arXiv:2601.02853v1 [math.DG] 6 Jan 2026

通过流方法构造 λ-Angenent 曲线

PAK TUNG HO

Abstract. 利用修正曲线缩短流，我们构造了 λ-Angenent 曲线，该曲线最初是通过射击法构造的。

1. Introduction

平均曲率流是面积泛函的梯度流

$$\int_\Sigma d\mathcal{H}^n(x).$$

更精确地说，一参数光滑超曲面族 $\Sigma(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$，其中$t \in [0, T)$，是平均曲率流 的一个解，当且仅当

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \vec{H},$$

其中，$\vec{H}$ 是超曲面在点 x处的平均曲率向量。过去几十年来，平均曲率流得到了广泛研究；相关文献似乎不可能尽数列举。关于平均曲率流的综述，请参阅 [8] 。

若光滑超曲面 Σ 位于 $\mathbb{R}^{n=1}$ 中，且满足方程，则称其为自收缩子

$$\vec{H} + x^\perp/2 = 0.$$

Huisken [13] 指出，若 $\{\sqrt{-t}\Sigma\}_{t<0}$ 是平均曲率流的一个解，则 Σ 是一个自收缩子。此外，Huisken 还指出，$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的收缩子是高斯面积泛函的临界点

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \int_\Sigma e^{-|x|^2/4} d\mathcal{H}^n(x).$$

自收缩子是平均曲率流研究中的核心对象，因为它们充当奇点模型 [12]。人们运用不同的技术构造自收缩子的显式例子。参见 [5, 7, 14, 15, 16, 17]。特别是，An- genent [3] 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中构造了一个旋转对称自收缩平均曲率流，在其变为奇异之前，它的拓扑类型为 $\mathbb{S}^1 \times S^{n-1}$ 。事实上，An- genent 构造了一个旋转对称的闭嵌入超曲面 $\Sigma_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ，使得 $\{\sqrt{-t}\Sigma_n\}_{t<0}$ 是平均曲率流的一个解。鉴于上文提到的 Huisken 的观察，Angenent 将其存在性归结为

Date：2025年5月24日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53C44；次要分类：53C22、53C42。*Key words and phrases.* 平均曲率流；自收缩子；安根特环面 作者受到台湾国家科学及技术委员会（NSTC）资助，资助编号：112-2115-M-032 -006 -MY2。

一个旋转对称收缩子的存在性，也就是半平面 $\mathbb{R}^2_+ = \{（r,\ x）$中存在一条闭嵌入测地线：$r > 0\}$ 配备度量

$$g = r^{2(n-1)} e^{-\frac{r^2+x^2}{2}} g_E$$

其中，$g_E = dr^2 + dx^2$ 是 $\mathbb{R}^2$上的欧几里得度量。Angenent 使用射击法构造了这样一条闭嵌入测地线。射击法的综述参见 [9] 。

Chen 和 Sun 在 [6, 附录 B] 中指出，如果将 $n-1$替换为某个 $\lambda > 0$，[3] 中的所有证明仍然成立。也就是说，利用 Angenent 的射击法，可以在半平面 $\mathbb{R}^2_+ = \{(r,\ x)$中构造一条闭嵌入测地线：$r > 0\}$ 配备度量

$$g = \alpha^2 (dr^2 + dx^2) = \alpha^2 g_E \tag{1.1}$$

其中 $\alpha^2 = r^{2(\lambda-1)} e^{-\frac{r^2+x^2}{2}}$和 $\lambda > 1$ 是常数，g_E 是 $\mathbb{R}^2$上的欧几里得度量。这样的测地线称为 [6], 中的 λ-Angenent 曲线，而 λ-Angenent 曲线则用作障碍物。详情请参见 [6]。

在论文末尾，[6], Chen 和 Sun 指出：“值得注意的是，Drugan 和 Nguyen [10] 也用变分法构造了环面。其构造是否与 Angenent 的构造相同，仍是一个开放问题。看来，他们的方法也可以用于构造 λ-Angenent 曲线。”下面的定理 1.1 表明，事实确实如此。

定理 1.1. 在半平面 $(\mathbb{R}^2_+, g)$ 中存在一条简单闭测地线 $\gamma_\infty(u) = (r(u)\ x(u))$，$u \in \mathbb{S}^1$。此外，关于度量 g，其长度 $L_g(\gamma_\infty)$ 小于半直线 $x = 0$ 的双重覆盖的长度。

请注意，Drugan-Nguyen [10] 证明了定理 1.1 在 $\lambda = n-1$ 情形下成立。事实上，定理 1.1 的证明与 [10] 的证明十分相似。我们还指出，和 $\lambda = n-1$ 的情形类似，我们不知道定理 1.1 中构造的 λ-Angenent 曲线是否与用射击法构造的曲线相同。

2. 预备知识

本节汇总一些基本事实，它们将在主要定理的证明中用到。

向量 $\dfrac{\partial}{\partial r}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中关于通常的欧几里得度量 g_E构成一组标准正交基，并且关于度量 g的长度为 α，其中 g 是（1.1）中给出的度量。为避免混淆，对于相对于度量 g定义的几何量和单位向量，我们将使用下标 g；而提及欧几里得度量 g_E时，则使用下标 E。

给定 $\mathbb{R}^2_+$ 中的曲线 $\gamma(u) = (r(u)\ x(u))$，其速度、单位切向量和法向量为

$$v = \alpha\sqrt{(x')^2 + (r')^2},\ \mathbf{t}_g = \frac{1}{v}\left(r'\frac{\partial}{\partial r} + x'\frac{\partial}{\partial x}\right),\ \mathbf{n}_g = \frac{1}{v}\left(-x'\frac{\partial}{\partial r} + r'\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{2.1}$$

记为 $ds = vdu$，其中 s 是相对于度量 g 的 γ 的弧长。可以计算测地曲率：

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{1}{v}\left[\frac{x'r'' - x''r'}{(x')^2+(r')^2} - \left(\frac{\lambda-1}{r} - \frac{r}{2}\right)x' - \frac{1}{2}xr'\right] \\ &= \frac{1}{v}\left[k_E - \left(\frac{\lambda-1}{r} - \frac{r}{2}\right)x' - \frac{1}{2}xr'\right]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

