arXiv:2601.02863v1 [math.AP] 6 Jan 2026

¨具有容量密度条件的区域上抛物型方程的整体霍尔德可解性

原隆信

Abstract. 我们研究散度形式线性抛物型方程的柯西–狄利克雷问题。在对源项和区域作出温和假设的条件下，我们证明全局 H¨older 连续解的存在性。值得注意的是，我们的结果适用于具有奇异性的数据，其奇异程度几乎达到边界距离倒数平方这一临界水平。

1. Introduction引言

考虑如下形式的抛物型方程的柯西–狄利克雷问题

$$\mathcal{H}u := \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{in } D\times(0,T), \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{on } (\partial D)\times(0,T), \tag{1.2}$$

$$u(\cdot,0) = 0 \quad \text{in } D. \tag{1.3}$$

其中， D 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$)中的一个开集， $0 < T \leq \infty$，而 ∇u 表示 u 在 $\mathbb{R}^n$中的梯度。系数矩阵 $A = A(x,t)$是$L^\infty(D\times(0,T))^{n\times n}$ 中的矩阵值函数，满足一致椭圆性和有界性条件

$$A(x,t)\xi\cdot\xi \geq |\xi|^2, \quad |A(x,t)\xi| \leq L|\xi| \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall (x,t)\in D\times(0,T) \tag{1.4}$$

对于某个 $1 \leq L < \infty$。本文中，我们不对 A施加任何进一步的正则性假设。源项 f是 L^1_{loc} ($D\times(0,\ T)$) 中的函数。

我们证明，在对 f 和 D施加温和条件的情况下，方程 (1.1)–(1.3) 存在一个全局 H¨older 连续弱解。该结果涵盖了奇异性阶数接近边界距离平方倒数的数据。

1.1. 背景。 方程 (1.1) 在 H¨older 空间中的可解性已得到广泛研究，且仍是该领域的基础课题。Ladyzhenskaya、Solonnikov 和 Ural'tseva 在其经典专著 [LzSU68] 中系统阐述了这类方程的正则性理论。具体而言，如果

$$f \in L^p(0,T;L^q(D)) \quad \text{with} \quad \frac{n}{2q} + \frac{1}{p} < 1, \tag{1.5}$$

那么， u在 $D\times(0,\ T)$中局部 H¨older 连续。这一条件已成为后续文献中的标准条件，包括 [Tru68、Lie96]。关于边界正则性，已有研究证明，只要空间区域 D 的补集在某个边界点满足适当的体积密度条件，内部估计就可以延伸至该边界点。此外，众所周知，即使对时空中补集的容量作出更弱的假设，相同结论仍然成立

Date: 2026年1月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：35K20，次要分类：35B65，35R05，31B15。

（例如参见 [Lan75、Zie80、Zie82、GZ82、GL88]）。这些结果表明，如果所有边界点处都一致满足容量密度条件，那么解就是全局 H¨older 连续的。

上述故事——先建立局部估计，再将其延拓至边界——真的绝对成立吗？让我们从朴素的角度重新思考这一问题。只要在边界足够大的部分上满足狄利克雷边界条件 (1.2)，就自然可以期待良好的正则性估计成立。事实上，(1.1)-(1.3) 的解可以利用狄利克雷热核 $p_D(x, y, t, s)$ 表示如下：

$$u(x,t) = \int_0^T \int_D p_D(x,y,t,s) f(y,s)\, dyds. \tag{1.6}$$

对于每个 $(x,t) \in D \times (0,T)$，$p_D(x,\cdot,t,\cdot)$ 在 $D \times (0,T)$ 的侧边界附近衰减，因为它同样满足一个抛物方程。因此，对 f 边界行为所施加的假设应弱于内部区域中所要求的假设。然而，标准方法忽略了这一额外的正则性效应。仔细审视标准证明可以发现，在推导每个边界点处的估计时，并未使用区域外部得到一致保证这一假设。因此，标准方法只允许形如 $f(x,t) = d_{\mathbb{R}^n}(x,\xi)^{\epsilon-2}$ 的奇异性，其中 $\xi \in \partial D$ 固定（峰状行为），而无法处理具有临界边界行为的 f，例如 $f(x,t) = d_{\mathbb{R}^n}(x,\partial D)^{\epsilon-2}$（墙状行为）。因此，对于多边形等典型区域，标准的边界正则性理论从根本上说并非尖锐。

另一方面，尽管当D 具有光滑边界时，直接应用（1.6）值得考虑，但当 D 较为复杂时，为 f 获得具体条件便成为一项不简单的任务。有界域上热核的点态估计自然一直受到研究，但这类估计对区域施加了很强的假设（参见例如 [Dav87、Zha02、Hir13]）。事实上，在多边形的角点附近，调和函数的边界行为与 $d_{\mathbb{R}^n}$（x、∂D）并不具有可比性，也无法找到用于估计 p_D 的定量判据。这种方法与以下事实不相容：边界正则性仅通过对区域外部的假设即可建立。难道我们真的应该放弃使用正则性理论中的标准工具来得到不同结果的可能性吗?

