arXiv:2601.02859v1 [math.AP] 6 Jan 2026

¨由二阶椭圆方程的解实现的高阶霍尔德逼近

Grigori Rozenblum 和 Nikolai A. Shirokov

Abstract. 对于给定的区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上的二阶椭圆算子 $\mathcal{L}$，$\mathbf{N} \geq 3$，以及一个紧集 $\mathbf{K} \subset \Omega$，其阶数为 **N**-2-阿尔福斯-大卫正则，我们定义连续函数 $f(x)$ $x \in \mathbf{K}$ 的空间 $\mathcal{H}^{\mathbf{r}+\omega}_{\mathcal{L}}$ **(K)**。其中的函数对任意$\delta > 0$，都能在点 $x \in$**K** 的任意 δ- 邻域内，由方程 $\mathcal{L}u = 0$ 的解实现局部逼近，并具有 $\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta)$ 阶误差估计。对于这类函数，我们证明，存在方程相同的解在**K** 的 δ-邻域内实现整体逼近 v_δ，且具有相同阶的误差估计。我们还建立了这类函数 v_δ 及其导数的若干性质。

1. Introduction

1.1. 逼近问题。 用“好”函数逼近“坏”函数，是分析学中的经典课题之一。定性研究始于魏尔斯特拉斯定理，该定理阐明了连续函数可以用多项式逼近。此后的一项重要进展，是研究用微分方程的解逼近连续函数。对于相当一般的微分方程（具有某种唯一延拓性质），F.E. Browder 得到了一个基本结果 [5], [6]。

定量研究则起步较晚。一般而言，定量逼近结果通常具有以下共同结构:

(1) 描述一类待逼近的函数 $\mathscr{F}$；(2) 提出一类用于逼近的函数 $\mathscr{G}$；(3) 给出结果：建立逼近速度与逼近函数性质之间的定量关系。

用给定次数的多项式逼近连续函数时，误差的阶由该函数的光滑性决定，具体含义取决于适当的定义。

考虑用椭圆方程的解进行逼近时，将无处稠密集**K**上定义的一类函数视为 $\mathscr{F}$是合理的。事实上，反过来说，如果**K** 含有内点，那么只有方程的解才能被解逼近。因此，我们关注如何用二阶椭圆方程的解逼近定义在无处稠密紧集 $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 上的给定连续函数 f。当逼近

函数为调和函数且集合$\mathbf{K}$ 性质良好，例如是一个利普希茨曲面时，这方面已有许多结果，参见例如 [4], [1], [3], [10], [11], [12], [15], [16]以及其他许多文献。

当对 K 的条件限制较少时，可以引用 [2], [24], [27]。在这里，需要确定应使用哪些术语来描述函数 f 的性质，以确定逼近速度。如果我们只知道给定函数 f 在紧集 K 上连续，那么这种连续性的质量，以及相应的逼近质量，就可以用 f的连续模来描述。在这一方向上，论文 [27], 的作者研究了这样一个问题：用二阶椭圆方程 $\mathcal{L}u = 0$ （$\mathcal{L}$-调和函数）的解，逼近 $\mathrm{K} \subset \mathbf{R}^{\mathrm{N}}$上的连续函数 f ，该函数具有连续模 $\omega(\delta)$。文中证明，如果集合 K 是 Ahlfors-David N−2 正则的（大致而言，这意味着在其任意一点的任意邻域中，它都具有相同的豪斯多夫维数 N−2），那么对于任意 $\delta > 0$，函数 f 都可以在 $C(\mathrm{K})$中用函数 v_δ 逼近，使得对所有 $x \in \mathrm{K}$， $|f(x) - v_\delta(x)| \leq c\omega(\delta)$，函数 v_δ 在集合 K 的 δ-邻域$_\delta$ 中是$\mathcal{L}$-调和的；此外，该函数 v_δ 的质量由 δ控制，即，在 K_δ中有 $|\nabla v_\delta(x)| \leq C\frac{\omega(\delta)}{\delta}$。这符合一般原则： δ越小，逼近越好，即逼近误差越小；但逼近函数 v_δ越差：它只在更小的集合上是 $\mathcal{L}$-调和的，并且随着 δ 减小，其梯度可能增大。此外，还证明了一个逆定理：如果 K 上的连续函数 f 能够以上述意义、借助某个函数 $\omega(\delta)$，通过二阶椭圆微分方程的解进行逼近，那么 f 具有由 $\omega(\delta)$控制的连续模。

自然会认为，如果我们希望得到更好的逼近（误差优于 $O(\omega(\delta))$），同时保持逼近函数的质量不变，就应当对给定函数 f 作出一些更好的假设。如果集合 $\mathbf{K}$ 是一张光滑曲面（余维为 2），那么这种“更好”的性质自然会涉及 f 更高的经典光滑性。然而，如果我们只知道集合 $\mathbf{K}$ 是 Ahlfors-David N-2 正则的，就应当采用其他术语。

文献中已有一些方法，可用于在任意紧集上定义“良好”函数空间。其中一种方法是通过函数的局部逼近来描述函数类，即用多项式或其他具有充分正则性的函数进行逼近，参见 [7], [8], [28], 及其后的许多文献。

因此，预期的逼近结果应当表述为：“如果一个函数具有某种类型的局部逼近，那么它就具有相应质量的整体逼近”，其逼近函数为 $\mathcal{L}$-调和函数。

事实上，这正是本文的内容。具体而言，在我们的主要结果中，如果 f 是$\mathbf{K}$上的连续函数，并且对于任意 $\delta > 0$，都可以在任意点 $x \in \mathbf{K}$的 δ-邻域内，局部地由函数 $\Phi_{x,\,\delta}(y)$进行逼近，其中该函数是二阶椭圆方程 $\mathcal{L}(y,\ \partial_y)u(y) = 0$ 的解，且

2δ- x的邻域内的误差为 $O(\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta))$，$\mathbf{r} \geq 1$ （对于不同的 δ 值以及彼此接近的不同点 x，函数$\Phi_{x,\,\delta}$ 需满足某些自然的相容性条件），那么 f 在整个$\mathbf{K}$上都可以由同一个方程的解 v_δ 进行逼近，且误差阶相同，该解定义在$\mathbf{K}$的 δ-邻域内。需要注意的是，上述括号中提到的相容性条件是不可避免的：事实证明，它们是存在全局逼近的必要条件。

将这些结果与我们之前的论文 [27], （其中我们为 $\mathbf{r} = 0$建立了此类性质）进行比较，可以发现这里出现了一个额外的限制条件：这里要求局部逼近函数$\Phi_{x,\,\delta}(y)$必须是椭圆方程的解，而在 [27] 中并未施加此类限制。遗憾的是，这一限制是不可避免的。我们在论文中给出的一个例子展示了这样一个函数：它具有良好的多项式局部逼近，但不具有由调和函数进行的整体逼近。这种现象是由例子中集合 $\mathbf{K}$ 明显的复杂性造成的：很容易证明，对于更规则的$\mathbf{K}$，例如余维 2 的 Lipschitz 曲面，这类反例是不可能出现的；对于由光滑函数进行的局部逼近，则足以保证（当然也是必要条件）存在由$\mathcal{L}$-调和函数进行的整体逼近。

椭圆微分算子 $\mathcal{L}(x,\ \partial_x)$ 被假定具有某种有限光滑性的系数，$C^m(\Omega)$。主要逼近结果定理 1.2 针对 $m = 3$得以证明。在附加的光滑性条件下，主要结果可以得到一定程度的加强：不仅逼近函数 v_δ 在 $\mathbf{K}$上收敛于初始函数 f，而且它们的导数 $\partial^\alpha v_\delta$ （直到某个阶数，该阶数取决于 $\mathcal{L}$的系数的光滑性）也在 $\mathbf{K}$ 上收敛于某些函数 $f_{(\alpha)}$，这些函数可以理解为给定函数 f的广义导数。m 越大，就越能定义 f 的更高阶替代导数，参见定理 1.3。

1.2. **主要结果。1.** 这里给出主要逼近结果的精确表述。具体如下。设 $\omega(t)$ $t > 0$ 是满足以下条件的连续性模

$$\int_0^\tau \frac{\omega(t)}{t}dt + \tau\int_\tau^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \leq c\omega(\tau),\ 0 < \tau < \infty.$$

进一步，设$\mathbf{K}$ 是 R^{N} 中的一个N-2-阿尔福斯-大卫正则紧集（例如参见[9]）。设 Ω $\supset\mathbf{K}$ 是一个有界开连通集，在该集合上定义了一个形式自伴的二阶椭圆算子

$$\mathcal{L}u(x) = -\sum_{\mathrm{j,j'}} \partial_{\mathrm{j}}(a_{\mathrm{jj'}}(x)\partial_{\mathrm{j'}}u(x)) \equiv -\nabla\cdot(\mathbf{a}(x)\nabla u(x)),$$

其系数为 C^m- $a_{\mathrm{jj'}}$, $m \geq 3$。

固定连续性模 ω 后，对于整数 $\mathbf{r} \geq 0$，局部 $\mathcal{L}$-H¨older 类 $\mathcal{H}^{\mathrm{r}+\omega}_{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ 定义如下。

定义1.1。 若存在常数 $f(x)$、 $x \in \mathbf{K}$，属于$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{\mathbf{r}+\omega}$ **(K)**，则称连续函数满足以下条件：对于任意$x \in \mathbf{K}$ 以及任意 δ， $0 < \delta \leq 2\mathbf{diam}$ **(K)**，存在一个在球 B_δ **(**x**)** 上定义的函数 $\Phi_{x,\ \delta}$**(**y**)**，使得

$$\mathcal{L}_y \Phi_{x,\delta}(y) = 0,\ y \in B_\delta(x),$$
$$|f(y) - \Phi_{x,\delta}(y)| \leq \mathbf{c}_1 \delta^{\mathbf{r}} \omega(\delta),\ y \in B_\delta(x) \cap \mathbf{K}.$$

对于相近的点 x_1, x_2，逼近函数应满足以下意义上的一致性：对于某些常数 γ_1, γ_2， $\frac{1}{8} \leq \gamma_1 \leq 1 \leq \gamma_2 \leq 8$，若$\gamma_1 \delta_1 \leq \delta_2 \leq \gamma_2 \delta_1$，给定任意点 x_1， $x_2 \in \mathbf{K}$，使得球 $B_{\delta_1}(x_1)$ B_{δ_2}**(**x_2**)** 不相交，则不等式

$$|\Phi_{x_1,\delta_1}(y) - \Phi_{x_2,\delta_2}(y)| \leq \mathbf{c}_2 \delta_1^{\mathbf{r}} \omega(\delta_1). \tag{1.1}$$

对所有 $y \in B_{\delta_1}(x_1) \cap B_{\delta_2}$**(**$x_2$**)** 均成立，

回顾阿尔福斯-大卫正则性的定义。若存在某些常数 c'， c''， $0 < c' < c'' < \infty$，使得对于任意点 $x \in \mathbf{K}$ 以及任意 $r \leq \mathbf{diam(K)}$，都有 $c' r^{\varkappa} \leq \mu_{\varkappa}(B_r(x)) \leq c'' r^{\varkappa}$，其中 $\mu_{\varkappa}$ 是维数为 $\varkappa$. 的豪斯多夫测度，则称紧集 $\mathbf{K}$ 为维数 $\varkappa$ 的“AD 正则”集

我们用$\mathbf{K}_\delta$ 表示$\mathbf{K}$的 δ-邻域。 我们的第一个主要结果如下。

定理 1.2。 设$\mathbf{K}$ 是$\mathbf{N}$-2-*AD* 正则集。假设算子 $\mathcal{L}$ 的系数属于 C^3。那么，定义在$\mathbf{K}$ 上的函数 f 属于类$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{\mathbf{r}+\omega}(\mathbf{K})$，当且仅当对任意满足 $\delta < \frac{1}{4}\operatorname{diam}(\mathbf{K})$ 的情形，都存在一个逼近函数 $v_\delta(x)$ $\bar{x} \in \mathbf{K}_\delta$，使得对于某个常数$\mathbb{c} > 0$,

$$\mathcal{L}_y v_\delta(y) = 0,\ y \in \mathbf{K}_\delta; \tag{1.2}$$
$$|v_\delta(x) - f(x)| \leq \mathbb{c} \delta^{\mathbf{r}} \omega(\delta),\ x \in \mathbf{K};$$
$$|v_\delta(y) - v_{\delta/2}(y)| \leq \mathbb{c} \delta^{\mathbf{r}} \omega(\delta),\ y \in \mathbf{K}_{\frac{\delta}{2}}.$$

1.3. 证明思路。 主定理的证明相当技术性，因此我们认为有必要在此说明其结构。

给定紧集$\mathbf{K}$上的函数 $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{\mathbf{r}+\omega}$ **(K)**，我们构造其特殊延拓 f_0，将其延拓到$\mathbf{K}$ 的一个固定邻域 Ω（该邻域的具体形式并不重要，以下我们进一步假设它是包含集合$\mathbf{K}$ 的单位球，而集合$\mathbf{K}$ 包含在半径为$1\ 3$的同心球内）。对于此函数 f_0，利用 Ω 中算子 $\mathcal{L}$ 的格林函数 $G^\circ(x, y)$，可建立如下积分表示：

$$f_0(x) = \int_\Omega \mathcal{L} f_0(y) G^\circ(x, y) dy,\ x \in \Omega. \tag{1.3}$$

尽管当 f_0 足够光滑时，这种表示看起来相当常见，但对于我们的 函数 f_0，情况并非如此；其导数在趋近$\mathbf{K}$时可能表现得很差。因此，为了证明 **(1.3)**，我们需要详细控制

$\mathcal{L}f_0(x)$ 的行为，以及 $f_0(x)$ 的导数在$\mathbf{K}$附近的行为。要获得这种控制，需要对格林函数 $G_{x,\ r}(x,\ y)$ 进行复杂的估计，其中 $\mathcal{L}$ 位于以 x 为中心的球 $B_r(x)$ 内；还需估计其关于变量 x，y 的最高三阶导数，以及关于附加变量 ς 的导数，算子 $\mathcal{L}$ 将该变量作为参数依赖。在算子 $\mathcal{L}$ 的系数具有足够光滑性的条件下，我们采用 Schauder 型方法直接推导出其中一些估计，另外一些则取自 Ju. Krasovskii [18], 和 M. Gr¨uter–K.-O. Widman [14] 的研究结果。最后，在建立表示式 (1.3) 后，我们通过积分定义所求的逼近函数 $v_\delta(x)$

$$v_\delta(x)=\int_{\Omega\setminus\mathbf{K}_\delta}\mathcal{L}f_0(y)G^\circ(x,y)dy,$$

再加上一组性质较简单的若干补偿性 $\mathcal{L}$-调和项，见 (4.17)。显然， v_δ 在$\mathbf{K}_\delta$ 中是 $\mathcal{L}$-调和的；这由格林函数 $G^\circ(x,y)$ 的定义可知，而逼近效果的估计则由我们对函数 $f_0(x)$及其导数的估计得出。

1.4. **主要结果。2.** 第二个定理描述了逼近函数 v_δ 的性质：其导数可控制到预先指定的阶数 $k\le\mathbf{r}+1$ 。此外，我们可以用一致的方式定义初始函数 f 在$\mathbf{K}$上的广义导数 $f_{(\alpha)}$，使得 v_δ 的导数逼近 f 的这些导数。这一性质要求算子 $\mathcal{L}$的系数具有一定的额外光滑性。

定理 1.3。 假设$\mathbf{r}\ \ge\ 1$且系数$\mathbf{a}(x)\ =\ (a_{\mathrm{jj'}}(x))_{\mathrm{j,j'}\le\mathbf{N}}$属于 $C^{k_0+3}(\Omega)$，其中某个 $k_0\le\mathbf{r}$。设函数 f 定义在紧集$\mathbf{K}$上，且属于类 $H^{\mathbf{r}+\omega}_{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$， v_δ 是其按(1.2)所作的逼近。那么 v_δ 的导数满足

$$\|\nabla^{k_0+1}v_\delta\|_{\mathbf{K}_{\delta/2}}\le c\frac{\omega(\delta)}{\delta}.\tag{1.4}$$

此外，还可以定义替代导数 $f_{(\alpha)}(x)$，使得

$$|f_{(\alpha)}(x)-\partial^\alpha v_\delta(x)|\le C\delta^{\mathbf{r}-|\alpha|}\omega(\delta),\ x\in\mathbf{K},\ 1\le|\alpha|\le k_0.\tag{1.5}$$

1.5. **论文结构。** 我们首先在第 2 节介绍有关某些几何考量的一般内容，并给出后续分析中使用的重要积分以及格林函数导数的估计，其中包括 [18] 和 [14], 的结果。在第 3 节，我们引入平均核$K(x,\ y)$，并证明其导数的估计。这是论文中技术性最强的部分。接下来，在第 4 节，我们构造延拓函数 f_0，推导其重要性质并证明其积分表示，由此给出给定函数 $f(x)\ \in H^{\mathbf{r}+\omega}_{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ 所需的逼近，从而证明定理 1.2。在第 5 节，我们讨论函数 f的广义导数，并证明定理 1.3。然后，在第 6 节，我们给出一个例子，说明

对于野集 $\mathbf{K}$，关于局部逼近的条件通常不能放宽。

关于格林函数导数的估计以及重要积分不等式的证明，见附录。

1.6. 约定。 在本文中，只要不引起混淆，我们用同一符号c 或 C 表示不同的常数，这些常数的具体取值并不重要；有时会使用下标或上标，以区分同一公式中的此类常数。较为重要的常数可能会用不同字体标出。用 $f'_x = \partial_x f = \nabla_x f$ 表示函数 f的 x-梯度；对于向量值函数 F， $\nabla_x F$表示 F的雅可比矩阵。符号 $|\cdot|$ 表示所涉及向量的欧几里得范数，$\mathbf{E}$ 表示单位矩阵。

2. Some preparatory facts

2.1. 几何考量。 设 $b_{\mathbf{N}}$ 为维数为N-2 的 Ahlfors-David 正则集覆盖性质中的常数，见其中的 [20], 引理 2.1 和[27],推论 2.2，即

性质 2.1。 对于任意 $\delta < \operatorname{diam}(\mathbf{K})$，存在一个有限覆盖 $\Upsilon(\delta)$，由半径为 δ 的开球 $B_\delta(x_{\boldsymbol{\alpha}})$ 覆盖 $\mathbf{K}$ ，

$$\mathbf{K} \subset \bigcup_{x_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{K}} B_\delta(x_{\boldsymbol{\alpha}}) \equiv \mathbf{K}_{(\delta)},$$