因此，$(\mathbb{R}^2_+, g)$ 的测地线方程为

$$\frac{x'r'' - x''r'}{(x')^2+(r')^2} = \left(\frac{\lambda-1}{r} - \frac{r}{2}\right)x' + \frac{1}{2}xr'. \tag{2.3}$$

那么，曲线 $\gamma(u)$，$a \le u \le b$ 在 $(\mathbb{R}^2_+, g)$ 中的长度为

$$L_g(\gamma) = \int_a^b v du. \tag{2.4}$$

定义 2.1. 我们使用以下记号

$$r_\lambda = \sqrt{2(\lambda-1)}.$$

自收缩圆柱 $\mathcal{C}$ 对应于测地线 $(r(u)\ x(u)) = (r_\lambda, u)$。自收缩半直线 $\mathcal{P}$ 对应于测地线 $(r(u)\ x(u)) = (u,0)$。

注意， $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{P}$ 的长度分别为

$$\begin{aligned} L_g(\mathcal{C}) &= \int_{-\infty}^{\infty} (2(\lambda-1))^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{2(\lambda-1)+u^2}{4}} du = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{2(\lambda-1)}{e}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}}, \\ L_g(\mathcal{P}) &= \int_0^{\infty} u^{\lambda-1} e^{-\frac{u^2}{4}} du. \end{aligned} \tag{2.5}$$

我们有如下结论：

命题 2.2。 对于任意 $\lambda > 1$，有

$$L_g(\mathcal{P}) < L_g(\mathcal{C}).$$

证明。 通过变量替换 $v = u^2/4$，可将其写为

$$L_g(\mathcal{P}) = 2^{\lambda-1}\int_0^{\infty} v^{\frac{\lambda-2}{2}} e^{-v} dv = 2^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{2.6}$$

由 [4, 定理 1.5] 可得

$$\Gamma(x+1) \le \sqrt{2\pi}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{e}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

对于任意正实数 x。令 $x = \frac{\lambda}{2} - 1$，则可对 (2.6) 的右侧估计如下：

$$\begin{aligned} L_g(\mathcal{P}) = 2^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) &\le 2^{\lambda-1}\sqrt{2\pi}\left(\frac{\lambda-1}{2e}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} = \sqrt{2\pi}\left(\frac{2(\lambda-1)}{e}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} \\ &< 2\sqrt{\pi}\left(\frac{2(\lambda-1)}{e}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} = L_g(\mathcal{C}), \end{aligned}$$

这证明了该断言。 □

$(\mathbb{R}^2_+,\ g)$ 的高斯曲率为 K_g

$$K_g = \alpha^{-2}\left(1+\frac{\lambda-1}{r^2}\right). \tag{2.7}$$

定义 2.3. 简单闭曲线 $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2_+$ 的囲定高斯面积为

$$GA_g(\gamma) := \iint_\Omega \left(1+\frac{\lambda-1}{r^2}\right) dxdr, \tag{2.8}$$

其中 Ω 是由 γ 围成的区域。

对于一条 C^1-曲线 γ，由 (2.7) 和 (2.8) 可得高斯-博内公式为

$$\iint_\Omega \left(1+\frac{\lambda-1}{r^2}\right) dxdr = 2\pi - \oint_\gamma k_g ds. \tag{2.9}$$

3. A MODIFIED CURVE SHORTENING FLOW

给定一条闭曲线 $\mathbb{R}^2_+$，我们考虑其演化遵循如下法向速度的流

$$V_g = \frac{k_g}{K_g}, \tag{3.1}$$

其中，k_g 是曲线上给定点的测地曲率，K_g 是该点的高斯曲率。当 K_g 为正且一致地远离零时，该流具有与通常的曲线缩短流相似的性质。

Gage 最早在 [11] 研究了这种流。利用这种流，Gage 证明了球面上测地线的存在性。这里的思路类似，但我们的流形（$\mathbb{R}^2_+$，g）不是闭的，且其高斯曲率无界。我们将使用直线 $r = r(t)$ 作为障碍物，以证明 $\mathbb{R}^2_+$ 内部的闭曲线不会在有限时间内到达高斯曲率趋于无穷大的区域。

3.1. 直线的演化 $r = C$。由 (2.2) 可知，直线 $r = r_0$ 的测地曲率为:

$$k_g = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{r_0}{2} - \frac{\lambda-1}{r_0}\right).$$

我们可以如下计算沿方向 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 的欧几里得速度 V_E：

$$V_E = \frac{V_g}{\alpha} = \frac{k_g}{\alpha K_g} = \frac{r_0(r_0^2 - 2(\lambda-1))}{2(r_0^2+\lambda-1)}.$$

因此，圆柱面 $\mathcal{C}$左侧的直线，即 $r = r_0 < r_\lambda$，会继续向左移动。类似地，圆柱面 $\mathcal{C}$右侧的直线，即 $r = r_0 > r_\lambda$，会继续向右移动。当 $r_0 < r_\lambda$时，我们有 $V_E \geq -cr$ ，其中的正数常量仅取决于 r_0 和 λ。因此，

$$r(t) \geq r_0 e^{-ct},\ r_0 < r_\lambda.$$

因此，没有竖直线能在有限时间内到达 x-轴。同样，当 $r_0 > r_\lambda$时，我们有 $r(t) \leq r_0 e^{\frac{t}{2}}$，且没有竖直线能在有限时间内趋于无穷远。

3.2. **短时与长时间存在性**。 当正高斯曲率一致地有上界且下界远离零时，流的短时存在性由 Gage [11] 或 Angenent [1]证明。给定一条初始嵌入闭曲线 γ_0 : $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2_+$，我们选取 $r_0 < r_\lambda$ 和 $r_1 > r_\lambda$ ，使得γ_0($\mathbb{S}^1$) 位于带状区域 $\{r \in (r_0, r_1)\}$内。对于 $t < 1$，高斯曲率在 $\{r \in (r_0^{-c}, r_1 e^{1/2}\}$ 中一致有界，因此我们可以在此应用短时存在性结果。

