arXiv:2601.02860v1 [math.DG] 6 Jan 2026

极小极大驻定整变体的 Morse指标

Mitchell Gaudet, Talant Talipov

摘要

我们证明，对于闭黎曼流形，实现其 d 维 p 宽度的极小极大驻定整变体，其Morse指标存在一个上界。

1 引言

设 $(M^n,\ g)$ 为一个闭黎曼流形。 d 维体积谱是由 Gromov [18, 19, 20] 引入的一列不变量 $\{\omega_p^d(M,\ g)\}_{p\in\mathbb{N}}$。这些$d$ 维 p宽度是拉普拉斯谱的非线性类比，并推动了极小超曲面理论的重大进展（见 [5, 7, 11, 14, 15,16, 17, 24, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 42, 54]）。特别是，对于满足 $3 \le n \le 7$ [47] 的闭黎曼流形 $(M^n,\ g)$，丘成桐关于存在无穷多个闭嵌入极小超曲面的猜想已得到证明。

当 $3 \le n \le 7$ 时，每个 $(n-1)$ 维 p 宽度都等于一个光滑、闭、嵌入的极小极大 极小超曲面的加权面积：存在两两不交的光滑闭嵌入极小超曲面 $\{\Sigma_{p,j}\}_{j=1}^{N(p)}$ 以及正整数$\{m_{p,j}\}_{j=1}^{N(p)}$ ，使得

$$\omega_p^{n-1}(M,g) = \sum_{j=1}^{N(p)} m_{p,j}\,\mathrm{Area}_g(\Sigma_{p,j}). \tag{1}$$

此外，指标满足界 [35]

$$\sum_{j=1}^{N(p)} \mathrm{index}(\Sigma_{p,j}) \le p,$$

其中，index(Σ) 表示 Σ的 Morse指标。关于具有最优正则性的极小曲面的高维指标界，可参见 [28]。尽管（1）中可能出现大于 1 的重数， [51], 重数一猜想已在 [11, 54], 中得到解决，这表明对于一般度量，超曲面是双侧的，且所有权重均为 1。在这种情况下，可以得到更强的加权指标界

$$\sum_{\Sigma_{p,j}\ \text{2–sided}} m_{p,j}\,\mathrm{index}(\Sigma_{p,j}) \ + \sum_{\Sigma_{p,j}\ \text{1–sided}} \frac{m_{p,j}}{2}\,\mathrm{index}(\Sigma_{p,j}) \ \le\ p.$$

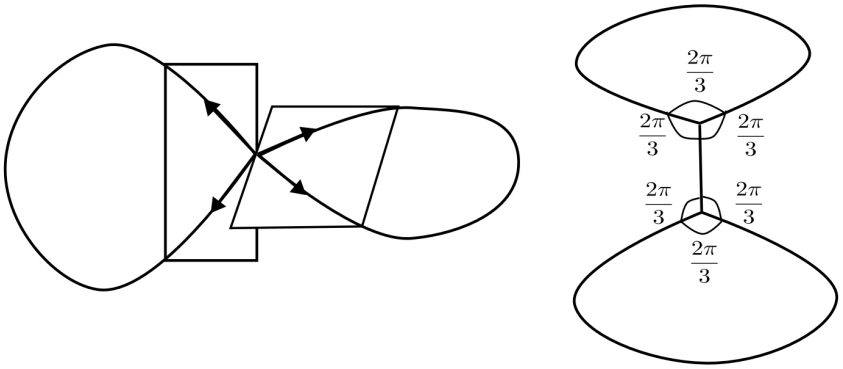


图 1：定常扭曲八字形（左）和定常眼镜形（右）

阿尔姆格伦的理论表明，宽度由在环带中几乎极小化的定常积分变分流形实现 [5, 6, 37]。

对于 $d = 1$，相关的极小极大对象是定常测地网。测地网是浸入于 $(M^n,\ g)$ 中的有限加权图，其边为测地线段。若测地网是长度泛函的临界点，则称其为驻定；等价地说，每个顶点处的内向单位切向量（计入重数）之和均为零。任何一维平稳整变分簇都是驻定测地网 [4, 6, 8, 41,42, 43]。图 1 展示了 M^n 中 $n \geq 3$ 的驻定测地网的简单例子。定常扭曲八字形由一个顶点和两条以该点为基点的测地线环组成。定常眼镜形由两个由一条测地线边连接的顶点组成，每个顶点都附有一个测地线环。关于测地网理论的进展，请参阅 [9, 10, 22,27, 32, 39, 40, 45, 49, 50] 。在闭曲面上，Chodosh–Mantoulidis 使用 Allen–Cahn 极小极大框架（采用正弦–戈登势）证明，一维 p宽度由闭浸入测地线的并集实现：

定理 1.1 ([12])。 设 $(M^2,\ g)$ 是一闭黎曼曲面。对于每个 $p \in \mathbb{N}$，存在闭浸入测地线 $\{\sigma_{p,j}\}_{j=1}^{N(p)}$ 和整数 $m_{p,\ j} \geq 1$ 使得

$$\omega_p^1(M, g) = \sum_{j=1}^{N(p)} m_{p,j}\, \mathrm{length}_g(\sigma_{p,j}).$$

对于曲面，闭测地线还满足莫尔斯指标控制，参见 [38], ，其中证明了

$$\sum_{j=1}^{N(p)} \mathrm{index}(\sigma_{p,j}) \leq p \quad \text{and} \quad \sum_{v \in \mathrm{Vert}(\{\sigma_{p,j}\}_j)} \binom{\mathrm{ord}(v)}{2} \leq p.$$

本文的主要结果如下。

定理 1.2。 设 (M^n, g) 是一个维数为 $n \geq 2$ 的闭黎曼流形。对于每个 $p \in \mathbb{N}$ 和 $d \in \{1, \dots, n-1\}$，存在一个 $S \in \mathcal{IV}_d(M)$，它是驻定的，且在环带中几乎极小，使得

$$\omega_p^d(M, g) = \|S\|(M) \quad \text{and} \quad \operatorname{index}(S) \leq p(n-d),$$

其中，我们将 $\operatorname{index}(S) \leq p(n-d)$ 解读为 S 不是 $\big(p(n-d)+1\big)$-不稳定的（见下文定义 3.2）。

与超曲面的情形中 p 的界不同，这里的界为 $p(n-d)$，原因在于：在一个 n 维流形上，由 d 维循环构成的 p-扫掠所检测到的上同调类的维数恰为 $p(n-d)$。

作为定理 1.2、命题 3.3 以及一维驻定整变分的正则性 [4, 6, 8, 32, 41, 42, 43] 的推论，我们得到以下结果。

定理 1.3。设 (M^n, g) 是一个维数为 $n \geq 2$ 的闭黎曼流形。对于每个 $p \in \mathbb{N}$，都存在互不相交的嵌入的驻定测地线网 $G_i \colon \Gamma_i \to M$，其中$\Gamma_i$ 对每个 $1 \leq i \leq N(p)$ 都是一个良好的加权多重图，使得

$$\omega_p^1(M, g) = \sum_{i=1}^{N(p)} \operatorname{length}_g(G_i) \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{N(p)} \operatorname{index}(G_i) \leq p(n-1).$$

概要。 本文的结构如下。第 2 节回顾记号和 Almgren–Pitts 极小极大理论。第 3.1 节引入 k-不稳定变分流形的概念，证明其对于驻定测地网而言等价于通常的 Morse 指标，并记录其若干性质。第 3.2 节建立 k-不稳定定常积分变分流形空间的紧致性。第 3.3 节证明变形定理和定理 1.2。第 4 节分析 $\omega_1^1(S^n, g_{\text{round}})$，并证明该界必定依赖于 n，且对于 ω_1^1而言是最优的。

现在我们概述定理 1.2 的证明。在极小超曲面情形中，Morse 指标界 [35] 利用结构定理 [1, 52, 53]推出光滑极小超曲面的可数性，从而可以通过归纳逐个排除高指标超曲面。在高余维情形下，结构定理并不可用，因此我们改为使用 [28, 46]，中提出、并针对定常积分变分流形作了调整的分层变形。

给定 ω_p^d 的一个极小极大序列，我们通过同伦变形使其像避开由 $\big(p(n-d)+1\big)$ 不稳定的驻定整 d-变分流形构成的集合。主要问题在于，无法一步构造出既具有这一性质、又保留极小极大性质的同伦。由于定义域是单纯复形，我们转而遵循标准步骤：先在 0-胞腔上定义同伦，然后按维数归纳。要在高维胞腔上构造同伦，必须确保低维同伦彼此相容；为此，我们采用 Marques–Neves [35] 的一种构造，随后沿着相关的梯度流演化，从而将像推离由 $\big(p(n-d)+1\big)$ 不稳定的变分流形构成的集合。

致谢。作者谨向 Yevgeny Liokumovich 教授致以谢意，感谢他的指导与鼓励。本文部分内容是在 T.T. 于纳扎尔巴耶夫大学（阿斯塔纳）工作期间完成的；T.T. 感谢 Durvudkhan Suragan 教授和 Makhpal Manarbek 的热情款待。T.T. 获得了 Dr. Sergiy and Tetyana Kryvoruchko 数学研究生奖学金的资助。M.G. 获得了安大略省研究生奖学金的资助。

2 预备知识

2.1 记号

设 (M^n, g) 为一个闭黎曼流形。本节回顾几何测度论中的标准记号。

- $\mathbf{I}_d(M;\mathbb{Z}_2)$：$M$ 中 d 维模 2 平坦链的空间，其上赋予由平坦度量 $\mathcal{F}$ 诱导的拓扑。

- $\mathcal{Z}_d(M;\mathbb{Z}_2)$：满足 $\partial T = 0$ 的 $_d(M;\mathbb{Z}_2)$ 中的 d 维平坦圈 $T \in \mathbf{I}$ 的空间。

- $\mathbf{M}$：$\mathbf{I}_d(M;\mathbb{Z}_2)$ 上的质量泛函。

- $G_d(M) := \{(x, P) : x \in M,\ P \in G(T_xM, d)\}$，其中 $G(T_xM, d)$ 是由 T_xM 中无向的 d 维子空间构成的 Grassmann 流形。

- $\mathcal{V}_d(M)$：M 上的 d 维变分流形空间，即 $G_d(M)$ 上配备弱拓扑的拉东测度空间，该弱拓扑由每个 $\{V \in \mathcal{V}_d(M) \text{ 上的变分流形度量 } \mathbf{F} \text{ 诱导：} \|V\|(M) \le c\}$ for $c > 0$。

- $\mathcal{IV}_d(M)$：M 上的整 d 维变分流形空间。

- $\|V\|$：由 $V \in \mathcal{V}_d(M)$ 在 M 上诱导的权测度。

- $|T|$：由模 2 平坦链 $T \in \mathbf{I}_d(M;\mathbb{Z}_2)$ 诱导的整 d 维变分流形。

- $\mathbf{F}$-度量在 $\mathbf{I}_d(M;\mathbb{Z}_2)$ 上定义为

$$\mathbf{F}(S,T) := \mathcal{F}(S,T) + \mathbf{F}\big(|S|, |T|\big), \qquad S, T \in \mathbf{I}_d(M;\mathbb{Z}_2).$$

- $I(1,n)$：单位区间 I 上的胞腔复形，其中 1-胞腔为区间 $[0, 1\cdot 3^{-n}]$, $[1\cdot 3^{-n}, 2\cdot 3^{-n}], \cdots, [1-3^{-n}, 1]$，0-胞腔为端点 $[0], [3^{-n}], [2\cdot 3^{-n}], \cdots, [1]$。

- $I(m,n)$：定义在 I^m 上的胞腔复形，即 $I(1,n)^{m\otimes} = \underbrace{I(1,n) \otimes I(1,n) \otimes \cdots \otimes I(1,n)}_{m \text{ 次}}$。

2.2 阿尔姆格伦–皮茨极小极大理论

根据阿尔姆格伦同构定理，[5, 6, 21], 球面上的模-2 d循环空间 $\mathcal{Z}_d(S^n;\mathbb{Z}_2)$与 Eilenberg–MacLane 空间$K(\mathbb{Z}_2, n-d)$弱同伦等价。令 $\mu \in H^{n-d}\big(\mathcal{Z}_d(S^n;\,\mathbb{Z}_2);\ \mathbb{Z}_2\big)$ 表示非平凡的上同调类。μ 的所有杯幂均非平凡，而 $\mathcal{Z}_d(S^n;\mathbb{Z}_2)$ 的上同调环由这些杯幂及其 Steenrod 平方 [23]生成。