使得对于任意 $r \in [\delta, \operatorname{diam}(\mathbf{K})]$ 和任意一点 $\xi_0 \in \mathbf{K}$，球 $B_r(\xi_0)$ 中的点数 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 不超过 $b_{\mathbf{N}} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{\mathbf{N}-2}$。

此时我们的目标是：对于上述覆盖中的每个球 $B_\delta(x_{\boldsymbol{\alpha}})$，关联一个半径为 2δ 的新球，其中心距 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 δ 阶距离，并且该球与 $\mathbf{K}^{(\delta)}$ 之间也相隔一个 δ 阶距离。

我们用 $\sigma_{\mathbf{N}}$ 表示 $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. 中单位球面的面积。接下来，引入一个系数 $A = A_{\mathbf{N}}$，其值稍后将以一种特殊方式确定。因此，对于任意 x，球面 $S_{\delta A}(x)$，其 N-1 维面积测度等于 $\sigma_{\mathbf{N}} A^{\mathbf{N}-1} \delta^{\mathbf{N}-1}$。

我们在性质 2.1 中覆盖 $\Upsilon(\delta)$ 的球的中心中取一点 $x_{\boldsymbol{\alpha}_0}$，并暂时将距离 $x_{\boldsymbol{\alpha}_0}$ 最近的 $\mathbf{K}$ 中的点（之一）记为 $\xi_0 \equiv \xi_{\boldsymbol{\alpha}_0}$ （这些点可能重合），于是 $|\xi_0 - x_{\boldsymbol{\alpha}_0}| \le \delta$. 对于球$\mathbf{B} := B_{\delta(A+4)}(\xi_0)$，上述覆盖 $\Upsilon(\delta)$ 中，中心 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 位于$\mathbf{B}$内的球 $B_\delta(x_{\boldsymbol{\alpha}})$ 至多有 $b_{\mathbf{N}}(A+4)^{\mathbf{N}-2}$ 个。我们以任意方式在球面$\mathbf{S}:= S_{\delta A}(\xi_0)$ 上放置 $m \le b_{\mathbf{N}}(A+4)^{\mathbf{N}-2}$ 个点 ζ_k，并计算球面$\mathbf{S}$ 上被以这些点 ζ_k 为中心、半径为 6δ 的球的并集所覆盖部分的面积；我们将此面积记为 $\sigma(\xi_0,\ \delta)$。此面积不大于球面$\mathbf{S}$上被单个球覆盖的球冠面积之和，因此，

$$\sigma(\xi_0, \delta) \le 6^{\mathbf{N}-1} \sigma_{\mathbf{N}} b_{\mathbf{N}} (A+4)^{\mathbf{N}-2} \delta^{\mathbf{N}-1}. \tag{2.1}$$

˜我们将方程的最大正根记为 $A_{\mathbf{N}}$

$$6^{\mathbf{N}-1}b_{\mathbf{N}}(\tilde{A}_{\mathbf{N}}+4)^{\mathbf{N}-2}=\frac{1}{2}\tilde{A}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{N}-1}$$

并设

$$A=\max(\tilde{A}_{\mathbf{N}},13). \tag{2.2}$$

由 (2.1)、(2.2) 可知，无论我们在球面 $\mathbf{S}$ 上放置哪些点 ζ_k，只要它们不超过 $b_{\mathbf{N}}(A+4)^{N-2}$ 个，球面的面积至少有一半未被同心球 $B_{6\delta}(\zeta_k)$覆盖。我们将球面上这部分未覆盖的部分记为 $\mathcal{Y}\equiv\mathcal{Y}_{x_0,\ \delta}(\{\zeta_k\})$，于是，

$$\operatorname{meas}_{\mathbf{N}-1}(\mathcal{Y}_{x_0,\delta}(\{\zeta_k\}))\geq\frac{1}{2}\operatorname{meas}_{\mathbf{N}-1}\mathbf{S}.$$

接下来我们考虑以下几何构造。我们以一种特殊方式选取上述点 ζ_k 。将闭球形环域 $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}=B_{A_{\mathbf{N}}+4\delta}(\xi_0)\setminus B_{A_{\mathbf{N}}-4\delta}(\xi_0)$ 记为，并且只考虑仅位于 $\mathcal{P}$ 中的那些点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$。假设某个点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 位于球面 $\mathbf{S}$ 上。于是我们令 $\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}=x_{\boldsymbol{\alpha}}$。如果 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 不位于该球面上，我们考虑从 ξ_0 出发并经过 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 的射线，将其记为 $\overrightarrow{[\xi_0,x_{\boldsymbol{\alpha}}]}$，并取该射线与球面 $\mathbf{S}$的交点作为 $\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}$ 。如上所述，集合 $\mathcal{Y}$ 非空。我们从该集合中任取一点 V。

我们的构造从在性质 2.1 中选取一点 $\xi_0\equiv x_{\boldsymbol{\alpha}_0}$ 开始。为反映这一点，我们将刚定义的点 V标记为 $V_{\boldsymbol{\alpha}_0}$，从而保持 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 固定。

我们将从下方估计 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 与 $V_{\boldsymbol{\alpha}_0}$之间的距离。对于 $\mathcal{P}$中的一点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 以及 $\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}\in\mathbf{S}$，有 $|V_{\boldsymbol{\alpha}_0}-\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}|\geq 6\delta.$ 点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 位于射线 $\overrightarrow{[\xi_0,\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}]}$上，因此，$|x_{\boldsymbol{\alpha}}-V_{\boldsymbol{\alpha}_0}|$ 不小于从 $V_{\boldsymbol{\alpha}_0}$向 $\overrightarrow{[\xi_0,\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}]}$作垂线的长度。由于 $|\xi_0-\zeta_{\boldsymbol{\alpha}}|=|\xi_0-V_{\boldsymbol{\alpha}_0}|\geq 13\delta,$这条垂线的长度不小于 4δ。因此，对于 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$，有

$$B_{2\delta}(x_{\boldsymbol{\alpha}})\cap B_{2\delta}(\xi_0)=\varnothing. \tag{2.3}$$

反之，若点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 不属于 $\mathcal{P}$，则（2.3）显然成立 .

这样，对于每个起始点 $x_{\boldsymbol{\alpha}_0}$，我们都关联一个点 $V_{\boldsymbol{\alpha}_0}$，使得$B_{2\delta}(x_{\boldsymbol{\alpha}})\cap B_{2\delta}(V_{\boldsymbol{\alpha}_0})=\varnothing$ 对所有 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\alpha}_0$均成立。此外，

$$|V_{\boldsymbol{\alpha}_0}-x_{\boldsymbol{\alpha}_0}|\leq|V_{\boldsymbol{\alpha}_0}-\xi_0|+|\xi_0-x_{\boldsymbol{\alpha}_0}|\leq 14\delta,$$

因此，点 $V_{\boldsymbol{\alpha}_0}$ 与 $\mathbf{K}$ 分离

最后，我们引入以下记号

$$\mathbf{K}'_\delta=\bigcup_{x_{\boldsymbol{\alpha}}}B_{2\delta}(x_{\boldsymbol{\alpha}});$$

由此可得 $\mathbf{K}_\delta\subset\mathbf{K}'_\delta$

2.2. **若干积分的估计**。 在研究近似时，我们需要对一些涉及到集合$\mathbf{K}$的距离的积分进行估计。这里给出相关表述；证明见附录。

设$\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 是一个紧集，且为N-2-正则，并设点 x 位于$\mathbf{K}$之外，$d(x) \equiv \text{dist}\,(x, \mathbf{K}) \leq \delta$.

引理 2.2。

$$\int_{B_{2\delta}(x)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2}} dy \leq C\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta). \tag{2.4}$$

引理 2.2 有一个有用的推论。

推论 2.3。 在对 x 施加相同条件的情况下，

$$\int_{B_{2\delta}(x)} d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))dy \leq c\delta^{\mathbf{r}+\mathbf{N}-2}\omega(\delta). \tag{2.5}$$

另一个重要性质涉及积分

$$I_k(x) = \int_{B_{c_0\delta}(x)} \frac{d(y)^{k-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2+k}} dy,\ x \in \mathbf{K}, c_0 \geq 2. \tag{2.6}$$

引理 2.4。 对于 $k > 0$，不等式成立

$$I_k(x) \leq c\omega(\delta(x)). \tag{2.7}$$

有一个有用的推论：

推论 2.5。对于 $1 \leq k <\mathbf{r}$,

$$J_k = \int_{B_{c_0\delta}(x)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|y-x|^{\mathbf{N}-2+k}} dy \leq c\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta). \tag{2.8}$$

在下一个引理中，我们估计球的补集 $\complement B_{c_0\delta}(x)$ 上的积分。

引理 2.6。 对于 $k > 0$，我们有

$$\int_{\complement} B_{c_0\delta(x)} \frac{d(y)^{k-2}\omega(d(y))}{|y-x|^{\mathbf{N}-1+k}} dy \leq c\frac{\omega(\delta)}{\delta}. \tag{2.9}$$

引理 2.7。令 $\mathbf{r} \geq 1$, $x_0 \in \mathbf{K}$ $x \in \complement\mathbf{K}$ 并且 $|x - x_0| \leq \delta/2$。那么

$$\int_{B_\delta(x)} d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))|x-y|^{2-\mathbf{N}} dy \leq C\delta^r\omega(\delta)$$

$$\int_{B_\delta(x_0)} d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))|x_0-y|^{2-\mathbf{N}} dy \leq C\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta).$$

最后，我们需要以下估计。

引理 2.8。 在引理 *2.7*的条件下，

$$\mathcal{J}(x) = \int_{|x-y|>\delta} d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))|x-y|^{1-\mathbf{N}} dy \leq C\delta^{-1}\omega(\delta). \tag{2.10}$$

2.3. **格林函数的导数估计**。 这里给出一些关于格林函数及其导数的结果。

设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \partial_x)$ 是定义在半径为 $R \leq 1$ 的球 B_R 内的二阶一致椭圆算子，满足狄利克雷边界条件，且 $G(x, y) \equiv G^R(x, y)$ 是 $\mathcal{L}$ 在 B_R 中的格林函数。

第一类估计针对单位球 $R = 1$, $B = B_1$, $G = G^\circ$, ¯ ¯，我们需要它们对所有点 $(x, y) \in (B \times B)$，$x \neq y$ 都成立。我们关注的是当 x 接近 y 时，估计 $G(x, y)$ 的导数的奇异性。在对系数施加相当弱的限制条件下，即若$\mathbf{a}(x) \in L_\infty(B)$ 且为 Dini 连续，则 $G(x, y)$ 及其导数 $G_x(x, y)$, $G_y(x, y)$, $G_{xy}(x, y)$ 的此类估计已在 [14], 中建立。于是

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G(x, y)| \leq C|x - y|^{-\mathbf{N}+2-|\alpha|-|\beta|}, \tag{2.11}$$

对于 $|\alpha|$, $|\beta| \leq 1$, 常数 C 取决于 Dini 类中系数的范数以及椭圆性常数。

高阶导数的估计需要系数具有更高的正则性。我们只需要对导数 $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta G(x, y)$ $|\beta| \leq 1$ 进行估计。这里我们引用 Yu.Krasovskii 针对我们这一特定情形给出的结果, [18],见定理 3.3 及其推论。

¯**定理 2.9.** 设系数 $\mathbf{a}(x)$ 属于 $C^m(B)$ $m \geq 3$。则

$$|\partial_x^\alpha \partial_x^\beta G(x, y)| \leq C|x - y|^{-\mathbf{N}+2-|\alpha|-|\beta|}, \ |\alpha| < m - 1, \tag{2.12}$$

常数 C 取决于系数的 C^m范数以及椭圆性常数 $t.$

我们还需要格林函数 $G^R(x, y)$ 在半径为 $R < 1$ 的球 B_R 中的导数估计。

推论 2.10. 在定理 *2.9* 的条件下，对于球 B_R，格林函数 $G^R(x, y)$ 在球 B_R 中满足估计 (2.12)，常数为常数 C，取决于系数的 C^m范数和椭圆性常数，但不取决于 R。

证明。 设算子 $\mathcal{L}$ 定义在球 B_R内，例如该球的中心位于原点。我们通过伸缩 $\mathbf{x} = R^{-1}x$ 将其变换到单位球 B_1。在这一伸缩下， x 或 y 中 α 阶导数的 C^0 范数会乘上因子 $R^{|\alpha|} < 1$. 因此，系数的 C^m 范数不会增大。根据链式法则，以x 变量表示的格林函数等于伸缩后算子在$\mathbf{x}$ 变量下的格林函数乘以 $R^{2-\mathbf{N}}$，

$$G^R(x, y) = R^{2-\mathbf{N}} G^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

而格林函数的估计可由单位球中的估计推出。同样的伸缩也适用于格林函数的导数。□

第二类结果涉及半径为 $R \leq 1$ 的球 B_R 中，关于点 x, y 相距较远 的格林函数，即点 x 位于一个较小的

邻域内，该邻域以球的中心点 0 为中心，而 y 位于某个边界点 y° 的邻域内。算子 $\mathcal{L}$ 还取决于点 $\varsigma_0 = \mathbb{0} \in \mathbf{R^N}$ 邻域内的附加参数 ς，我们需要对导数进行估计

$$|G_x|, |G_y|, |G_{xy}|, |G_{x\varsigma}|, |G_{xy\varsigma}|, |G_{xx\varsigma}|, |G_{yy\varsigma}|, |G_{x\varsigma\varsigma}|, |G_{xxy}| \le C, \tag{2.13}$$

对于这样的 x，y，关于这些变量是均匀的，并且对于 $\varsigma = 0$。

同样，我们从单位球 $R = 1$ 和格林函数开始，记作$G^\circ(x,\ y;\varsigma)$。

定理 2.11。假设算子 $\mathcal{L}(\varsigma) = -\nabla(\mathbf{a}(x,\varsigma)\nabla)$ 是一致椭圆的，且其系数满足 $\partial_x^\alpha \partial_\varsigma^\gamma \mathbf{a}(x,\varsigma) \le c_0$，对于 $|\alpha| + |\gamma| \le 3.$。那么当$x$ 接近 $\mathbb{0}$、y 接近 $y^\circ \in \partial B_1$ 时，格林函数的导数$G^\circ(x,y,\varsigma)$满足 $(2.13\bar{)}$，其中常数 C取决于上述空间中系数的范数以及椭圆性常数。

证明见附录 B。定理 2.11 的一个简单推论如下。

推论 2.12. 在定理 *2.11* 的条件下，设 $B_R \subset B_1$ 为半径为 $R < 1$的球，则对于算子 $\mathcal{L}$ 在 B_R中的格林函数 G^R，有以下估计。

$$\begin{gathered}
|G^R_\varsigma(x,y;\varsigma)|, |G^R_{\varsigma\varsigma}(x,y;\varsigma)| \le CR^{2-\mathbf{N}}; \\
|G^R_x(x,y;\varsigma)|, |G^R_y(x,y;\varsigma)|, |G^R_{x\varsigma}(x,y;\varsigma)|, |G^R_{x\varsigma\varsigma}(x,y;\varsigma)| \le CR^{1-\mathbf{N}}, \\
|G^R_{xy}(x,y;\varsigma)|, |G^R_{xy\varsigma}(x,y;\varsigma)|, |G^R_{xx\varsigma}(x,y;\varsigma)| \le CR^{-\mathbf{N}}, \\
|G^R_{xyy}(x,y;\varsigma)| \le CR^{-1-\mathbf{N}},
\end{gathered} \tag{2.14}$$

其中常数 C 由算子$\mathcal{L}$ 的系数的 $C^3(B_R \times B_\epsilon)$-范数及其椭圆性常数确定。

证明。证明过程重复了上述伸缩推理。 □

3. The generating kernel and the extension

3.1. 延拓算子。这里我们将介绍给定函数 $f \in \mathcal{H}^{\mathfrak{r}+\omega}_{\mathcal{L}}(\mathbf{K})$ 到 $\mathbf{R^N}$ 的光滑延拓，并控制其导数。

令 $\mathcal{Q} = \{Q\}$ 为集合 $\complement\mathbf{K} = \mathbf{R^N} \setminus \mathbf{K}$ 的惠特尼开立方体分解。回顾一下，这意味着 $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} Q = \complement\mathbf{K}$，且 $\mathcal{Q}$ 中不同的立方体彼此不相交。此外，若 $\mathbf{a}_Q$ 是立方体 $Q \in \mathcal{Q}$ 的中心，$\delta(Q) = \operatorname{dist}(\mathbf{a}_Q, \mathbf{K})$，则 $\frac{1}{8}\delta(Q) \le \operatorname{diam} Q \le \frac{1}{4}\delta(Q)$。对于 $Q \in \bar{\mathcal{Q}}$，我们用 $x_Q \in \mathbf{K}$ 表示 K 中距 $\mathbf{a}_Q$ 最近的点（之一），$d(\mathbf{a}_Q) = |x_Q - \mathbf{a}_Q|$；对于 $y \in Q$，$\delta(Q) \le 2\operatorname{diam}\mathbf{K}$，我们定义

$$\tilde{f}_0(y) = \Phi_{x_Q, 2\delta(Q)}(y) \tag{3.1}$$

其中 $\Phi_{x_Q,\ 2\delta(Q)}(y)$ 是定义类 $\mathcal{H}^{r+\omega}_{\mathcal{L}}$ (K) 时涉及的函数，参见定义1.1。若点 y 不属于任何一个 $Q \in$Q ，或者属于一个˜ ˜远处的立方体，$\delta(Q) > 2$diam K，则令 $f_0(y) = 0.$ 。如此定义的函数 f_0，是分段 $\mathcal{L}$-调和的，但在 $\mathcal{Q}$ 中各立方体的边界上可能以不可控的方式不连续。现在我们使用平均核 $K(x,\ y)$，它将在本节稍后构造，并令

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}_0(y) K(x,y)dy. \tag{3.2}$$