我们有以下命题；其证明与 [10, 命题5] 相同，故略去。

命题 3.1. 记 γ_t 为 γ_0 在时刻 t的演化。
(i) 若 γ_0 是一条嵌入曲线，则 γ_t也是。***(ii)*** 若 γ_0 关于跨越 r-轴的反射对称，且 γ_0 在第一象限中的像是关于 r-轴的图像，则只要流存在，所有 γ_t 都保持这些性质（对称性和图像性质）。

沿着流，弧长按如下方式演化：

$$\frac{\partial}{\partial t} ds = -k_g V_g ds = -\frac{k_g^2}{K_g} ds.$$

这意味着长度 L_g(γ_t)按如下方式演化：

$$\frac{d}{dt} L_g(\gamma_t) = -\int_{\gamma_t} \frac{k_g^2}{K_g} ds. \tag{3.2}$$

如果 γ_t 是简单闭曲线，那么它们是区域 Ω_t 的边界。利用 (2.9) 中的高斯-博内公式，我们得到

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_t} K_g dA_g = -\oint_{\gamma_t} K_g V_g ds = -\oint_{\gamma_t} k_g ds = -2\pi + \iint_{\Omega_t} K_g dA_g.$$

这里， V_g 和 k_g 分别是沿 Ω 内法线方向的法向速度和测地曲率。因此，我们有以下结论：

命题 3.2. 如果初始曲线所围成的高斯面积等于 2π，那么只要流存在， γ_t 所围成的高斯面积也等于 2π 。

我们有以下命题；其证明与 [10, 命题5] 相同，故略去。

命题 3.3. 设 γ_0 是一条简单闭曲线。如果 γ_0 所围区域的高斯面积等于 2π，那么以法向速度 $V_g = k_g/K_g$ 演化的 γ_0 将在所有时间内存在。

4. A family of initial curves

我们考虑顶点为 $(a, -c)$、(a, c)、(b, c)、$(b, -c)$ 的矩形 $R[a, b, c]$ ，其中$a < b$且 $c > 0$。由命题 3.3 可知，如果我们的初始矩形所围成的高斯面积等于 2π，那么流将永远存在。此外，如果它的周长小于 $2L_g(\mathcal{P})$，那么流不可能收敛到一个平面的双重覆盖，因为根据 (3.2)，流会使长度减小。满足这两个条件的矩形有无穷多个。例如，当 a 且 b较大时，高斯面积$\iint \left(1 + \lambda \frac{-1}{r^2}\right) dxdr \sim \iint dxdr$，但由于度量上的指数权重，周长会很小

。当 a 和 b 接近 0 时，积分 $\int_0^1 \frac{1}{r^2}dr$ 无界。因此，可以得到一个高斯面积为 2π 且周长很小的微小矩形。在这里，我们选择一个连续一参数族，将这两个极端连接起来。

定义 4.1。我们用 $L(a,\ b,\ c)$ 表示矩形 $R[a,b,c]$ 相对于度量 g 的周长，即

(4.1)
$$L_g[a,b,c] := 2(a^{\lambda-1}e^{-a^2/4} + b^{\lambda-1}e^{-b^2/4})\int_0^c e^{-x^2/4}dx + 2e^{-c^2/4}\int_a^b r^{\lambda-1}e^{-r^2/4}dr.$$

取 c_0 为满足下式的正实数

$$\frac{e^{-c_0^2/4}}{\int_0^{c_0} e^{-x^2/4}dx} = 2. \tag{4.2}$$

数 c_0 存在且唯一，约为 0.481。此外，令 λ_0 为满足下式的正实数

$$\sqrt{2\lambda_0 + 1 - \sqrt{8\lambda_0+1}} = \sqrt{2(\lambda_0+4)} - 2,$$

其等于 $(28+11\sqrt{7})/9$，约为 6.3448。

命题 4.2。假设 $\lambda > 1$。对于每个 $a, b \in (0,\infty)$，我们有

$$L_g[a,b,c] < 2L_g(\mathcal{P}).$$

证明。根据（4.2），我们可以将（4.1）写成

$$L_g(a,b,c_0) = f_\lambda(a) + g_\lambda(b),$$

其中 $M = \int_0^{c_0} e^{-x^2/4}dx$ 以及

$$f_\lambda(a) = 2a^{\lambda-1}e^{-a^2/4}M + 4M\int_a^0 r^{\lambda-1}e^{-r^2/4}dr,$$
$$g_\lambda(b) = 2b^{\lambda-1}e^{-b^2/4}M + 4M\int_0^b r^{\lambda-1}e^{-r^2/4}dr.$$

f 的导数为

$$f'_\lambda(a) = -a^{\lambda-2}e^{-a^2/4}M\big(a^2 + 4a - 2(\lambda-1)\big).$$

因此，$\max_{a\in[0,\infty)} f_\lambda(a)$ 的最大值在 $a_\lambda = -2 + \sqrt{2(1+\lambda)}$ 处取得。同理可得，$\max_{b\in[0,\infty)} g_\lambda(b)$ 的最大值在 $b_\lambda = 2+\sqrt{2(1+\lambda)}$ 处取得。由（2.5）可知

$$L_g(\mathcal{P}) = \int_0^\infty u^{\lambda-1}e^{-\frac{u^2}{4}}du.$$

因此，只需证明

$$f_\lambda(a_\lambda) + g_\lambda(b_\lambda) < 2\int_0^\infty r^{\lambda-1}e^{-\frac{r^2}{4}}dr \tag{4.3}$$

对任意 $\lambda > 1$ 均成立。

为了证明 (4.3)，我们将证明以下两个引理：

引理 4.3. 当 $1 \le \lambda \le 7$ 时，不等式 (4.3) 成立。

引理 4.4。成立

$$f_{\lambda+2}(a_{\lambda+2}) + g_{\lambda+2}(b_{\lambda+2}) < 2\lambda\big(f_\lambda(a_\lambda) + g_\lambda(b_\lambda)\big) \tag{4.4}$$

对所有 $\lambda > \lambda_0$ 均成立。

暂且假设引理 4.3 和引理 4.4 成立；我们可以看到，对于所有 $\lambda > 1$，(4.3) 都成立。由分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{\lambda+1} e^{-\frac{r^2}{4}} dr &= \Big[-2r^\lambda e^{-\frac{r^2}{4}} \Big]_0^\infty + 2\lambda \int_0^\infty r^{\lambda-1} e^{-\frac{r^2}{4}} dr \\ &= 2\lambda \int_0^\infty r^{\lambda-1} e^{-\frac{r^2}{4}} dr.\end{aligned}$$