本文旨在沿袭Ancona方法的思想，通过构造（1.1）的上解来填补这一空白。在 [Anc86], Ancona通过拼接无穷多个调和测度，构造了椭圆方程的一个上解。后续发展显著推进了对满足容量密度条件的区域上的分析（参见例如 [Lew88、Wan90、Aik02、Har24b]），然而，Ancona的贡献似乎尚未得到充分重视。作者最近在相关工作中[Har24a、Har25a、Har25b]继续研究了这一方法的推广及其应用。在本文中，我们将其推广到抛物型方程，并且总体上忠实于 [Anc86]中提出的原始论证。

1.2. **结果**。 我们的主要结果通过构造一个专为具有粗糙边界的区域量身定制的精确障碍函数，建立了抛物型方程的全局正则性理论。在定理 4.1 中，我们构造了方程 (1.1) 的一个超解，作为关键的障碍函数。结合该障碍函数与比较原理，我们证明了在满足容量密度条件

(2.1) 的区域上，柯西–狄利克雷问题 (1.1)-(1.3) 的弱解存在且具有全局 H{v3}ölder 正则性（定理 5.5）。这一结果的一个显著特点是能够处理具有强奇异性的外力，具体而言，允许数据按边界距离的平方倒数进行缩放。关于非齐次边值问题的最终结果见定理 6.1。尽管定理 6.2 可能是已知结果，但作者尚未发现有文献包含这一结论。

本文结构。本文其余部分安排如下。第 2 节介绍后续讨论所需的抛物型方程标准结果。第 4 节构造所需的屏障函数，这部分是本文的主要贡献。第 5 节讨论霍尔德连续解的存在性定理。第 6 节将第 5 节的结果推广至边值问题。最后，A节对第 2 节中需要进一步阐释的部分作补充说明。

记号。为处理抛物型方程，我们引入以下术语。

- 对于 $X=(x,t)$ $Y=(y,s)\in D\times\mathbb{R}$，抛物距离 $d_p(X,Y)$ 为
$$d_p(X,Y)=\max\left\{d_{\mathbb{R}^n}(x,y),|t-s|^{1/2}\right\},$$
其中，$d_{\mathbb{R}^n}(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得距离。
- 对于 $X=(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 和 $R>0$，抛物柱 $Q(X,R)$ 定义为
$$Q(X,R):=B(x,R)\times(t-R^2,t).$$
- 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，并设 $0<T\le\infty$。对于圆柱体 $D\times(0,T)$，我们在 $D\times(0,T)$ 上定义函数 δ_Γ：
$$\delta_\Gamma(X)=\inf_{Y\in\Gamma\times I\cup D\times\{0\}}d_p(X,Y). \tag{1.7}$$

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集。用 $H^1(D)$ 表示 D 上所有满足下列条件的弱可微函数所构成的集合：
$$\|u\|_{H^1(D)}:=\left(\int_D|u|^2\,dx+\int_D|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}$$
有限。对于 $u\in H^1(D)$，我们定义
$$\sup_{\partial D}u:=\inf\left\{k\in\mathbb{R}\colon(u-k)_+\in H_0^1(D)\right\},\quad \inf_{\partial D}u=-(\sup_{\partial D}-u). \tag{1.8}$$

2. Assumptions on D: Capacity density condition

这里，我们介绍关于空间区域 D 的预备知识。设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，并设 Γ 是 ∂D 的一个非空闭子集。我们考虑如下条件：
$$\exists\gamma>0\quad\text{s.t.}\quad\frac{\operatorname{cap}(\overline{B(\xi,R)}\setminus D,B(\xi,2R))}{\operatorname{cap}(\overline{B(\xi,R)},B(\xi,2R))}\ge\gamma\quad\forall R>0,\ \forall\xi\in\Gamma. \tag{2.1}$$
这里，对于开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 及其紧子集 $K\subset U$，变分容量 $\operatorname{cap}(K,U)$ 定义为
$$\operatorname{cap}(K,U):=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx\colon u\in C_c^\infty(U),\ u\ge1\text{ on }K\right\}. \tag{2.2}$$

有界Lipschitz域是满足容量密度条件的区域的典型例子。螺旋钻条件也是一种有用的几何充分条件。此外，基于Hausdorff测度的判据也广为人知；详情请参见 [HKM06, KLV21]。下面我们列举一些未必属于这些标准类别的例子。

例 2.1. 当 $n = 2$ 时，任意单连通有界开集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 都满足 (2.1)，其中 $\Gamma = \partial D$。