我们将证明，这个函数是 f 在 K，的一个邻域上的连续延拓；当趋近K时，其导数的行为受到控制。函数$f_0(x)$之后将用于构造所需的逼近。

3.2. 核 K的构造。我们的推理将采用构造性方法。第一步是描述一个合适的平均核。我们将点 $x \in$ CK到K的正则化距离记为 $d_0(x)$，即 $d_0(x) \in C^3$(CK)，c dist (x, K) $\leq d_0(x) \leq c'$ dist (x, K) $c' < \frac{1}{4}$，$|\text{grad}^{\ k} d_0(x)| \leq c d_0(x)^{1-k}$，$k$ =1, 2, 3。令 h(t) 为 C^∞(R+)中的函数，h(t) ≥ 0，supp h $\subset_- [\frac{1}{2}, 1]$，并将其归一化，使得 $\int_0^1$ h(t)$dt = 1$。缩放后的函数 $h_r(t) = r^{-1}$h(t/r)按如下方式归一化： $\int_0^\infty h_r(t)dt = 1.$ 。接下来，对于 $x \in$ CK $t < r = d_0(x)$，我们将球面 $\{y :\ |y - x| = t\}$记为 $S_t(x)$，并将相应的开球记为 $B_t(x)$；它们不与K相交，而且与K保持受控的距离。

接下来，对于我们的椭圆算子

$$\mathcal{L}(x, \partial_x) = -\sum_{\mathrm{j,j'}} \partial_{\mathrm{j}} a_{\mathrm{jj'}}(x) \partial_{\mathrm{j'}} \equiv -\nabla \cdot (\mathbf{a}(x)\nabla) \tag{3.3}$$

在包含 K 的单位球 $\Omega \equiv B_1$(O) 中，我们构造平均核$K(x,\ y)$。对于算子 $\mathcal{L}$，它将取代拉普拉斯算子通常使用的平均值核：也就是说，对于任意点 $x \in$ C K 以及函数 $\phi(y)$，在球 $B_r(x)$ $\phi \in$ ~~C~~(~~B_r~~(x)) 中为 $\mathcal{L}$-调和的 $r = r(x) \leq d_0$ (x)，以下表示成立：

$$\phi(x) = \int_{B_r(x)} K(x,y)\phi(y)dy.$$

$K(x, y)$ 的构造如下进行。对于固定点$z \in$ CK，我们用 $G_{z,t}(x, y)$ 表示$\mathcal{L}$ 在球 $B_t(z)$ 中的狄利克雷问题的格林函数。因此，在此记号中，下标中的变量 (z, t) 表示所考虑格林函数的区域，即球，而 (x, y) 则是格林函数值所依赖的变量。我们尤其关注 $G_{x,t}(x, y)$，即格林函数在球面的中心点处的值。特别地，在球面 $|y - x| = t$上有 $G_{x,t}(x, y) = 0$ 。由于算子 $\mathcal{L}$ 是厄米的，我们有 $G_{x,t}(x, y) = G_{x,t}$ (y, x)。

对于 $t \in [r/2, r]$, $y \in S_t(x)$，我们用 $\boldsymbol{\nu}_y(t)$ 表示球面 $S_t(x)$ 在点 $y \in S_t(x)$ 处的外部 $\mathcal{L}$-余法向量；也就是说，对于 (3.3) 中的算子 $\mathcal{L}$ ，余法向量的分量为 $(\boldsymbol{\nu}_y(t))_j = \sum_{j'} a_{j,j'}(y)\mathbf{n}_{j'}(y)$，其中 $\mathbf{n}_{j'}(y)$ 是 $S_t(x)$ 在点 y 处的欧几里得法向量的分量（注意，余法向量未经归一化）。

根据椭圆方程解的经典表示公式，对于函数 ϕ，只要 $\phi \in C(B_t(x))$, $\mathcal{L}\phi = 0$ 属于$B_t(x)$，下列方程便成立：

$$\phi(x) = \int_{S_t(x)} \partial_{\boldsymbol{\nu}_y} G_{x,t}(x,y)\phi(y)d\sigma_t(y), \tag{3.4}$$

其中， $d\sigma_t$ 是球面 $S_t(x)$上的面积元素。我们将 (3.4) 乘以 $h_r(t)$，$r = d_0(x)$, 并对 t 积分。根据我们的归一化，积分后 (3.4) 的左端仍等于 $\phi(x)$，而右端则成为在球形环域 $\mathcal{R}_r(x) = B_r(x) \setminus B_{\frac{r}{2}}(x)$ 上的积分：

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{R}_r(x)} h_r(|x-y|)\partial_{\boldsymbol{\nu}_y} G_{x,|x-y|}(x,y)\phi(y)dy,\ r = d_0(x). \tag{3.5}$$

我们将把 (3.5) 中的核作为 $K(x, y)$：令

$$K(x,y) = h_{d_0(x)}(|x-y|)\partial_{\boldsymbol{\nu}_y} G_{x,|x-y|}(x,y),$$

当 $y \in \mathcal{R}_r(x)$ 时，而 $K(x, y)$ 在其他情况下为 $= 0$。

由此可知，函数 $K(x, y)$ 满足

$$|K(x,y)| \le c d_0(x)^{-\mathbf{N}},\ y \in \mathcal{R}_r(x).$$

下面，我们还需要估计同一区域 $y \in \mathcal{R}_r(x)$ 中核$K(x, y)$ 的导数，即：

$$|\nabla_x K(x,y)| \le c d_0(x)^{-\mathbf{N}-1}, \tag{3.6}$$

and

$$|\nabla_x^2 K(x,y)| \le c d_0(x)^{-\mathbf{N}-2}. \tag{3.7}$$

这些估计将在后文中建立。

3.3. **(, y)** 的导数估计。**一阶导数**。由于 K 对 x 的依赖相当隐含，其导数的计算颇为繁琐，并且需要多次应用链式法则。此处我们想以较为非正式的方式说明这一计算是如何进行的，以及可能出现格林函数的哪些导数；这将有助于更好地理解随后给出的严格论证。

最容易处理的是因子 $h_{d_0(x)}(|x-y|)$；其导数可直接计算。因子 $\partial_{\boldsymbol{\nu}_y} G_{x,|x-y|}(x, y)$则带来更多麻烦。首先请注意，当点 x 的位置发生无穷小变化时，球面 $\partial B_{|x-y|}(x)$的中心会移动，但球面仍经过 y，因此余法向量 $\boldsymbol{\nu}_y$ 的长度和方向都会改变。在计算这一

变化时，会出现 G 关于 x 和 y 的导数。接下来，球 $B_{|x-y|}(x)$的大小也会改变，在对 x 求导时也应将这一变化考虑在内。最后，我们必须注意到，点 x 移动时，算子 $\mathcal{L}$ 也会改变。为此，我们取一个无穷小移动点 $\xi = \xi(\varsigma)$，其新位置为x, $\xi(0) = x$，并考虑 $\mathbf{R^N}$ 中将“旧”球 $B^{(0)} = B_{|x-y|}(x)$ 映射到“新”球 $B^{(\varsigma)} = B_{|\xi-y|}(\xi)$ 的线性保角变换 $T(\varsigma) = E + O(\varsigma)$。在此变换下，新球 $B^{(\varsigma)}$ 中的算子 $\mathcal{L}$ 转换为初始球 $B^{(0)}$ 中的新算子 $\mathcal{L}(\varsigma)$，其系数为 $a(x,\varsigma) = a(T(\varsigma)x)$，取决于参数 ς；换言之，我们不再考虑“新球”中的“旧算子 $\mathcal{L}$”，而是考虑旧球中的新算子 $\mathcal{L}(\varsigma)$。因此，对 x 中的格林函数求导时，必须牢记算子的这一变化；于是，对于一个固定的球，会出现导数$\partial_\varsigma G(x,y;\varsigma)$、 $\partial_\varsigma\partial_y G(x,y;\varsigma)$ 和 $\partial_\varsigma\partial_x G(x,y;\varsigma)$，其中 $G(x,y;\varsigma)$ 是 $B^{(0)}$ 中算子 $\mathcal{L}(\varsigma)$ 的格林函数。

现在，我们给出严谨的计算，使这些提示具体化。

我们先计算一个重要辅助向量函数的导数。$\mathbf{m}(x,\ z) = (x-z)d_0(x)^{-1}$，当 $x,\ z \in \mathbf{K}$，且满足条件 $|x-z| \le d_0(x)$。

首先，显然，$\nabla_z \mathbf{m}(x,\ z) = \mathbf{E}d_0(x)^{-1}$，因此，$|\nabla_z \mathbf{m}(x,\ z)| = \mathbf{N}^{\frac{1}{2}} d_0(x)^{-1}$。 x-阶导数的计算要稍微繁琐一些:

$$\nabla_x \mathbf{m}(x,z) = (d_0(x)^{-1})'_x \otimes (x-z) + d_0(x)^{-1}\mathbf{E} = d_0(x)^{-2}\nabla_x d_0(x) \otimes (z-x) + d_0(x)^{-1}\mathbf{E},$$

因此,

$$|\nabla_x \mathbf{m}(x,z)| \le c d_0(x)^{-1} \le c' d(x)^{-1}, \tag{3.8}$$

同理,

$$|\nabla^2_{xx} \mathbf{m}(x,z)| \le c d(x)^{-2}. \tag{3.9}$$

现在我们估计函数 $K(x,\ y)$ 关于 x 变量的一阶导数。固定一点 $x \in \mathbf{K}$，并考虑小球 $B_{d_0(x)/4}(x)$，$y \in S_t(x)$ 中的 ξ，其中 $t = |x-y|$。函数 $K(\xi,\ y)$ 对 ξ 的依赖方式较为复杂；这种依赖涉及正则化距离 $d_0(\xi)$ 的变化，这会导致球的半径发生变化，同时当 ξ 移动时，y 处法向量和余法向量的方向也会改变。因此，我们会遇到许多需要详细分析的项。

根据 $K(\xi,\ y),$ 的定义，我们有

$$K'_\xi(\xi,y) = (h_{d_0(\xi)}(|\xi-y|))'_\xi \partial_{\boldsymbol{\nu}_y(t)} G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y) + h_{d_0(\xi)}(|\xi-y|)(\partial_{\boldsymbol{\nu}_y(t)} G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y))'_\xi. \tag{3.10}$$

由（3.8）和显然的估计可知

$$\left|(h_{d_0(\xi)}(|\xi-y|))'_\xi\right| \le c d_0(\xi)^{-2}, \tag{3.11}$$

对于（3.10）中的第一项，我们有

$$\left|(h_{d_0(\xi)}(|\xi-y|))'_{\xi}\partial_{\boldsymbol{\nu}_y(t)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)\right| \le cd_0(\xi)^{-\mathbf{N}-1}. \tag{3.12}$$

接下来我们考虑 (3.10) 中的第二项。如前所述，当球面的中心点 x 移动到位置 ξ 时，在这一移动过程中，点 y 保持原位，而球面 $S_{|x-y|}(x)$ 移动到新位置 $S_{|\xi-y|}(\xi)$，这导致 y 处切平面的方向发生变化，进而使余法向量 $\boldsymbol{\nu}_y$ 发生变化。

为了评估这一方向变化，在计算关于变量 ξ 的导数时，以一种特殊方式将点 ξ 参数化会比较方便。这里需要用到一些初等几何。记以原点 0 为中心的单位球面为 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$，取点 $\lambda_0 = \frac{x-y}{|x-y|} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$，并令 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 中 λ_0 的一个邻域：$\boldsymbol{\omega} = \{\lambda = \frac{\xi-y}{|\xi-y|} : \ |\xi - x| \le \frac{1}{4}d_0(x)\}$. _

我们设定 $\tau = |\xi - y|$，并考察当 ξ 移动时余法向˜导数算子 $\partial = \partial_{\boldsymbol{\nu}_y(\tau)}$ 的变化。余法向导数可以理解为沿着向量 $\boldsymbol{\nu}_y(t)$的方向导数，这些向量不一定是单位向量。由于球面 $S_t(\xi)$ 的位置由参数 $\varsigma = \frac{\xi-y}{d_0\ \xi}$ ( ) $\in \boldsymbol{\omega}$ 决定，我们将该参数纳入记号中，并暂时省略 t: $\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)$: $=\boldsymbol{\nu}_y(t)$。在幸运的情况下，当 $\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)\|\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)$ 时，推理相当简单，因为余法向量的方向没有发生变化。我们考虑一般情形 $\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma) \nparallel \boldsymbol{\nu}(y,\lambda)$。作出经过点 y 且包含向量 $\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)$ $\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)$ 的二维平面 $\prod$。该平面沿着我们记为 ϖ 的圆与球面 $S_\tau(x)$ 相交。我们考察交集 $\prod \cap B_t(\xi)$。它是一个二维圆盘。

记 $\nu_{\xi,\ y}$ 为 ϖ的单位内法向量（注意，这是欧几里得意义下的单位内法向量，字体有所不同！）。根据定义，格林函数 $G_{\xi,\ |\xi-y|}(\xi,\ y)$ 在$y \in S_\tau(\xi)$处为零，特别地，在 ϖ上也为零。因此，

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y) = \tag{3.13}$$
$$|\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)|^{-1}\partial_{\nu_{\xi,y}}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)\cos(\widehat{\nu_{\xi,y},\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}),$$

and

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y) = \tag{3.14}$$
$$|\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)|^{-1}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)\cos(\widehat{\nu_{\xi,y},\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}),$$

‘其中，ν，ν'表示向量 ν，ν'之间的角。因此，我们将 (3.13) 和 (3.14) 中导数的比值记为 $\mu(y,\ \lambda,\ \varsigma)$，则有

$$\mu(y,\lambda,\lambda) = 1,\ |\nabla_\varsigma \mu(y,\lambda,\varsigma)| \le C. \tag{3.15}$$

现在，我们可以完成核 K 在点 x（球的中心）变化时的变化计算。由于在 ξ 的邻域内有

x，根据核 K 的定义，我们有

$$\partial_\xi K(\xi,y)=\partial_\xi[h_{d_0(\xi)}(|\xi-y|)\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)]= \tag{3.16}$$
$$\partial_\xi(h_{d_0(\xi)})(|\xi-y|))\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)+$$
$$h_{d_0(\xi)}\partial_\xi\left(\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)\right)\equiv I_1+I_2.$$

对于 (3.16) 中的第一项，我们使用关于 h 的导数的估计 (3.11),

$$|\partial_\xi(h_{d_0(\xi)}(|\xi-y|))|\le cd_0(x)^{-2}.$$

对于 (3.16) 右侧第一项中的格林函数的导数，我们使用估计 (2.14)，得到 $|\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)}G(\xi,\ y)|\ \le\ cd_0(x)^{1-\mathbf{N}}$，因此，对于 (3.16) 中的第一项 I_1，我们有

$$|I_1|\le Cd_0(x)^{-1-\mathbf{N}}. \tag{3.17}$$

接下来，我们估计 I_2。对于最后一个因子，也就是格林函数的二阶导数，我们有

$$\partial_\xi(\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\varsigma)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y))= \tag{3.18}$$
$$\partial_\xi\left[\mu(y,\lambda,\varsigma)|_{\varsigma=\frac{\xi-y}{d_0(x)}}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)\right]=$$
$$=\partial_\xi\mu(y,\lambda,\varsigma)|_{\varsigma=\frac{\xi-y}{d_0(x)}}\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)+\mu(y,\lambda,\varsigma)\partial_\xi\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)=$$
$$I_3+I_4.$$

项 I_3 再次利用 (3.10) 以及格林函数的一阶和二阶导数的界进行估计。这给出

$$\left|\partial_\varsigma\mu(y,\lambda,\varsigma)\partial_\xi\left[\frac{\xi-y}{d_0(\xi)}\right]\right|\le cd_0(x)^{-1},$$

因此,

$$\left|h_{d_0(\xi)}(|\xi-y|)\partial_\varsigma\mu(y,\lambda,\varsigma)\partial_\xi\left[\frac{\xi-y}{d_0(\xi)}\right]\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}G_{\xi,|\xi-y|}(\xi,y)\right|\le \tag{3.19}$$
$$cd_0(x)^{-1}\cdot d_0(x)^{-1}\cdot d_0(x)^{1-\mathbf{N}}=cd_0(x)^{-1-\mathbf{N}}.$$

最棘手的是对项 I_4 的求值，因为这需要追踪坐标系旋转时格林函数导数的变化。

考虑线性保角映射族 $\eta\mapsto \mathtt{T}(\varsigma)\eta$ in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$，它将 $x-y$ 变换为 $\xi-y$，并随 ς 光滑变化（参数 ς 隐藏在 ξ 中），

$$\mathtt{T}(\varsigma)=\frac{|\varsigma|}{|\lambda|}\mathtt{B}(\varsigma),$$

其中 B(ς) 是随 ς光滑变化的正交变换，且 T(λ) =E。接下来，我们用 $g(u,v,\varsigma)$ 表示旋转后的格林函数，即球 $B(x,t)$ 在将其映射到球 $B(\xi,\tau)$ 的变换 T(ς) 下的像：

$$g(u,v,\varsigma):= \tag{3.20}$$
$$G_{\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)+y,|\varsigma|d_0\left(\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)+y\right)}(\mathtt{T}(\varsigma)(v-y)+y,\mathtt{T}(\varsigma)(u-y)+y).$$

由 (3.20) 可知，由变换 T(ς) 从 $\mathcal{L}$ 得到的算子 $\mathcal{L}(\varsigma)$ 的系数 $a_{\mathrm{j},\mathrm{j}'}(.,\varsigma)$ 关于参数 ς 依 C^m 光滑。

反复使用链式法则，我们将函数 $g(y+T(\varsigma)(x-y)\ y,\varsigma)$ 的导数表示为 $g(\xi,\ y,\varsigma)$ 的导数；后者是变换后的算子 $\mathcal{L}(\varsigma)$ 在球 $B_\tau(\xi)$ 中的格林函数。我们得到

$$\partial_\xi\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma))= \tag{3.21}$$
$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)=\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\varsigma g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y))\partial_\xi\varsigma\big|_{\varsigma=\frac{\xi-y}{d_0(x)}}=$$
$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\left(\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\,\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)+\right.$$
$$\left.\partial_\varsigma g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\partial_\xi\varsigma\right)=$$
$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)+$$
$$\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)\partial_\xi\varsigma+$$
$$\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)\partial_\nu\partial_\xi\varsigma+$$
$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\varsigma g(\xi,y,\varsigma)\partial_\xi\varsigma+\partial_\varsigma g(\xi,u,\varsigma)\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\varsigma\big|_{\varsigma=\frac{\xi-y}{d_0(x)}}$$
$$=\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)\partial_\xi\varsigma$$
$$+\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)\partial_\xi\varsigma+$$
$$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\varsigma g(\xi,y,\varsigma)\big|_{\varsigma=\frac{\xi-y}{d_0(x)}}.$$

在推导 (3.21) 时，我们用到了以下事实：$\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\xi\frac{\xi-y}{d_0\ x}()=0.$