结合引理 4.4 可知，如果 (4.3) 对某个特定值$\lambda > \lambda_0$成立，那么 (4.3) 对 $\lambda + 2$也成立。由于引理 4.3 断言 (4.3) 对所有$1 \le \lambda \le 7$均成立，因此我们可以得出结论：(4.3) 对所有 $\lambda > 1$均成立。由此，在假设引理 4.3 和引理 4.4 成立的前提下，命题 4.2 得证。□

接下来只需证明引理 4.3 和引理 4.4。

引理 *4.3* 的证明。 注意到，(4.3) 的左边可写为

$$2M\left(a_\lambda^{\lambda-1} e^{-a_\lambda^2/4} + b_\lambda^{\lambda-1} e^{-b_\lambda^2/4}\right) + 4M \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} r^{\lambda-1} e^{-r^2/4} dr. \tag{4.5}$$

由 (4.2) 可得

$$M = \int_0^{c_0} e^{-x^2/4} dx = \frac{1}{2} e^{-c_0^2/4} < \frac{1}{2}.$$

结合 (4.5)，可知 (4.3) 的左边小于或等于 1
to

$$a_\lambda^{\lambda-1} e^{-a_\lambda^2/4} + b_\lambda^{\lambda-1} e^{-b_\lambda^2/4} + 2\int_{a_\lambda}^{b_\lambda} r^{\lambda-1} e^{-r^2/4} dr.$$

这表明，为了证明 (4.3)，只需证明

$$a_\lambda^{\lambda-1} e^{-a_\lambda^2/4} + b_\lambda^{\lambda-1} e^{-b_\lambda^2/4} < 2\left(\int_0^{a_\lambda} + \int_{b_\lambda}^\infty\right) r^{\lambda-1} e^{-r^2/4} dr. \tag{4.6}$$

通过变量替换，我们还可以将 (4.6) 改写为

$$a_\lambda^{\lambda-1} e^{-a_\lambda^2/4} + b_\lambda^{\lambda-1} e^{-b_\lambda^2/4} < 2^\lambda \left(\int_0^{a_\lambda^2/4} + \int_{b_\lambda^2/4}^\infty\right) x^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{-x} dx,$$

或者等价地，

$$\left(\frac{a_\lambda^2}{4}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-a_\lambda^2/4} + \left(\frac{b_\lambda^2}{4}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-b_\lambda^2/4} < 2\left(\int_0^{a_\lambda^2/4} + \int_{b_\lambda^2/4}^\infty\right) x^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{-x} dx, \tag{4.7}$$

注意，(4.7) 的右端可以写成

$$2\left(\Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}\Big) - \Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}, \frac{a_\lambda^2}{4}\Big) + \Gamma\Big(\frac{\lambda}{2}, \frac{b_\lambda^2}{4}\Big)\right), \tag{4.8}$$

其中

$$\Gamma(u, v) = \int_v^\infty x^{u-1} e^{-x} dx$$

是不完全伽马函数。利用 Mathematica 可以看出，只要满足 $1 \leq \lambda \leq 7$，式 (4.8) 中的函数就大于 1。另一方面，再次利用 Mathematica 可以看出，只要满足 $1 \leq \lambda \leq 7$，式 (4.7) 左端的函数就小于 1。这就证明了引理 4.3。□

引理 *4.4* 的证明。由分部积分可得

$$2\lambda \int_a^b r^{\lambda-1} e^{-\frac{r^2}{4}} dr = 2b^\lambda e^{-\frac{b^2}{4}} - 2a^\lambda e^{-\frac{a^2}{4}} + \int_a^b r^{\lambda+1} e^{-\frac{r^2}{4}} dr.$$

因此，对于所有的 $a,\ b > 0$，我们有

$$\begin{aligned} 2\lambda f_\lambda(a) - 2f'_{\lambda+1}(a) - f_{\lambda+2}(a) = 0, \\ 2\lambda g_\lambda(b) - 2g'_{\lambda+1}(b) - g_{\lambda+2}(b) = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

由于 $f'_{\lambda+1}(a_{\lambda+1}) = g'_{\lambda+1}(b_{\lambda+1}) = 0$，不等式 (4.4) 等价于 (4.10)

$$\int_{a_{\lambda+1}}^{a_{\lambda+2}} f'_{\lambda+2}(u)du + \int_{b_{\lambda+1}}^{b_{\lambda+2}} g'_{\lambda+2}(v)dv < 2\lambda \left(\int_{a_{\lambda+1}}^{a_\lambda} f'_\lambda(u)du + \int_{b_{\lambda+1}}^{b_\lambda} g'_\lambda(v)dv \right).$$

使用变量 $u = s - 2$ 和 $v = s + 2$，我们得到以下等价形式：

$$\begin{aligned} &\int_{r_{\lambda+3}}^{r_{\lambda+4}} \left(2(\lambda+3) - s^2\right) \left[(s-2)^\lambda e^{-\frac{(s-2)^2}{4}} + (s+2)^\lambda e^{-\frac{(s+2)^2}{4}} \right] ds \\ &< 2(\lambda+1) \int_{r_{\lambda+2}}^{r_{\lambda+3}} \left(y^2 - 2(\lambda+1)\right) \left[(y-2)^{\lambda-2} e^{-\frac{(y-2)^2}{4}} + (y+2)^{\lambda-2} e^{-\frac{(y+2)^2}{4}} \right] dy. \end{aligned}$$

对于 $\lambda > 0$，我们定义函数

$$h_\lambda(s) = e^{-\frac{s^2}{4}} s^\lambda,\ H_\lambda(s) = h_\lambda(s-2) + h_\lambda(s+2).$$

因此，代入 $s = r_{\lambda+4} - t$ 和 $y = r_{\lambda+2} + t$，我们得到另一种等价形式：

$$\begin{aligned} &\int_0^{r_{\lambda+4} - r_{\lambda+3}} t(2r_{\lambda+4} - t) H_\lambda(r_{\lambda+4} - t) dt \\ &\quad < \int_0^{r_{\lambda+3} - r_{\lambda+2}} 2\lambda\, t(2r_{\lambda+2} + t) H_{\lambda-2}(r_{\lambda+2} + t) dt. \end{aligned} \tag{4.11}$$