3. Parabolic equations

为研究抛物型方程，我们引入时空函数空间。对于开集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 和开区间 $I \subset \mathbb{R}$, 定义

$$V(D \times I) := L^\infty(I; L^2(D)) \cap L^2(I; H^1(D)).$$

相应的局部空间 $V_{\mathrm{loc}}(D \times I)$ 按通常方式定义。

我们定义方程 (1.1) 的局部弱解，并讨论其若干正则性结果。

定义 3.1。设 $u \in V_{\mathrm{loc}}(D \times I)$，且设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D \times I)$。若 u 是 $\mathcal{H}u = f$ 在 $D \times I$ 中的局部弱超解（次解），则

$$\iint_{D\times I} -u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dxdt \geq (\leq) \iint_{D\times I} \varphi f \, dxdt \tag{3.1}$$

对所有 $\varphi \in C_c^\infty(D \times I)$ 均成立。

下面引入时空函数的 Steklov平均。

定义 3.2。设 $u \in L^1(D\times(t_1, t_2))$，且设 $0 < h < t_2 - t_1$。对于 $t \in (t_1, t_2 - h)$，我们将 u 的*Steklov*平均 u_h 定义为

$$u_h := \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(\cdot, \tau)\, d\tau.$$

若 u 是 $\mathcal{H}u = f$ 在 $D \times (t_1, t_2)$ 中按照定义 3.1 意义下的超解（次解），则有

$$\int_{D\times\{t\}} \frac{\partial u_h}{\partial t}\varphi + [A\nabla u]_h \cdot \nabla \varphi \, dx \geq (\leq) \int_{D\times\{t\}} \varphi f_h \, dx \tag{3.2}$$

对于任意 $t_1 < t < t_2 - h$ 和 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 均成立。反过来，若 $u \in V_{\mathrm{loc}}(D \times (t_1, t_2))$ 对所有 $\varphi \in C_c^\infty(D)$、$t_1 < t < t_2$ 以及充分小的 h 均满足 (3.2)，则 u 是 $\mathcal{H}u = f$ 的超解（次解），其意义如定义 3.1 所述。事实上，根据 LzSU68，第 $82]$, 页，若 $f \in L^r(t_1, t_2; L^q(D))$ 且 $0 < \epsilon < t_2 - t_1$，则当 $h \to 0$ 时，$f_h \to f$ 属于 $L^r(t_1, t_2 - \epsilon; L^q(D))$。

将 $\varphi = \epsilon/((u_h - v_h)_+ + \epsilon)\eta$、$(\eta \in C_c^\infty(D \times I)$、$\eta \geq 0)$ 代入 (3.2)，并令 $h \to 0$ 趋于极限，我们得到以下能量估计。

引理 3.3。假设 u 和 v 是 $D \times I$ 中 $\mathcal{H}u = f$ 的弱超解。那么，最小值$\{u, v\}$ 是同一方程的超解。

将 $\varphi = u_h\eta^2, \eta \in C_c^\infty(Q(X,\ 2R))$ 代入 (3.2)，并令 $h \to 0$ 趋于极限，我们得到以下能量估计。

引理 3.4. 设 $f \in L^\infty(D\times I)$，且 $u \in V_{\mathrm{loc}}(D\times I)$ 是 $D\times I$ 中 $\mathcal{H}u = f$ 的局部弱次解。假设 $Q(X,2R) \subset D\times I$。那么，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R^n}\iint_{Q(X,R)} |\nabla u|^2\,dxdt\\ &\quad\le \frac{C}{R^{n+2}}\iint_{Q(X,2R)} |u|^2\,dxdt + C\left(R^2\|f\|_{L^\infty(Q(X,2R))}\right)^2,\end{aligned}$$

其中，C 是仅依赖于 n 和 L的常数。

利用 De Giorgi 或 Moser 的迭代技巧，我们得到以下 L^∞ 估计。参见例如 [LzSU68，第 III 章第 7] 节，或 [Lie96，定理 6.17]。

引理 3.5. 假设$\mathrm{diam}(D) \le R$。令 $u \in V(D\times(0,T))$是$(0,T)$内抛物方程 $\mathcal{H}u = f$的弱解。那么，我们有

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D\times(0,T)} u \le \max\left\{\sup_{0<t<T}\sup_{\partial D} u(\cdot,t),\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} u(x,0)\right\} + CR^2\|f\|_{L^\infty(D\times(0,T))}$$

其中，C 是仅依赖于 n 和 L的正常数。

对于 $\mathcal{H}u = f$的非负上解，我们有以下弱 Harnack 不等式（引理 3.6），它蕴含了解的局部 H¨older 连续性。因此，我们将 u 视为连续函数而不再赘述。这是一个经典估计（参见例如 [Mos64、Mos71、Lie96]）；关于较新的证明，参见例如 [NU11]。