现在汇总用于处理 (3.21) 的估计：

$$|\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\xi g(y+\mathtt{T}(\lambda)(x-y),y,\varsigma)|\le Cd_0(x)^{-\mathbf{N}};$$
$$|\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)|\le c|x-y|\le cd_0(x);\ \left|\partial_\xi\frac{\xi}{d_0(x)}\right|\le cd_0(x)^{-1}; \tag{3.22}$$
$$|\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\varsigma\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)|\le C;\ |\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}\partial_\varsigma g(\xi,y,\varsigma)|\le Cd_0(x)^{1-\mathbf{N}}.$$

将它们代入 (3.21) 后，我们得到

$$\left|\partial_\xi\partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)}g(y+\mathtt{T}(\varsigma)(x-y),y,\varsigma)\right|\le cd_0(x)^{-\mathbf{N}}. \tag{3.23}$$

结合 (3.16)、(3.17)、(3.18)、(3.19)，即可得到所需的核 $K(\xi,\ y)$ 对 $\xi=x$ 的导数估计：

$$|\partial_xK(x,y)|\le cd_0(x)^{-1-\mathbf{N}}. \tag{3.24}$$

在继续之前，我们先回顾一下所需的格林函数 $G(x,\ y;\varsigma)$ 导数估计。在估计核 $K(x,\ y)$，时，我们多次应用了链式法则。在这些计算中，出现了一些与变量变换有关的因子，它们不涉及格林函数，而只涉及几何量。含有格林函数导数的因子仅有关于 x 的导数（它们反映点 x 的移动，见 (3.19)），以及关于 $x,\ y$ 和 $y,\ \varsigma$ 的二阶导数（它们用于计算余法向导数方向变化所产生的贡献，见 (3.23) ），此外还有算子 $\mathcal{L}$ 的变化。结合其他项，它们给出估计 (3.24)。这里需要强调的是，我们只在点 $x,\ y,$ 处使用半径为 $d_0(x)$ 的球的格林函数导数，其中 x 位于球的中心， y 位于球的边界，因此 $x,\ y$ 之间的距离可由球的半径从下方控制。

3.4. 估计二阶导数， $K''_{xx}(x,y)$。我们还需要核 $K(x,y)$ 的二阶导数估计。计算的方式基本与一阶导数相同，但要繁琐得多，因此我们只说明其结构。再次运用链式法则多次，会得到若干几何性质的因子，它们不依赖于格林函数；此外还会出现格林函数的导数。在这些导数中， $\partial^2_{xx}G(x,y;\varsigma)$反映点 x 移动所产生的贡献，而 $\partial^3_{xxy}G(x,y;\varsigma)$则反映余法向导数方向的变化。此外，如上一小节所述，还存在一些项反映算子 $\mathcal{L}$ 从球 $B_{|x-y|}(x)$ 变为球 $B_{|\xi-y|}(\xi)$ 时的变化；这里还会出现导数 $\partial^2_{\varsigma\varsigma}G(x,y;\ \varsigma)$、 $\partial^3_{\varsigma\varsigma x}G(x,y;\ \varsigma)$、$\partial^3_{\varsigma\varsigma y}G(x,y;\varsigma)$、 $\partial^3_{\varsigma xy}G(x,y;\varsigma)$。

更具体地说，对 (3.21) 求导后，我们得到由十项组成的和；回顾记号 (3.20)，并为简便起见，形式上令$\Xi := (y + \mathtt{T}(\varsigma)(\xi - y)\ y,\ \varsigma)$ 和 $\Psi = (\xi,\ y,\ \varsigma)$:

$$\begin{gathered} K''_{\xi,\xi}(\xi,y) = \partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)} g(\Xi) A_1(\Psi) + \partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)} \partial_\xi g(\Xi) A_2(\Psi) + \\ \partial_\xi g(\Xi) A_3(\Psi) + \partial_\xi \partial_\xi g(\Xi) A_4(\Psi) + \partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)} \partial_\varsigma g(\Xi) A_5(\Psi) + \\ \partial_\xi \partial_\varsigma g(\Xi) A_6(\Psi) + \partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)} \partial^2_\varsigma g(\Xi) A_7(\Psi) + \partial^2_\xi \partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)} g(\Xi) A_8(\Psi) + \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)} \partial_\xi \partial_\varsigma g(\Xi) A_9(\Psi) + \partial_{\boldsymbol{\nu}(y,\lambda)} \partial^2_\varsigma A_{10}(\Psi). \end{gathered} \tag{3.25}$$

这里，在 (3.25) 中，与前面一样， $\xi = y + \mathtt{T}(\varsigma)(x - y)$、$\varsigma = \frac{\xi - y}{d_0\ \xi\ ()}$以及表达式 A_1 至 A_{10} 都是函数 $h_{d_0(x)}(|x-y|)$、 $\mu(\varsigma)$、 $\mathtt{T}(\varsigma)(x-y)$及其导数的组合，其结构与 (3.21) 中给出的表达式类似；在 (3.21) 中，处理的是 $K(\xi,y)$ 的一阶导数以及 G 的导数。利用关系式 (3.22) 可以对这些表达式进行估计。我们记住，由于选择了 x,ξ,y，我们有

$$|\xi - y| \geq \frac{1}{4}|x-y| = \frac{1}{4} d_0(x) \tag{3.26}$$

为了使这些计算的说明更加清晰，我们引入以下通用记号。用 $\boldsymbol{\delta} g$ 表示函数 $g(\Xi)$ 关于变量 ξ, ν 的任意一阶导数；用 $\boldsymbol{\delta}^2 g$ 表示关于这些变量的任意二阶导数；类似地， $\boldsymbol{\delta}^3 g$ 表示三阶导数。关系式 (3.26) 意味着

$$|\boldsymbol{\delta} g(\Xi)|, |\partial_\varsigma \boldsymbol{\delta} g(\Xi)|, |\partial_\varsigma^2 \boldsymbol{\delta} g(\Xi)| \leq C d_0(x)^{1-\mathbf{N}};$$
$$|\boldsymbol{\delta}^2 g(\Xi)|, |\partial_\varsigma g(\Xi)| \leq c d_0(x)^{-\mathbf{N}};$$
$$|\boldsymbol{\delta}^3 g(\Xi)| \leq c d_0(x)^{-1-\mathbf{N}}.$$

另一方面，利用 (3.22)、(3.15)、(3.10)、(3.12)、(3.11)，我们估计量 A_1–A_{10} ；将其代入 (3.25) 得到

$$|K_{\xi,\xi}(\xi, y)| \leq c d_0(x)^{-2-\mathbf{N}},$$

特别地，对于 $\xi = x$，我们有

$$|K_{xx}(x, y)| \leq c d_0(x)^{-2-\mathbf{N}}. \tag{3.27}$$

4. The approximating function; proof of Theorem 1.2

本节中，我们构造延拓函数 $f_0(x)$ 并确立其性质，进而构造逼近函数 v_δ。

4.1. 局部逼近的估计。为了研究延拓函数 f_0（见 (3.2)）的性质，我们需要对局部逼近 $\Phi_{x,\,\delta}$ 的导数进行估计。

引理 4.1。 设 $f(x)$ $x \in \mathbf{K}$ 满足定理 *1.2* 的条件，其中 $\mathbf{r} \geq 1$.设 $x \in \mathbf{K}$ 且 $\delta > 0$。那么对于 $y \in B_{\frac{\delta}{2}}$，

$$|\operatorname{grad}_y \Phi_{x,\delta}(y)| \leq C, \tag{4.1}$$

其中常数 C 可能依赖于 $\mathbf{K}$、 $\mathcal{L}$ 和 f，但对于固定的 $\mathbf{K}$， $\mathcal{L}$、 f 不依赖于 δ。

证明。 选取整数 N，使得 $2^{N-1}\delta < \operatorname{diam}(\mathbf{K}) \leq 2^N \delta$。于是

$$\Phi_{x,\delta}(y) = \Phi_{x,2^N\delta}(y) - \sum_{k=1}^{N} \left(\Phi_{x,2^k\delta}(y) - \Phi_{x,2^{k-1}\delta}(y) \right).$$

我们应用椭圆方程解的梯度的经典性质（例如参见 [14]）：若函数 $\Psi(y)$ 是椭圆方程 $\mathcal{L}\Psi(y) = 0$ 在球 $B_R(x)$，中的解，，则在较小的同心球 $y \in B_{\frac{R}{2}}(x)$ 中，估计成立

$$|\operatorname{grad} \Psi(y)| \leq C R^{-1} \|\Psi\|_{C(B_R(x))},$$

其中常数 C 与 R 无关。
由于我们对 N 的选择，对于 $y \in B_{\frac{\delta}{2}}(x)$,

$$|\mathrm{grad}_y \Phi_{x,2^N\delta}(y)| \le C,$$

因为函数 $\Phi_{x,\ 2^N\delta}$ 在整个 $\mathbf{K}$ 上充当“局部逼近”，其误差为 $2^N\delta$，且在 $B_{2^N\delta}(x)$ 中关于 $x \in \mathbf{K}$ 一致有界。

我们可以假设 $\delta < 1$。那么，对于 $k \ge 1$，条件 (1.1) 蕴含

$$\|\Phi_{x,2^{k-1}\delta} - \Phi_{x,2^k\delta}\|_{C(B_{2^{k-1}\delta}(x))} \le C\left(2^{k\mathbf{r}}\delta\right)\delta^{\mathbf{r}}\omega(2^k\delta).$$

因此,

$$\|\mathrm{grad}\,\left(\Phi_{x,2^{k-1}\delta} - \Phi_{x,2^k\delta}\right)\|_{C\left(\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}\right)} \le$$

$$C(2^k\delta)^{-1} \times 2^{k\mathbf{r}}\delta^{\mathbf{r}}\omega(2^k) = c2^{k(\mathbf{r}-1)}\delta^{\mathbf{r}-1}\omega(2^k\delta),\ \mathbf{r} \ge 1.$$

现在可得

$$\|\nabla\Phi_{x,\delta}\|_{C(\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x)})} \le$$

$$\sum_{k=1}^{N} \|\mathrm{grad}\,(\Phi_{x,2^{k-1}\delta} - \Phi_{x,2^k\delta})\|_{C(\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x)})} + \|\mathrm{grad}\,\Phi_{x,2^N\delta}\|_{C(\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x)})} \le$$

$$c\sum_{k=1}^{N} 2^{k(\mathbf{r}-1)}\delta^{\mathbf{r}-1}\omega(2^k\delta) + c \le \delta^{\mathbf{r}-1}\int_0^N 2^{s(\mathbf{r}-1)}\omega(2^s\delta)ds + c =$$

$$c\delta^{\mathbf{r}-1}\int_1^{2^N} t^{\mathbf{r}-1}\omega(\delta t)\frac{dt}{t} + c = c\delta^{\mathbf{r}-1}\left(\delta^{-1}\right)^{\mathbf{r}-1}\int_0^{2^N\delta} \tau^{\mathbf{r}-2}\omega(\zeta)d\tau + c$$

$$\le C(\mathrm{diam}\ \mathbf{K})^{\mathbf{r}-1}\int_0^{2\,\mathrm{diam}\ \mathbf{K}} \omega(\tau)\tau^{-1}d\zeta + c \le C.$$

□

4.2. 估计 $\mathcal{L}f_0(x)$. 现在，利用我们在上一节得到的核的导数 $K(x,y)$ 的估计，我们为第 3.1 节中构造的函数 $f_0(x)$（见 (3.2)）以及算子 $\mathcal{L}$ 对该函数作用的结果建立估计。固定一点 $x_0 \in \complement\mathbf{K}$，考虑 Whitney 覆盖 $\mathcal{Q}$ 中的开立方体 Q，其闭包包含 x_0。设 x_Q 为 $\mathbf{K}$ 中距离该立方体中心最近的点（若有多个这样的点，则取其中之一）。回忆一下，˜函数 $f_0(x)$（定义于 (3.1)）在 Q 的边界上等于 0。根据构造，对于 x 属于球 $B_{2\delta(Q)}(x_Q)$ 的情形，$\mathcal{L}_x\Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(x) = 0$; 特别地，这在球 $B_{d_0}(x_0)(x_0$ ~~的一个小~~邻域内成立。因此，对于点 x_0 的一个小邻域内的 x，回忆核 $K(x,y)$ 的定义（它的作用

是作为平均值核的 $\mathcal{L}$-替代）：

$$|\mathcal{L}_x f_0(x)| = |\mathcal{L}_x(f_0(x) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(x))| = \tag{4.2}$$
$$\left|\mathcal{L}_x\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbf{N}}} \tilde{f}_0(y)K(x,y)dy - \int_{\mathbb{R}^{\mathbf{N}}} \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(y)K(x,y)dy\right)\right| =$$
$$\left|\mathcal{L}_x\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbf{N}}} (\tilde{f}_0(y) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(y))K(x,y)dy\right)\right| \le$$
$$C \int\limits_{B_{d_0(x_0)+\varepsilon}(x_0)} |\tilde{f}_0(y) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(y)||\nabla^2_{xx}K(x,y)|dy \le$$
$$Cd_0(x)^{-\mathbf{N}-2} \int\limits_{B_{d_0(x_0)+\varepsilon}(x_0)} |\tilde{f}_0(y) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(y)|dy,$$

在最后一步中使用我们对核的导数的估计 $K(x,\ y)$。现在应用估计式 (3.27)。对于 $x \in B_{d_0(x_0)+\varepsilon}(x_0)$，差值 $f_0(y) - \Phi_{x_Q,\ 2\delta(Q)}(y)$ 具有如下形式：$\Phi_{x_{Q_1},\ 2\delta(Q_1)}(y) - \Phi_{x_Q,\ \delta(Q)}(y)$，其中 Q_1 是某个立方体，并且满足主定理中参数为 $\delta(Q)$ $\delta(Q_1)$ 时的条件。因此，

$$|\tilde{f}_0(y) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(y)| = |\Phi_{x_{Q_1},2\delta(Q_1)}(y) - \Phi_{x_Q,\delta(Q)}(y)| \le cd_0(x_0)^{\mathbf{r}}\omega(d_0(x_0)). \tag{4.3}$$

在 (4.2)、(4.3) 中令 $x = x_0$，即可得到所需的估计，该估计对 $\mathbf{K}$ 外的 $\mathcal{L}f_0$ 成立：

$$|(\mathcal{L}f_0)(x_0)| \le cd_0^{\mathbf{r}-2}(x_0)\omega(d_0(x_0)). \tag{4.4}$$

这里强调，由 (4.4) 可知，定理条件中的 $\mathbf{r}$ 越大，函数 $\mathcal{L}f_0(x)$ 在点 x 接近 $\mathbf{K}$ 时衰减得越快。此事实将在后文中发挥重要作用。

4.3. 函数 $f_0(x)$ 的积分表示。逼近函数的构造与 [27], 中的构造类似，只需作自然的调整。同样，固定点 $x \in \complement\mathbf{K}$，令 $\delta_0 := \operatorname{dist}(x, \mathbf{K}) > 0$。取一个数 $\delta \in (0, \frac{\delta_0}{2})$，并用半径为 δ、具有性质 2.1 的球有限覆盖 K，具体做法与 [27], 中相同（参见其中的推论 2.2）。这意味着，对于 $R_0 = \operatorname{diam}(\mathbf{K})$ 和 $r < R_0$，存在一族 Υ_δ 个两两不相交的球 $B_r(x_{\boldsymbol{\alpha}})$，其中心位于 K 中，使得同心球 $B_{5r}(x_{\boldsymbol{\alpha}})$ 覆盖 K。此外，对于任意 $R \in (\delta, R_0)$ 及任意 $\mathrm{x} \in \mathbf{K}$，球 $B_R(\mathrm{x})$ 中的点的数量 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 不超过 $\mathrm{b}_{\mathbf{N}}(R/r)^{\mathbf{N}-2}$，其中常数 $\mathrm{b}_{\mathbf{N}}$ 与半径 r, R 无关；我们将此结果用于 $r = \frac{\delta}{5}$。

我们用$\mathbf{K}^{(\delta)}$ 表示 Υ_δ中球的并集。$\mathbf{K}^{(\delta)}$ 的边界是分片光滑的：它由有限个半径为 r的球面部分组成。令 $G^\circ(x,y)$为区域 Ω° 中算子 $\mathcal{L}$ 的格林函数，其中 Ω 包含 $\mathbf{K}$ （回想一下，Ω° 取为单位球），算子 $\mathcal{L}$ 已定义。因此，在区域 $\Omega_\delta = \Omega^\circ \setminus \mathbf{K}^{(\delta)}$中 f_0 的积分表示里，对 $\partial\Omega$ 上的积分

v消失，这个积分表示具有如下形式（其中某个系数为 $c_{\mathbf{N}}$ ）

$$f_0(x) = c_{\mathbf{N}} \int_{\partial(\mathbf{K}_\delta)} f_0(y) \partial_{\boldsymbol{\nu}_y} G^\circ(x,y) dS(y) \tag{4.5}$$

$$-c_{\mathbf{N}} \int_{\partial(\mathbf{K}_\delta)} \partial_{\boldsymbol{\nu}_y} f_0(y) G^\circ(x,y) dS(y) + c_{\mathbf{N}} \int_{\Omega_\delta} \mathcal{L} f_0(y) G^\circ(x,y) dy,\ x \in \Omega_\delta;$$

此处 dS 表示分段光滑曲面 $\partial(\mathbf{K}_\delta)$ 上的 N-1 维曲面测度， $\boldsymbol{\nu}_y$ 是与算子 $\mathcal{L}$ 相关的余法向量。

我们考察 (4.5) 中各项在 $\delta \to 0$ 时的行为，并固定点 x 。对于第一项，由于 x 与 $\partial(\mathbf{K}_\delta)$ 之间的距离与零保持正距离，格林函数 $G^\circ(x,y)$ 关于 y 一致有界。同时， $\partial\mathbf{K}_\delta$ 的 N-1 维测度在 $\delta \to 0$ 时趋于零。为此，回想一下， Υ_δ 中的球的数量不超过 $C\delta^{2-\mathbf{N}}$，且每个球的边界面积为 $c\delta^{\mathbf{N}-1}$。因此，(4.5) 中的第一项趋于零。

为估计第二项，令 y 属于 Whitney 覆盖中某个立方体 Q 的闭包，这意味着 $y \in \partial(\mathbf{K}_\delta) \cap \overline{Q}$。那么，根据 f_0 的定义，

$$f_0(y) = \Phi_{x_Q, 2\delta(Q)}(y) + \int_{\mathbb{R}^{\mathbf{N}}} K(y,w)(\tilde{f}_0(w) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(w)) dw;$$