由于凹性，我们有 $r_{\lambda+4} - r_{\lambda+3} < r_{\lambda+3} - r_{\lambda+2}$。因此，为了证明 (4.4)，等价地证明 (4.11)，只需证明以下逐点不等式：

$$(2r_{\lambda+4} - t) H_\lambda(r_{\lambda+4} - t) < 2\lambda(2r_{\lambda+2} + t) H_{\lambda-2}(r_{\lambda+2} + t) \tag{4.12}$$

对所有 $0 < t < r_{\lambda+4} - r_{\lambda+3}$ 均成立。

我们断言，不等式 (4.12) 在 $t = 0$ 时达到最紧。更准确地说，我们将证明

$$\begin{aligned} (2r_{\lambda+4} - t) H_\lambda(r_{\lambda+4} - t) &\leq 2r_{\lambda+4} H_\lambda(r_{\lambda+4}), \\ 4\lambda\, r_{\lambda+2} H_{\lambda-2}(r_{\lambda+2}) &\leq 2\lambda(2r_{\lambda+2} + t) H_{\lambda-2}(r_{\lambda+2} + t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

对所有 $0 < t < r_{\lambda+4} - r_{\lambda+3}$ 均成立。我们计算

$$
\begin{aligned}
h'_\lambda(s) &= e^{-\frac{s^2}{4}} s^{\lambda-1}\left(\lambda - \frac{s^2}{2}\right),\\
h''_\lambda(s) &= e^{-\frac{s^2}{4}} s^{\lambda-2}\left(\lambda(\lambda-1) - \frac{2\lambda+1}{2}s + \frac{s^2}{4}\right).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

由求根公式可知， $h''(s) \geq 0$ 当且仅当 $s^2 \leq s_0^2 = 2\lambda + 1 - \sqrt{8\lambda+1}$ 或 $s^2 \geq \overline{s_1^2 = 2}\lambda + 1 + \sqrt{8\lambda+1}$。对于 H''_λ，我们关注$s \in (r_{\lambda+3} - 2,\ r_{\lambda+5} - 2) \cup (r_{\lambda+3} + 2,\ r_{\lambda+5} + 2)$，并且可以看到

$$r_{\lambda+5} - 2 < s_0 \quad \text{and} \quad s_1 < r_{\lambda+3} + 2,$$

因为

$$s_0 = \sqrt{2\lambda + 1 - \sqrt{8\lambda+1}} > \sqrt{2(\lambda+4)} - 2 = r_{\lambda+5} - 2 \quad \text{whenever } \lambda > \lambda_0,$$

and

$$s_1 = \sqrt{2\lambda + 1 + \sqrt{8\lambda+1}} < \sqrt{2(\lambda+2)} + 2 = r_{\lambda+3} + 2 \quad \text{whenever } \lambda > 1.$$

因此，对于 $s \in (r_{\lambda+3},\ r_{\lambda+4})$ 和 $\lambda > \lambda_0$， $H''_\lambda(s) > 0$。

现在我们将证明 $H'_\lambda(r_{\lambda+3}) > 0$，或者等价地，

$$Q_\lambda := -\frac{h'_\lambda(r_{\lambda+3}+2)}{h'_\lambda(r_{\lambda+3}-2)} < 1.$$

根据（4.14），我们计算得

$$Q_\lambda = e^{-2r_{\lambda+3}}\left(\frac{r_{\lambda+3}+2}{r_{\lambda+3}-2}\right)^\lambda = e^{-2r_{\lambda+3}}\left(1 + \frac{4}{r_{\lambda+3}-2}\right)^{(r_{\lambda+3}^2-4)/2}. \tag{4.15}$$

有如下结论：（见 [10,附录]）

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x^2} \nearrow e^{ax}e^{-\frac{a^2}{2}},\ a > 0,\\
g(x) &= \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{x^2} \searrow e^{-ax}e^{-\frac{a^2}{2}},\ a > 0
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

因为 $x \to \infty$。注意， $r_{\lambda+3} > 2$ 当 $\lambda > 1$ 时。取 $x = \dfrac{r_{\lambda+3}-2}{\sqrt{2}} \geq 0$ 和 $a = 2\sqrt{2}$，我们可以估计

$$\left(1 + \frac{4}{r_{\lambda+3}-2}\right)^{\frac{(r_{\lambda+3}-2)^2}{2}} \leq e^{-2(r_{\lambda+3}-2)}e^{-4}. \tag{4.17}$$

由于

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \nearrow e^x$$

因为 $x \to \infty$，我们可以估计

$$\left(1 + \frac{4}{r_{\lambda+3}-2}\right)^{2(r_{\lambda+3}-2)} \leq e^{2(r_{\lambda+3}-2)}. \tag{4.18}$$

利用 (4.17) 和 (4.18)，我们可以对 (4.15) 的右端进行如下估计：

$$Q_\lambda = e^{-2r_{\lambda+3}}\left(1 + \frac{4}{r_{\lambda+3}-2}\right)^{\frac{(r_{\lambda+3}-2)^2}{2}+2(r_{\lambda+3}-2)} \leq e^{-2r_{\lambda+3}-4} < 1,$$

因为 $2r_{\lambda+3}+4\geq 0$。

证明的其余部分将用于证明不等式 (4.12) 在 $t=0$ 处的以下等价表述:

$$\ln(\mathcal{H}(r_{\lambda+4}))<\ln\left(e\frac{\lambda(\lambda+3)}{(\lambda+1)^2}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+3}\right)^{\frac{\lambda+3}{2}}\mathcal{H}(r_{\lambda+2})\right)=:I+\ln(\mathcal{H}(r_{\lambda+2})), \tag{4.19}$$

其中 $m=m(s)=\frac{s^2}{2}-3$ 和 $\mathcal{H}(s):=s^{-m}H_m(s)e^{(s^2+4)/4}=(1-\frac{2}{s})^{\frac{m}{2}}e^s+(1+\frac{2}{s})^{\frac{m}{2}}e^{-s}$。我们紧随 [10, 命题 9] 的证明。

