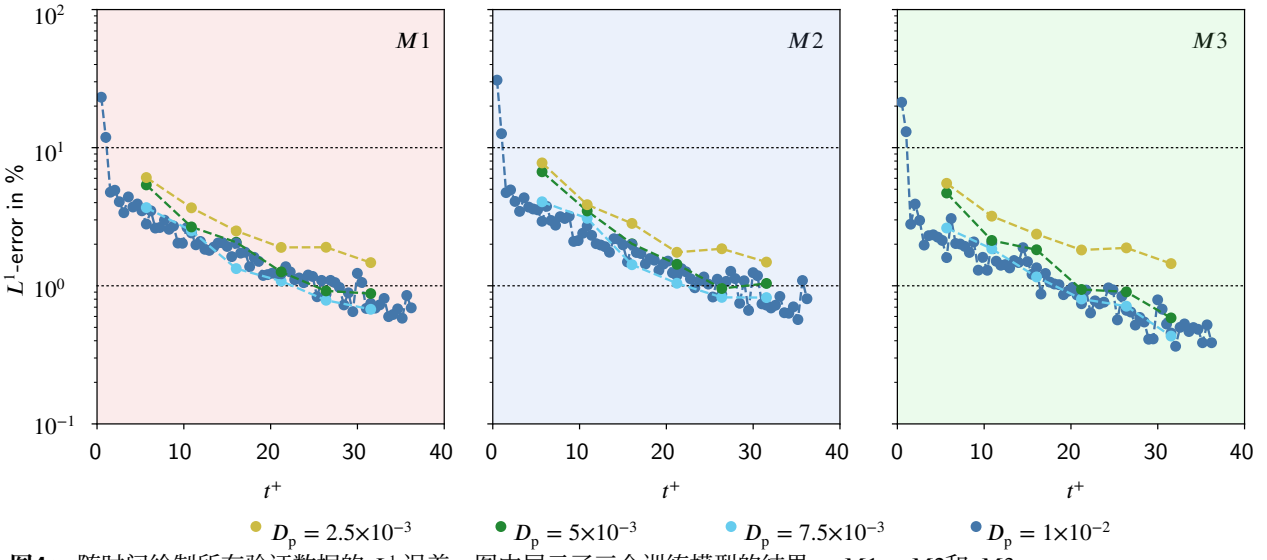

图4： 随时间绘制所有验证数据的 L^1-误差。图中展示了三个训练模型的结果： $M1$、 $M2$和 $M3$。

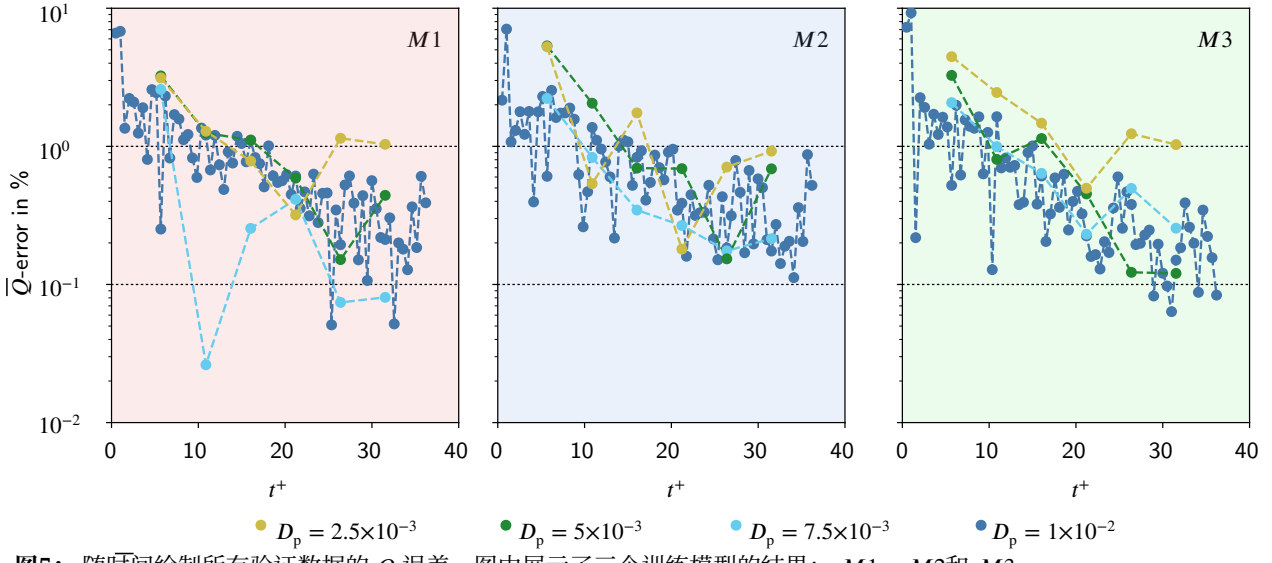

图5： 随时间绘制所有验证数据的 Q-误差。图中展示了三个训练模型的结果： $M1$、 $M2$和 $M3$。

涵盖四个角的颗粒电荷分布，并使用得到的四分之一场训练神经网络。将获得的预测复制并变换四次，以得到完整场。

图 6比较了基础模型的 L^1误差与在四分之一场上训练的 $M1$ 模型的 $M1$ 误差。可以观察到，平均 L^1误差从 2.26% 降至 1.63%，相当于减少了 28%。这种降幅似乎与粒径和时间步长无关。不过，采用后一种模型时，不同时间步长下的误差波动略有增加。