引理 3.6. 设 $f \in L^\infty(D\times(0,T))$。假设 $\mathcal{H}u \ge f$, $u \ge 0$ *in* $D\times(0,T)$且 $Q(X_0,4R) \subset D\times(0,T)$。设 $0 < p_\star < (n+2)/n$。那么，存在一个常数C，它仅依赖于 n、L 和 $p_\star$，使得

$$\left(\frac{1}{R^{n+2}}\iint_{Q_-} u^{p_\star}\,dxdt\right)^{1/p_\star} \le C\left(\operatorname*{ess\,inf}_{Q(X_0,R)} u + R^2\|f_-\|_{L^\infty(X_0,4R)}\right)$$

其中 $X_0 = (x_0,t_0)$，$Q_- = B(x_0,3R)\times(t_0-16R^2,t_0-8R^2)$。

利用该引理和 Harnack链论证，我们得到强极小值原理：设 D 是一个连通开集。若 u是 $D\times(0,T)$中的$\mathcal{H}u \ge 0$非负上解，且对于某个 $x\in D$，有 $u(x,T) = 0$，则对于所有满足 $(y,s) \in D\times(0,T)$ 的点，都有 $u(y,s) \equiv 0$。

我们还有以下比较原理。

引理 3.7。 假设 $u,v \in V_{\mathrm{loc}}(D\times(0,T))\cap C(D\times(0,T))$满足 $\mathcal{H}u \le \mathcal{H}v$于 $D\times(0,T)$，$u \le v$于 $\partial D\times(0,T)$且 $u(\cdot,0) \le v(\cdot,0)$属于 D。那么，$u \le v$属于$D\times(0,T)$。

以下内部 H¨older 估计是引理 3.6 的标准推论。

引理 3.8。 $Q(X_0,2R) \subset D\times(0,T)$。假设 $\mathcal{H}u = f$属于 $D\times(0,T)$且$f \in L^\infty(D\times(0,T))$。那么，$u$在 X_0 处 ***H¨older*** 连续。此外，

$$\operatorname*{osc}_{Q(X_0,r)} u \le C\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_0}\left(\operatorname*{osc}_{Q(X_0,R)} u + R^2\|f\|_{L^\infty(Q(X_0,R))}\right) \tag{3.3}$$

对所有 $0 < r \le R$，其中 C 和 α_0 是仅依赖于 n、L 的常数。

最后，我们陈述一个在条件 (2.1) 下的边界 H¨older 估计，该估计是下一节中的主要工具。尽管在容量密度条件下抛物型方程的边界正则性已广为人知，但其中给出的表述缺少我们在引理 3.9 中的论证所需的精确量化形式。由于这一量化估计对于屏障构造至关重要，我们在附录 A 中给出证明，并对 [Zie80] 中的证明作了修改。

引理 3.9。假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 满足(2.1)，其中 $\gamma > 0$。固定 $R > 0$，并令 $\Xi \in \Gamma \times ((4R)^2, T)$。令 $u \in V(D \times (0,T))$ 为问题$\mathcal{H}u = f$ 在 $D \times (0,T)$中的弱解。那么，

$$\operatorname*{osc}_{Q(\Xi,r)\cap D\times(0,T)} u \le C_1 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_B} \operatorname*{osc}_{Q(\Xi,4R)\cap D\times(0,T)} u + \operatorname*{osc}_{(\partial D)\times(0,T)\cap Q(\Xi,4R)} u + C_2 k(4R)$$

对所有 $0 < r < R$，其中 $k(R) = \|f\|_{L^\infty(Q(\xi,R))\cap D\times(0,T))}$，且 C_1、C_2 和 α_B 是仅依赖于 n、L 和 γ 的正常数。

4. Construction of barrier

本节的主要结果是定理 4.1。我们将其证明分为三部分（引理 4.2 和 4.3，以及定理 4.1 的证明）。(2.1) 的必要性将在定理 4.4 中讨论。为简便起见，我们假设本节中 $T = \infty$ 。

定理 4.1. 假设 D 满足 (2.1)。那么，存在 $s_\Gamma \in V_{\mathrm{loc}}(D \times \mathbb{R}_+) \cap C(D \times \mathbb{R}_+)$ 使得

$$\mathcal{H}s_\Gamma \ge c_H \frac{s_\Gamma}{\delta_\Gamma^2} \quad in\ D \times \mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

$$\delta_\Gamma(X)^{\alpha_H} \le s_\Gamma(X) \le 15\delta_\Gamma(X)^{\alpha_H} \tag{4.2}$$