我们回顾 $0<y<1$ 的自然对数幂级数展开:

$$\text{自然对数}(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\cdots+(-1)^{j+1}\frac{y^j}{j}+R_j^+(y)\ -\frac{y^{2K+2}}{2K+2}\leq R_{2K+1}^+(y)\leq 0, \tag{4.20}$$

and

$$\ln(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\cdots-\frac{y^j}{j}+R_j^-(y),\ -\frac{y^{j+1}}{(j+1)(1-y)}\leq R_j^-(y)\leq 0. \tag{4.21}$$

将偶次幂和奇次幂分开，可得

$$\left(\frac{s^2}{2}-3\right)\ln\left(1-\frac{2}{s}\right)+s=E_{2K-2}(s)+O_{2K-1}(s)+\mathcal{R}_{2K-1}^-(s),$$
$$\left(\frac{s^2}{2}-3\right)\ln\left(1+\frac{2}{s}\right)+s=E_{2K-2}(s)-O_{2K-1}(s)+\mathcal{R}_{2K-1}^+(s).$$

对于奇次幂，我们只需注意到函数 O_{2K-1} 在 s上是递减的。我们需要偶次幂的公式以及余项

$$E_{2K-2}(s):=-1+\sum_{j=1}^{K-1}\left(\frac{3}{2j}-\frac{2}{2j+2}\right)\left(\frac{2}{s}\right)^{2j},$$

$$\mathcal{R}_{2K-1}^{\pm}(s):=-3R_{2K-1}^{\pm}(\frac{2}{s})+\frac{s^2}{2}R_{2K+1}^{\pm}(\frac{2}{s}).$$

由（4.20）和（4.21），我们注意到 R_j^- 的（下）界占主导地位，因此只需考虑 $\mathcal{R}^-$。我们得到

$$-\frac{2}{(K+1)(s-2)}\left(\frac{2}{s}\right)^{2K-1}\leq\mathcal{R}_{2K-1}^-(s)\leq\frac{3}{K(s-2)}\left(\frac{2}{s}\right)^{2K-1}.$$

因此，对于 $m(s)=\frac{s^2}{2}-3$，有

$$\mathcal{H}(s)>2\exp\left(E_{2K-2}(s)-\frac{2}{(K+1)(s-2)}\left(\frac{2}{s}\right)^{2K-1}\right)\cosh(O_{2K-1}(s)),$$
$$\mathcal{H}(s)<2\exp\left(E_{2K-2}(s)+\frac{3}{K(s-2)}\left(\frac{2}{s}\right)^{2K-1}\right)\cosh(O_{2K-1}(s)).$$

由于双曲余弦$(O_{2K-1}(s))$ > 双曲余弦$(O_{2K+1}(s+\epsilon))$，为完成 (4.19) 的证明，我们证明

$$\left(E_{2K-2}(s)-E_{2K-2}(s+\epsilon)-\left(\frac{2}{K+1}+\frac{3}{K}\right)\frac{1}{s-2}\left(\frac{2}{s}\right)^{2K-1}\right)+I>0 \tag{4.22}$$

对于 $s=r_{\lambda+2}$ 和 $s+\epsilon=r_{\lambda+4}$，其中 I 在（4.19）中被隐式定义。s 和 $s+\epsilon$ 的值现已确定。

首先，我们通过展开为幂级数，并保留（$\lambda+1$）$^{-1}$和（$\lambda+3$）$^{-1}$中的低阶项，来估计（4.22）的最后一项:

$$\begin{aligned} I &> 1+\left(\frac{1}{\lambda+1}-\frac{2}{(\lambda+1)^2}\right)-\left(\frac{1}{\lambda+1}-\frac{2}{(\lambda+1)^2}\right)^2 \\ &\quad -1-\frac{1}{\lambda+3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\lambda+3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\lambda+3}\right)^3\frac{\lambda+3}{\lambda+1} \\ &> \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+3)}-\frac{3}{(\lambda+1)^2}-\frac{4}{3(\lambda+3)^2} \\ &> -\frac{3}{(\lambda+1)(\lambda+3)}-\frac{15}{(\lambda+1)^2(\lambda+3)^2}. \end{aligned}$$

$E_{2K-2}(s)-E_{2K-2}(s+\epsilon)$中的低阶项显式表示为

$$\begin{aligned} E_{2K-2}(s)-E_{2K-2}(s+\epsilon) &> \frac{4}{2(\lambda+1)}-\frac{4}{2(\lambda+3)}+\frac{20}{3(2(\lambda+1))^2}-\frac{20}{3(2(\lambda+3))^2} \\ &= \frac{4}{(\lambda+1)(\lambda+3)}+\frac{20}{3(\lambda+1)^2(\lambda+3)^2}. \end{aligned}$$

由于当 $s>8/3$ 时，$\frac{4}{s}>\frac{1}{s-2}$ $\lambda>23/9$（即当 $\lambda>23/9$时），误差项可估计为

$$-\left(\frac{2}{K+1}+\frac{3}{K}\right)\frac{1}{s-2}\left(\frac{2}{s}\right)^{2K-1}>-10K^{-1}(2/s)^{2K}.$$

回想起 $s=r_{\lambda+2}$，我们得到

$$E_{2K-2}(s)-E_{2K-2}(s+\epsilon)+I-10\frac{2^{2K}}{Ks^{2K}}>\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+3)}-10\frac{2^K}{K(\lambda+1)^K},$$

当 K 足够大时，该式为正。这就完成了引理 4.4 的证明。 □

对于固定的 λ，我们将矩形的角磨圆，同时保持长度小于 $2L_g(\mathcal{P})$。

定义 4.5。我们将 $\mathcal{R}[a,b,c_0]$ 定义为带圆角的 $R[a,b,c_0]$ 矩形。给定 $\lambda>1$，所有矩形均以相同方式进行圆角处理，使得对于所有 $a,\ b>0,\ L_g(\mathcal{R}[a,b,c_0])<2L_g(\mathcal{P})$。

作为一个直接推论，我们可以得到一个带圆角矩形的单参数族，其囲定高斯面积等于 2π。

推论 4.6。存在一个光滑函数 $\varphi:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，满足 $\varphi(a)>a$，使得矩形族 $\mathcal{R}[a,\varphi(a)\ c_0]$ 满足

$$GA_g(\mathcal{R}[a,\varphi(a),c_0])=2\pi\quad and\quad L_g(a,\varphi(a),c_0)<2L_g(\mathcal{P}).$$