选取一个光滑映射 $f\colon M \to S^n$，它是从一个小球 $B \subset M$ 到 $S^n \setminus \{p\}$ 的微分同胚，并将 $M \setminus B$ 映到点 p。循环空间上的诱导映射 $F\colon \mathcal{Z}_d(M;\,\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{Z}_d(S^n;\,\mathbb{Z}_2)$ 将 μ 拉回为一个非平凡类 $\mu := F^*(\mu) \in H^{n-d}\big(\mathcal{Z}_d(M;\,\mathbb{Z}_2);\,\mathbb{Z}_2\big)$。

设 X 是一个有限单纯复形。连续映射 $\Phi\colon X \to \mathcal{Z}_d(M;\,\mathbb{Z}_2)$ 称为 p-扫掠，如果 $\Phi^*(\mu^p) \neq 0 \in H^{p(n-d)}(X;\mathbb{Z}_2)$，$\Phi$ 满足无质量集中性质（参见 [31, 34]），且 X 是 $I(2p+1, q)$ 的一个立方子复形，其中某个 $q \geq 1$。所有此类 p-扫掠的集合记为 $\mathcal{P}_p^d(M, g)$，即 p-容许集合。d 维的 p-宽度为

$$\omega_p^d(M, g) := \inf_{\Phi \in \mathcal{P}_p^d} \sup_{x \in X} \mathbf{M}\big(\Phi(x)\big).$$

定义 2.1. $\mathcal{P}_p^d$的极小极大序列是一个 p-扫掠族序列 $\{\Phi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_p^d$，满足

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{x \in X_i} \mathbf{M}\big(\Phi_i(x)\big) = \omega_p^d(M, g).$$

其临界集为

$$\mathbf{C}\big(\{\Phi_i\}\big) := \Big\{V \in \mathcal{V}_d(M) : \|V\|(M) = \omega_p^d(M, g) \ \text{ and } \ V = \lim_j |\Phi_{i_j}(x_j)|\Big\},$$

其中极限是在变分流形意义下取得的。

我们可以假设极小极大序列的定义域是维数至多为 $p(n-d)$ 的有限单纯复形（参见 [49] 中的引理 2.25）。

阿尔姆格伦理论表明，宽度由在环带中几乎极小的平稳整变分簇实现 [5, 6, 37]。

定理 2.2（d维宽度的极小极大定理）。对于每个 p，存在$S \in \mathcal{IV}_d(M)$，它是驻定的，且在环带中几乎极小，使得

$$\omega_p^d(M, g) = \|S\|(M).$$

对于 $d = 1$，具有更强的正则性：平稳整 1-变分流形是驻定测地线网 [5, 6, 8, 41, 42, 43]。将这一正则性与 [32] 的引理 2.5 结合，可得如下结论。

定理 2.3（一维宽度的极小极大定理）。对于每个 p，都存在互不相交的嵌入的平稳测地网 $G_i : \Gamma_i \to M$，其中 Γ_i 对每个 $1 \le i \le N(p)$ 都是良好的加权多重图，使得

$$\omega_p^1(M,g) = \sum_{i=1}^{N(p)} \mathrm{length}_g(G_i).$$

定义 2.4。d维 p-宽度的*Almgren–Pitts* 实现，记作$\mathcal{APR}_{p,\,d}(M,g)$，是所有满足以下条件的 d维变分流形 S 的集合：

1. $\|S\|(M) = \omega_p^d(M,\ g)$,
2. S 是一个在环域中几乎极小的平稳整变分簇。

定理 2.2 保证 $\mathcal{APR}_{p,d}(M,g) \neq \emptyset$。

从现在起，我们固定一个闭黎曼流形 (M,g)，因此在记号中省略对 (M,g) 的显式依赖。

3 指标上界

3.1 不稳定变分与指标

我们根据 [35]引入 k-不稳定驻定整变分流形的概念。

定义 3.1。设 $S \in \mathcal{IV}_d(M)$ 是一个驻定整变分流形，且 $\varepsilon \ge 0$。如果 S 在一个-不稳定的 ε-邻域 中，即存在 $0 < c_0 < 1$ 和一个光滑族 $\{F_v\}_{v\in B^k} \subset$ 微分同胚群(M)，满足对所有 $v \in B^k$ 都有 $F_0 = \mathrm{Id}$ $F_{-v} = F_v^{-1}$，使得对于任意$V \in \mathbf{B}_{2\varepsilon}^{\mathbf{F}}(S)$，光滑函数

$$A^V : \overline{B}^k \to [0,+\infty), \quad A^V(v) = \|(F_v)_\# V\|(M)$$

满足

- A^V 在 $m(V) \in B^k_{c_0/\sqrt{10}}(0)$ 处有唯一最大值；
- $-\frac{1}{c_0}\,\mathrm{Id} \le D^2 A^V(u) \le -c_0\,\mathrm{Id}$ for all $u \in \overline{B}^k$.

这里，$(F_v)_\#$ 表示推前运算。注意，由于 A^V 是严格凹函数，最大值同时也是唯一的临界点。因此，由于 S 是驻定的，必然有 $m(S) = 0$。如果 V_i 在$\mathbf{F}$-拓扑下趋于 V，则 A^{V_i} 在光滑拓扑下趋于 A^V [42, 第 2.3 节(2)]。

注意，若 $V_i \to V$，则根据前面的说明，$m(V_i) \to m(V)$。由于球$\mathbf{B}_{2\varepsilon}^{\mathbf{F}}(S)$是可度量化的，映射 $V \to m(V)$ 在其上连续。因此，若 S 是驻定的，且在一个 0-邻域内是 k-不稳定的，则它在某个$\varepsilon > 0$的 ε-邻域内也是 k-不稳定的。

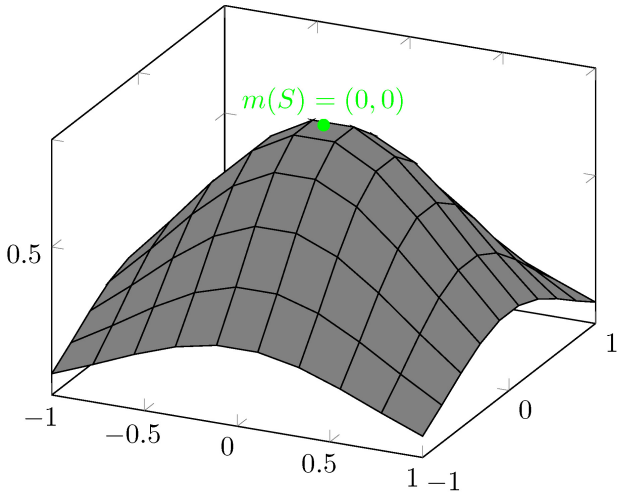


图 2：平稳整变分簇的 A^S S。注意，$m(S) = (0, 0)$。

定义 3.2。设 $S \in \mathcal{IV}_d(M)$ 是一个平稳整变分簇。若 S 在某个 $\varepsilon > 0$的 ε-邻域内是 k-不稳定的，则称其为k-不稳定 。

图 2 和图 3 展示了当 S 为 2-不稳定时 A^S 的图像，以及非平稳 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(S)$ 的 A^V 图像。

设 $G \in \mathcal{IV}_1(M)$ 是一个顶点集为 $\mathscr{V}$ 的平稳测地 Γ 网。我们用 $\mathfrak{X}_k(G)$ 表示沿 G 的连续向量场空间，这些向量场沿每条边均属于 C^k 类。注意，对于 $k \leq 2$ ， $\mathfrak{X}_k(G)$ 总是定义良好的；若 G 在各边上的限制具有足够的正则性，则也可对更大的 k 值定义。由 [32]的引理 2.5， G 在变分流形意义下等于若干嵌入的平稳测地网 $G_i : \Gamma_i \to M$ 的不交并，其中每个 Γ_i 都是一个良好的加权多重图，$1 \leq i \leq P$。下文中，我们始终将 G 视为带有这种网结构。

由于 G_i 彼此不相交且是嵌入的，每个 $X \in \mathfrak{X}_2(G)$ 都可以与其推前相识别，而后者是 $TM|_{G(\Gamma)}$的一个截面。我们将对 X及其推前使用相同的记号。

我们将 $\mathfrak{C}_k(G) \subset \mathfrak{X}_k(G)$ 定义为满足以下性质的向量场子空间：在每个顶点 $v \in \mathscr{V}$处，它们都能局部延拓为 C^k ，定义在 v的某个邻域上。关键在于，如果 $X \in \mathfrak{C}_\infty(G)$，那么根据 [26] 中的引理 10.12，存在一个全局光滑的向量场 $\tilde{X}$ 在 M 上，使得

$$X = \tilde{X}\big|_{G(\Gamma)}.$$

令 $Q(\cdot, \cdot)$ 表示定义在 $\mathfrak{X}_2(G)$ 上的双线性形式，它由长度泛函在 G处的二次变分给出（显式公式见 [48] ）。将 $\mathrm{index}(G)$ 定义为 $\mathfrak{C}_\infty(G)$ 中使 Q 为负定的子空间的最大维数。注意，

$$\mathrm{index}(G) = \sum_{i=1}^{P} \mathrm{index}(G_i).$$

现在我们证明，对于驻定测地线网，两种不稳定性的概念是一致的。

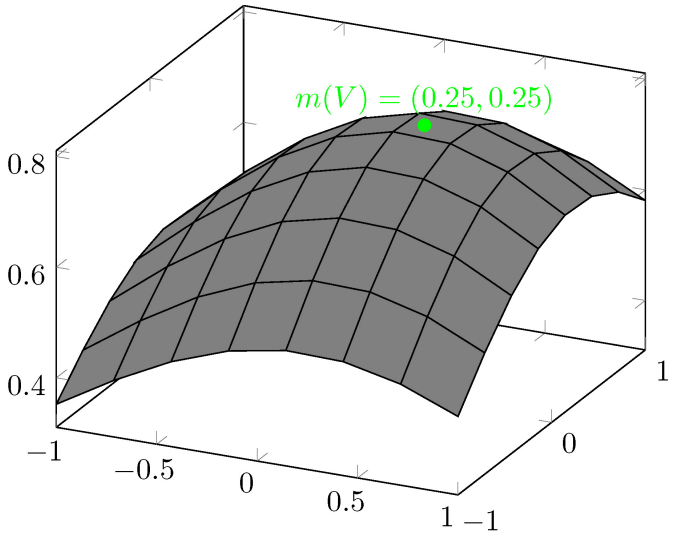


图3: A^V对于 V非驻定。注意 $m(V) \neq (0,0)$。

命题 3.3。 如果 $G \in \mathcal{IV}_1(M)$ 是一个驻定测地线网，那么 G 当且仅当 $\text{index}(G) \geq k$ 时是 k-不稳定的。

证明。由于

$$\text{index}(G) = \sum_{i=1}^{P} \text{index}(G_i),$$

只需证明当 G 是嵌入的时该命题成立。

假设 $\text{index}(G) \geq k$。那么存在向量场 $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{C}_\infty(G)$，使得

$$Q(\sum_i a_i X_i, \sum_i a_i X_i) < 0$$

对于任意$(a_i) \neq 0 \in \mathbb{R}^k$。对于 $\delta > 0$以及每个 i，取上述延拓 $\tilde{X}_i$ 。根据构造，这些延拓在 $G(\Gamma)$的某个开邻域上保持线性无关；此外， Q 在 $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k$上负定。记 ϕ_t^X为 X 的流，并取稍后确定的某个 ε ，定义

$$F_v(x) = F(v, x) = \phi_\varepsilon^{\sum_i v_i \tilde{X}_i}(x)$$

对于 $v \in B^k$和 $x \in M$。那么对于所有 $v \in B^k, DA^G(0) = 0, \quad F_0 = \text{Id}$ $F_{-v} = F_v^{-1}$。此外，由于

$$F(tv, x) = \phi_\varepsilon^{t\sum_i v_i \tilde{X}_i}(x) = \phi_t^{\varepsilon \sum_i v_i \tilde{X}_i}(x),$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} F(tv, x) = \varepsilon \sum_i v_i \tilde{X}_i(x).$$

因此 $D^2 A^G(0) < 0$。通过选择足够小的 ε，我们得出 G 是 k-不稳定的。

现在假设 G 是 k-不稳定的，并令 $\{F_v\}_{v\in B^k}$ 为相应的微分同胚族。定义 $Y_i(x) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} F(te_i, x) = \frac{\partial F}{\partial v_i}(0, -x)$。那么

$$0 > \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} \operatorname{length}_g\big(F_{tv}(G)\big) = Q(\sum_i v_i Y_i, \sum_i v_i Y_i).$$

这意味着 $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ 线性无关，且张成一个向量场子空间，在该子空间上 Q 是负定的。因此，$\operatorname{index}(G) \geq k$。 □