如前所述，误差降低可归因于两个原因：(a) 由于增加了平均步骤，数据的等值线图更加平滑；(b) 模型所面对的解码任务更小。基础 $M1$ 模型将一维路径上的 21 个数据点扩展至

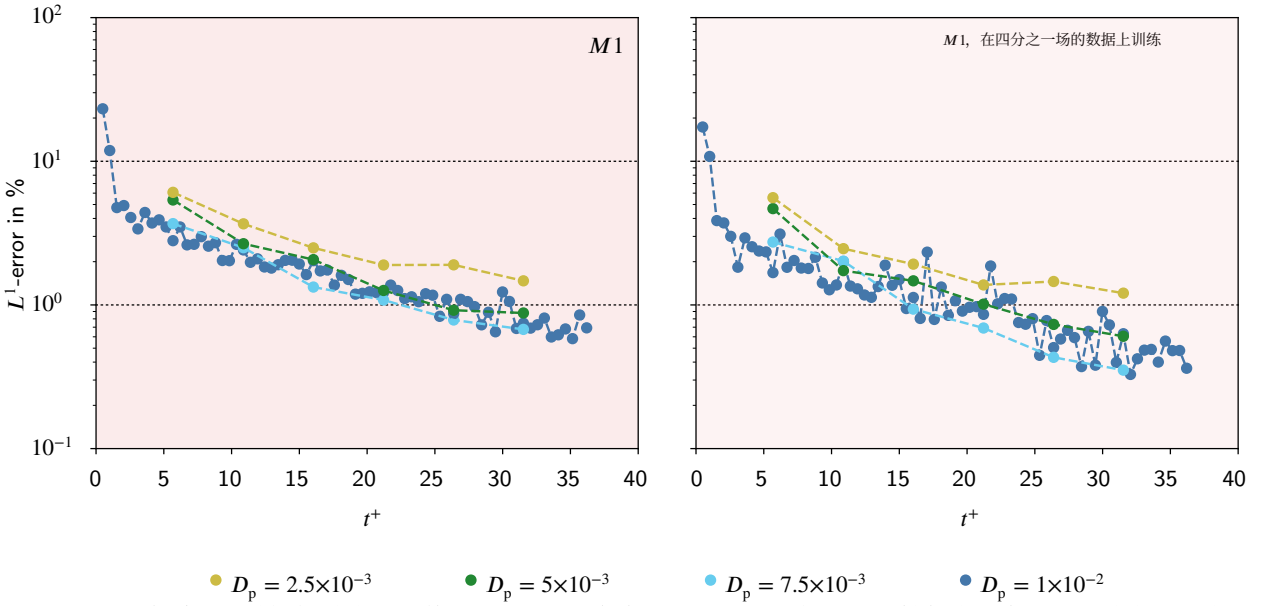

图6： L^1随时间绘制的所有验证数据的误差。图中展示了（左） $M1$ 的基础版本，以及（右）在四分之一场的数据上训练的 $M1$ 版本的结果。

二维场上的 441 个点，扩展倍数为 21。仅处理通道四分之一部分的模型，扩展倍数为 11（一维路径上的 11 个点扩展至二维场上的 121 个点）。

3.2. 纳入粒子速度

改进算法预测的另一种可能方法是纳入有关一维路径的更多信息。 Xu等人（2024年）的测量原理可直接提供粒子速度。因此，我们开发了另一种神经网络架构，其最后一层包含一个卷积层，用于将多个输入通道（不同的物理场）合并为一个输出通道，在本例中即粒子电荷。