注意，$\lim_{a\to0}\varphi(a)=0$。

命题 4.7。设 $\Phi:\ \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to C^0(\mathbb{S}^2,\ \mathbb{R}^2_+)$ 为具有以下性质的映射:

(i) $\Phi(a,0)=\mathcal{R}[a,\varphi(a)\ c_0]$. *(ii)* 对于固定的 $a,\ \Phi(a,t)$ 满足演化方程 (3.1)。那么存在 $a_0\in\mathbb{R}_+$，使得 $\Phi(a_0,t)$ 在所有时刻$t\in\mathbb{R}_+$都与圆柱面 $\mathcal{C}$ 相交。

证明。 不与圆柱面 $\mathcal{C}$ 相交的曲线集合分为两个不相交的子集:

$$A_1 = \Big\{\text{continuous closed curves } \gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2_+ \,|\, \gamma(s) < r_\lambda, s \in \mathbb{S}^1\Big\},$$
$$A_2 = \Big\{\text{continuous closed curves } \gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2_+ \,|\, \gamma(s) > r_\lambda, s \in \mathbb{S}^1\Big\}.$$

圆柱面 $\mathcal{C}$ 是一个自收缩子，因此在流下保持静止。根据最大值原理，若对于某个 $i = 1, 2$ 和某个 t_0，有 $\Phi(a, t_0) \in A_i$，那么对于所有 $t \geq t_0$，都有 $\Phi(a, t) \in A_i$。现在我们考虑 $\mathbb{R}_+$ 的以下子集:

$$U_i = \{a \in \mathbb{R}_+ \,|\, \exists t > 0 \text{ with } \Phi(a, t) \in A_i\}.$$

U_1 和 U_2 都是开集且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$。由于 $\mathbb{R}_+$ 是连通的，我们必有$U_1 \cup U_2 \neq \mathbb{R}_+$。这就证明了我们的断言。□

5. Convergence to a geodesic

我们有以下两个命题；它们的证明与 [10, 命题 14]和 [10, 命题 15] 的证明几乎相同，只需稍作修改，因此省略。

命题 5.1. 存在一个序列 t_i，使得

$$\int_{\gamma_t \cap E} |k_g| ds \to 0 \tag{5.1}$$

对于开半空间 $\mathbb{R}^2_+$ 中的任意紧子集 E。

命题 5.2. 设 t_i 为命题 *5.1* 中的序列（或其某个子列），并设 E 为 $\mathbb{R}^2_+$ 中的一个紧集。若对某个 $x_i \in \mathbb{S}^1$、$i \in \mathbb{N}$，序列 $\{\gamma_i(x_i)\}$ 收敛到一点 $P \in E$，则存在一个子列 i_j，使得 $\gamma_{i_j} \cap E$ 中包含 $\gamma_{i_j}(x_{i_j})$ 的连通分支在 E 中收敛于 C^1。极限曲线包含 P，并且在 E 中满足测地线方程。

5.1. **图形测地线方程的正解的性质**。当 $\gamma = (r, f(r))$ 是 r 轴上的图像时，测地线方程 (2.3) 等价于

$$\frac{f''}{(1 + f'^2)} = \left(\frac{r}{2} - \frac{\lambda - 1}{r}\right) f' - \frac{1}{2} f. \tag{5.2}$$

我们有以下引理；其证明与 [10, 引理 16], [10,引理 17]和 [10, 引理 18] 的证明相同，只需将 r_n 改为 r_λ，故略去。

引理 5.3。 方程：$I \to \mathbb{R}$ 的正解具有以下性质：*(i)* 函数 f 在 I 中没有局部极小值；*(ii)* 若 $f'(\rho_0) \geq 0$ 对某个 $\rho \in (0, r_\lambda) \cap I$ 成立，则 $f'' < 0$ 在 $(\rho_0, r_\lambda) \cap I$ 中成立；*(iii)* 若 $f'(\rho_0) \leq 0$ 对某个 $\rho \in (r_\lambda, \infty) \cap I$ 成立，则 $f'' < 0$ 在 $(r_\lambda, \rho_0) \cap I$ 中成立。

引理 5.4。 设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是一个正函数，在区间 $(\xi_1, \xi_3) \subseteq I$ 上满足 $f'' \leq 0$，且其图像下方的高斯面积小于 π，即

$$\int_{\xi_1}^{\xi_3} f(r) \left(1 + \frac{\lambda - 1}{r^2}\right) dr \leq \pi.$$

那么，对于任意 $\xi_2 \in [\xi_1, \xi_3]$，我们有

$$I(\xi_2) + II(\xi_2) + III(\xi_2) \leq \pi,$$

其中

$$I(\xi_2) := f(\xi_2)(\xi_3 - \xi_1)/2,$$
$$II(\xi_2) := \lambda f(\xi_2) \lim_{r\to\xi_2} \big(\ln(r/\xi_1) + \xi_1/r - 1\big)/(r - \xi_1),$$
$$III(\xi_2) := \lambda f(\xi_2) \lim_{r\to\xi_2} \big(\ln(r/\xi_3) + \xi_3/r - 1\big)/(\xi_3 - r).$$

引理 5.5。 若 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 是方程 (5.2) 的最大延拓解，则 $a < r_\lambda < b$。

结合引理 5.4，可以仿照 [10, 引理 19] 的证明得出以下结论：

引理 5.6。 设 $[\epsilon_0, R_0] \to \mathbb{R}$ 是方程 (5.2) 的一个解，其中 $r_\lambda \in (\epsilon_0, R_0)$。另外，假设 f 在 $[\epsilon_0, R_0]$ 上为正，且图像 f 下方的高斯面积至多为 π。那么

$$f(r) \le M_1 := \max\left(f(\epsilon_0), \frac{2\pi}{r_\lambda - \epsilon_0}\right),\ r \in [\epsilon_0, r_\lambda]$$

and

$$f(r) \le M_2 := \max\left(f(R_0), \frac{2\pi}{R_0 - r_\lambda}\right),\ r \in [r_\lambda, R_0].$$