定义 3.4。 对于平稳整变分簇 $S \in \mathcal{IV}_d(M)$，我们将其*Morse*指标 定义为

$$\operatorname{index}(S) = k,$$

前提是它是 k-不稳定的，但不是 $(k+1)$-不稳定的。

注 3.5。 此定义与光滑极小超曲面的通常 Morse指标定义相容（参见 [35]中的命题4.3）。

在下文中，我们假设 $S \in \mathcal{IV}_d(M)$ 是一个平稳整变分簇，在某个 $\varepsilon > 0$ 的 ε-邻域内是k-不稳定的。那么，它对应于一个四元组 $(\varepsilon, c_0, \{F_v\}, m)$。

引理 3.6。 如果 $S \in \mathcal{IV}_d(M)$ 是驻定的，且 $\mathbf{F}(S, S) < \varepsilon$，那么 S 也具有 k-不稳定性。

证明。 令 $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(S, \tilde{S}) + \varepsilon) > 0$，使得 $\mathbf{F}(S, \tilde{S}) < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$，并令 $\{F_v\}_{v\in B^k}$ 为定义中所述的 S 的微分同胚族，其中 S 是 k-不稳定的。

于是$\overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_2{}_{(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})}(\tilde{S}) \subset \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(S)$。因此，对于任意 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_2{}_{(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})}(\tilde{S})$， $A^V(v) = \|(F_v)_{\#}V\|(M)$也满足这两个性质。因此我们推得 S 也是 k-不稳定的。 □

引理3.7。 存在 $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$，使得对于任意 $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0)$ 以及 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\tilde{\varepsilon}}(S)$，

$$(F_{\mathbb{S}^{k-1}})_{\#}(V) \cap \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{2\tilde{\varepsilon}}(S) = \emptyset.$$

证明。 假设结论不成立，则存在 $V_i \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_i}(S)$ $\varepsilon_i \to 0$，以及 $v_i \in \mathbb{S}^{k-1}$，使得

$$\mathbf{F}(V_i, S) \leq 2\varepsilon_i \text{ and } (F_{v_i})_{\#}(V_i) \in \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_i}(S).$$

由 $\mathbb{S}^{k-1}$ 的紧致性，取一个子列后，我们可以假设 $v_i \to v \in \mathbb{S}^{k-1}$。由于 F_v 是光滑的，我们可以令 $i \to \infty$ 趋于极限，得到

$$(F_v)_{\#}(S) = S.$$

然而，通过计算两边的质量，我们得到以下不等式

$$\begin{aligned}\|S\|(M)-\|(F_v)_{\#}S\|(M) &= A^S(0)-A^S(v)\\ &= -\int_0^1 \frac{d}{dt}A^S(tv)dt\\ &= -\int_0^1\int_0^t \frac{d^2}{ds^2}A^S(sv)dsdt\\ &= -\int_0^1\int_0^t D^2A^S(sv)(v,v)dsdt\\ &\geq \int_0^1\int_0^t c_0 dsdt = \frac{c_0}{2}>0.\end{aligned}$$

这意味着 $(F_v)_{\#}(S)\neq S$，从而得出矛盾。 □

在本文余下部分，出于技术原因，我们在定义 k-不稳定性时始终取 $\varepsilon=\varepsilon_0$，并且容易验证，在采用新的 ε后，该变分流形仍然是 k-不稳定的。

引理 3.8。 给定任意固定的 $V\in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(S)$，若积分曲线 $x:[0,L]\to B^k$ 与 $\overline{m}(V)$ 不相交，且由下式定义

$$\frac{d}{dt}x(t) = -f(t)\nabla A^V\big(x(t)\big),$$

其中 $f(t)$ 是一个正连续函数，则有

$$A^V\big(x(L)\big)-A^V\big(x(0)\big)\leq -\frac{c_0}{2}|x(L)-x(0)|^2.$$

证明。 根据微积分基本定理，有

$$\begin{aligned}A^V\big(x(L)\big)-A^V\big(x(0)\big) &= \int_0^L \nabla A^V\big(x(t)\big)\cdot\frac{d}{dt}x(t)dt = -\int_0^L f(t)\Big|\nabla A^V\big(x(t)\big)\Big|^2dt\\ &\leq -\int_0^L f(t)\Big|\nabla A^V\big(x(t)\big)\Big|\Big(\int_0^t \frac{d}{ds}\Big|\nabla A^V\big(x(s)\big)\Big|ds\Big)dt\\ &= -\int_0^L f(t)\Big|\nabla A^V\big(x(t)\big)\Big|\Big(\int_0^t \frac{\nabla^2A^V\big(x(s)\big)\big(\nabla A^V\big(x(s)\big),\frac{d}{ds}x(s)\big)}{\Big|\nabla A^V\big(x(s)\big)\Big|}ds\Big)dt\\ &= \int_0^L f(t)\Big|\nabla A^V\big(x(t)\big)\Big|\Big(\int_0^t f(s)\frac{\nabla^2A^V\big(x(s)\big)\big(\nabla A^V\big(x(s)\big),\nabla A^V\big(x(s)\big)\big)}{\Big|\nabla A^V\big(x(s)\big)\Big|}ds\Big)dt\\ &\leq -c_0\int_0^L f(t)\Big|\nabla A^V\big(x(t)\big)\Big|\Big(\int_0^t f(s)\Big|\nabla A^V\big(x(s)\big)\Big|ds\Big)dt.\end{aligned}$$

这里，我们利用如下事实：对于任意 $v\neq m(V)$， $\nabla A^V(v)\neq 0$。事实上，定义路径γ： $[0,1]\to B^k$，如下

$$\gamma(t) = m(V)+t(v-m(V)).$$

考虑函数:

$$g(t) = \langle \nabla A^V(\gamma(t)), v - m(V) \rangle.$$

根据微积分基本定理,

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(t) dt.$$

利用链式法则计算导数:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t) = \left\langle \frac{d}{dt} \left[\nabla A^V(\gamma(t)) \right], v - m(V) \right\rangle &= \left\langle D^2 A^V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t), v - m(V) \right\rangle \\ &= \langle D^2 A^V(\gamma(t))(v - m(V)), v - m(V) \rangle \end{aligned}$$

根据 k-不稳定性条件,

$$D^2 A^V(u) \leq -c_0 I \quad \forall u \in \overline{B}^k,$$

这意味着

$$\langle D^2 A^V(\gamma(t)) w, w \rangle \leq -c_0 \|w\|^2 \quad \forall w \in \mathbb{R}^k.$$

将其应用于 $w = v - m(V)$:

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= \int_0^1 \langle D^2 A^V(\gamma(t))(v - m(V)), v - m(V) \rangle dt \\ &\leq \int_0^1 -c_0 \|v - m(V)\|^2 dt \\ &= -c_0 \|v - m(V)\|^2. \end{aligned}$$

注意,

$$\begin{aligned} &g(0) = \langle \nabla A^V(m(V)), v - m(V) \rangle = 0 \quad (\text{since } \nabla A^V(m(V)) = 0) \\ &g(1) = \langle \nabla A^V(v), v - m(V) \rangle \end{aligned}$$

Thus

$$\langle \nabla A^V(v), v - m(V) \rangle \leq -c_0 \|v - m(V)\|^2 < 0 \quad \text{for} \quad v \neq m(V).$$

现在考虑满足以下条件的函数 l

$$l'(t) = \left| \frac{d}{dt} x(t) \right| = f(t) \left| \nabla A^V(x(t)) \right|$$

且 $l(0) = 0$。于是

$$l(L) = \int_0^L l'(t) dt = \int_0^L \left| \frac{d}{dt} x(t) \right| dt \geq \left| \int_0^L \frac{d}{dt} x(t) dt \right| = \left| x(L) - x(0) \right|.$$

因此，我们有

$$A^V\big(x(L)\big) - A^V\big(x(0)\big) \le -c_0 \int_0^L l'(t) \int_0^t l'(s) ds dt = -c_0 \int_0^L l'(t) l(t) dt$$
$$= -\frac{c_0}{2} l(L)^2 \le -\frac{c_0}{2} \Big| x(L) - x(0) \Big|^2.$$

证明至此完成。 □

引理 3.9. 存在一个递增函数

$$h_S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$

使得对于任意 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(S)$ 和 $v, w \in B^k$, —

$$|v - w| \ge h_S\Big(\mathbf{F}\big((F_v)_\#(V), (F_w)_\#(V)\big)\Big)$$

证明。 只需证明对于每个 $c > 0$，若

$$\Big\{(v, w) : \exists V \in \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(S), \mathbf{F}\big((F_v)_\#(V), (F_w)_\#(V)\big) = c\Big\} \neq \emptyset$$

then

$$\Big\{|v - w| : \exists V \in \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(S), \mathbf{F}\big((F_v)_\#(V), (F_w)_\#(V)\big) = c\Big\}$$

有一个正下界。我们用反证法。假设存在一个序列 $V_i \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(S)$ 和 $v_i, w_i \in B^k$，满足 $\mathbf{F}\big((F_{v_i})\#(V_i),\ (F_{w_i})\#(V_i)\big) = c$ 但 $|v_i - w_i| \to 0$。由紧致性，取子列后，不妨设

$$V_i \to V, v_i \to v, w_i \to v,$$

并且 $\mathbf{F}\big((F_v)\#(V),(F_v)\#(V)\big) = c > 0$，这就导出了矛盾。

□

3.2 指标界下的紧致性

定义 3.10。 令 $\mathcal{U}(\omega_p^d)$ 为 $\mathcal{APR}_{p,d}$ 中由所有 $\big(p(n-d) + 1\big)$-不稳定驻定整 d-变分流形组成的子集，并令 $\mathcal{S}(\omega_p^d)$ 表示其在 $\mathcal{APR}_{p,d}$ 中的补集，即 $\mathcal{S}(\omega_p^d)$ 是 Morse指标至多为$p(n-d)$ 的驻定整 d-变分流形的子集。

注 3.11。 若 $\mathcal{U}(\omega_p^d) = \emptyset$，则主要定理显然成立，因此我们可以假设 $\mathcal{U}(\omega_p^d) \neq \emptyset$。

引理 3.12。 集合 $\mathcal{U}(\omega_p^d)$ 是可数个紧集的并，即

$$\mathcal{U}(\omega_p^d) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i(\omega_p^d),$$

其中每个 $\mathcal{U}_i(\omega_p^d)$ 都是紧致的。

证明。 根据整变分流形紧致性定理， [3]， $\mathcal{APR}_{p,d}$ 中的d-变分流形集合在变分体拓扑下是紧致的（等价地，在 $\mathbf{F}$ 拓扑下也是紧致的，因为 $\mathcal{APR}_{p,d}$ 的质量一致有界）。我们首先证明 $\mathcal{S}(\omega_p^d)$ 在 $\mathcal{APR}_{p,d}$ 中是闭集，因此是紧致的。

设 $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\omega_p^d)$ 是一个在 $\mathbf{F}$-拓扑下收敛到 $S \in \mathcal{APR}_{p,d}$ 的序列。我们必须证明 $\mathbf{index}(S) \le p(n-d)$。反设， S 在某个 ε-邻域内是 $\big(p(n-d)+1\big)$-不稳定的，其中 $\varepsilon > 0$。取足够大的 i_0 ，使得对所有 $i \ge i_0$， $\mathbf{F}(S, S_i) < \varepsilon$。对于这样的 i，根据引理 3.6， S_i 是 $\big(p(n-d)+1\big)$-不稳定的，这与 $S_i \in \mathcal{S}(\omega_p^d)$ 矛盾。因此， S 不可能是 $\big(p(n-d)+1\big)$-不稳定的，所以 $\mathbf{index}(S) \le p(n-d)$，且 $S \in \mathcal{S}(\omega_p^d)$。这证明了 $\mathcal{S}(\omega_p^d)$ 是闭的。

如果 $\mathcal{S}(\omega_p^d) = \emptyset$，那么 $\mathcal{U}(\omega_p^d) = \mathcal{APR}_{p,d}$ 是紧致的，结论由此引理得证。否则，对每个 $i \in \mathbb{N}$ ，定义

$$\mathcal{U}_i(\omega_p^d) := \{S \in \mathcal{U}(\omega_p^d) : \ \mathbf{F}\big(S, \mathcal{S}(\omega_p^d)\big) \ge 1/i\}.$$

每个 $\mathcal{U}_i(\omega_p^d)$ 都是紧集 $\mathcal{APR}_{p,d}$ 中的闭集，因此是紧致的。由于每个 $S \in \mathcal{U}(\omega_p^d)$ 到闭集 $\mathcal{S}(\omega_p^d)$ 的 $\mathbf{F}$-距离均为正，我们有

$$\mathcal{U}(\omega_p^d) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i(\omega_p^d),$$