对所有 $X \in D \times \mathbb{R}_+$均成立。这里，$c_H$ 和 α_H 是仅依赖于 n、L 和γ的常数。

我们利用引理 3.9 构造以下辅助函数。

引理 4.2. 假设 (2.1) 成立。设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 为以 $\xi \in \Gamma$ 为球心、半径为 R的球。那么，存在函数 $u_B \in C(D \times \mathbb{R}_+)$ 使得

$$\frac{1}{4} \le u_B \le \frac{5}{4} \quad in\ (D \cap B) \times \mathbb{R}_+, \tag{4.3}$$

$$u_B = 1 \quad on\ (D \setminus B) \times \mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{H}u_B = cR^{-2} \quad in\ (D \cap B) \times \mathbb{R}_+, \tag{4.5}$$

$$u_B \le \frac{5}{16} \quad on\ (D \cap \theta B) \times \left(\frac{1}{12}R^2, \infty\right). \tag{4.6}$$

这里，θ 和 c 是仅依赖于 n、L 和 γ的正常数。

证明. 取一个定义在 $B = B(\xi, R)$ 上的光滑函数 η，使得它在 ∂B 上满足 $\eta = 1$，且在 $B/2$ 上满足$\eta = 1/4$。令 u 为柯西–狄利克雷问题的解

$$\begin{aligned} \mathcal{H}u &= cR^{-2} \quad \text{in } (D \cap B) \times \mathbb{R}_+, \\ u &= \eta \quad \text{on } \partial_p((D \cap B) \times \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

我们通过 $u(X) = 1$，将 u 延拓到 $D \times \mathbb{R}_+$，使其适用于 $X \in (D \setminus B) \times \mathbb{R}_+$。

根据定义， u_B 满足 (4.4) 和 (4.5)。由引理 3.5 和比较原理可知，当 c充分小时，(4.3) 成立。然后，由引理 3.9，进一步减小 c 并将 θ 也取为充分小，可使 (4.6) 成立。由引理 3.9，u 在处连续，对任意 $X \in (D \cap \partial B) \times \mathbb{R}_+$均如此。因此， $u_B \in C(D \times \mathbb{R}_+)$。□

利用引理 4.2 中的正常数 θ ，我们定义$D \times \mathbb{R}_+$的一个子集序列。对于 $k \in \mathbb{Z}$，令

$$E_k := \left\{ X \in D \times \mathbb{R}_+ \colon \delta_\Gamma(X) \le \left(\frac{\theta}{2}\right)^k \right\}.$$

取一个可数子集 $\Gamma_k \subset \Gamma$ ，使得

$$\left\{ x \in D \colon d_{\mathbb{R}^n}(x, \Gamma) \le \left(\frac{\theta}{2}\right)^{k+1} \right\} \subset \bigcup_{\xi \in \Gamma_k} B\left(\xi, 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^{k+1}\right). \tag{4.7}$$

利用这个 Γ_k，我们定义 $D_k \subset D$ 为

$$D_k := D \cap \bigcup_{\xi \in \Gamma_k} B\left(\xi, \left(\frac{\theta}{2}\right)^k\right).$$

最后，我们定义 $U_k \subset D \times \mathbb{R}_+$ 为

$$U_k = D_k \times \mathbb{R}_+ \cup D \times \left(0, \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k}\right). \tag{4.8}$$

根据定义， $E_{k+1} \subset U_k \subset E_k$。

引理 4.3。 假设引理 *4.2* 成立。那么，存在 $v_k \in V_{\mathrm{loc}}(D \times \mathbb{R}_+) \cap C(D \times \mathbb{R}_+)$ 使得

$$\frac{1}{4} \le v_k \le \frac{5}{4} \quad in\ D \times \mathbb{R}_+, \tag{4.9}$$

$$v_k = 1 \quad on\ (D \times \mathbb{R}_+) \setminus U_k, \tag{4.10}$$

$$\mathcal{H} v_k \ge c\left(\frac{2}{\theta}\right)^{2k} \quad in\ U_k, \tag{4.11}$$

$$v_k \le \frac{5}{16} \quad in\ E_{k+1}, \tag{4.12}$$

其中， c是一个仅依赖于 n、 L 和 γ 的小正常数。

证明。 我们定义 $v_k(x,t)$ 如下:

$$\tilde{v}_k(x,t) := \inf_{\xi \in \Gamma_k} v_{B(\xi, (\theta/2)^k)}(x,t)$$

and

$$v_k(x,t) = \min\left\{ \tilde{v}_k(x,t),\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\theta}\right)^{2k} t \right\}.$$

我们来证明该 v_k 满足所需性质。对于每个 $X \in D \times \mathbb{R}_+$， $v_k(X)$定义为有限个 $V_{\mathrm{loc}}(D \times \mathbb{R}_+) \cap C(D \times \mathbb{R}_+)$-函数的最小值。因此， $v_k \in V_{\mathrm{loc}}(D \times \mathbb{R}_+) \cap C($ $D \times \mathbb{R}_+)$。不等式 (4.9) 和 (4.10) 可由 (4.3) 和 (4.4) 立即推出。微分不等式 (4.11) 由引理 3.3 得出。事实上， v_k 是有限个