进一步，

$$|\partial_y f_0(y)| \le |\partial_y (f_0(y) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(y))| + |\partial_y \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(y)| \le \tag{4.6}$$
$$\left| \int_{\mathbb{R}^{\mathbf{N}}} \partial_y K(y,w)(\tilde{f}_0(w) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(w)) dw \right| + C,$$

其中 C 是某个绝对常数，因为根据 (4.1)（见引理 4.1），函数$\Phi_{x_Q,\ 2\delta(Q)}$ 是一致有界的。

根据核 K 的定义，(4.6) 中的积分仅在球 $B_{d_0(y)}(y)$ 上进行；对于 w 在这个球内的情形，根据主定理的条件，

$$|\tilde{f}_0(w) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(w)| = |\Phi_{x_{Q_1},2\delta(Q_1)}(w) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(w)| \le \tag{4.7}$$
$$c\delta(Q)^{\mathbf{r}} \omega(\delta(Q)) \le C\delta^{\mathbf{r}} \omega(\delta),$$

其中 Q_1 是 Whitney 覆盖中的立方体，包含 w，而 x_{Q_1} 是$\mathbf{K}$ 中距离其中心最近的点。现在回顾一下我们得到的关于核 K 的导数估计： $|\partial_y K(y,\ w)| \le cd_0(y)^{-1-\mathbf{N}} \le c\delta^{-1-\mathbf{N}}$；因此，由 (4.6) 和 (4.7) 可得

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{\mathbf{N}}} \partial_y K(y,w)(\tilde{f}_0(w) - \Phi_{x_Q,2\delta(Q)}(w)) dw \right| \le c\delta^{-1-\mathbf{N}} \delta^{\mathbf{r}} \omega(\delta) \delta^{\mathbf{N}} \le c\frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

因此，我们得到

$$|\partial_y f_0(y)| \le c\frac{\omega(\delta)}{\delta},$$

（与我们在 [27] 中得到的估计相同）。因此，(4.5) 中的第二项在 $\delta \to 0$ 时趋于零，由此得到函数 $f_0(x)$ 的积分表示：

$$f_0(x) = c_{\mathbf{N}} \int_{\Omega \setminus \mathbf{K}} \mathcal{L} f_0(y) G^{\circ}(x,y) dy. \tag{4.8}$$

由于$\mathbf{K}$的勒贝格测度为零，我们可以将(4.8)中的积分视为铺展在整个 Ω，上的积分，

$$f_0(x) = c_{\mathbf{N}} \int_{\Omega} \mathcal{L} f_0(y) G^{\circ}(x,y) dy,\ x \notin \mathbf{K}. \tag{4.9}$$

最后，我们还要证明(4.9)中的积分在$\mathbf{K}$ 上也是连续的。为此，对于点 $x_0 \in \mathbf{K}$，我们考虑积分

$$F(x_0) = c_{\mathbf{N}} \int_{\Omega} \mathcal{L} f_0(y) G(x_0,y) dy$$

并估计 $f_0(x) - F(x_0)$，$x \notin \mathbf{K}$，以证明当$x \to x_0$时，$F(x) - F(x_0) \to 0$。因此，对于给定的 δ，我们假设$|x - x_0| \le \frac{\delta}{2}$。我们可以将差值 $f_0(x) - F(x_0)$ 表示为

$$f_0(x) - F(x_0) = c_{\mathbf{N}} \int_{B_\delta(x)} \mathcal{L} f_0(y) G(x,y) dy - c_{\mathbf{N}} \int_{B_\delta(x)} \mathcal{L} f_0(y) G(x_0,y) dy + \tag{4.10}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathcal{A}_j} \mathcal{L} f_0(y) (G(x,y) - G(x_0,y)) dy \equiv I_0(x) - I_0(x_0) + \sum_{j=1}^{\infty} I_j(x,x_0),$$

其中 $\mathcal{A}_j = B_{2^j\delta}(x) \setminus B_{2^{j-1}\delta(x)}$。利用我们对 $\mathcal{L} f_0(y)$ 的估计，对于(4.10)第一行中的~项 $I_0(x)$ $I_0(x_0)$，我们有

$$|\widetilde{I}_0(x_0)| \le C \int_{B_\delta(x)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2} \omega(d(y))}{|x_0 - y|^{\mathbf{N}-2}} dy \le \tag{4.11}$$

$$C\delta^{\mathbf{r}} \int_{B_{2\delta}(x_0)} \frac{d(y)^{-2} \omega(d(y))}{|x_0 - y|^{\mathbf{N}-2}} dy \le c\omega(\delta),$$

根据引理 2.4，对于 $k = 0$。同样，

$$|I_0(x)| \le C \int_{B_\delta(x)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2} \omega(d(y))}{|x - y|^{\mathbf{N}-2}} dy \le C\delta^{\mathbf{r}} \omega(\delta), \tag{4.12}$$

根据引理 2.2。(4.10) 第二行中的项 $I_j(x,x_0)$ 按如下方式估计。对于 $j \ge 1$, $y \in \mathcal{A}_j(x)$，我们有 $|G(x,y) - G(x_0,y)| \le C\delta(2^j\delta)^{1-\mathbf{N}}$，因此，

$$|I_j(x,x_0)| \le c\delta(2^j\delta)^{1-\mathbf{N}} \int_{\mathcal{A}_j(x)} d(y)^{\mathbf{r}-2} dy = c\delta(2^j)^{\mathbf{r}-1} \omega(2^j\delta).$$

现在利用 (2.6)，我们得到

$$|I_j(x,x_0)| \le c\delta(2^j\delta)^{1-\mathbf{N}}(2^j\delta)^{\mathbf{r}+\mathbf{N}-2}\omega(2^j\delta).$$

在我们的情形中，由于 $\mathbf{r}\ge 1$ 且区域 Ω° 有界（它是单位圆盘），(4.10) 中的和是有限的，其中只包含满足 $2^{j-1}\delta<1$, $j\le N_0$ 的项，因此，$(2^j\delta)^{\mathbf{r}-1}\le C(2^j\delta)^{-1}$。这给出了 $I_j(x,x_0)$ 的估计

$$|I_j(x,x_0)| \le C\delta(2^j\delta)^{-1}\omega(2^j\delta) = c2^{-j}\omega(2^j\delta).$$

由此可得

$$\sum_j |I_j(x,x_0)| \le c\sum 2^{-j}\omega(2^j\delta) \le \tag{4.13}$$

$$c\int_0^\infty \frac{\omega(2^t\delta)}{2^t}dt = c'\int_1^\infty \frac{\omega(\tau\delta)}{\tau^2}d\tau \le c''\omega(\delta).$$

综合估计式 (4.10)、(4.11)、(4.12)、(4.13)，可得 $|f_0(x)-F(x_0)|<C\omega(\delta)$。这意味着 $F(x)$ 在 $x\to x_0\in\mathbf{K}$. 时收敛到 $f_0(x_0)$。

由于 (4.9) 中的两部分在$\mathbf{K}$上均连续，因此表示式 (4.9) 对所有 $x\in\mathbf{K}$ 都成立，从而在整个 Ω° 上成立。

4.4. 逼近函数的构造 v_δ. 在下面详细说明公式 (4.7) 之前，我们想将此构造与 [27] 中针对 $\mathbf{r}=0$ 情形所采用的构造进行比较。在那篇论文中，只有积分项 [27]，它提供的逼近误差为 $\omega(\delta)$。(4.7) 中出现的额外项是 $\mathcal{L}$–调和的，并且当 $\mathbf{r}>0$ 时，它们能提高逼近质量。

现在我们来描述这种逼近。对参数 δ 的所有取值（$0<\delta\le \operatorname{diam}(\mathbf{K})$），我们固定一点 $\mathbf{O}\in\mathbf{K}$，将其作为构造的起点。给定 δ，我们考虑如性质 2.1 所示、由球 $B_\delta(x_{\boldsymbol{\alpha}})$ 构成的覆盖 Υ_δ。我们按以下方式给点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}$ 编号：最前面的编号分配给点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}\in B_{2\delta}(\mathbf{O})$，接下来的编号分配给点 $x_{\boldsymbol{\alpha}}\in B_{4\delta}(\mathbf{O})\setminus B_{2\delta}(\mathbf{O})$，之后则沿着不断扩大的球形环带依次编号。重新编号后的点记为 x_ν, $\nu=1,\dots,N$. 我们引入不相交集，$W_1=B_{2\delta}(x_1)$，$W_2=B_{2\delta}(x_2)\setminus B_{2\delta}(x_1)$，$W_3=B_{2\delta}(x_3)\setminus(B_{2\delta}(x_2)\cup B_{2\delta}(x_1))$，依此类推。如果发现对某个 ν，集合 W_ν 为空，$W_\nu=\varnothing$，我们就将其删除并压缩编号，从而得到由非空集合 W_ν. 构成的序列。现在我们定义权重序列ρ_ν：

$$\rho_\nu = (\operatorname{meas}_{\mathbf{N}} B_{2\delta}(\mathbf{O}))^{-1}\int_{W_\nu}\mathcal{L}f_0(x)dx. \tag{4.14}$$

定义（4.14）和估计（4.4）、（2.5）可推出

$$|\rho_\nu| \le c\delta^{-\mathbf{N}}\delta^{\mathbf{r}-2+\mathbf{N}}\omega(\delta) = c\delta^{\mathbf{r}-2}\omega(\delta). \tag{4.15}$$

接下来，我们定义函数

$$F_\nu(x) = c_{\mathbf{N}}\rho_\nu \int_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))} G^\circ(x,y)dy,\ x \in \Omega; \tag{4.16}$$

这里， $V(x_\nu,\ 2\delta)$ 是所构造的点，其中在第 2.1 节末尾用 $\mathbf{O} = x_0$代替了 x_ν，而 $c_{\mathbf{N}}$ 定义于 (4.9) 中。此函数在球 $B_{2\delta}(V(x_\nu,\ 2\delta))$，之外是 $\mathcal{L}$-调和函数，因此在 $\mathbf{K}^{(\delta)}$ 内也是如此。最后，对于 $x \in \mathbf{K}_{2\delta}$，我们定义

$$v_\delta(x) = c_{\mathbf{N}} \int\limits_{\Omega\setminus\mathbf{K}'_\delta} G(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy + \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu(x). \tag{4.17}$$

此函数在 $\mathbf{K}^{(\delta)}$ 中是 $\mathcal{L}$-调和的；它将作为所需的逼近 n.

4.5. 的估计。我们回顾一下， f_0 是给定函数 f 从集合 $\mathbf{K}$到包络区域 Ω° 的光滑延拓，其导数以及 $\mathcal{L}f_0(x)$ 的行为都受到控制，且当 x 趋近于$\mathbf{K}$ 时亦然。因此，在 $\mathbf{K}$ 上，实际上，对 $f_0 - v_\delta$ 的估计与对 $f(x) - v_\delta(x)$ 的估计一致，也就是说，它们给出了我们所关心的量。

利用 (4.9) 和 (4.17)，我们可以将差值 $f_0(x) - v_\delta(x)$，$x \in \mathbf{K}$，表示为

$$\begin{aligned} f_0(x) - v_\delta(x) = c_{\mathbf{N}} \int_{\Omega\setminus\mathbf{K}'_\delta} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy + c_{\mathbf{N}} \int_{\mathbf{K}'_\delta} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy \qquad (4.18)\\ -c_{\mathbf{N}} \int_{\Omega\setminus\mathbf{K}'_\delta} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy - \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu(x) = \\ c_{\mathbf{N}} \int_{\mathbf{K}'_\delta} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy - \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu(x) = \\ c_{\mathbf{N}} \sum_{\nu=1}^{N} \left(\int_{W_\nu} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy - \rho_\nu \int_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))} G^\circ(x,y)dy \right). \end{aligned}$$

在 (4.18) 的变换中，我们用到了集合 W_ν 两两不相交、$W_\nu \subset B_{2\delta}(x_\nu)$，且它们的并为 $\overline{\mathbf{K}'_\delta}$ 这一事实。我们选择数 M，使得

$$\operatorname{diam}(\mathbf{K}) < 2^M\delta \le 2\operatorname{diam}(\mathbf{K}).$$

采用这一记号，(4.18) 中的最后一个表达式可按如下方式变换：

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\int_{W_\nu} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy-\rho_\nu\int_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))}G^\circ(x,y)dy\right)= \tag{4.19}$$

$$\sum_{\nu:x_\nu\in B_{4\delta}(x)}\left(\int_{W_\nu} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy-\rho_\nu\int_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))}G^\circ(x,y)dy\right)=$$

$$\sum_{l=3}^{M}{\sum_{\nu}}^{(l)}\left(\int_{W_\nu} G^\circ(X,y)\mathcal{L}f_0(y)dy-\rho_\nu\int_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))}G^\circ(x,y)dy\right)$$

$$\stackrel{def}{=}\mathcal{I}_0+\sum_{l=3}^{M}{}^{(l)}\mathcal{I}_l,$$

其中，上标 (l) $\sum^{(l)}$ 表示对满足 ν $x_\nu\in B_{2^l\delta}(x)\setminus B_{2^{l-1}\delta}(x)$ $\mathcal{I}_0$ 的项求和。项 $4^{\mathbf{N}-2}\overline{b_{\mathbf{N}}}$ 至多包含 $x_\nu\in B_{4\delta}$项。对于其中每一项，也就是说，对于 $x(|G)$，我们使用估计式 (4.4)、一般估计式 $x(,\ y)|\le c|x-y|^{2-\mathbf{N}}$以及积分估计式 (2.4)。由此得到

$$\left|c_{\mathbf{N}}\int_{W_\nu}G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy\right|\le c\int\limits_{B_{2\delta}(x_\nu)}d_0(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d_0(y))|x-y|^{2-\mathbf{N}}dy\le C\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta). \tag{4.20}$$

接下来，对于 $y\in B_{2\delta}(V(x_\nu,\ 2\delta))$，我们有 $|G^\circ(x,\ y)|\le c|x-y|^{2-\mathbf{N}}\le c\delta^{2-\mathbf{N}}$，因此，由 (4.15) 可得

$$\left|c_{\mathbf{N}}\rho_\nu\int_{B_{2\delta}(x_\nu)}G^\circ(x,y)dy\right|\le c\delta^{\mathbf{r}-2}\omega(\delta)\times\delta^{2-\mathbf{N}}\delta^{\mathbf{N}}=c\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta). \tag{4.21}$$

估计式 (4.20)、(4.21) 给出了 $\mathcal{I}_0$ 的界：

$$|\mathcal{I}_0|\le c\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta).$$

接下来，我们考虑式 (4.19) 中的项 $\mathcal{I}_l,\ l\ge 3$，这意味着对满足 $2^{l-1}\delta\le|x_\nu-x|\le 2^l\delta.$ 的所有此类 ν 求和。在这个球形环域中，至多有 $2^{l(\mathbf{N}-2)}b_{\mathbf{N}}$ 个点 x_ν。取其中一个点，我们任意选取

另外两个点 $y_{\nu 1} \in W_\nu$ 和 $y_{\nu 2} \in B_{2\delta}$（$V$（$\overline{x_\nu, 2\delta}$））。于是我们有

$$\int_{W_\nu} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy - \rho_\nu \int\limits_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))} G^\circ(x,y)dy = \tag{4.22}$$

$$\int_{W_\nu} \mathcal{L}f_0(y)\left(G^\circ(x,y) - G^\circ(x,y_{\nu 1})\right)dy + G^\circ(x,y_{\nu 1})\int_{W_\nu}\mathcal{L}f_0(y)dy -$$

$$\rho_\nu \int\limits_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))} (G^\circ(x,y) - G^\circ(x,y_{\nu 2}))dy - \rho_\nu G^\circ(x,y_{\nu 2}) \int\limits_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))} dy =$$

$$\int_{W_\nu} \mathcal{L}f_0(y)\left(G^\circ(x,y) - G^\circ(x,y_{\nu 1})\right)dy - \rho_\nu \int\limits_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))} (G^\circ(x,y) - G^\circ(x,y_{\nu 2}))dy +$$

$$(G^\circ(x,y_{\nu 1}) - G^\circ(x,y_{\nu 2}))\int_{W_\nu}\mathcal{L}f_0(y)dy.$$

在对 (4.22) 进行变换时，我们使用了 (4.14) 中系数 ρ_ν 的定义。

接下来估计 (4.22) 中的各个项。对于 $y \in B_{2^l\delta}(x) \setminus B_{2^{l-1}\delta}(x)$，有 $|\nabla_y G^\circ(x,\ y)| \le |x-y|^{1-\mathbf{N}} \le C(2^l\delta)^{1-\mathbf{N}}$。因此，

$$|G^\circ(x,y) - G^\circ(x,y_{\nu 1})| = \left|\int_0^1 D_t(G^\circ(x, y + t(y_{\nu 1} - y)))dt\right| \le \tag{4.23}$$

$$c\delta|x-y|^{1-\mathbf{N}} \le c\delta(2^l\delta)^{1-\mathbf{N}}.$$

类似地，利用格林函数导数的估计，并考虑点 y，$y_{\nu 1}$，$y_{\nu 2}$的位置，我们得到

$$|G^\circ(x,y) - G^\circ(x,y_{\nu 2})| \le \delta(2^l\delta)^{1-\mathbf{N}}, \tag{4.24}$$

$$|G^\circ(x,y_{\nu 1}) - G^\circ(x,y_{\nu 2})| \le \delta(2^l\delta)^{1-\mathbf{N}}. \tag{4.25}$$

将不等式 (4.22)-(4.25) 相加，得到 $\mathcal{I}_l$ 中单项的估计：

$$c_{\mathbf{N}}\left|\int_{W_\nu} G^\circ(x,y)\mathcal{L}f_0(y)dy - \rho_\nu \int\limits_{B_{2\delta}(V(x_\nu,2\delta))} G^\circ(x,y)dy\right| \le \tag{4.26}$$

$$c\delta(2^l\delta)^{1-\mathbf{N}}\left(\int_{W_\nu}|\mathcal{L}f_0(y)|dy + \rho_\nu \operatorname{meas}_{\mathbf{N}} B_{2\delta}(\mathbf{O})\right) \le$$

$$c\delta(2^l\delta)^{1-\mathbf{N}}\left(\int_{W_\nu} d_0(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d_0(y))dy + \delta^{\mathbf{r}-2+\mathbf{N}}\omega(\delta)\right) \le c\delta^{\mathbf{r}-2+\mathbf{N}}\omega(\delta)\delta(2^l\delta)^{1-\mathbf{N}};$$

在式 (4.26) 的变换中，我们用到了 (4.15) 和 (2.5)。由于球形环域 $B_{2^l\delta}(x) \setminus B_{2^{l-1}\delta}(x)$，内至多有 $c2^{l(\mathbf{N}-2)}$ 个点 x_ν，因此得到