如所要求的。 □

3.3 变形定理

固定一个由平稳整变分簇 $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}(\omega_p^d)$ 构成的序列。根据 $\big(p(n-d)+1\big)$-不稳定性的定义，每个 S_k 都与一个四元组 $(\varepsilon_k, c_{0,k}, \{F_v^k\}, m_k)$ 相关联。对于非空集合 $K \subset \mathbb{N}^+$，定义

$$\mathbf{B}_K^{\mathbf{F}} := \mathbf{B}_K^{\mathbf{F}}\big(\{S_k\}, \{\varepsilon_k\}\big) = \bigcap_{k\in K} \mathbf{B}_{\varepsilon_k}^{\mathbf{F}}(S_k), \qquad \bar{k}(K) := \min\{k \in K\}.$$

对于 $\lambda \ge 0$，令

$$\mathbf{B}_{\lambda,K}^{\mathbf{F}} := \bigcap_{k\in K} \mathbf{B}_{(2-2^{-\lambda})\varepsilon_k}^{\mathbf{F}}(S_k).$$

特别地，对于任意 $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$,

$$\mathbf{B}_K^{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_{0,K}^{\mathbf{F}} \subset \mathbf{B}_{\lambda_1,K}^{\mathbf{F}} \subset \mathbf{B}_{\lambda_2,K}^{\mathbf{F}} \subset \bigcap_{k\in K} \mathbf{B}_{2\varepsilon_k}^{\mathbf{F}}(S_k).$$

L且 $K \subset \mathbb{N}^+$ 非空且有限， $\lambda \ge 0$，并假设 $\mathbf{B}_{\lambda,K}^{\mathbf{F}} \ne \emptyset$。对于每个 h

$$V \in \overline{\mathbf{B}}_{\lambda,K}^{\mathbf{F}} := \bigcap_{\lambda'>\lambda} \mathbf{B}_{\lambda',K}^{\mathbf{F}},$$

定义由以下向量场生成的梯度流 $\{\phi^V_{\lambda,K}(\cdot,t)\}_{t\geq 0}\subset \mathrm{Diff}(B^{p(n-d)+1})$

$$u \longmapsto -\mathbf{F}\Big((F_u^{\bar{k}(K)})_{\#}(V),\ (\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,K})^c\Big)\ \nabla A^V_{\bar{k}(K)}(u),$$

其中 $A^V_{\bar{k}(K)}(u) := \big\|(F^{\bar{k}}{}_{(K)u})_{\#}(V)\big\|(M)$，其中 $u\in B^{p(n-d)+1}$。

现在我们证明两个引理。第一个断言，只要我们与满足 $\nabla A^V_{\bar{k}(K)}=0$ 的集合保持一致的距离，该流就会一致地降低质量。

引理 3.13. 设 $\lambda>0$ 和 $K\subset\mathbb{N}^+$ 为有限值，并取充分小的 $\eta>0$。则存在常数 $c(\lambda,K)>0$ 和 $T>0$，使得以下结论成立：对于任意 $V\in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda},_K$ 以及任意满足 $|v-m_{\bar{k}(K)}(V)|\geq\eta$ 的 $v\in \overline{B}^{p(n-d)+1}$，并且

$$(F_v^{\bar{k}(K)})_{\#}(V)\in \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+0.5,K},$$

我们有

$$A^V_{\bar{k}(K)}\big(\phi^V_{\lambda,K}(v,T)\big) < A^V_{\bar{k}(K)}\big(\phi^V_{\lambda,K}(v,0)\big)-c(\lambda,K).$$

证明。 我们不妨假设 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda},_K\neq\emptyset$，否则结论显然成立。注意，$\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda},_K$ 是紧致的。

对于 $l\in\mathbb{R}$，令

$$D_l(V) := \big\{\, v\in \overline{B}^{p(n-d)+1} :\ (F_v^{\bar{k}(K)})_{\#}(V)\in \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+l,K}\,\big\}$$

and

$$d(V) := \mathrm{dist}_{\mathrm{Euc}}\big(D_{0.5}(V),\,\partial D_1(V)\big).$$

每个 $D_l(V)$ 都是闭集，因为 $v\mapsto (F_v^{k(K)})_{\#}(V)$ 在变分体拓扑中是连续的。

步骤 1。 我们证明 $d(V)$ 具有一致正下界。

部分 1 $d\ V\ >0$ $w\in\partial D_1\ V$ $w\in\partial B^{p(n-d)+1}=:$ 。若 ，则 $\mathbb{S}^{p(n-d)}$ $F_w^{\bar{k}\ K}{}_{\#}\ V\ \in\partial\overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1\ K}$ 3 7

由连续性可知，要么 ，要么 。第一种情形由引理排除。. 在第二种情形下，由于 $\partial\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1},_K\cap\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+0.5},_K=\emptyset$，我们必有 $w\notin D_{0.5}(V)$。因此 $d(V)>0$。

第 2 部分：一致正性。由紧致性可得一个一致下界：否则，将存在 $V_i\to V$ in $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+0.5},_K$ with $d(V_i)\to 0$。紧致性给出点 $v_{i},_{0.5}\in D_{0.5}(V_i)$ 和 $v_{i},_1\in\partial D_1(V_i)$，使得 $d(V_i)=|v_{i},_{0.5}-v_{i},_1|$。取一个子列，$v_{i},0.5,v_{i},_1\to v\in B^{p(n-d)+1}$。由于 $D_l(V_i)$ 和 $\partial D_l(V_i)$ 对 $l>0$ 是闭的，我们得到 $v\in D_{0.5}(V)\cap\partial D_1(V)$，从而 $d(V)=0$，矛盾。因此 $d_0:=\inf_V d(V)>0$。

步骤 2。 定义

$$P := \big\{(V,v)\in \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K}\times \overline{B}^{p(n-d)+1} :\ v\neq m_{\bar{k}(K)}(V),\ v\in D_{0.5}(V)\big\}.$$

对于任意的 $(V,v)\in P$，函数 $t\mapsto A^V_{\bar{k}(K)}\big(\phi^V_{\lambda,K}(v,t)\big)$ 关于 $t>0$ 严格递减。令

$$\delta A_{\lambda,K}(V,v) := \lim_{t\to\infty}\big(A^V_{\bar{k}(K)}(\phi^V_{\lambda,K}(v,0))-A^V_{\bar{k}(K)}(\phi^V_{\lambda,K}(v,t))\big)>0.$$

我们声称存在 $c = c(\lambda, K) > 0$，使得对于所有 $(V, v) \in P$，$\delta A_{\lambda,K}(V, v) \geq 2c$。事实上，由引理 3.8，

$$A^V_{\bar{k}(K)}(\phi^V_{\lambda,K}(v,0)) - A^V_{\bar{k}(K)}(\phi^V_{\lambda,K}(v,t)) \geq \frac{c_{0,\bar{k}(K)}}{2} \left|\phi^V_{\lambda,K}(v,0) - \phi^V_{\lambda,K}(v,t)\right|^2.$$

由于 $\phi^V_{\lambda,K}(v, t)$ 当 $t \to \infty$ 时趋近于 $\partial D_1(V)$，我们得到

$$\delta A_{\lambda,K}(V, v) \geq d(V)^2 \geq d_0^2 > 0.$$

步骤 3。我们还需找到 $T = T(\eta, K, \lambda) > 0$，使得对于所有带有 $|v - m_{\bar{k}(K)}(V)| \geq \eta$ 的 $(V, v) \in P$，

$$A^V_{\bar{k}(K)}\big(\phi^V_{\lambda,K}(v,T)\big) < A^V_{\bar{k}(K)}\big(\phi^V_{\lambda,K}(v,0)\big) - c(\lambda, K).$$

按照 [35, 引理 4。5]，中通过矛盾进行论证的方法，假设存在带有 $|v_i - m_{\bar{k}(K)}(V_i)| \geq \eta$ 的 $(V_i, v_i) \in P$，使得

$$A^{V_i}_{\bar{k}(K)}\big(\phi^{V_i}_{\lambda,K}(v_i,t)\big) \geq A^{V_i}_{\bar{k}(K)}\big(\phi^{V_i}_{\lambda,K}(v_i,0)\big) - c(\lambda, K) \quad \text{for all } t \in [0, i].$$

由紧致性，$V_i \to V$ 以及带有 $(V, v) \in P$ 和 $|v - m_{\bar{k}(K)}(V)| \geq \eta$ 的 $v_i \to v$。令其趋于极限，得到

$$A^V_{\bar{k}(K)}\big(\phi^V_{\lambda,K}(v,t)\big) \geq A^V_{\bar{k}(K)}\big(\phi^V_{\lambda,K}(v,0)\big) - c(\lambda, K) \quad \text{for all } t \geq 0,$$

这与步骤 2 矛盾。引理得证。 □

当然，我们需要一种方法，将“坏的” d-变分流形从临界集 $m_{\bar{k}(K)}(V)$ 附近扰动开。为此，我们将使用 Marques–Neves 的一个构造。

注意，在定义和证明该扰动时，我们的设定与 [35, 定理 5.1] 略有不同。我们将以足够一般的形式证明它，从而涵盖这两种情形。

基本的拓扑思想如下。给定一个映射 $\theta : X^l \to B^{N+1}$ 从一个 l 维单纯复形映射到一个 $N + 1$ 维球，对于某些正整数 l 和 N，我们希望使其一致避开该球。由于球是凸的，我们可以通过线性插值，在时间 $t = 1$ 之前定义从常值 0 映射到任意其他映射到 B^{N+1} 中的同伦。

在 $t = 1$ 处定义同伦时，我们需要构造一个映射 $b : X^l \to B^{N+1}$，将每个面 f 映射到一个以点 p_f 为中心的小 $N + 1$ 维球 $B^{N+1}(p_f)$ 中，其中可能去掉点 $\{0\}$。按照这一情形下的标准做法，我们通过对维数递增的骨架进行归纳来构造 b。回忆 [13, 定理 7.1]，我们可以将该函数从一个（$j + 1$）面 e 的边界连续延拓到 e，当且仅当相应的障碍余循环 $\alpha \in C^{j+1}\big(e, \pi_j(B^{N+1}(p_e) \setminus \{0\})\big)$ 为零。

为保证这一点，注意到 $\pi_j(B^{N+1}(p_e) \setminus \{0\})$ 要么等于 0（如果 $0 \notin B^{N+1}(p_e)$），要么等于 $\pi_j(\mathbb{S}^N)$。因此，如果 $j < N$ 所有障碍上循环都消失，我们便可以延拓。

引理 3.14。 设 $N>0$ 为一个整数， $V\in\mathcal{IV}_d(M)$ 是一个变分流形，并且 $\varepsilon>0$。假设给定

1. $l\in\{0,\dots,N\}$ 和 $\delta>0$;
2. 一个 l 维有限单纯复形 X^l;
3. 一个连续映射 $\Psi:\ X^l\to \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(V)$;
4. 一个连续映射 $\phi:\ \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon}(V)\to B^{N+1}_{-}$。

于是存在一个同伦 $\hat{H}:\ X^l\times[0,1]\to B^{N+1}_{\delta}$ 使得

1. $\hat{H}(x,0)=0$ for all $x\in X^l$;
2. $\inf_{x\in X^l}\big|\phi(\Psi(x))-\hat{H}(x,1)\big|\geq\eta>0$

对于某个常数 $\eta>0$。

注 3.15。 实际上，这个引理完全可以不涉及变分流形来表述，而只需用从 l 维单纯复形到B^i 的连续映射，并满足 $i>l$ （参见引理之前的讨论）。然而，我们所关心的情形是 $\phi=m_{\bar{k}(K)}$，因此采用这种表述方式更为方便。

证明。 我们从与 [35, 定理 5.1] 相同的约化开始：通过对有限单纯复形反复进行重心细分，并利用 $\phi\circ\Psi$ 和 Ψ 的一致连续性，我们可以假设，对于每个闭面 $e\subseteq X^l$，都有 $\operatorname{diam}_{\mathbf{F}}\big(\Psi(e)\big)<\alpha$；并且，如果 $x,\ y$ 位于 X^l 的同一个面内，那么

$$\big|\phi(\Psi(x))-\phi(\Psi(y))\big|<\alpha.$$

这里 $\alpha=\min\{\delta 2^{-(N+2)},\,\varepsilon/4\}$。

现在令 $(X^l)^{(i)}$ 表示 i-骨架。显然，如果我们定义一个映射 $a\colon X^l\to B^{N+1}_{\delta}$，使其满足

$$\inf_{x\in X^l}\big|\phi(\Psi(x))-a(x)\big|\geq\eta>0,$$

那么我们就可以令 $H(x,t)=t\,a(x)$，从而定义所需的同伦。

我们还注意到，只需定义一个函数 $b:\ X^l\to\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\}$，使其满足

$$b(x)\in B^{N+1}_{\delta}\big(-\phi(\Psi(x))\big),$$

然后定义 $a=b+\phi\circ\Psi$ 即可。我们将像稍后证明变形定理时那样，在各个骨架上归纳地定义这个 b。

显然，我们可以在 0-骨架上定义

$$b:(X^l)^{(0)}\to B^{N+1}_{\delta 2^{-N}}\big(-\phi(\Psi(x))\big)\setminus\{0\}$$