满足 (4.11) 的超解的最小值。我们来证明 (4.12)。根据 (4.6)，若 $d_{\mathbb{R}^n}(x,\ \Gamma)\ \le\ (\theta/2)^{k+1}$ 且 $t\ >\ (1/12)(\theta/2)^{2k}$，则该不等式成立。同时，根据定义，我们有

$$v_k(x,t) \le \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\theta}\right)^{2k} t \le \frac{5}{16}$$

对所有的 $x \in D$ 和 $t \le (1/12)(\theta/2)^{2k}$ 均成立。这些结果足以涵盖 E_{k+1}。 □

定理 *4.1* 的证明。对每个 k，令 v_k 为引理 4.3 中的一个函数。我们在 $D\times\mathbb{R}_+$ 上定义函数 s 如下:

$$s(X) := \inf_{E_k \ni X} \left(\frac{1}{3}\right)^k v_k(X).$$

于是,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} v_{k-2}(X) \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \frac{1}{4} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \frac{5}{4} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{k} v_k(X)$$

对任意 $X \in E_k$ 均成立。因此，我们有

$$s(X) = \min\left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} v_{k-1}(X),\ \left(\frac{1}{3}\right)^{k} v_k(X) \right\}$$

对所有 $X \in E_k \setminus E_{k+1}$ 均成立。因此， $s \in V_{\mathrm{loc}}(D\times\mathbb{R}_+) \cap C(D\times\mathbb{R}_+)$。

我们断言

$$\mathcal{H}s \ge c\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{\theta}\right)^{2(k-1)} \tag{4.13}$$

在 $E_k \setminus E_{k+1}$ 的一个开邻域内。根据定义， v_k 和 v_{k+1} 在 U_k 中满足 (4.13)。由引理 3.3，所需断言在 $U_k \setminus E_{k+1}$ 中成立。由于 $v_k\ =\ 1$ 属于 $(D\times I)\setminus U_k$，我们有

$$v_{k-1} \le \frac{5}{16} < \frac{1}{3} = \frac{1}{3} v_k \quad \text{in } E_k \setminus U_k.$$

由 v_k 和 v_{k-1} 的连续性，同一不等式在 $E_k\setminus U_k$ 的某个邻域内成立。因此，所需断言成立。

由于 v_k 满足 (4.9)，我们有

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k \le s(X) \le \frac{15}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k \tag{4.14}$$

对所有 $X \in E_k \setminus E_{k+1}$ 均成立。将后一个不等式与 (4.13) 代入，我们还得到

$$\mathcal{H}s \ge \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{\theta}\right)^{2(k-1)} \ge c_H \frac{s}{\delta_\Gamma^2}.$$

这里,

$$c_H := \frac{4}{15}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 c.$$

右端与 k 无关，因此，这个不等式在 $D\times\mathbb{R}_+$ 中成立。引入 $\alpha_H > 0$ 使得 $1/3 = (\theta/2)^{\alpha_H}$，我们将 (4.14) 写为

$$\frac{1}{4}\delta_\Gamma(X)^{\alpha_H} \le s(X) \le \frac{15}{4}\delta_\Gamma(X)^{\alpha_H}.$$

这些不等式表明， $s_\Gamma = 4s$ 具有所需的性质。 □

最后，我们根据定理 4.1 的陈述推导出 (2.1)，并考察其最佳性。

定理 4.4。 假设存在定理 *4.1* 中的 s_Γ ，且有 $A(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$。则条件 (2.1)成立。此外，常数 γ 的下界估计由 n、 c_H 和 α_H给出。

证明。 令 $B = B(\xi, R)$ 为一个以 $\xi \in \Gamma$ 为球心、半径为 $R > 0$ 的球。通过将几何常数 $c(n)$ 取得充分小，可以确保存在一个满足以下条件的函数 v

$$\begin{aligned} \Delta v = c(n)R^{-2}\mathbf{1}_{B\setminus\overline{B}/2}(x) &\quad \text{in } 2B, \\ v \geq 1 &\quad \text{in } 2B \setminus \overline{B}, \\ v = 0 &\quad \text{on } \overline{B}/2. \end{aligned}$$

利用这个常数 $c(n)$，我们考虑问题的弱解 u

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)u = c(n)R^{-2}\mathbf{1}_{B\setminus\overline{B}/2}(x) &\quad \text{in } (D \cap 2B) \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 &\quad \text{on } \partial(D \cap 2B) \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = 0 &\quad \text{in } D. \end{aligned}$$