$\mathcal{I}_l$ 的所需估计：

$$|\mathcal{I}_l| \le c2^{l(\mathbf{N}-2)}\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta)\cdot\frac{1}{2^{l(\mathbf{N}-1)}} = C2^{-l}\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta).$$

现在对 l 求和，可得

$$|f_0(x)-v_\delta(x)| \le c\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta)(1+\sum_{l\ge 3}2^{-l}) = C\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta).$$

这个不等式证明了主定理的第一条结论。第二部分可由第一部分轻易得到，因为：

$$|v_\delta(x)-v_{\frac{\delta}{2}}(x)| \le |v_\delta(x)-f_0(x)| + |v_{\frac{\delta}{2}}(x)-f_0(x)| \le c\delta^{\mathbf{r}}\omega(\delta). \tag{4.27}$$

因此，定理的“仅当”部分对于 $x\in\mathbf{K}'_\delta\supset\mathbf{K}_\delta$. 得证

“如果”结论可通过令 $\Phi_{x,\delta}(y) = v_\delta(y)$ $y\in B_\delta(x)$, 对所有 $x\in\mathbf{K}$ 成立而得出，这意味着，我们在 $x\in\mathbf{K}$ 的所有点处，都取单个函数 $v_\delta(y)$作为 f 的局部逼近函数。函数 $\Phi_{x,\delta}$ 所需的性质由（4.27）及等式推出

$$v_\delta - v_{2^{-3}\delta} = \sum_{s=0}^{2}(v_{2^{-s}\delta}-v_{2^{-s-1}\delta}).$$

5. f 的广义导数，x ∈ K

本节中，我们定义函数 $f_0(x)$ 在点$x\in\mathbf{K}$处的广义导数，即通常导数一般不存在的那些点。这些导数用于定义初始函数f的导数替代量。我们在此说明该定义是自洽的，随后证明逼近函数 v_δ 的导数在 $\delta\to 0$ 时收敛到 f 在$\mathbf{K}$ 上的广义导数。显然，我们考虑的导数阶数越高，对算子 $\mathcal{L}$ 的系数所要求的光滑性就越高。

5.1. 定义。设 α 为一个多重指标，$1\le|\alpha|=k\le\mathbf{r}$ $c_{\mathbf{N}}$ 是 (4.9) 中的常数，其中给出了 f_0 的表示。

定义 5.1。对于 $x\in\mathbf{K}$，我们将广义导数 $f_{(\alpha)}(x)$ 定义为

$$f_{(\alpha)}(x) := c_{\mathbf{N}}\int_{\Omega^\circ}\mathcal{L}f_0(y)\partial_x^\alpha G^\circ(x,y)dy + \sum_\nu \partial^\alpha F_\nu(x), \tag{5.1}$$

其中，$G^\circ(x,\ y)$ 是 Ω° 中 $\mathcal{L}$ 的格林函数。

这意味着，我们仍然通过对表示式 (4.9) 进行形式微分来定义 f_0 的导数。

为了证明该定义合理，我们首先需要证明 (5.1) 中的积分收敛。事实上，对于前面定义的函数 $f_0(x)$，我们有如下估计

$$|\mathcal{L}f_0(y)| \le cd(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y)).$$

假设算子 $\mathcal{L}$ 的系数属于 $C^{3+|\alpha|}$。由于，根据 (2.12),

$$|\partial_x^\alpha G^\circ(x,y)| \le c|x-y|^{-(\mathbf{N}-2+k)},\ k=|a,|$$

我们有

$$|\mathcal{L}f_0(y)\partial^\alpha G^\circ(x,y)| \le C\frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2+k}},$$

并且，由于 $k=|\alpha| \le \mathbf{r}$，我们可以使用引理 2.4、2.7 的结果，因此 (5.1) 中的积分收敛。

5.2. **定理 1.3 的证明**。在本节中，$\|\cdot\|_{\mathbf{K}_{\frac{\delta}{2}}}$表示 $C(\mathbf{K}_2^\delta)$ 中的范数，等等。我们先证明估计 (1.4)。取某个 $\Delta>0$，固定一点 $x^0 \in \mathbf{K}^{\Delta/2}$。于是，对于 $x \in \mathbf{K}_\Delta$，我们有 $\mathcal{L}v_\Delta(x) = \mathcal{L}v_{2\Delta}(x) = 0$. 考虑 $\mathcal{L}$ 在球 $B_\Delta \equiv B_\Delta(x^0)$ 中的格林函数$(\cdot,\ y)$。于是

$$v_\Delta(x) - v_{2\Delta}(x) = c_{\mathbf{N}}\int_{\partial B_\Delta}(v_\Delta(y)-v_{2\Delta}(y))\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}G_\Delta(x,y)dS(y).$$

我们对这个等式关于 x 求 $+1$ 次导数:

$$\nabla^{\mathbf{r}+1}(v_\Delta(x)-v_{2\Delta}(x)) = c_{\mathbf{N}}\int_{\partial B_\Delta}(v_\Delta(y)-v_{2\Delta}(y))\partial_{\boldsymbol{\nu}_y}\nabla_x^{\mathbf{r}+1}G_\Delta(x,y)dS(y).$$

现在，我们使用格林函数导数的估计，并得到，对于$x \in B_{\Delta/2}$，见推论 2.10:

$$|\nabla^{\mathbf{r}+1}(v_\Delta(x)-v_{2\Delta}(x))| \le C\Delta^{\mathbf{r}}\omega(\Delta)\int_{\partial B_\Delta}|x-y|^{-\mathbf{N}+1-\mathbf{r}}dS(y) \le C\Delta^{-1}\omega(\Delta). \tag{5.2}$$

固定 δ 后，我们取一个整数 M，使得 $\operatorname{diam}(\mathbf{K}) < 2^M\delta \le 2\operatorname{diam}(\mathbf{K})$, 并对 $\Delta = 2^{j-1}\delta,\ \ 1 \le j \le M$ 写出 (5.2)。将相应的估计相加，得到

$$\|\nabla^{\mathbf{r}+1}v_\delta\|_{\mathbf{K}_{\frac{\delta}{2}}} \le \sum_{j=1}^{M}\|\nabla^{\mathbf{r}+1}(v_{2^{j-1}\delta}-v_{2^j\delta})\|_{\mathbf{K}_{\frac{\delta}{2}}} + \|\nabla^{\mathbf{r}+1}(v_{_{2^M\delta}})\|_{\mathbf{K}_{\frac{\delta}{2}}} \le \|\nabla^{\mathbf{r}+1}(v_{2^M\delta})\|_{\mathbf{K}_{\frac{\delta}{2}}} + O(1). \tag{5.3}$$

这是由 (1.2) 中逼近函数的第三个性质以及引理 4 得出的。 1.

此后，总和 $\sum_{j=1}^{M}\delta^{-1}2^{-j}\omega(2^j\delta)$ 的估计方式与第 2.2 节中的各个总和类似，通过积分

$$\delta^{-1}\int_1^M 2^{-\tau}\omega(2^\tau\delta)d\tau \le c\int_{2\delta}^{\infty}\frac{\omega(s)}{s^2}ds \le c\frac{\omega(\delta)}{\delta},$$

这就证明了该不等式。

现在我们证明逼近性质。由（4.17）可得

$$\partial^\alpha v_\delta(x) = c_{\mathbf{N}} \int_{\Omega\setminus\mathbf{K}_{2,\delta}} \mathcal{L}f_0(y)\partial_x^\alpha G^\circ(x,y)dy + \sum_{\nu=1}^N \partial^\alpha F_\nu(x),\ x\in\mathbf{K}, \tag{5.4}$$

其中， $F_\nu(x)$ 是按照第 4.4 节为给定的 δ 构造的函数。

接下来，根据定义 (5.1) 和 (5.4)，可得导数逼近的估计：

$$f_{(\alpha)}(x) - \partial^\alpha v_\delta(x) = c_{\mathbf{N}} \int_{\mathbf{K}_{2,\delta}} \mathcal{L}f_0(y)\partial_x^\alpha G^\circ(x,y)dy - \sum_{\nu=1}^N \partial^\alpha F_\nu(x) = \tag{5.5}$$

$$\sum_{\nu=1}^N c_{\mathbf{N}} \int_{W_\nu} \mathcal{L}f_0(y)\partial_x^\alpha G^\circ(x,y)dy - \sum_{\nu=1}^N \partial^\alpha F_\nu(x).$$

现在我们可以再次使用第 4.2 节中得到的 $\mathcal{L}f$ 估计以及格林函数导数的估计，从而得到

$$\left|\int_{W_\nu} \mathcal{L}f_0(y)\partial_x^\alpha G^\circ(x,y)dy\right| \le c\int_{B_{2\delta}(x_\nu)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2+|\alpha|}}dy.$$

如果点 x_ν 靠近 x，即 $x_\nu \in B_{4\delta}(x)$，我们可以使用估计 (A.1) 和 (4.20)，从而得到

$$\int_{B_{2\delta}(x_\nu)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2+k}}dy \le c\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta),$$

因为这里 $B_{2\delta(x_\nu)} \subset B_{6\delta(x)}$。

对于导数 $\partial^\alpha F_\nu$，在此区域中的估计更容易。由 (4.15) 可得

$$\partial^\alpha F_\nu(x) = c_{\mathbf{N}}\rho_\nu \int_{B_{2\delta}(V_{x_\nu,\delta})} \partial_x^\alpha G(x,y)dy. \tag{5.6}$$

根据我们的估计 (4.16),

$$|\rho_\nu| \le c\delta^{\mathbf{r}-2}\omega(\delta). \tag{5.7}$$

对于 $x_\nu \in \overline{B_{4\delta}(x)}$，关系式 (5.6)、(5.7) 可推出

$$|\partial^\alpha F_\nu(x)| \le c\delta^{\mathbf{r}-2}\omega(\delta)\int_{B_{2\delta}(V_{x_\nu,2\delta})} |\partial_x^\alpha G^\circ(x,y)|dy \le \tag{5.8}$$

$$c\delta^{\mathbf{r}-2}\omega(\delta)\int_{B_{2\delta}(V_{x_\nu,2\delta})} |x-y|^{-\mathbf{N}+2-|\alpha|}dy.$$

由于 $|V(x_{\nu,\ 2\delta})-x_\nu)| \ge 12\delta$，对于 $y\in B_{2\delta}(V_{x_{\nu,\ 2\delta}})$ 和 $x_\nu \in B_{4\delta}(x)$，我们有 $|y-x| \ge 12\delta-2\delta-4\delta = 6\delta$，因此，由 (5.8) 得：

$$|\partial^\alpha F_\nu(x)| \le c\delta^{\mathbf{r}-2}\omega(\delta)\cdot\delta^{\mathbf{N}}\delta^{-\mathbf{N}+2-|\alpha|} = c\delta^{\mathbf{r}-|\alpha|}\omega(\delta).$$

现在考虑那些位于球 $B_{4\delta}(x)$ 之外的 x_ν，即对于某个 $l \geq 2$，有 $x_\nu \in B_{2^{l+1}\delta}(x) \backslash B_{2^l\delta}(x)$。在这种情况下，对于 $y \in B_{2\delta}(x_\nu)$，我们有 $|x-y| \asymp 2^l\delta$；再次利用格林函数估计 (2.12)，可得

$$|S_\nu| := \left| \int_{W_\nu} \mathcal{L} f_0(y) \partial_x^\alpha G(x,y) dy \right| \leq C \int_{B_{2\delta}(x_\nu)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{r}-2+k}} dy \leq \tag{5.9}$$

$$c \frac{\delta^{\mathbf{N}-2+\mathbf{r}}\omega(\delta)}{(2^l\delta)^{\mathbf{N}-2+k}} = c\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta)2^{-(\mathbf{N}-2+k)j},\ k = |\alpha|.$$

我们回顾一下，在 $f(x) - v_\delta(x)$的估计证明中，我们使用了这样一个事实：球形环域 $B_{2^{l+1}\delta}(x) \setminus B_{2^l\delta}(x)$至多包含 $c2^{(\mathbf{N}-2)l}$ 个点x_ν，因此，不等式（5.9）推出了估计

$$\sum_{\nu: x_\nu \in B_{2^{l+1}\delta}(x) \backslash B_{2^l\delta}(x)} |S_\nu| \leq \tag{5.10}$$

$$c2^{(\mathbf{N}-2)l}\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta)\frac{1}{2^{(\mathbf{N}-2+k)l}} = c2^{-lk}\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta).$$

为获得 $\sum_{\nu=1}^\infty \partial^\alpha F_\nu$ 的估计，可以进行类似但简单得多的计算。我们汇总估计（5.5）—（5.10），得到所需的不等式

$$|f_{(\alpha)}(x) - \partial^\alpha v_\delta(x)| \leq c\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta)\sum_{l=1}^\infty 2^{-l} + c\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta) = c\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta).$$

5.3. 泰勒余项估计。 我们为一个$f \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{\mathbf{r}+\omega}(\mathbf{K})$函数定义了某些导数的替代量，该函数可由 $\mathcal{L}$–调和函数进行局部逼近。与上一小节中相同类型的计算证明了逼近函数 v_δ 的导数收敛于 f的广义导数；这些计算使我们能够证明，在某种意义下，这些广义导数可用于构造 f 及其导数的泰勒型公式。这里只给出表述。

定理 5.2. 对于满足本文条件的函数 f 和紧集 $\mathbf{K}$，若 $\mathcal{L}$ 的系数属于 $C^{\mathbf{r}+4}$，则下列不等式成立，其中某个常数 c 不依赖于 $x_1, x_2 \in \mathbf{K}$:

$$\left| f_{(\alpha)}(x_2) - f_{(\alpha)}(x_1) - \sum_{|\beta|\geq 1, |\alpha|+|\beta| \leq \mathbf{r}} (\beta!)^{-1} f_{(\alpha+\beta)}(x_1)(x_2-x_1)^\beta \right| \leq$$

$$c|x_2-x_1|^{\mathbf{r}-k}\omega(|x_2-x_1|),$$

对于 $1 \leq |\alpha| = k < \mathbf{r}$。作为极限情形，

$$|f_{(\alpha)}(x_1) - f_{(\alpha)}(x_2)| \leq c\omega(|x_1-x_2|),\ |\alpha| = \mathbf{r}.$$

这个证明虽然相当技术性，但基于将格林函数的泰勒展开代入 f_0 的表达式。

6. The counter-example

在这个反例中，我们证明，如果放宽主定理中对定义在紧集 $\mathbf{K}$ 上的函数 f 所施加的局部逼近条件，也就是说，如果我们只假设逼近函数 $\Phi_{x,\,\delta}$ 是光滑的，而不要求它们是 $\mathcal{L}$-调和的，那么对该方程的解进行全局逼近可能会失败。这种现象显然是由集合 $\mathbf{K}$ 的病态结构造成的。我们指出，只有在 $\mathbf{r} \geq 1$ 的情况下才可能出现此类反例：在我们的论文 [27], 中，我们证明了，对于较低光滑度，即 $\mathbf{r} = 0$，这意味着，对于精度为 $\omega(\delta)$， 的逼近，不需要要求局部逼近函数是 $\mathcal{L}$–调和的。

我们例子中的紧集 $\mathbf{K}$ 看起来像一把洗碗刷，带有密集的$\mathbf{N}$-2 维刷毛，朝向各不相同。因此，对于在$\mathbf{K}$ 上逼近给定函数 f的调和函数v_δ ， v_δ 的所有二阶导数都应逼近 f的所有二阶导数，因此，如果 f 是某个非调和函数在$\mathbf{K}$ 上的迹，这种逼近就不可能实现。相反，如果$\mathbf{K}$更规整一些，比如是一个余维 2 的 C^2-曲面，那么调和函数 v_δ 的整体逼近只会对 f的某些偏导数施加限制，不会造成矛盾。

现在我们将上述描述具体化。

我们在此引入一种用于 $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ 中$\mathbf{N}$-2 维球的特殊记号：这种记号将体现这些球在 $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$. 中的方向。我们定义

$$
\begin{aligned}
B^*_{\boldsymbol{\kappa}1} &= \{x = (x_1, \ldots, x_{\mathbf{N}-1}, x_{\mathbf{N}})\} : |x| \leq 2^{-\boldsymbol{\kappa}-2},\, x_{\mathbf{N}-1} = x_{\mathbf{N}} = 0;\\
B^*_{\boldsymbol{\kappa}2} &= \{x = (x_1, \ldots, x_{\mathbf{N}-1}, x_{\mathbf{N}})\} : |x| \leq 2^{-\boldsymbol{\kappa}-2},\, x_{\mathbf{N}-2} = x_{\mathbf{N}-1} = 0;\\
B^*_{\boldsymbol{\kappa}3} &= \{x = (x_1, \ldots, x_{\mathbf{N}-1}, x_{\mathbf{N}})\} : |x| \leq 2^{-\boldsymbol{\kappa}-2},\, x_{\mathbf{N}-2} = x_{\mathbf{N}} = 0,\\
B_{\boldsymbol{\kappa}\iota} &= B^*_{\boldsymbol{\kappa}\iota} + \left(\frac{1}{2}(2^{-\boldsymbol{\kappa}-1} + 2^{-\boldsymbol{\kappa}}), 0, \ldots, 0\right),\, \boldsymbol{\kappa} = 0, 1, \ldots,\, \iota = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

紧集 $\mathbf{K}$ $\subset \mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ 定义为

$$
\mathbf{K} = \left(\bigcup_{\iota=1}^{3}\bigcup_{\boldsymbol{\kappa}=0}^{\infty} B_{\boldsymbol{\kappa}\iota}\right)\bigcup\{\mathbb{0}_{\mathbf{N}}\},
$$

其中， $\{\mathbb{0}_{\mathbf{N}}\}$ 表示 $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ 中的原点。容易验证，该集合是维数为 $\mathbf{N}$-2 的 Ahlfors–David 正则集。

我们考虑函数 $f(x) = |x|^2$， $x \in \mathbf{K}$。将同一函数视为定义在 $\mathrm{R}^{\mathbf{N}}$ 上的函数时，它在 $\mathbf{K}$ 中任意一点的任意邻域内，都可作为自身的局部光滑逼近函数 $\Phi_{\delta,\,x}(y)$，且光滑性阶数任意，因为 $\Phi_{\delta,\,x}(y) - f(y) \equiv 0$. 与定理 1.2 的条件相比，唯一的不足是该逼近函数不是拉普拉斯方程的解。