在 0-骨架上。

假设我们已经定义了

$$b : (X^l)^{(j)} \to B^{N+1}_{\delta 2^{-N+j}}\big(-\phi(\Psi(x))\big) \setminus \{0\}$$

对于某个 $j \in \{0, \dots, N-1\}$；我们将在（$j+1$）-骨架上构造它。取 j-面e 的 X^l，其中心为 y_e。于是，根据构造，

$$b : \partial e \to B^{N+1}_{\delta 2^{-N+j}+\alpha}\big(-\phi(\Psi(y_e))\big) \setminus \{0\}.$$

回顾一下，同伦群 $\pi_j(\mathbb{S}^N) = 0$，因为 $j < N$。因此，将 b延拓为映射的所有障碍余循环

$$b : e \to B^{N+1}_{\delta 2^{-N+j}+\alpha}\big(-\phi(\Psi(y_e))\big) \setminus \{0\}$$

均为零。再次通过细分，我们得到

$$b(x) \in B^{N+1}_{\delta 2^{-N+j}+2\alpha}\big(-\phi(\Psi(x))\big) \setminus \{0\},$$

但根据我们对参数的选择，有 $\delta 2^{-N+j} + 2\alpha < \delta 2^{-N+j+1}$，因此归纳得以完成。

□

作为一个直接推论，我们有如下结果。

推论 3.16。设 $\lambda > 0$，且设 $K \subset \mathbb{N}^+$ 为满足 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,\ K} \neq \emptyset$ 的非空有限集。另设给定

1. $l \in \{0, \dots, p(n-d)\}$ 和 $\delta > 0$;
2. 一个 l 维有限单纯复形 X^l;
3. 一个连续映射 $\Theta :\ X^l \to \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_{\bar{k}(K)}}(S_{\bar{k}(K)})$。

则存在一个同伦 $\hat{}H :\ X^l \times [0,1] \to B^{p(n-d)+1}_{\delta}$，使得

1. 对所有 $x \in X^l$，$\hat{}H(x,0) = 0$；2. $\inf_{x \in X^l} \left| m_{\bar{k}(K)}(\Theta(x)) - \hat{}H(x,1) \right| \geq \eta > 0$

其中某个常数为 $\eta > 0$。

我们将其用作远离临界集的扰动。结合这两个引理，可得：

引理 3.17。 设 $\lambda > 0$, 并设 $K \subset \mathbb{N}^+$ 为一个非空有限集，满足 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K} \neq \emptyset$。令 $c(\lambda, K)$ 为引理 3.13 中的常数。对于任意 $\delta \in (0, c(\lambda, K)/4)$、任意 $l \in \{0, 1, \ldots, p(n-d)\}$，以及任意连续映射

$$\Theta : X^l \to \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K},$$

where X^l 是一个 l 维有限单纯复形，存在一个同伦

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K} : X^l \times [0,1] \to \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,K}$$

使得:

1. $H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(\cdot, 0) = \Theta(\cdot)$。
2. 对所有 $x \in X^l$, $\|H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x, 1)\|(M) \leq \|\Theta(x)\|(M) - \tilde{c}(\lambda, K)$。
3. 对所有 $x \in X^l$和 $t \in [0,1]$, $\|H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x, t)\|(M) - \|\Theta(x)\|(M) \leq \delta$。

这里 $\tilde{c}(\lambda, K) := c(\lambda, K)/2$。更准确地说:

- For $t \in [0, 1/2]$, $\mathbf{F}\big(H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t), \Theta(x)\big) \leq \delta$.
- 对于 $t \in [1/2, 1]$，存在 $v(x) \in B^{p_{(n-d)}+1}$，使得

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t) = \phi^{\Theta(x)}_{\lambda,K}\big(v(x), (2t-1)T\big).$$

证明。 首先，由于 $\mathbf{F}\big(\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K}, \partial\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+0.5,K}\big) > 0$，存在 $\delta_0 \in (0, \delta)$，使得对于任意$V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K}$以及任意满足 $\mathbf{F}(V, W) \leq \delta_0$ 的变分流形 W，都有

$$\|W\|(M) \leq \|V\|(M) + \delta \quad \text{and} \quad W \in \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+0.5,K}.$$

由$\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K}$ 和 $B^{p(n-d)+1}$ 的紧致性，存在 $\delta_1 > 0$，使得

$$\mathbf{F}\big((F^{\bar{k}(K)}_v)_{\#}(V), V\big) \leq \delta_0 < \delta$$

对于所有 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K}$ 以及所有 $v \in B^{p(n-d)+1}(\delta_1)$,

由于对于每个 $x \in X^l$, $\Theta(x) \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda,K} \subset \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_{\bar{k}(K)}}(S_{\bar{k}(K)})$，我们可以利用推论 3.16 得到一个同伦

$$\widehat{H} : X^l \times [0,1] \to \overline{B}^{p(n-d)+1}(\delta_1),$$

$\widehat{H}$满足 $H(\cdot, 0) = 0$ 且

$$\inf_{x \in X^l} \big| m_{\bar{k}(K)}(\Theta(x)) - \widehat{H}(x,1) \big| \geq \eta > 0,$$

对于某个 $\eta = \eta(\delta,\ K,\ \Theta,\ \lambda) > 0$。此同伦始终避开满足$\nabla A^V_{\bar{k}(K)} = 0$的集合，同时保持接近初始点。

最后，对 $\Theta(x)$ 应用引理 3.13，其中 $v = H(x,1)$，定义

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t) = \begin{cases} \left(F^{\bar{k}(K)}_{\widehat{H}(x,2t)}\right)_{\#}\Theta(x), & t \in [0,1/2], \\ \phi^{\Theta(x)}_{\lambda,K}\left(\widehat{H}(x,1),(2t-1)T\right), & t \in (1/2,1]. \end{cases}$$

根据 δ_0, δ_1 的选取以及引理 3.13 的结论，这个同伦满足上述三条性质。

□

定理 3.18（变形定理）. 设 $\{\Phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 ω^d_p 的一个极小极大序列，且 $X_i = \mathrm{dmn}(\Phi_i)$ 是其定义域，$\dim X_i \le p(n-d)$。经过取子列后，存在一个序列 $\{\Psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得:

1. Ψ_i 与 Φ_i 在 $\mathbf{F}$-拓扑下同伦;
2. $\mathbf{L}\big(\{\Psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}\big) = \omega^d_p$;

3. 存在一个函数 $\bar{\varepsilon}\colon \mathcal{U}(\omega^d_p) \to (0,\infty)$，具有以下性质：对于每个 $S \in \mathcal{U}(\omega^d_p)$，都存在 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $i \ge i_0$,

$$\big|\Psi_i\big|(X_i) \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\bar{\varepsilon}(S)}(S) = \emptyset.$$

In particular, $\mathbf{C}(\{\Psi_i\}) \cap \mathcal{APR}_{p,d} \subset \mathcal{S}(\omega^d_p)$.

证明。证明分为 4 个步骤。

步骤 1。我们构造一个（有限或可数的）序列 $\big(p(n-d)+1\big)$-不稳定的定常积分变分流形 $\{S_k\} \subset \mathcal{U}(\omega^d_p)$，以及与之相关的四元组 $\{(\varepsilon_k,\ c_{0,\,k},\ \{F^k_v\},\ m_k)\}$，使其满足以下条件:

- 对于 $k_1 \ne k_2$，我们有 $\mathbf{B}_{\mathbf{F}^{\varepsilon_{k_1}}}(S_{k_1}) \not\subset \mathbf{B}_{\mathbf{F}^{\varepsilon_{k_2}}}(S_{k_2})$。
- $\mathcal{U}(\omega^d_p) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\mathbf{B}_{\mathbf{F}^{\varepsilon_k}}(S_k)$，并且，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $k_m \in \mathbb{N}$，使得

$$\mathcal{U}_m(\omega^d_p) \subset \bigcup_{i=1}^{k_m}\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_i}(S_i).$$

- 对于每个固定的 k，集合

$$\bar{K}(S_k) := \{k' :\ \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_{k'}}(S_{k'}) \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k) \ne \emptyset\}$$

是有限的。

事实上，对于每个 $S \in \mathcal{U}(\omega_p^d)$，选择一个四元组 $(\varepsilon_S,\ c_0,\ s,\ \{F_v^S\},\ m_S)$。族 $\{\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_S}(S)\}_{S\in\mathcal{U}(\omega_p^d)}$ 覆盖 $\mathcal{U}(\omega_p^d)$。注意，总可以将 ε_S替换为一个更小的正数，并使 S $(p(n-d)$ 仍然是 $+1)$-不稳定的，且使用新的四元组。

若 $\mathcal{U}(\omega_p^d)$ 是紧致的，我们提取一个有限子覆盖 $\{\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k)\}_{k=1}^{k_1}$，并取相应的四元组。于是所有所需性质均成立。

否则，根据引理 3.12，我们有一个分解

$$\mathcal{U}(\omega_p^d) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_m(\omega_p^d), \qquad \mathcal{U}_m(\omega_p^d) := \{S \in \mathcal{U}(\omega_p^d) :\ \mathbf{F}(S, \mathcal{S}(\omega_p^d)) \geq 1/m\},$$

其中每个 $\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 都是紧致的。我们在 m 中归纳构造序列 $\{S_k\}$。

对于 $m = 1$: 对每个 $S \in \mathcal{U}_1(\omega_p^d)$，选取 ε_S 使得 $\varepsilon_S < 1/4$。提取 $\mathcal{U}_1(\omega_p^d)$ 的一个有限子覆盖 $\{\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k)\}_{k=1}^{k_1}$，使其 k_1 最小。若对于某个 $k \leq k_1$，有 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k)$，则

$$\mathbf{F}(V, \mathcal{S}(\omega_p^d)) \geq \mathbf{F}(S_k, \mathcal{S}(\omega_p^d)) - \mathbf{F}(S_k, V) \geq 1 - 2\varepsilon_k \geq 1/2.$$

因此

$$\bigcup_{k=1}^{k_1} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k) \subset \mathcal{U}_2(\omega_p^d).$$

归纳地，假设我们已选取覆盖 $\mathcal{U}_{m-1}(\omega_p^d)$ 的 $\{S_k\}_{k=1}^{k_{m-1}}$。令

$$\mathcal{R}_m := \mathcal{U}_m(\omega_p^d) \setminus \bigcup_{k=1}^{k_{m-1}} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k),$$

它是紧致的。对于每个 $S \in \mathcal{R}_m$，选取 $\varepsilon_S < {}_{2m}{}^{1}{}_{(m+1)}$，然后取一个有限子覆盖 $\{\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k)\}_{k=k_{m-1}+1}^{k_m}$，使 k_m 最小。于是，对任意 $k \leq k_m$ 和 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k)$，我们有

$$\mathbf{F}\big(V, \mathcal{S}(\omega_p^d)\big) \geq \mathbf{F}\big(S_k, \mathcal{S}(\omega_p^d)\big) - \mathbf{F}(S_k, V) \geq \frac{1}{m} - 2\varepsilon_k \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m+1}.$$

此外，如果 $k \geq k_{m-1} + 1$，那么

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\big(V, \mathcal{S}(\omega_p^d)\big) &\leq \mathbf{F}\big(S_k, \mathcal{S}(\omega_p^d)\big) + \mathbf{F}(S_k, V) \\
&\leq \frac{1}{m-1} + 2\varepsilon_k \leq \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m(m+1)} \\
&< \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m+1} = \frac{2m}{m^2-1} < \frac{2}{m} < \frac{1}{\lfloor m/2 \rfloor}.
\end{aligned}$$

Thus

$$\bigcup_{k=1}^{k_m} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k) \subset \mathcal{U}_{m+1}(\omega_p^d), \tag{2}$$

and

$$\bigcup_{k=k_{m-1}+1}^{k_m} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k) \subset \mathcal{U}_{m+1}(\omega_p^d) \setminus \mathcal{U}_{\lfloor m/2 \rfloor}(\omega_p^d). \tag{3}$$

对所有 m 继续这一过程，即可得到所需的序列 $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$。每个阶段的极小性保证了第一条。覆盖性质由构造本身保证，因此得到第二条。由 (2) 和 (3)，对于固定的 $k \le k_m$，任何与 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_{k'}}(S_{k'})$ 相交的球 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k)$，本身都必须是截至阶段 $2m+2$ 生成的有限个球之一。因此

$$\#\bar{K}(S_k) \le k_{2m+2} < \infty,$$

第三条随之成立。

步骤 2. 我们构造一个函数 $\eta\colon\ \mathcal{U}(\omega_p^d) \to (0,1]$，使得：

- 这些邻域满足

$$\mathcal{N}_\eta := \bigcup_{S\in\mathcal{U}(\omega_p^d)} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\eta(S)}(S) \subset \bigcup_k \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k),$$

$$\mathcal{N}^m_\eta := \bigcup_{S\in\mathcal{U}_m(\omega_p^d)} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\eta(S)}(S) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k).$$