由于 $D\cap 2B$ 有界，Poincar´e 不等式和 Gronwall 不等式意味着，当 $t \to \infty$ 时，$u(\cdot, t)$ 在 $L^2(D \cap 2B)$ 中收敛于 u_∞ ，其中 u_∞ 是稳态问题的弱解

$$\begin{aligned} -\Delta u_\infty = c(n)R^{-2}\mathbf{1}_{B\setminus\overline{B}/2}(x) &\quad \text{in } D \cap 2B, \\ u_\infty = 0 &\quad \text{on } \partial(D \cap 2B). \end{aligned}$$

根据假设， $s_\Gamma \geq 0$ 以及

$$(\partial_t - \Delta)s_\Gamma \geq c_H \frac{s_\Gamma}{\delta_\Gamma^2} \geq c_H \delta_\Gamma^{\alpha_H - 2} \geq c_H (2R)^{\alpha_H - 2}$$

在 $(D \cap 2B) \times \mathbb{R}_+$ 中。因此，由比较原理可得

$$u(X) \leq \frac{2^{2-\alpha_H}}{c(n)c_H R^{\alpha_H}} s_\Gamma(X) \leq \frac{15 \cdot 2^{2-\alpha_H}}{c(n)c_H R^{\alpha_H}} \delta_\Gamma(X)^{\alpha_H}$$

对所有 $X \in (D \cap 2B) \times \mathbb{R}_+$ 均成立。令 $t \to \infty$ 趋于极限，我们得到

$$u_\infty(x) \leq \left(\frac{15 \cdot 2^{2-\alpha_H}}{c(n)c_H}\right) \left(\frac{d_{\mathbb{R}^n}(x, \Gamma)}{R}\right)^{\alpha_H}.$$

接下来，令 φ 为极小化问题的解

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 \, dx \colon \varphi \in H_0^1(2B),\ \varphi \geq 1 \quad \text{on } \overline{B} \setminus D \right\}.$$

定义 $w := u_\infty + v$，我们看到 w 满足

$$\begin{aligned} -\Delta w = 0 &\quad \text{in } D \cap 2B, \\ w \geq 1 &\quad \text{on } (D \cap \partial 2B) \cup (\partial D \cap (2B \setminus \overline{B})). \end{aligned}$$

因此，由比较原理可知

$$1 - \varphi(x) \leq w(x) \leq \left(\frac{15 \cdot 2^{2-\alpha_H}}{c(n)c_H}\right) \left(\frac{d_{\mathbb{R}^n}(x, \Gamma)}{R}\right)^{\alpha_H}$$

对所有 $x \in D \cap 2B$ 均成立。右端小于 $1/2$，条件是如果

$$\left(\frac{d_{\mathbb{R}^n}(x,\Gamma)}{R}\right) \le \lambda := \left(\frac{c(n)c_H}{30 \cdot 2^{2-\alpha_H}}\right)^{1/\alpha_H},$$

这意味着 $2\varphi \ge 1$ 在 λB上。最后，通过直接计算环域容量，我们得到

$$\begin{aligned} 4\mathrm{cap}(\overline{B} \setminus D, 2B) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(2\varphi)|^2 \, dx \\ &\ge \mathrm{cap}(\lambda\overline{B}, 2B) \ge c(n,\lambda)\mathrm{cap}(\overline{B}, 2B), \end{aligned}$$

其中 $c(n, \lambda)$ 是一个仅取决于 n 和 λ的小常数。因此，所需的不等式 (2.1) 成立。□

5. Existence result

本节中，我们利用定理 4.1 和比较原理，证明 (1.1)–(1.3) 的弱解存在性定理。

以下始终假设 D 满足带有 $\Gamma = \partial D$ 的 (2.1)，且内径 D 有限:

$$\mathrm{inrad}\, D := \|d_{\mathbb{R}^n}(\cdot, \partial D)\|_{L^\infty(D)} < \infty. \tag{5.1}$$

例5.1。 (1) 如果 D 有界，则显然 (5.1) 成立。(2) 对于 $0 < r < \sqrt{n}/2$, $D = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \overline{B}(\xi, r)$ 是一个无界 CDC 域，满足 (5.1)。

为方便记号，下面将 δ_Γ 和 s_Γ 简记为 δ 和 s 。

引理 5.2。 设 $\theta: (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是一个连续可微的非减凹函数，使得

$$\Theta(\sigma) := \int_0^\sigma \theta(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty$$

对某个 $\sigma > 0$ 成立。设 $s(= s_\Gamma)$ 是定理 *4.1* 中的一个函数。那么， $\Theta(s)$ 满足

$$\mathcal{H}\Theta(s) \ge c_H \frac{\theta(\delta^{\alpha_H})}{\delta^2} \quad in\ D \times (0,T),$$