定理 6.1。 不可能按照定理 *1.2* 的意义，用调和函数逼近 $f(x)$，其中 $\mathbf{r} = 2$，且 $\omega(\delta) = \delta^{\sigma}$, $0 < \sigma < 1$；也就是说，不可能用方程 $\mathcal{L}v_\delta \equiv -\Delta v_\delta = 0$ 的解来逼近。

换句话说，对于这样的野集$\mathbf{K}$，不可能在$\mathbf{K}$ 上，即使是局部地，用调和函数逼近非调和函数 $f(x)$。

证明。 假设所述逼近是可能的，那么，对于任意 $\delta \in(0,1)$，都存在一个函数 v_δ 使得，

$$|v_\delta(x) - f(x)| \le \mathbb{c}\delta^{2+\sigma},\ x \in \mathbf{K}, \tag{6.1}$$

$$|v_\delta(x) - v_{\frac{\delta}{2}}(x)| \le \mathbb{c}\delta^{2+\sigma},\ x \in \mathbf{K}_{\frac{\delta}{2}}, \tag{6.2}$$

其中某个$\mathbb{c}$ 不依赖于 δ，并且

$$\Delta v_\delta(x) = 0,\ x \in \mathbf{K}_\delta. \tag{6.3}$$

我们建立以下性质。

引理 6.2。 在假设(6.1)-(6.3)下，函数 v_δ 必须满足以下估计：

$$|\nabla^3 v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x)| \le c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma-1}, \tag{6.4}$$

$$x \in U_{\boldsymbol{\kappa}} := (\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}} + B_{\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbb{0}),\ \mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}} = (\frac{1}{2}(2^{-\boldsymbol{\kappa}-1} + 2^{-\boldsymbol{\kappa}}), 0, \dots, 0),\ \delta_{\boldsymbol{\kappa}} = 2^{-\boldsymbol{\kappa}-2}.$$

证明。 为证明 (6.4)，我们用 $\phi_k(x)$ $x \in U_{\boldsymbol{\kappa}}$ 表示函数 $\phi_k(x) = v_{2^k\delta_m}(x) - v_{2^{k+1}\delta_m}(x)$，$k = 1, \dots, N$，其中 N 的选取满足 $1 < 2^N\delta \le 2$。利用这个函数，我们可以表示 $v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}$ 及其三阶梯度：

$$v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}} = v_{2^{N+1}\delta} + \sum_{k=1}^{N} \phi_k, \text{ and } \nabla^3 v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}} = \nabla^3 v_{2^{M+1}\delta} + \sum_{k=1}^{M} \nabla^3 \phi_k. \tag{6.5}$$

根据 N 的定义，我们有 $|\nabla^3 v_{2^{N+1}\delta}| \le c$。对于函数 ϕ_k，由假设 (6.2) 可得如下估计：

$$|\phi_k(x)| \le c\mathbb{c}(2^k\delta_{\boldsymbol{\kappa}})^{2+\sigma}, x \in \mathbf{K}_{2^k\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}.$$

函数 ϕ_k 在球 $U_{k,\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}} + B_{2^k\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(0) \subset \mathbf{K}_{2^k\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}$ 内调和，其导数可利用泊松公式进行估计：

$$|\nabla^3 \phi_k(x)| \le c\mathbb{c}\frac{(2^k\delta_{\boldsymbol{\kappa}})^{2+\sigma}}{(2^k\delta_{\boldsymbol{\kappa}})^3} = c\mathbb{c}2^{k(\sigma-1)}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma-1}. \tag{6.6}$$

现在，由 (6.5)、(6.6) 可得

$$|\nabla^3 v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x)| \le c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma-1}\sum_{k=1}^{M} 2^{k(\sigma-1)} + c \le c'\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma-1},$$

由此证明了引理 6.2。 □

得到这个估计后，我们继续讨论例子。我们引入函数 n

$$P_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}) = v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}) + \sum_{|\alpha|=1}\frac{1}{\alpha!}\partial_\alpha v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})(x-\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})^\alpha + \sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\partial_\alpha v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})(x-\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})^\alpha; \tag{6.7}$$

这是 $v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x)$ 在点 $x=\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}$ 处的二次泰勒多项式。我们利用泰勒公式中余项的积分形式，表示点 x 与 $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}$ 处函数值之差：根据 (6.7)，可得

$$|\nabla^2 v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x) - \nabla^2 P_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})| \le c\delta_{\boldsymbol{\kappa}} \sup_{y\in\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}+B_{\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbb{0}_{\mathbf{N}})} |\nabla^3 v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(y)| \le c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma-1} = c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma}.$$

特别地，这意味着

$$|\Delta v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x) - \Delta P_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})| \le c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma},\ x\in\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}+B_{\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbb{0}_{\mathbf{N}}). \tag{6.8}$$

结合 (6.3) 和 (6.8)，得到

$$|\Delta P_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})| \le c\mathbb{c}\delta_m^{\sigma},\ x\in\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}+B_{\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbb{0}_{\mathbf{N}}). \tag{6.9}$$

接下来，我们用另一种形式表示 $P_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})$，并将其中一些二阶齐次项分离出来：

$$P_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}) = \sum_{j=1}^{\mathbf{N}} b_j(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}},\delta_{\boldsymbol{\kappa}})(x_j-\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa},j})^2 + \tilde{P}_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}), \tag{6.10}$$

$$\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}} = (\frac{1}{2}(2^{-\boldsymbol{\kappa}}+2^{-\boldsymbol{\kappa}-1}),0,\ldots,0),$$

˜其中，多项式 $P_2(x,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})$ 包含关于 $x-\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}$ 的 0 次项和 1 次项，以及形如 $c(x_j-\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa},j})(x_j-\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa},j'})$ 的混合项，$j\neq j'$。由于 $\Delta P_2=0$, (6.9)、(6.10) 可得

$$|\sum_{j=1}^{\mathbf{N}} b_j(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}},\delta_{\boldsymbol{\kappa}})| \le c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma}. \tag{6.11}$$

我们回顾一下，(6.11) 中的系数 $b_j(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}},\ \delta_{\boldsymbol{\kappa}})$ 是 $v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})$ $b_j(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}},\ \delta_{\boldsymbol{\kappa}}) = \frac{1}{2}(\partial_{j,\ j}^2 v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}})(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})$ 的二阶导数乘以常数。集合 $\mathbf{K}\cap(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}}+\mathbf{B}_{\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbb{0}_{\mathbf{N}}))$ 包含这些闭区间

$$\mathbf{I}_{1,\boldsymbol{\kappa}} = [2^{-\boldsymbol{\kappa}-1},2^{-\boldsymbol{\kappa}}]\times\{(0)_{\mathbf{N}-1}\},\ \text{and}$$

$$\mathbf{I}_{j,\boldsymbol{\kappa}} = \{\frac{1}{2}(2^{-\boldsymbol{\kappa}}+2^{-\boldsymbol{\kappa}-1}),0,\ldots,\overbrace{[-\delta_{\boldsymbol{\kappa}},\delta_{\boldsymbol{\kappa}}]}^{j},0,\ldots,0.\},\ \text{for}\ j>1,$$

其中，上标 $.^j.$ 表示第 j 个坐标分量。

现在，由（6.1）可知

$$|v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x) - |x|^2| \le c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{2+\sigma},\ x \in \bigcup_{j=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{I}_{j,\boldsymbol{\kappa}}.$$

另一方面，由于 P_2 是 $v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x)$的二次泰勒多项式，我们应有

$$|v_{2\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(x) - P_2(x, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}})| \le c\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^3 \sup_{y \in \mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}} + B_{\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbb{0}_{\mathbf{N}})} |\nabla^3(y)| \le$$
$$c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^3\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma-1} = c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{\sigma+2},\ x \in \mathbf{t}_{\boldsymbol{\kappa}} + B_{\delta_{\boldsymbol{\kappa}}}(\mathbb{0}_{\mathbf{N}}).$$

后两个不等式意味着

$$|P_2(x, t_{\boldsymbol{\kappa}}) - |x|^2| \le c\mathbb{c}\delta_{\boldsymbol{\kappa}}^{2+\sigma}. \tag{6.12}$$

由于（6.12）中的两个多项式次数均为 2，且（6.12）必须对任意 $\delta_{\boldsymbol{\kappa}}$成立，因此我们得到矛盾： $P_2(x,\ t_{\boldsymbol{\kappa}})$是调和的，而 $|x|^2$ 不是。□

Appendix A. Estimates for integrals in Section 2.2. Proofs

证明 引理 2.2。

对于 $y \in B_{2\delta}(x)$，我们有 $d(y) \le c\delta$，因此，

$$\int_{B_{2\delta}(x)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2}}dy \le C\delta^{\mathbf{r}} \int_{B_{2\delta}(x)} \frac{d(y)^{-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2}}dy.$$

对于最后一个积分，我们可以使用 [27], 中的估计（见引理 6.2），从而得到所需的不等式。□

证明 推论 2.3

如果 $y \in B_{2\delta}(x)$，那么 $\delta^{2-\mathbf{N}} \le C|x-y|^{2-\mathbf{N}}$，因此，(2.4) 蕴含

$$\int_{B_{2\delta}(x)} d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))dy = \delta^{\mathbf{N}-2} \int_{B_{2\delta}(x)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{\delta^{\mathbf{N}-2}}dy$$
$$\le C\delta^{\mathbf{N}-2} \int_{B_{2\delta}(x)} \frac{d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2}}dy \le c\delta^{\mathbf{N}-2+\mathbf{r}}\omega(\delta).$$

□

引理 *2.4* 的证明 我们设 $\delta_1 = c_0\delta$。(2.6) 中的积分可表示为 $I_k = \sum_{\kappa=1}^{\infty} I_{(\kappa)}$, 其中 $I_{(\kappa)}$ 是球形环域 $\mathcal{T}_\kappa$ =上的积分

$B_{2^{-\kappa+1}\delta_1}(x) \setminus B_{2^{-\kappa}\delta_1}(x)$。 对于后一个积分，我们有

$$I_\kappa \le c\frac{1}{(2^{-\kappa}\delta_1)^{\mathbf{N}-2+k}}\int_{\mathcal{T}_\kappa} d(y)^{k-2}\omega(d(y))dy \le \tag{A.1}$$

$$c\frac{1}{(2^{-\kappa}\delta_1))^{\mathbf{N}-2+k}}\int_{B_{2^{-\kappa+1}\delta_1}(x)} d(y)^{k-2}\omega(d(y))dy \le$$

$$c\frac{1}{(2^{-\kappa}\delta_1))^{\mathbf{N}-2+k}}(2^{-\kappa}\delta_1)^k\int_{B_{2^{-\kappa+1}\delta_1}(x)} d(y)^{-2}\omega(d(y))dy \le$$

$$c\frac{1}{(2^{-\kappa}\delta_1))^{\mathbf{N}-2+k}}\int_{B_{2^{-\kappa+1}\delta_1}(x)} d(y)^{k-2}\omega(d(y))dy \le$$

$$c\frac{1}{(2^{-\kappa}\delta_1))^{\mathbf{N}-2+k}}(2^{-\kappa}\delta_1)^k\int_{B_{2^{-\kappa+1}\delta_1}(x)} \frac{(2^{-\kappa}\delta_1)^{\mathbf{N}-2}}{|x-y|^{\mathbf{N}-2}}d(y)^{-2}\omega(d(y))dy \le$$

$$c\frac{1}{(2^{-\kappa}\delta_1))^{\mathbf{N}-2+k}}(2^{-\kappa}\delta_1)^k(2^{-\kappa\delta_1})^{\mathbf{N}-2}\int_{B_{2^{-\kappa+1}\delta_1}(x)} \frac{d(y)^{-2}\omega(d(y))}{|x-y|^{\mathbf{N}-2}}dy \le$$

$$\le c\omega(2^{-\kappa}\delta_1)$$

（最后一个不等式已在 [27] 中的引理 6.2 里得到证明）。我们对 κ将式 (A.1) 中的各项求和，得到

$$I_k \le c\sum_{\kappa=1}^{\infty}\omega(2^{-\kappa}\delta_1) \le C\int_1^{\infty}\omega(2^{-\tau}\delta_1)d\tau =$$

$$c\int_0^{\frac{1}{2}}\omega(t\delta_1)\frac{dt}{t} = c\int_0^{\delta_1/2}\omega(t)t^{-1}dt \le c\omega(\delta_1/2) \le c\omega(\delta).$$

□

证明 推论 2.5。事实上，由引理 2.4 可得

$$J_k \le c\delta^{\mathbf{r}-k}\int_{B_{c_0\delta}(x)}\frac{d(y)^{k-2}\omega(d(y))}{|y-x|^{\mathbf{N}-2+k}}dy \le c\delta^{\mathbf{r}-k}\omega(\delta).$$

□

证明 引理 2.6。再次将 (2.9) 中的积分表示为各项积分之和 I_κ，其中的球形环带 $\mathcal{T}_\kappa = B_{2^\kappa\delta(x)} \setminus B_{2^{\kappa-1}\delta(x)}$现在扩展了。对于单个积分 I_κ，与推导 (A.1) 的方法类似，我们有:

$$I_\kappa \le c\frac{1}{(2^\kappa\delta_1)^{\mathbf{N}-1+k}}\int_{\mathcal{T}_\kappa} d(y)^{k-2}\omega(y)dy \le \tag{A.2}$$

$$c\frac{1}{(2^\kappa\delta_1)^{\mathbf{N}-1+k}}\int_{B^{2^\kappa\delta_1}(x)} d(y)^{k-2}\omega(d(y))dy \le$$

$$c\frac{1}{(2^\kappa\delta_1)^{\mathbf{N}-1+k}}(2^\kappa\delta_1)^{k+\mathbf{N}-2}\omega(2^\kappa\delta_1).$$

接下来，由 (A.2) 可得

$$I_{(\kappa)} \le c\frac{1}{2^\kappa}\omega(2^\kappa\delta_1).$$

最后，与前面的计算类似，我们有

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} I_{(\kappa)} \le c\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{2^\kappa\delta_1}\omega(2^\kappa\delta_1) \le \int_1^\infty (2^\tau\delta_1)^{-1}\omega(2^\tau\delta_1)d\tau = c\int_{2\delta_1}^\infty t^{-1}\omega(t)\frac{dt}{t} \le c\frac{\omega(2\delta_1)}{2\delta_1} \le c\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1}.$$

□

证明 引理 2.7。
估计可直接由引理 2.4 和引理 2.2 得出。 □

证明 引理 2.8。其思路与引理 2.6 的证明相同。(2.10) 中的积分可表示为

$$\mathcal{J}(x) = \sum_{j\ge1}\mathcal{J}_j(x) := \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathcal{A}_j} d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))|x-y|^{1-\mathbf{N}}dy,$$

其中 $\mathcal{A}_j$ 是球形环域,

$$\mathcal{A}_j = B_{2^j\delta}(x) \setminus B_{2^{j-1}\delta}(x)$$

对于 $j \ge 1$， $y \in \mathcal{A}_j(x)$，由 (4.24) 可得 $\le C|x-y|^{1-\mathbf{N}} \le \delta(2^j\delta)^{1-\mathbf{N}}$，因此 ，

$$\mathcal{J}_j(x) \le c(2^j\delta)^{1-\mathbf{N}}\int_{\mathcal{A}_j(x)} d(y)^{\mathbf{r}-2}\omega(d(y))dy.$$

由于 $\mathcal{A}_j(x)$ 的体积不大于 $C(2^j\delta)^{\mathbf{N}-1}$，因此我们有

$$\mathcal{J}_j(x) \le c\delta(2^j\delta)^{1-\mathbf{N}}(2^j\delta)^{\mathbf{r}+\mathbf{N}-2}\omega(2^j\delta) = (2^j\delta)^{\mathbf{r}-1}\omega(2^j\delta). \tag{A.3}$$

(A.3) 中的和实际上是有限和。它只包含带有 $2^j\delta \le 1$ 的项，因此$\mathcal{J}_j(x) \le C(2^j\delta)^{-1}$。将 (A.3) 中的表达式对 $j \ge 1$ 求和后，我们得到

$$\mathcal{J}(x) \le \delta^{-1}\sum_j 2^{-j}\omega(2^j\delta) \le c\delta^{-1}\int_0^\infty \frac{\omega(2^t\delta)}{2^t}dt = \delta^{-1}c'\int_1^\infty \frac{\omega(\tau\delta)}{\tau^2}d\tau \le c''\delta^{-1}\omega(\delta).$$

□

Appendix B. The Green function and its derivatives

B.1. **概述**。 在本附录中，我们为二阶椭圆算子的格林函数 $G(x,\ y;\varsigma)$ 及其在具有光滑边界的单位球 $B \subset \mathrm{R^N}$ 内的导数建立一些估计。关于变量 $x,\ y$ 的导数已有充分研究；经典论文 [14] 中给出了我们应用所需的一阶和二阶导数估计。然而，我们还需要高阶导数的估计；此外，在第 3 节中，我们研究系数依赖于小球 $\mathcal{B} \subset \mathrm{R^N}$ 中额外参数 ς 的算子，并需要格林函数对全部三个变量的导数估计。

证明将在本附录后文给出。由于我们只考虑单位球，因此省略格林函数记号中的上标 $\circ$。

B.1.1. *Schauder*估计。 注意，不涉及ς 的导数估计已包含在 [18], 中，参见定理 2.9。因此，我们只需考虑导数$G_\varsigma, G_{x\varsigma}, G_{\varsigma\varsigma}, G_{xx\varsigma}, G_{xy\varsigma}, G_{x\varsigma\varsigma}$，其中各点 x, y彼此相距较远。具体而言，点 x 应位于球的中心点 O 附近的一个小邻域内，而 y 应靠近球边界上的某个点 y°。这样便消除了格林函数在 $x = y$ 处的奇异性。

我们将系统使用的结果是 Schauder估计的推论。我们陈述感兴趣的特例：对于半径为$r < 1$的球 $\mathcal{B}_r$，二阶导数（$k = 2$）。

定理 B.1。 [内部估计] 设 $\mathcal{L}$ 是定义在 B_r 中的二阶椭圆算子，其系数属于 $H^{\cdot\cdot}$*older* 类 $C^{k+\gamma}$, $0 < \gamma < 1$ 且设 $f \in C^{k+\gamma}(B_{\theta r})$ $0 <g\ < 1$, $\theta\ < 1$。那么，方程 $\mathcal{L}u = f$ 在 $\mathcal{B}_r$ 中的解 $u(x)$ 满足如下估计

$$|u|_{2+k+\gamma, B_{\theta r}} \leq \mathbf{C}\left(|f|_{k+\gamma, B_r} + \|u\|_{C(\mathcal{B}_r)}\right), \tag{B.1}$$

其中，记号 $|u|_{\gamma, B_r}$ 表示 u 在 $H^{\cdot\cdot}$*older* 类 C^{γ, B_r} 中的范数，等等；式 (B.1) 中的常数取决于算子 $\mathcal{L}$ 的椭圆性常数、系数的 $H^{\cdot\cdot}$*older* 范数以及参数 $\theta < 1$.