- 在每个 $\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 上，函数 η 有一个正下界 $\tilde{\eta}_m > 0$。

- 对于任意 $\lambda \in \{0,1,\dots,p(n-d)\}$、$l \in \{0,1,\dots,p(n-d)\}$、$K \subset \mathbb{N}$、$\delta \in (0, c(\lambda, K)/4)$，以及任意连续映射 $\Theta\colon\ X^l \to \mathcal{N}_\eta \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda, K}$（假设 $\mathcal{N}_\eta \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda, K} \neq \emptyset$），存在一个同伦

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K} : X^l \times [0,1] \to \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,K}$$

使得：

1. $H^{\Theta,\overset{\delta}{\lambda}}_{K}(\cdot, 0) = \Theta(\cdot)$。 2. $\|H^{\Theta,\overset{\delta}{\lambda}}_{K}(x, t)\|(M) - \|\Theta(x)\|(M) \le \delta$对所有 $t \in [0,1]$均成立。 3. 对于 $t \in [0,1/2]$，$\mathbf{F}\big(H^{\Theta,\overset{\delta}{\lambda}}_{K}(x, t), \Theta(x)\big) \le \delta$。

4. 对于 $t \in [1/2,1]$，存在 $v(x) \in B^{p(n-d)+1}$ 使得

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t) = \phi^{\Theta(x)}_{\lambda,K}\big(v(x), (2t-1)T\big). \tag{4}$$

5. $H^{\Theta,\overset{\delta}{\lambda}}_{K}(\cdot, 1) \notin \mathcal{N}_\eta$。

断言 1。存在一个连续的正函数 $\eta_1\colon \mathcal{U}(\omega_p^d) \to \mathbb{R}^+$，使得对于任意 $m \in \mathbb{N}$ 和任意 $S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)$，

$$\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\eta_1(S)}(S) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k).$$

证明。归纳定义 η_1。若 $S \in \mathcal{U}_1(\omega_p^d)$，则令

$$\eta_1(S) := \max\Big\{ r > 0 :\ \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2r}(S) \subset \bigcup_{k=1}^{k_1} \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k) \Big\}.$$

若 $m \geq 2$是满足 $S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d) \setminus \mathcal{U}_{m-1}(\omega_p^d)$的最小整数，则定义

$$\eta_1(S) := \min \left\{ \begin{array}{l} \max\Big\{ r > 0 :\ \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2r}(S) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k) \Big\}, \\ \min\big\{ \eta_1(S') + \mathbf{F}(S, S') :\ S' \in \mathcal{U}_{m-1}(\omega_p^d) \big\} \end{array} \right\} > 0.$$

该 η_1 是连续的，因此在每个紧集$\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$上都有一个正下界。

□

由于 η_1 连续，集合 $\{t \geq 0\colon \forall V \in \mathbf{B}_t^{\mathbf{F}}(S)\ \ \forall \lambda \in \{0, 1, \ldots, p(n-d)\},\ \ \big|\omega_p^d - \|V\|(M)\big| \leq \tilde{c}(\lambda,\ \tilde{K})/3\}$是闭集；又由于 $\|V\|(M) = \omega_p^d$，根据质量的连续性，我们知道该集合的上确界为正。因此，我们可以将 $\eta(S)$定义为 $\big(0,\ \min(\eta_1(S),\ 1)\big]\big)$ 中满足以下条件的最大数：

$$\forall V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S),\ \forall \lambda \in \{0, 1, \ldots, p(n-d)\} :\quad \big|\omega_p^d - \|V\|(M)\big| \leq \tilde{c}(\lambda, \tilde{K})/3$$

对于每个非空子集 $\tilde{K} \subset \{\, k \,|\, \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta_1(S)}(S) \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k) \neq \emptyset \,\}$。

为证明 η在每个 $\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 上都有正下界 $\tilde{\eta}_m$，注意到对于任意 $S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)$，指标集

$$\{\, k : \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta_1(S)}(S) \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\varepsilon_k}(S_k) \neq \emptyset \,\} \subset K_m := \bigcup_{k=1}^{k_m} \bar{K}(S_k),$$

因为

$$\bigcup_{S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\eta_1(S)}(S) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k).$$

根据**步骤 1**中的第三条，集合 K_m 是有限的。由$\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$的紧致性可知，存在 $\tilde{\eta}_m > 0$，使得对于任意 $S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 以及任意 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\tilde{\eta}_m}(S)$，

$$\big|\omega_p^d - \|V\|(M)\big| \leq \min_{\substack{K \subset K_m \\ \lambda \in \{0, 1, \ldots, p(n-d)\}}} \frac{\tilde{c}(\lambda, K)}{3}.$$

因此，$\eta(S) \geq \tilde{\eta}_m > 0$ 在 $\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 上。

对于第三条，应用引理 3.17 构造同伦 $H^{\Theta,\,\lambda\,\delta}_{\cdot,\,K}$。性质 (1)–(4) 直接成立。为验证 (5)，假设存在$x \in X^l$和 $S \in \mathcal{U}(\omega_p^d)$，从而导出矛盾：

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,1) \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,K}.$$

根据 η的定义，

$$\omega_p^d - \|H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,1)\|(M) < \tilde{c}(\lambda,K)/2.$$

由于 $H^{\Theta,\,\lambda\,\delta}_{\cdot,\,K}(x,\ 0) = \Theta(x) \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,\,K}$，我们也有

$$\|\Theta(x)\|(M) - \omega_p^d < \tilde{c}(\lambda,K)/2.$$

因此，

$$\|\Theta(x)\|(M) - \|H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,1)\|(M) < \tilde{c}(\lambda,K),$$

这与引理 3.17 的第 (2) 项矛盾。由此得证 (5)。

步骤 3. 我们证明，步骤 2 中定义的同伦映射不会将变分流形推得过于接近 $\mathcal{U}(\omega_p^d)$，前提是它起初远离 $\mathcal{U}(\omega_p^d)$。

更确切地说，我们断言，对于任意 $S \in \mathcal{U}(\omega_p^d)$，存在序列$\{\varepsilon_q(S)\}_{q=1}^{p(n-d)} \subset \mathbb{R}^+$ 和 $\{a_q(S)\}_{q=1}^{p(n-d)+1}$，满足 $a_1(S) = 2$且 $a_q(S) \geq 2^q$，使得以下结论成立。在步骤 2 的第三条中，对于任意 $q \in \{1,\dots,p(n-d)\}$、任意满足 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,K} \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \neq \emptyset$的 $S \in \mathcal{U}(\omega_p^d)$，以及任意满足 $\Theta(x) \notin \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)/a_q(s)}(S)$且 $\|\Theta(x)\|(M) - \omega_p^d \leq \varepsilon_q(S)$的 $x \in X^l$，对所有 $t \geq 0$ 及所有 $\delta \in (0,$ 都有 $\min\big(\eta(S)/(4a_q(S))\ \varepsilon_q(S)\big)$，

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t) \notin \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)/a_{q+1}(S)}(S).$$

此外，在每个 $\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 上，量 $\varepsilon_q(S)$ 有正下界 $\tilde{\varepsilon}_q^m$，而$a_q(S)$ 有一致上界 $\tilde{a}_q^m$。

我们归纳地构造 $a_q(S)$ 和 $\varepsilon_q(S)$。令 $a_1(S) = 2$。

固定 $S \in \mathcal{U}(\omega_p^d)$，并假设 $a_q(S)$ 已定义（若 $q > 1$，也假设 $\varepsilon_{q-1}(S)$ 已定义）。对于每个k 满足 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,\{k\}} \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \neq \emptyset$ 且对于每个 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,\{k\}}$，令

$$A_{q,S,k}(V) := \big((F^k_\cdot)_\# V\big)^{-1} \partial \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{3\eta(S)/(4a_q(S))}(S),$$
$$B_{q,S,k}(V) := \big((F^k_\cdot)_\# V\big)^{-1} \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)/(2a_q(S))}(S).$$

定义

$$d_{q,S,k}(V) := \operatorname{dist}\big(A_{q,S,k}(V),\, B_{q,S,k}(V)\big),$$

约定 $\operatorname{dist}(\emptyset,\cdot) = \operatorname{dist}(\cdot,\emptyset) = +\infty$。根据引理 3.9，

$$d_{q,S,k}(V) \ \geq\ h_{S_k}\left(\frac{\eta(S)}{4a_q(S)}\right).$$

选取 $m \in \mathbb{N}$，使得 $S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)$。指标集

$$\{\, k : \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,\{k\}} \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \neq \emptyset \,\} \subset K_m = \bigcup_{k=1}^{k_m} \bar{K}(S_k),$$

因为

$$\bigcup_{S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2\eta_1(S)}(S) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_k}(S_k).$$

根据**步骤 1**的第三条，K_m 是有限集。因此我们可以设

$$\varepsilon_q(S) := \min_{\substack{k: \\ \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,\{k\}} \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \neq \emptyset}} \frac{c_{0,k}}{16} \left[h_{S_k}\left(\frac{\eta(S)}{4a_q(S)} \right) \right]^2. \tag{5}$$

断言 2。存在 $\tilde{\varepsilon}_q^m > 0$ 使得 $\inf_{S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)} \varepsilon_q(S) \geq \tilde{\varepsilon}_q^m$。

证明。对于固定的 m，根据**步骤 2**的第一条，

$$K'_m := \left\{ k : \exists\, S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d) \text{ with } \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,\{k\}} \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \neq \emptyset \right\} \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} \bar{K}(S_k),$$

因此，根据**步骤 1**的第三条，有 $\#K'_m < \infty$。根据归纳假设以及**步骤 2**的第二条，比值 $\eta(S)/a_q(S)$ 在 $c'_m > 0$ 上$\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$具有正下界。因此，

$$\begin{aligned} \inf_{S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)} \varepsilon_q(S) &= \min_{k \in K'_m} \inf_{\substack{S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d) \\ \overline{\mathbf{B}}^{\mathbf{F}}_{\lambda+1,\{k\}} \cap \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)}(S) \neq \emptyset}} \frac{c_{0,k}}{16} \left[h_{S_k}\left(\frac{\eta(S)}{4a_q(S)} \right) \right]^2 \\ &\geq \min_{k \in K'_m} \frac{c_{0,k}}{16}\, h_{S_k}(c'_m)^2 \;>\; 0. \end{aligned}$$

□

选择 $a_{q+1}(S) \geq 2a_q(S) + 1$ 为最小值，使得对于每个 $V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta\,(S)\overline{/}a_{q+1}(S)}(S)$,

$$\|V\|(M) \;\geq\; \omega_p^d - \varepsilon_q(S).$$

断言 3. 存在 $\tilde{a}_{q+1}^m > 0$，使得 $\sup_{S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)} a_{q+1}(S) \leq \tilde{a}_{q+1}^m$。

证明。由于 $\eta \leq 1$，只需找到 $c''_m > 0$，使得对于每个 $S \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 以及每个$V \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{c''_m}(S)$, $^{-}$

$$\|V\|(M) \;\geq\; \omega_p^d - \tilde{\varepsilon}_q^m.$$

于是 $c''_m \leq \eta(S)/a_{q+1}(S) \leq 1/a_{q+1}(S)$，因此 $a_{q+1}(S)$ 在 $\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 上一致地 $\leq 1/c''_m$。

用反证法：假设存在 $S_i \in \mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 和 $V_i \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{1/i}(S_i)$，使得$\|V_i\|(M) \;\overline{<}\; \omega_p^d - \tilde{\varepsilon}_q^m$。由 $\mathcal{U}_m(\omega_p^d)$ 的紧致性，取子列 $S_i \to S$和 $V_i \to S$，于是 $\|S\|(M) = \omega_p^d$，矛盾。

□

命题 4. 若 $\Theta(x) \notin \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)/a_q(S)}(S)$ 且 $\|\Theta(x)\|(M) - \omega_p^d \le \varepsilon_q(S)$，则

$$H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t) \notin \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta(S)/a_{q+1}(S)}(S).$$

证明。对于 $t \in [0,1/2]$，由于 $\delta < \eta(S)/(4a_q(S))$，且根据**步骤 2**的第三条，

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\big(H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t),S\big) &\ge \mathbf{F}\big(\Theta(x),S\big) - \mathbf{F}\big(H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t),\Theta(x)\big)\\ &\ge \frac{\eta(S)}{a_q(S)} - \delta \;\ge\; \frac{3\,\eta(S)}{4\,a_q(S)} \;\ge\; \frac{\eta(S)}{a_{q+1}(S)}.\end{aligned}$$