图 7比较了基础模型的 L^1误差与加入粒子速度后的修改版 $M1$ 模型的 $M1$ 。额外信息使 L^1误差平均降低了 27%。这一改进与粒径无关。不过，误差波动略有增加，与在四分之一场域上训练的情况相似。误差的降低证明，粒子速度提供了与粒子电荷并非直接相关的额外信息。粒子加速度可能会改变这一情况；实验需要粒子加速度来确定粒子电荷，因为粒子加速度与粒子速度直接相关。

4. 结论与展望

本文致力于提升气力粉体输送这一工业输送作业的安全性。研究基于一种新型测量技术，该技术能够评估单条测量线上的颗粒电荷分布，但无法评估管道或管道横截面上的整体分布。为此，我们开发了一种算法，根据一维线测量预测二维颗粒电荷场。我们利用仿真数据验证了该算法的能力：在标准配置下， L^1 的平均误差为 1.63%。这相当于Q的平均误差为 1.04%。纳入粒子速度后， L^1误差还可进一步降低 27%。鉴于迄今为止只能测量平均电荷，这对于实现安全气力输送而言是一项重大进展。通过扩充训练数据库以覆盖更大的参数空间并提高稳健性，还可以进一步改进机器学习模型。此外，还可纳入颗粒密度分布来计算加权平均电荷，使其能够与法拉第测量直接比较。本文介绍的算法是一个实例，展示了机器学习的兴起如何影响防爆领域，并塑造测量技术的未来。

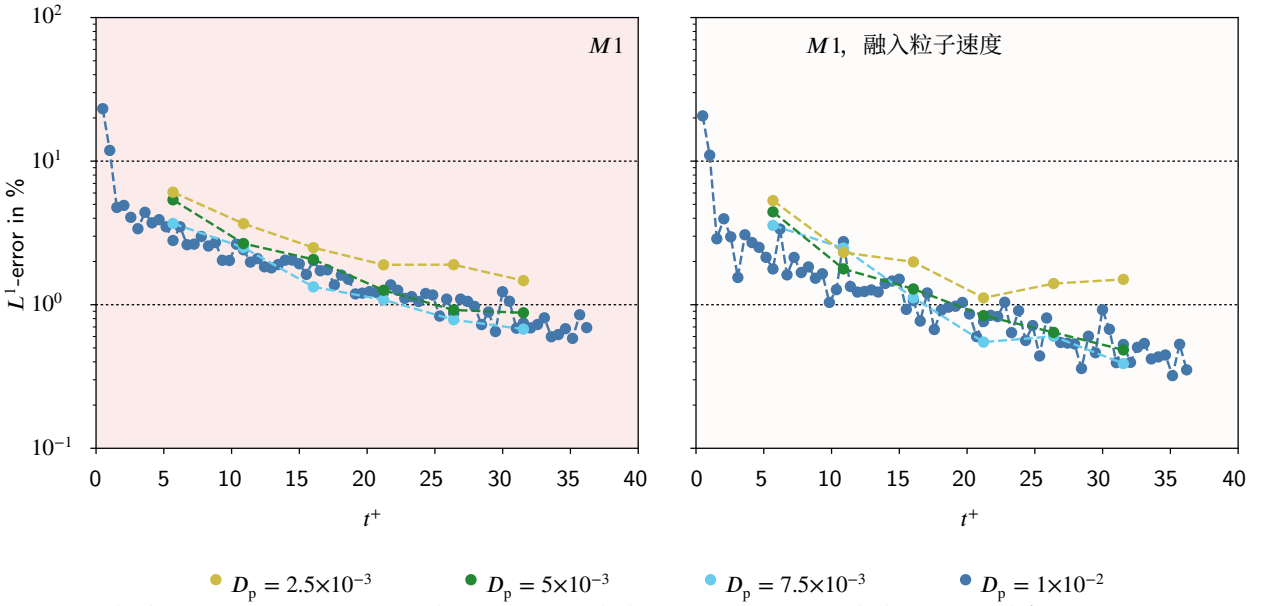

图7： 随时间绘制的所有验证数据的 L^1-误差。图中展示了（左） $M1$ 的基础版本和（右）融入粒子速度的 $M1$ 版本的结果。

致谢

本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划提供的资助（资助协议编号：947606 PowFEct）。