因此，这个内部 Schauder估计表明，在 H¨older 标度下，二阶椭圆方程的解比右端项光滑 2 阶，其范数由较大球中 f 的相应范数控制。证明参见 [13], 定理 6.2。

我们还需要边界 Schauder 估计。我们针对区域为两个球的交集这一特殊情形进行表述。设 B 为单位球，B_ϵ 为半径为 ϵ，且以点 $y^\circ \in \Gamma \equiv \partial B$为中心的球。记 U_ϵ 为交集 $U_\epsilon = B \cap B_\epsilon$，并记 $U_{\epsilon/2}$ 为 B 与以 y°为中心的较小球的交集。

定理 B.2. [边界估计] 设 $u(x)$ 是方程 $\mathcal{L}u = f$ 在 $\mathcal{D} = U_\epsilon$ 中的一个解，且满足 $f \in C^\gamma$，使得 $u(y) = 0$ 在 $\Gamma \cap B_r$上成立。那么

$$|u|_{k+2+\gamma, U_{\epsilon/2}} \leq C\left(|f|_{k+\gamma, \mathcal{D}} + \|u\|_{C(B\cap U_\epsilon)}\right).$$

对于边界的一部分为超平面的区域，利用变量变换将边界拉直后，这一结果可直接由标准边界 Schauder 估计证明中的主要局部步骤推出，参见例如 [13], 推论 6.7。

B.2. **定理 2.11 的证明。**

证明。 证明分为两步。第一步，我们建立格林函数关于变量 ς 的一阶和二阶导数的估计；这里我们使用 Krasovskii 估计。第二步，通过使用 Schauder估计，我们进行某种引导过程，并推导出也涉及变量 x 和 y 的导数估计。下文中， ∂_ς 表示关于变量 ς 中任意一个变量的导数。

我们先求格林函数 $G(x,\ y;\ \varsigma)$ 关于变量 ς 的导数估计。我们有 $\mathcal{L}(\varsigma)\mathbf{G}(\varsigma) = \mathbf{I}$，后者是恒等算子。我们对变量 ς 求此等式的导数；对于一阶导数，我们有

$$\partial_\varsigma \mathbf{G}(\varsigma) = -\mathbf{G}(\varsigma)\mathcal{L}_\varsigma \mathbf{G}(\varsigma);\ \mathcal{L}_\varsigma = \partial_\varsigma \mathcal{L}, \tag{B.2}$$

后者是一个二阶算子，其系数为$\mathbf{a}_\varsigma = \partial_\varsigma \mathbf{a}(\varsigma)$，定义于 C^{m-1}. 。对于格林函数，(B.2) 给出

$$\partial_\varsigma G(x,y;\varsigma) = -\int_{\mathcal{B}} G(x,z;\varsigma)\mathcal{L}_\varsigma(z,\partial_z;\varsigma)G(z,y;\varsigma)dz. \tag{B.3}$$

我们对 (B.3) 分部积分；由于 G 满足狄利克雷边界条件，边界项为零，因此

$$\partial_\varsigma G(x,y;\varsigma) = \int_{\mathcal{B}} \langle \mathbf{a}_\varsigma(z)\nabla_z G(x,z;\varsigma), \nabla_z G(z,y;\varsigma)\rangle dz. \tag{B.4}$$

为了估计 (B.4) 中的积分，我们使用 (2.11)，得到

$$|\partial_\varsigma G(x,y;\varsigma)| \le C\int_\Omega |x-z|^{1-\mathbf{N}}|z-y|^{1-\mathbf{N}}dz \le C|x-y|^{2-\mathbf{N}} \le C,$$

因为 $|x-y| > r_0 > 0$.

处理 G 的二阶导数时会稍微复杂一些。我们再次对 (B.3) 求导，得到

$$\partial^2_{\varsigma\varsigma} G(x,y;w) = -\int_{\mathcal{B}} G(x,z;\varsigma)\mathcal{L}_{\varsigma\varsigma}(z,\partial_z;\varsigma)G(z,y;\varsigma)dz \tag{B.5}$$

$$+2\int_{\mathcal{B}}\int_{\mathcal{B}} G(x,z_1;\varsigma)\mathcal{L}_\varsigma(z_1,\partial_{z_1},\varsigma)G(z_1,z_2;\varsigma)\mathcal{L}_\varsigma(z_2,\partial_{z_2};\varsigma)G(z_2,y;\varsigma)dz_1dz_2.$$

有了 $|x-y| > \frac{3}{4}$ 后，我们考虑 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 中的三个区域:
$\mathcal{D}_1 = \{(z_1,\ z_2)\colon\ |z_1-z_2| > \frac{1}{8}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{(z_1,\ z_2)\colon$
$|z_1-z_2| < \frac{1}{4},\ |z_1-x| > \frac{1}{8}\}$, $\mathcal{D}_3 = \{(z_1,\ z_2)\colon$
$|z_1-z_2| < \frac{1}{4},\ |z_2-y| > \frac{1}{8}\}$.

显然，这三个区域覆盖了 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$。我们引入从属于该覆盖的单位分解；$\psi_s(z_1,\ z_2)\ s=1,\ 2,\ 3,\ \psi_s\in C^\infty(\mathcal{B}\times\mathcal{B}),\psi_s=0$ 在$\mathcal{D}_s$之外，$\sum_s\psi_s(z_1,\ z_2)=1$。$\psi_s$的一阶和二阶导数有界。相应地，(B.5)中的积分分成三项，其因子为 $\psi_s(z_1,\ z_2)\ s=1,\ 2,\ 3$。我们逐一考察它们。

对于 $(z_1,\ z_2)\in\mathcal{D}_1$，我们分别对 z_1 和 z_2 变量进行一次分部积分。我们略去导数作用于截断函数或 $\mathcal{L}$ 的系数上的项，因为这些项的奇异性较弱，并考虑奇异性最强的项，它们通常具有如下形式

$$\mathcal{M}_1(x,y)=\int_{\mathcal{D}_1}\psi_1(z_1,z_2)\partial_{z_1}G(x,z_1;\varsigma)\partial_{z_1}\partial_{z_2}G(z_1,z_2;\varsigma)\partial_{z_2}G(z_2,y;\varsigma)dz_1dz_2, \tag{B.6}$$

其中系数有界。由估计 (2.11)，(B.6) 中的中间项有界，因为 $|z_1-z_2|>\frac{1}{8}$ 属于 $\mathcal{D}_1$；而另外两项的奇异性为$O|x-z_1|^{1-\mathbf{N}}$，$O|x-z_1|^{1-\mathbf{N}}$，其系数受算子 $\mathcal{L}$. 的系数的三阶导数控制。这意味着 (B.5) 中对应于 ψ_1的项有界。

接下来，我们考虑关于 $\mathcal{D}_2$. 的积分。我们对 z_1 变量进行两次分部积分，并对 z_2 变量进行一次分部积分。同样，略去导数作用于截断函数或系数上的奇异性较弱的项后，我们得到如下形式的积分

$$\mathcal{M}_2(x,y)=\int_{\mathcal{D}_2}\psi_2(z_1,z_2)\partial_{z_1}^2G(x,z_1;\varsigma)\partial_{z_2}G(z_1,z_2;\varsigma)\partial_{z_2}G(z_2,y;\varsigma)dz_1dz_2. \tag{B.7}$$

被积函数中 (B.7) 的第一个因子有界，因为这里 $|x-z_1|>\frac{1}{8}$，而其他项仅含一阶导数，其奇异性阶数为 $1-\mathbf{N}$，因此，$\mathcal{M}_2(x,\ y)$ 有界。

最后，我们考虑在 $\mathcal{D}_3$. 上的积分。这里，(B.5) 中最后一个因子有界。我们对第二个因子分部积分一次，并再次忽略导数作用于截断函数或系数上的项，得到最奇异的项为

$$\mathcal{M}_3(x,y)=\int_{\mathcal{D}_3}\psi_3(z_1,z_2)\partial_{z_1}G(x,z_1;\varsigma)\partial_{z_1}G(z_1,z_2;\varsigma)\partial_{z_2}^2G(z_2,y;\varsigma)dz_1dz_2. \tag{B.8}$$

这里，最后一个因子有界，而第一个和第二个因子的奇异性阶数均不超过 $1-\mathbf{N}$；所有这些项的系数都依赖于阶数不高于 3 的系数的导数。因此，(B.6)、(B.7)、(B.8) 这三个表达式均有界。

接下来，我们开始研究格林函数关于 x和 y变量的导数。

固定 y，并令 x 靠近 B的中心，我们考虑半径小于 $3/4$ 的球 $B_r = B_r$(0)和 $B_{\theta r} = B_{\theta r}$ (0)，其中半径为 r 。对于 $x \in B_r$，我们考虑函数u_0(x) $= G$(x， y; ς)， u_1(x) $= \partial_\varsigma G$(x， y; ς)， u_2(x) $= \partial^2_{\varsigma\varsigma} G$(x， y; ς)。

正如已经证明的，函数 u_0, u_1, u_2 在 B_r 中有界。我们还知道 u_0(x) $\in C^3$(D)。对 ς 求导后，由等式 $\mathcal{L}$(ς)G(x, y; ς) =0, $x \in B_r$，可见 u_1(x) 是方程 $\mathcal{L}u_1 = f_1$ 的一个解，其中 f_1(x) =–($\partial_\varsigma \mathcal{L}$)$u_0$。因此， f_1(x) $\in C^{1,\gamma}(B_{r/2})$，此外， f_1(x) 在 $\partial\mathcal{B}$. 上 $= 0$ 。我们对方程 $\mathcal{L}u_1 = f_1$ 应用 Schauder估计，从而得到 u_1 的 x-阶导数的估计，

$$|u_1|_{3+\gamma, B_{\theta r}} \le C\left(\|u_1\|_{L_\infty(B_r)} + |f_1|_{1+\gamma, B_r}\right). \tag{B.9}$$

不等式 (B.9) 表明， x 中直至三阶的导数在 $B_{\theta r}$ 中有界；事实上，它们的阶为 2，且 H¨older 比 f_1 更好。

类似地，我们考虑函数 u_2(x)。它是方程的一个解 n

$$\mathcal{L}(\varsigma)u_2(x) = f_2(x) \equiv -[(\partial^2_{\varsigma\varsigma}\mathcal{L}(\varsigma)]u_0 - 2[\partial_\varsigma \mathcal{L}(\varsigma)]u_1. \tag{B.10}$$

我们刚刚证明了 $u_1 \in C^{2+k+\gamma}(B_{\theta r})$；因此，根据我们对 $\mathcal{L}$ 的假设，我们有 $f_2 \in C^{k+\gamma}(B_{\theta^2 r})$。再次应用 Schauder 估计，我们得到一个与 (B.9) 类似的不等式，用于估计 u_2 的二阶导数。

为了处理涉及对 y 求导的导数，我们只需对函数 v_0(y) $= G$({v5, y; ς) 进行上述推理，其中固定一个靠近中心点 0 的 $x \in B_r$ ，并将其视为 $y \in U_{(\epsilon)} = B_\epsilon$(y°) $\cap B$. 的函数。该函数是方程 $\mathcal{L}$({v15, ∂_y; ς)v_0(y) {v22, 的一个解；对 {v25, 求导后，我们得到方程 $\mathcal{L}$({v29, ∂_y; ς)$\partial_\varsigma v_0 = -[\partial_\varsigma \mathcal{L}]\, v_0 \equiv g_1$.。现在，由于 $\partial_\varsigma v_0 = 0$ 在边界上，我们可以应用边界 Schauder 估计，得到对 $v_1 = \partial_\varsigma v_0$ 的估计，

$$|v_1|_{2+\gamma, U_{(\epsilon/2)}} \le C(\|v_1\|_{L_\infty(U_\epsilon)} + |g_1|_{\gamma, U_\epsilon}). \tag{B.11}$$

根据定理 2.9，(B.11) 右端项中的函数 g_1 有界，并且关于 x ∈B_r(0)，其关于 x 的导数也有界，因为 x， y 彼此分离。这就给出了 v_1 所需的估计。

最后，我们考虑格林函数的混合导数 $G_{\varsigma xy}$(x， y； ς) $= \partial_x\partial_y\partial_\varsigma G$(x， y； ς)，其中 $x \in B_r$ 且 $y \in U_\epsilon$

我们再次应用 Schauder估计，这次采用如下设置。函数 v_2(x) $= \partial_y G$(x， y， ς) 满足 $\mathcal{L}$(x， ∂_x； ς)$v_2 = 0$。我们对后一个等式关于 ς 求导，并对 $v_3 = \partial_\varsigma v_2$ 得到方程

$$\mathcal{L}(x, \partial_x; \varsigma)_x v_3 = g_2 = -[\partial_\varsigma \mathcal{L}(x, \partial_x; \varsigma)] \tag{B.12}$$

（B.12）中的右端项属于 $C^{k-2+\gamma}$ ，且关于 U_ϵ中的 y 变量一致，因此， v_3 属于 x 变量中的 $C^{k+\gamma}$ ，这就得到了所需的估计

$$G_{\varsigma xy}(x, y; \varsigma) \le C.$$

以类似的方式，我们可以为 x， y中的高阶导数建立这类估计，前提是系数足够光滑。

□

References

[1] T. Alexeeva, N. Shirokov, 《利用调和函数对 R³ 中弧上的 H ¨older 类进行构造性描述》。《逼近理论杂志》249（2020），105308，[2] T. Alekseeva, N. Shirokov, 《R³ 中弦弧曲线上的 H ¨older 空间的构造性描述》。《圣彼得堡数学杂志》36（2025），第 1 期，25–39。[3] V. Andrievskii, 《关于利用调和多项式逼近函数》。《苏联数学学报》30，1（1988），1–13。[4] J. Bliedtner, 《利用调和函数进行逼近》。载于《位势理论—ICPT 94》（Kouty, 1994），德格鲁伊特（1996），297–302，[5] F. Browder, 《利用偏微分方程的解进行逼近》。《美国数学杂志》84（1962），134–160。[6]F. Browder, 《泛函分析与偏微分方程 II》。《数学年刊》145（1961/62），81–226。[7] Y. Brudnyi, 《由局部逼近定义的空间》（俄文）。《莫斯科数学会论文集》24（1971），69–132。英文版见：《莫斯科数学会论文集译刊》24（1971），73–139。[8] A. Brudnyi, Y. Brudnyi, 《延拓与迹问题中的几何分析方法》。第 1 卷。《数学专著》102，Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2012；第 2 卷。《数学专著》103，Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2012。[9] G. David, S. Semmes, 《一致可整集及其上的分析》。调查与专著 38，美国数学会，1993。[10] S. Gardiner, 《调和逼近》。《伦敦数学会讲义系列》221。剑桥大学出版社，1995。[11] S. Gardiner, 《调和逼近及其应用》。载于《逼近、复分析与位势理论》（蒙特利尔，QC, 2000），191–219，北约科学丛书第二辑：数学、物理与化学，37，克鲁维尔，2001。[12] S. Gardiner, M. Goldstein, 《利用调和函数进行卡尔曼逼近》。《美国数学杂志》117，1，245–255（1995）。[13] D. Gilbarg, N. Trudinger, 《二阶椭圆偏微分方程》，施普林格，2001。[14] M. Gr¨uter, K.–O. Widman, 《一致椭圆方程的格林函数》。《数学手稿》37（1982），303–342。[15] W. Hausmann, 《利用调和函数进行逼近》。载于《多元逼近专题》（圣地亚哥，1986），学术出版社（1987），111–124。[16] D. Khavinson, 《关于利用调和函数进行一致逼近》。《密歇根数学杂志》34（1987），465–473。[17] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, 《变分不等式及其应用导论》，学术出版社，1980。[18] Ju. Krasovskii, 《格林函数中奇异性的分离》（俄文）。《苏联科学院通报：数学辑》31（1967），977–1010。英文版：《苏联数学通报》1:5（1967），935–966。[19] J. Mateu, Y. Netrusov, J. Orobitg, J. Verdera, 《椭圆方程的解的有界平均振荡与利普希茨逼近》。《傅里叶研究所年刊》46（4）（1996），1057–1081。[20] P. Mattila, P. Saaranen, 《阿尔福斯–戴维斯正则集与双利普希茨映射》。《芬兰科学院数学年刊》34（2009），第 2 期，487–502。

[21] *M. Mazalov*，《调和函数的一致逼近问题》。《圣彼得堡数学杂志》*23*（*4*）（*2012*），*731–759*。[22] *M. Mazalov*，《利普希茨空间中调和函数可逼近性的判据》。《数学科学杂志（纽约）》*194*（*6*），*678–692*（*2013*）。[23] *P. Paramonov*，《关于 C^1-范数中的调和逼近》。《苏联数学文集》*71*，*1*（*1992*）。[24] *D. Pavlov*，《某些多维紧集上 *H ¨older* 类的构造性描述》。《圣彼得堡大学学报：数学》*54*（*2021*），*245–253*。[25] *D. Pavlov*，《R^3 的紧子集上 *H ¨older* 类的构造性描述》。《数学科学杂志（纽约）》*261*（*6*）（*2022*），*808–825*。[26] *E. Poletsky*，《利用调和函数进行逼近》。《美国数学会汇刊》*349*（*11*）（*1997*），*4415–4427*。[27]*G. Rozenblum, N. Shirokov*，《紧集上利用椭圆方程的解逼近函数：定量结果》。即将发表于《以色列数学杂志》。*arXiv:2307.11219*。[28] *P. Shvartsman*，《R^n 正则子集上光滑函数空间的局部逼近与内在刻画》。《数学通讯》*279*（*11*）（*2006*），*1212–1241*。[29] *N. Shirokov, A. Vasin*，《R^d 中调和逼近的杰克逊–伯恩斯坦型定理》。*Arxiv: 2508.02798*

Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden电子邮箱地址：grigori@chalmers.se

St. Petersburg State University, Univ.Naberezhnaya, 7/9, St.Petersburg 199034; Nation. Research Univ. Higher School of Economics, Kantemirovskaya Str. 3a, St. Petersburg, 194100; Russia电子邮箱地址：nikolai.shirokov@gmail.com