对于 $t \in (1/2,1]$，我们有 $\delta < \varepsilon_q(S)$，因此根据步骤 2 的第三条，$\|H^{\Theta,\lambda}_{K}, (x,1/2)\|(M) \le \omega_p^d + 2\varepsilon_q(S)$。若反设存在 $t_1 \in (1/2,1]$，满足 $H^{\Theta,\lambda}_{K}, (x,t_1) \in \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\eta}(s)$ $/a_{q+1}(s)(S)$，令 $k = \bar{k}(K)$。那么

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}\Big(\big((F^k_\cdot)_\#(\Theta(x))\big)^{-1}\big(H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t_1)\big),\ \big((F^k_\cdot)_\#(\Theta(x))\big)^{-1}\big(H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,1/2)\big)\Big)\\ &\qquad \ge d_{q,S,k}(\Theta(x)) \;\ge\; h_{S_k}\left(\frac{\eta(S)}{4a_q(S)}\right) \;>\; 0.\end{aligned}$$

根据引理 3.8，除了上面的方程 (4) 和 (5) 外，

$$\|H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,t_1)\|(M) \;\le\; \|H^{\Theta,\delta}_{\lambda,K}(x,1/2)\|(M) - \frac{c_{0,k}}{2}\left[h_{S_k}\left(\frac{\eta(S)}{4a_q(S)}\right)\right]^2 \;\le\; \omega_p^d - 6\varepsilon_q(S),$$

这与 $a_{q+1}(S)$ 的定义性质矛盾。 □

最后，定义

$$\varepsilon_m := \min_{q\in\{1,\dots,p(n-d)\}}\ \inf_{S\in\mathcal{U}_m(\omega_p^d)} \min\left(\frac{\eta(S)}{4a_{q+1}(S)},\, \varepsilon_q(S)\right) > 0.$$

步骤 4 [分层变形]。在这一步中，我们构造一个同伦的（子）序列

$$H_i : X_i \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{Z}_d(M;\mathbb{Z}_2)$$

使得 $H_i(\cdot,\ 0) = \Phi_i$ 且 $H_i(\cdot,\ 1) = \Psi_i$，并满足所有必要性质。

选取一个子列 $\{j_i\}$，使得 $\sup_x \mathbf{M}(\Phi_{j_i}(x)) \le \omega_p^d + \varepsilon_i/2$；根据极小极大序列的定义，这是可能的。将该子列重新记为 Φ_i。

只需将 Φ_i 变形为 Ψ_i，使得 $|\Psi_i| \cap \mathcal{N}^i_{\eta/(2a_{p(n-d)+1})} = \emptyset$；其中对于 $c\colon\ \mathcal{U}(\omega_p^d) \to \mathbb{R}^+$，我们设

$$\mathcal{N}^i_{c\eta} := \bigcup_{S\in\mathcal{U}_i(\omega_p^d)} \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{2c(S)\eta(S)}(S).$$

在本步骤余下部分中固定 i。

请记住，对单纯复形进行细分不会改变其拓扑性质或度量性质，只会改变其组合结构。我们对 X_i 进行反复的重心细分，以获得“良好”的组合结构，并将闭面划分为良好 面和不良 面，满足以下性质：

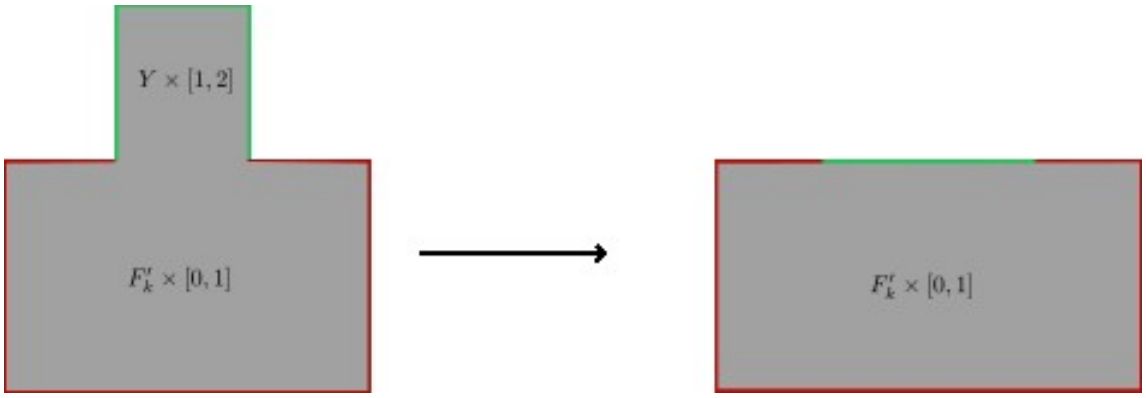


图 4：由 Y 上的同伦得到 F'_k 上的同伦

1. 若 $|\Phi_i|(F) \cap \mathcal{N}^i_{\eta/2} \neq \emptyset$，则 $|\Phi_i|(F) \subset \mathcal{N}^i_\eta$。将所有此类不良面组成的集合记为 $\mathcal{B}$。

2. 对每个 $F \in \mathcal{B}$，存在一个非空有限集 $K(F) \subset \mathbb{N}$，使得 $|\Phi_i|(F) \subset \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{K(F)}$；
并且当 $F \subset F'$ 满足 $F,\ F' \in \mathcal{B}$ 时，我们有 $K(F) \supset K(F')$。

由于 X_i 是紧致的，$|\Phi_i|$ 是一致连续的。此外，η 在 $\mathcal{U}_i(\omega_p^d)$ 上有一致的正下界；因此 $\mathbf{F}(\partial\mathcal{N}^i_\eta,\ \mathcal{N}^i_{\eta/2}) \geq c_i > 0$。经过充分多次重心细分后，性质 (1) 成立。

根据**步骤 2**的第一条，每个满足 $F \in \mathcal{B}$ 的 $|\Phi_i|(F)$ 都可以用有限个

$$\{\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_j}(S_j)\}.$$

因此，拉回开覆盖

$$\{\,|\Phi_i|^{-1}(\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_j}(S_j))\,\}$$

是有限的，因此存在一个勒贝格数。由于 $\mathcal{B}$ 是有限的，经过进一步的重心细分后，每个满足 $F \in \mathcal{B}$ 的 $|\Phi_i|(F)$ 都包含在某个 $\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_j}(S_j)$ 中。

我们定义指标集 K 如下。如果 $F \in \mathcal{B}$ 不包含在 $\mathcal{B}$的任何其他成员中，则令 $K(F)$ 为仅含一个指标 j的单元素集，使得$\mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{\varepsilon_j}(S_j)$包含$|\Phi_i|(F)$。按维数向下归纳，对于每个满足$F \in \mathcal{B}$的面 $F' \subset F$，定义

$$K(F') := \bigcup_{F' \subset F \in \mathcal{B}} K(F).$$

根据构造，该定义具有所需的性质。我们不能简单地令 $K(F') = K(F)$，因为低维面 F' 可能位于$\mathcal{B}$中的多个高维面 F 内，从而得到不同的集合。

现在，我们通过对 k 归纳，在骨架 $X_i^{(k)}$ 上定义 H_i。对于 $k = 0$，我们将**步骤 2** 与 $\lambda = 0$ 和 $\delta < \varepsilon_i/4$ 应用于 $\mathcal{B}$ 中所有的 0-胞腔。对于 $\mathcal{B}$ 之外的所有 0-胞腔，我们直接使用常值同伦映射。由此得到 $H_i^{(0)}$：$X_i^{(0)} \times [0,1] \to \mathcal{Z}_d(M;\mathbb{Z}_2)$，使得

$$|H_i^{(0)}|(X_i^{(0)} \times \{1\}) \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_1} = \emptyset, \qquad |H_i^{(0)}|(x,[0,1]) \subset \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{1,K(x)} \text{ for } x \in \mathcal{B}^{(0)}.$$

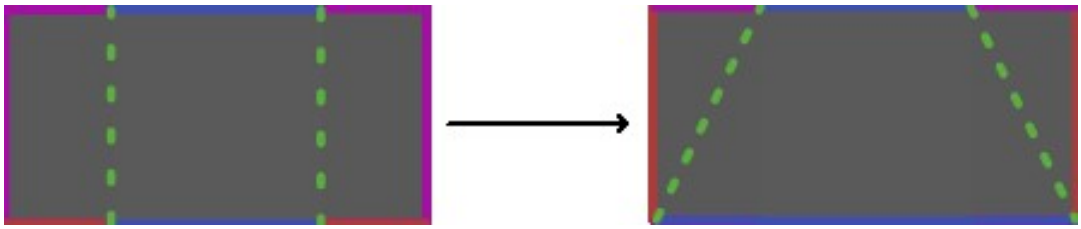


图5：由 F_k'上的同伦得到 F_k 上的同伦

我们假设同伦映射已在 $(k-1)$-骨架上定义，且满足 $k \geq 1$。考虑一个 k-面 F_k。令

$$F_k' := F_k \cup \big(\partial F_k \times [0,1]\big).$$

那么 F_k'与 $F_k(\cong D^k)$同胚，因此我们可以通过拼接 $\partial F_k \times [0,1]$ 上的 $H_i^{(k-1)}$（由归纳假设可得）与 F_k上的 Φ_i，来定义 F_k'上的 Θ。现在我们构造一个初始数据为 Θ的同伦映射 $\tilde{H}_i^{(k)}$。分两种情形:

情形1. 如果 $F_k \notin \mathcal{B}$，那么根据 $\mathcal{B}$的定义， ∂F_k 中没有胞腔属于 $\mathcal{B}$。在这种情形下，我们将该胞腔上的同伦定义为常值。

情形2. 如果 $F_k \in \mathcal{B}$，细分保证 $|\Theta|(F_k') \subset \mathbf{B}^{\mathbf{F}}_{k,\ K(F_k)}$。

然而， $|\Theta|(F_k') \subset \mathcal{N}_\eta^i$可能不成立。进一步细分 F_k'，使得每个满足 $|\Theta|(F) \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_k} \neq \emptyset$的闭 $\sim$ $\sim$ $\sim k$-面 F都实际满足 $|\Theta|(F) \subset \mathcal{N}^i_\eta$。令 Y为所有此类 F的并集 $\tilde{}$。根据归纳法， $|\Theta|(\partial F_k') \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_k} = \emptyset$，因此 $|\Theta|(\partial Y) \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_k} = \emptyset$。

利用这个新的细分，我们可以定义一个映射

$$\hat{H} : F_k' \times [0,1] \cup Y \times [1,2] \to \mathcal{Z}_d(M;\mathbb{Z}_2)$$

使得对于 $t \in_\delta [0,1]$， $\hat{}H(\cdot,\ t) := \Theta(\cdot)$，并且对于**步骤 2** 中的 $t \in [0,1]$， $\hat{}H(\cdot,\ t+1) = H^{|\Theta|,\ k\ K\ ,\ (F_k)}(\cdot,\ t)$，其中 $\delta < \varepsilon_i$。根据 Y 的构造，我们有

$$|\hat{H}((F_k' - Y) \times 1 \cup \partial F_k' \times [0,1])| \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_{k+1}} = \emptyset\,.$$

根据**步骤 2**第三条中的 (5)，

$$|\hat{H}(Y \times 2)| \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_{k+1}} = \emptyset\,.$$

根据**步骤 3**，

$$|\hat{H}(\partial Y \times [1,2])| \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_{k+1}} = \emptyset\,.$$

我们可以从由同胚诱导的 $\hat{}H$ 推导出 $\tilde{H}_i^{(k)}$： $F_k' \times [0,1] \to \mathcal{Z}_d(M;\ \mathbb{Z}_2)$（见图 4。）

$$\begin{aligned}(F_k' \times [0,1], \partial F_k' \times [0,1], F_k' \times 1) \cong (&F_k' \times [0,1] \cup Y \times [1,2],\\ &\partial F_k' \times [0,1], (F_k' \backslash Y) \times 1) \cup (Y \times 2) \cup (\partial Y \times [1,2]))\,.\end{aligned}$$

$\hat{}$ 根据 H 的性质，我们还可以得到

$$|\tilde{H}_i^{(k)}(F_k' \times 1 \cup \partial F_k' \times [0,1])| \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_{k+1}} = \emptyset\,.$$

对于这两种情况，我们都可以从由同胚诱导的 $\tilde{H}_i^{(k)}$ 推导出 $H_i^{(k)}$： $F_k \times [0,1] \to \mathcal{Z}_d(M;\mathbb{Z}_2)$

$$(F_k \times [0,1], F_k \times 1) \cong (F_k' \times [0,1], F_k' \times 1 \cup \partial F_k' \times [0,1]),$$