定义 5.7。 设 L_0 为初始矩形 $\mathcal{R}[a_0, \varphi(a_0)\ c_0]$的长度。设 ρ 为一个小常数， R 为一个大常数，使得任意定义在 $(1/R, R)$ 上且满足 $h \le \eta$ 的正函数 h 的图像长度都大于 $\frac{1}{2}L_0$。

注意到，根据定义 4.5， $L_0 < 2L_g(\mathcal{P})$，因此这些常数确实存在。于是得到下面的命题；其证明与 [10, 命题 21]的证明相同。

命题 5.8。 设 R 如定义 *5.7* 所述。存在一个常数 $\delta > 0$，使得图形测地线方程 (5.2)在初始条件下的最大延拓解 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$

$$0 \le f(\rho_0) \le \delta \quad and \quad |f'(\rho_0)| \le \delta,\ \rho_0 \in (1/2, 2r_\lambda),$$

其区域包含 $[-1/R, R]$ ，并呈现以下两种行为之一： ***(i)*** 图像 $f([-1/R, R])$ 始终位于 r轴上方，且长度大于$\frac{1}{2}L_0$，或者

(ii) f 的图像以有限斜率在$(-1/R, R)$中的某一点穿过 r轴。

5.2. **收敛到一个不断缩小的甜甜圈**。 记 $a(i)$和 $b(i)$为 γ_i 与 r轴的交点，约定如下

$$a(i) < r_\lambda < b(i).$$

我们可以提取收敛子列 $a(i_j)$ 和 $b(i_j)$，使得

$$\lim_{j\to\infty} a(i_j) = a_\infty,\ a_\infty \in [0, r_\lambda],$$
$$\lim_{j\to\infty} b(i_j) = a_\infty,\ b_\infty \in [r_\lambda, \infty],$$

定义5.9。 对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 f_i： $(a(i)\ b(i)) \to [0, \infty)$ 为满足以下条件的函数

$$\big\{(r, f_i(r)), r \in (a(i), b(i))\big\} \subset \gamma_i(\mathbb{S}^1).$$

注意， f_i 通常不满足（5.2）。然而，根据命题 5.2，我们可以提取一个子列（仍记为 f_i），使其在任意紧集中的 C^1 上收敛于一条测地线 f。

根据 [10, 引理 23 和 24], ，我们可以证明 $a_\infty \in (0, r_\lambda)$以及 $b_\infty \in (r_\lambda, \infty)$。

现在考虑紧集

$$K = [a_\infty - 1, b_\infty + 1] \times [-M, M]$$

其中 M 与引理 5.6 中的定义相同，且 $\epsilon = a_\infty$ 和 $R_0 = b_\infty$。我们的子列 γ_i收敛到 K中的一条测地线 γ_∞ 。由于各条 γ_i与r轴的交点最终都位于 K中，因此 γ_∞ 与 r轴的交点位于 K中。曲线 γ_∞ 是一条连通的 C^1 曲线，满足 K中的测地线方程，因此它是光滑的。这就证明了定理 1.1。

References

1. S. Angenent, 《曲面上曲线的抛物型方程》I：具有 p 可积曲率的曲线，*Ann. of Math. (2)* **132** (1990)，第 3 期，451–483。2. S. Angenent, 《曲面上曲线的抛物型方程》II：交点、爆破与广义解，*Ann. of Math. (2)* **133** (1991)，第 1 期，171–215。3. S. Angenent, 《收缩甜甜圈》。非线性扩散方程及其平衡态，3（Gregynog，1989），21–38，*Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*，**7**，Birkh¨auser Boston，Boston，MA，1992。4. N. Batir，伽马函数的不等式，*Arch. Math. (Basel)* **91** (2008)，第 6 期，554–563。5. R. Buzano、H. T. Nguyen 和 M. B. Schulz，具有任意亏格的平均曲率流非紧自收缩子，*J. Reine Angew. Math.* **818** (2025)，35–52。6. J. Chen 和 A. Sun，流形中的平均曲率流与重数二收敛，*Math.Ann.* **392** (2025)，第 2 期，1943–1964。7. Q. M. Cheng、Z. Li 和 G. Wei，第二基本形式模长为常数的完备自收缩子，*Math. Z.* **300** (2022)，第 1 期，995–1018。8. T. H. Colding、W. P. Minicozzi 和 E. K. Pedersen，平均曲率流，

Bull. Amer. Math. ( )，第 – *Soc. (N.S.)* **52** 2015 2, 297 333 期。9. G. Drugan、H. Lee 和 X. H. Nguyen，具有对称性的闭自收缩子综述，*Results Math.* **73** 2018 ( )，第 1 期，论文编号 32，共 32 页。10. G. Drugan 和 X. H. Nguyen，变分方法构造收缩甜甜圈，*J. Geom. Anal.***28** (2018)，第 4 期，3725–3746。11. M. E. Gage，将凸曲面上的曲线变形为简单闭测地线，*Indiana Univ.* ( ), *Math. J.* **39** 1990 4, 1037 1059 第 – 期。12. G. Huisken，平均曲率流奇点的渐近行为，

J. Differential ( )，第 1 *Geom.* **31** 1990 299 期，285–。13. G. Huisken，凸曲面在平均曲率流下演化为球面，*J. Differential Geom.***20** (1984)，第 1 期，237–266。14. N. Kapouleas、S. J. Kleene 和 N. M. Møller，高亏格平均曲率自收缩子：非紧例子，*J. Reine Angew. Math.* **739** (2018)，1–39。15. N. Kapouleas 和 P. McGrath，推广线性化倍增方法，I：一般理论以及新的极小曲面和自收缩子，*Camb. J. Math.* **11** (2023)，第 2 期，299–439。16. X. H. Nguyen，平均曲率流下完备嵌入自相似曲面的构造，第三部分，*Duke Math. J.* **16**3 (2014)，第 11 期，2023–2056。17. O. Riedler，平均曲率流的闭嵌入自收缩子，*J. Geom. Anal.* **33**(2023)，第 6 期，论文编号 172，共 27 页。

Department of Mathematics, Tamkang University Tamsui, New Taipei City 251301, Taiwan*Email address*: paktungho@yahoo.com.hk