CRediT作者贡献声明

C. Wilms： 本研究的概念构思、方法论、软件、撰写（初稿准备、审阅和编辑）。**W. Xu：** 软件、撰写（审阅和编辑）。**G. Ozler：** 软件、撰写（审阅和编辑）。**S. Jantač：** 软件、撰写（审阅和编辑）。**S. Schmelter：** 监督、撰写（审阅和编辑）。**H. Grosshans：** 经费筹集、软件、监督、撰写（审阅和编辑）。

参考文献

Bianchini, M., Scarselli, F., 2014年。论神经网络分类器的复杂性：浅层架构与深层架构的比较。IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst. 25, 1553–1565. Ding, J., Qi, C., Yan, X., Lv, X., Zhang, S., Liang, H., Fan, T., Yu, J., 2024年。气流速度对气力输送环境中淀粉粉尘爆炸火焰传播和压力的影响。《粉体技术》433, 119147. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.powtec. 2023.119147, doi: 10.1016/j.powtec.2023.119147。Erichson, N.B., Mathelin, L., Yao, Z., Brunton, S.L., Mahoney, M.W., Kutz, J.N., 2020年。利用有限传感器进行流体流动重构的浅层神经网络。《英国皇家学会哲学汇刊A辑》476, 20200097. URL: https: // doi.org/10.1098/rspa.2020.0097, doi: 10.1098/rspa.2020.0097。Grosshans, H., Bissinger, C., Calero, M., Papalexandris, M.V., 2020年。静电荷对含颗粒管道流的影响。《流体力学杂志》909, A21. URL: http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2020.956, doi: 10.1017/jfm.2020.956。Grosshans, H., Papalexandris, M.V., 2017年。含颗粒湍流通道流中摩擦起电的直接数值模拟。《流体力学杂志》818, 465–491. URL: http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2017.157, doi: 10.1017/jfm.2017.157。Lim, E.W.C., Zhang, Y., Wang, C.H., 2006年。静电场对颗粒材料经倾斜管道和垂直管道进行气力输送的影响。《化学工程科学》61, 7889–7908. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.ces.2006.07.045, doi: 10.1016/ j.ces.2006.07.045。Matsusaka, S., Masuda, H., 2006年。气固管流中颗粒质量流量与荷质比的同步测量。《化学工程科学》61, 2254–2261. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.ces.2005.05.006, doi: 10.1016/j.ces.2005. 05.006。

Mei, R., 1992年。有限雷诺数下球形颗粒所受剪切升力的近似表达式。《国际多相流杂志》18, 145–147. URL: http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322(92)90012-6，doi：10.1016/0301-9322(92)90012-6。Ndama, A.T., Guigon, P., Saleh, K., 2011年。一种可重复的测试方法，用于表征粉末在气力输送过程中的摩擦起电。《静电学杂志》69, 146–156. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.elstat.2011.03.003，doi：10.1016/j.elstat.2011.03.003。Paszke, A., Gross, S., Massa, F., Lerer, A., Bradbury, J., Chanan, G., Killeen, T., Lin, Z., Gimelshein, N., Antiga, L., Desmaison, A., Kopf, A., Yang, E., DeVito, Z., Raison, M., Tejani, A., Chilamkurthy, S., Steiner, B., Fang, L., Bai, J., Chintala, S., 2019年。PyTorch：一种命令式风格、高性能的深度学习库，载于：《神经信息处理系统进展》第32卷。Curran Associates, Inc., 第8024–8035页。URL: http://papers.neurips.cc/paper/9015-pytorch-an-imperative-style-high-performance-deep-learning-library.pdf。Saffman, P.G., 1965年。缓慢剪切流中小球体所受的升力。《流体力学杂志》22, 385–400. URL: http://dx.doi.org/10.1017/S0022112065000824，doi：10.1017/s0022112065000824。Schiller, L., Naumann, A.Z., 1933年。论重力选矿的基本计算。《德国工程师协会杂志》77, 318–321. Van Rossum, G., Drake, F.L., 2009年。《Python 3参考手册》。CreateSpace, 斯科茨谷, CA. Wilms, C., Xu, W., Oezler, G., Jantač, S., Schmelter, S., Grosshans, H., 2024年。机器学习增强的粉末经管道输送时静电荷分布测量。URL: https://doi.org/10.5281/zenodo.14006045，doi：10.5281/zenodo.14006045。Xu, W., Jantač, S., Matsuyama, T., Grosshans, H., 2024年。湍流粉末流静电荷的空间分辨测量。《流体实验》65. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00348-024-03791-3，doi：10.1007/s00348-024-03791-3。