满足 $H_i^{(k)}|_{\partial F_k \times [0,1]} = H_i^{(k-1)}|_{\partial F_k \times [0,1]}$和 $H_i^{(k)}|_{F_k}(\cdot,\ 0) = \Phi_i|_{F_k}$（见图5）。对所有 k-胞腔进行拼接，得到

$$H_i^{(k)} : X_i^{(k)} \times [0,1] \to \mathcal{Z}_d(M;\mathbb{Z}_2).$$

注意

$$|H_i^{(k)}(F_k \times 1)| = |\tilde{H}_i^{(k)}(F_k' \times 1 \cup \partial F_k' \times [0,1])|\,.$$

因此，我们可以得出

$$|H_i^{(k)}|(X_i^{(k)} \times 1) \cap \mathcal{N}^i_{\eta/a_{k+1}} = \emptyset\,.$$

设 $\Psi_i := H_i^{(p(n-d))}(\cdot,\ 1)$ 且 $\bar{\varepsilon}(S) := \eta(S)/(2a_{p(n-d)+1}(S))$。则所有所需结论均可得出。

□

定理 *1.2* 的证明。对于任意一个关于 d 维 p-宽度的极小极大序列 $\{\Phi_i\}$，根据定理 3.18，存在一个新的极小极大序列 $\{\Psi_i\}$，使得 $\mathbf{C}(\{\Psi_i\}) \cap \mathcal{APR}_{p,\ d} \subset \mathcal{S}(\omega_p^d)$。因此，Almgren–Pitts 理论生成了一个 $S \in \mathcal{IV}_d(M)$，它是驻定的，且在环带中几乎极小，使得 $S \in \mathbf{C}(\{\Psi_i\}) \cap \mathcal{APR}_{p,\ d} \subset \mathcal{S}(\omega_p^d)$，即 $\mathrm{index}(S) \le p(n-d)$。 □

4 界的最优性

本节中，我们证明指标上界必须依赖于 n，且对于 ω_1^1，该上界是最优的。

定理 4.1. 对于任意 $n \ge 2$, $\omega_1^1(S^n, g_{\mathrm{round}}) = 2\pi$，且可由 Morse指标为 $n-1$ 的闭合赤道测地线实现。

证明. 根据 [44], 中的定理 1，我们有 $\omega_1^1(S^n, g_{\mathrm{round}}) \le 2\pi$。反设 $\omega_1^1(S^n, g_{\mathrm{round}}) < 2\pi$。那么定理 2.3 蕴含存在一个驻定测地网 G，位于 $(S^n, g_{\mathrm{round}})$ 上，其长度为$_g(G)$ $< 2\pi$。 [2] 中的命题 3.6 蕴含 G 的密度处处小于 1，这与假设矛盾。因此$\omega_1^1(S^n,$ $g_{\mathrm{round}}) = 2\pi$。

设 G 是一条长度为 $\omega_1^1(S^n,\ g_{\mathrm{round}})$ 的驻定测地线网。由于 $\omega_1^1(S^n,\ g_{\mathrm{round}}) = 2\pi < 4\pi$, [2] 中的命题 3.6 表明, G 的密度处处小于 2。根据 [2], 中的推论 3.3, G 中只可能出现三重交点。然而，三重交点也不可能存在，因为这些交点处的密度不是整数，这与 [2]中的定理 4.13 相矛盾。这意味着 $\omega_1^1(S^n,\ g_{\mathrm{round}})$ 仅有赤道闭测地线这一种实现。其 Morse 指标等于 $n-1$（见 [25]中的例 2.5.7）。

□

参考文献

[1] Ralph Abraham。《粗糙度量》。整体分析（纯数学专题讨论会论文集，第 XIV 卷，加利福尼亚州伯克利，1968 ）。第 XIV 卷。纯数学专题讨论会论文集。罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，1970年，第 1–3 页。[2] Nicolau S. Aiex。《椭球宽度》。《分析与几何通讯》27，第 2 期（2019），第 251–285 页。[3] William K. Allard。《变分流形的一阶变分》。《数学年刊》（第 2 辑）95，第 3 期（1972），第 417–491 页。[4] William K. Allard 和 Frederick J. Almgren Jr.。《具有正密度的平稳一维变分簇的结构》。《数学发明》34（1976），第 83–97 页。[5] Frederick J. Almgren Jr.。《整数循环群的同伦群》。《拓扑学》1，第 4 期（1962），第 257–299 页。[6] Frederick J. Almgren Jr.《变分簇理论：针对 k 维面积被积函数的大范围变分法》。油印讲义，高等研究院，普林斯顿，新泽西州。1965年。[7] Lucas Ambrozio、Fernando C. Marques 和 André Neves。《黎曼流形面积宽度的刚性定理》。arXiv:2408.14375。2024年。[8] Eugenio Calabi 和 Jian Guo Cao。《凸曲面上的简单闭测地线》。《微分几何杂志》36，第 3 期（1992），第 517–549 页。[9] Gregory R. Chambers、Yevgeny Liokumovich、Alexander Nabutovsky 和 Regina Rotman。《非紧黎曼流形上的测地网》。《纯粹与应用数学杂志》第 799 期（2023），第 287–303 页。[10] Herng Yi Cheng。《凸超曲面中的稳定测地网》。《几何分析杂志》34（2024）。第 56 号文章。[11] Otis Chodosh 和 Christos Mantoulidis。《三维流形上的极小曲面与 Allen–Cahn 方程：指标、重数与曲率估计》。《数学年刊》（第 2 辑）191，第 1 期（2020），第 213–328 页。[12] Otis Chodosh 和 Christos Mantoulidis。《曲面的 p 宽度》。《高等科学研究所数学出版物》137（2023），第 245–342 页。[13] James F. Davis 和 Paul Kirk。《代数拓扑讲义》。第 35 卷。数学研究生丛书。罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，2001年。[14] Akashdeep Dey。《Almgren–Pitts 与 Allen–Cahn 极小极大理论的比较》。《几何与泛函分析》32，第 5 期（2022），第 980–1040 页。[15] Pedro Gaspar。《能量的二阶内变分与极限界面的 Morse 指标》。《几何分析杂志》30，第 1 期（2020），第 69–85 页。

[16] Pedro Gaspar 和 Marco A. M. Guaraco。“闭流形上的 Allen–Cahn 方程”。《变分法与偏微分方程》57卷，第4期（2018），论文编号101，共49页。[17] Pedro Gaspar 和 Marco A. M. Guaraco。“相变谱的 Weyl 定律与极限界面的稠密性”。《几何与泛函分析》29卷，第2期（2019），第382–410页。[18] Mikhail Gromov。“维数、非线性谱与宽度”。《泛函分析的几何方面》（以色列研讨会（GAFA）1986–87）。第1317卷。《数学讲义》。柏林：Springer，1988，第132–184页。[19] Mikhail Gromov。“腰部等周问题与映射集中”。《几何与泛函分析》13卷，第1期（2003），第178–215页。[20] Mikhail Gromov。“奇点、扩张图与映射的拓扑。第二部分：通过代数等周问题从组合学走向拓扑学”。《几何与泛函分析》20卷，第2期（2010），第416–526页。[21] Larry Guth 和 Yevgeny Liokumovich。“参数不等式与体积谱的 Weyl 定律”。《几何与拓扑》29卷，第2期（2025），第863–902页。[22] Joel Hass 和 Frank Morgan。“2维球面上的测地网”。《美国数学会会刊》124（1996），第3843–3850页。[23] Allen Hatcher。《谱序列》。讲义，见 http://pi.math.cornell. edu/~hatcher/AT/ATch5.pdf。2004。[24] Kei Irie、Fernando C. Marques 和 André Neves。“一般度量下极小超曲面的稠密性”。《数学年刊》（第2辑）187卷，第3期（2018），第963–972页。[25] Wilhelm Klingenberg。《黎曼几何》。第1卷。《数学丛书》De Gruyter Studies in Mathematics。柏林：Walter de Gruyter，1982。[26] John M. Lee。《光滑流形导论》。第218卷。《数学研究生教材》。纽约：Springer，2003。[27] Xinze Li 和 Bruno Staffa。“闭测地线与测地网的等分布问题”。《美国数学会汇刊》376卷，第12期（2023），第8825–8855页。[28] Yangyang Li。“极小极大极小超曲面的改进 Morse 指数界”。《变分法与偏微分方程》62（2023）。文章编号179。[29] Yangyang Li。“具有一般度量的高维闭流形中无穷多个极小超曲面的存在性”。《微分几何杂志》124卷，第2期（2023），第381–395页。[30] Yangyang Li 和 Zhihan Wang。“8维一般度量下的极小超曲面”。《数学发明》240卷，第3期（2025），第1193–1303页。[31] Yevgeny Liokumovich、Fernando C. Marques 和 André Neves。“体积谱的 Weyl 定律”。《数学年刊》（第2辑）187卷，第3期（2018），第933–961页。

[32] Yevgeny Liokumovich 和 Bruno Staffa。“测地网的泛型稠密性”。《数学精选》（新系列）30（2024）。文章编号14。[33] Fernando C. Marques 和 André Neves。“正里奇曲率下无穷多个极小超曲面的存在性”。《数学发明》209卷，第2期（2017），第577–616页。[34] Fernando C. Marques 和 André Neves。“极小极大理论与威尔莫尔猜想”。《数学年刊》（第2辑）179卷，第2期（2014），第683–782页。[35] Fernando C. Marques 和 André Neves。“极小极大极小超曲面的 Morse 指标与重数”。《剑桥数学杂志》4卷，第4期（2016），第463–511页。[36] Fernando C. Marques 和 André Neves。“重数为一的极小极大极小超曲面的 Morse 指标”。《数学进展》378（2021），第107527页。[37] Fernando C. Marques 和 André Neves。“循环空间的拓扑与极小簇的存在性”。《微分几何综述》21卷，第1期（2016），第165–177页。[38] Jared Marx-Kuo、Lorenzo Sarnataro 和 Douglas Stryker。《极小极大测地线的指标、交点与重数》。arXiv:2410.02580。2024。[39] Alexander Nabutovsky 和 Fabian Parsch。“测地网：若干例子与未解问题”。《实验数学》32卷，第1期（2020），第1–25页。[40] Alexander Nabutovsky 和 Regina Rotman。“测地网的形状”。《几何与拓扑》11卷，第2期（2007），第1225–1254页。[41] Alexander Nabutovsky 和 Regina Rotman。“平稳一维循环的体积、直径与最小质量”。《几何与泛函分析》14卷，第4期（2004），第748–790页。[42] Jon T. Pitts。《黎曼流形上极小曲面的存在性与正则性》。第27卷。《数学札记》。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1981。[43] Jon T. Pitts。“由大范围变分方法产生的流形上一维平稳整变分流形的正则性与奇点”。《数学专题研讨会》第14卷（1973年5月，罗马 INDAM 几何积分理论与极小簇会议）。伦敦—纽约：学术出版社，1974，第465–472页。[44] Hans-Bert Rademacher。“圈的同调类的临界值与正曲率”。《微分几何杂志》119卷，第1期（2021），第141–159页。[45] Regina Rotman。“黎曼流形上的花”。《数学杂志》269（2011），第543–554页。[46] Antoine Song。“无穷远处厚的流形中极小超曲面的二分性”。《高等师范学院科学年刊》（2019）。[47] Antoine Song。“闭流形中无穷多个极小超曲面的存在性”。《数学年刊》（第2辑）197卷，第3期（2023），第859–895页。

[48] Bruno Staffa. “测地网的崎岖度量定理”。《拓扑与分析杂志》**17**，第 4 期（2025年），第 1013–1044 页。[49] Bruno Staffa。*1*-循环的 *Weyl* 定律。arXiv:2410.23192。2024年。[50] Talant Talipov。非闭测地线的驻定测地网的泛型密度。arXiv:2510.02588。2025年。[51] Zhichao Wang 和 Xin Zhou。“具有更高重数的极小极大极小超曲面”。《微分几何杂志》**129**，第 1 期（2025年），第 225–260 页。[52] Brian White。“关于极小子流形的崎岖度量定理”。《美国数学杂志》**139**，第 4 期（2017年），第 1149–1155 页。[53] Brian White。“随黎曼度量变化的极小子流形空间”。《印第安纳大学数学杂志》**40** （1991年），第 161–200 页。[54] Xin Zhou。“关于极小极大理论中的重数一猜想”。《数学年刊》（第 *2* 辑）**192**，第 3 期（2020年），第 767–820 页。

多伦多大学数学系，多伦多，加拿大电子邮箱：
mitchell.gaudet@mail.utoronto.ca

多伦多大学数学系，多伦多，加拿大电子邮箱：
talant.talipov@mail.utoronto.ca