其中 c_H 和 α_H 是定理 *4.1* 中的常数。

例 5.3。 (i) $\theta(t) = t^\beta$ $(0 < \beta \le 1)$ 是凹函数，且满足上述积分条件。在这种情况下， $\Theta(t) = \beta^{-1}t^\beta$。 (ii) $\theta(t) = (\log t)^{-\beta}$ $(\beta > 1)$ 在$[0, e^{-(\beta+1)}]$ 上是凹函数，且满足上述积分条件。

证明。 根据假设，对于所有 $t \in (0,\infty)$， $\theta'(t)t \le \theta(t)$，因此 Θ 在 $(0,\infty)$ 上递增且为凹函数。取一个非负函数 $\eta \in C_c^\infty(D \times (0,T))$。将检验函数 $\varphi = \Theta'(s_h)\eta$ 代入 (3.2)，得到

$$\begin{aligned} &\iint_{D\times(0,T)} \frac{\partial s_h}{\partial t}(\Theta'(s_h)\eta) + [A\nabla s]_h \cdot \nabla(\Theta'(s_h)\eta)\, dxdt \\ &\ge c_H \iint_{D\times(0,T)} \left[\frac{s}{\delta^2}\right]_h (\Theta'(s_h)\eta)\ dxdt. \end{aligned}$$

令 $h \to 0$ 趋于极限，得到

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{D\times(0,T)} \Theta(s)\frac{\partial \eta}{\partial t}\,dxdt + \iint_{D\times(0,T)} A\nabla s\cdot\nabla(\Theta'(s)\eta)\,dxdt \\
&\geq c_H \iint_{D\times(0,T)} \frac{s}{\delta^2}\left(\Theta'(s)\eta\right)\,dxdt.
\end{aligned}
$$

考虑左端的第三项。由于 $\Theta'' \leq 0$，由 (1.4) 可得

$$
\iint_{D\times(0,T)} A\nabla\Theta'(s)\cdot\nabla\eta\,dxdt \geq \iint_{D\times(0,T)} A\nabla s\cdot\nabla(\Theta'(s)\eta)\,dxdt.
$$

另一方面，右端的被积函数有如下下界：

$$
s\,\Theta'(s) = \theta(s) \geq \theta(\delta^\alpha).
$$

结合两者，即可得到所需的微分不等式。 □

定理 5.4. 假设 D 满足 (2.1) 和 (5.1)。令 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D\times(0,T))$，并假设存在函数 θ，满足引理 *5.2* 中的假设，且

$$
|f(X)| \leq c_H \frac{\theta(\delta(X)^{\alpha_H})}{\delta(X)^2} \tag{5.2}
$$

对几乎所有 $X \in D\times(0,T)$ 均成立，其中 c_H 和 α_H 是定理 *4.1* 中的常数。则存在唯一的弱解 $u \in V_{\mathrm{loc}}(D\times(0,T)) \cap C(D\times(0,T))$，它在如下意义下满足 (1.1)-(1.3)：

$$
|u(X)| \leq \Theta(15\delta(X)^{\alpha_H}) \tag{5.3}
$$

对所有 $X \in D\times(0,T)$均成立。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $f \geq 0$。取一个序列$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^\infty(D\times(0,T))$，使得 $f_k \uparrow f$属于 $D\times(0,T)$。我们考虑近似问题

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}u_k &= f_k \quad \text{in } D\times\mathbb{R}_+, \\
u_k &= 0 \quad \text{on } \partial D\times\mathbb{R}_+, \\
u_k(\cdot,0) &= 0 \quad \text{in } D.
\end{aligned}
$$

由内部正则性理论，我们可以假设 $u_k \in C(D\times(0,T])$。根据比较原理和引理 5.2，我们有

$$
0 \leq u_k(X) \leq \Theta(s(X)) \leq \Theta(15\delta(X)^\alpha) \tag{5.4}
$$

对所有 X均成立。考虑有界函数 $u(X) = \lim_{k\to\infty} u_k(X)$。由引理 3.4,

$$
\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \quad \text{weakly in } L^2_{\mathrm{loc}}(D\times(0,T)).
$$

因此， $\mathcal{H}u = f$属于 $D\times(0,T)$。根据内部正则性， $u \in C(D\times(0,T])$。由于 u 由 $\delta(X)$控制，它也属于 $C(D\times(0,T))$。□

令 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $E \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$。对于定义在 E上的函数 u，我们将抛物型 H¨older 半范数定义为

$$
[u]_{\alpha,E\times I} := \sup_{X,Y\in E} \frac{|u(X)-u(Y)|}{d_p(X,Y)^\alpha}.
$$

对于 $E = D \times I$，抛物型 H¨older 空间 $C^{\alpha,\alpha/2}(D \times I)$ 定义为

$$\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(D\times I)} := \|u\|_{L^\infty(D\times I)} + (\operatorname{inrad} D)^\alpha [u]_{\alpha, D\times I}.$$

我们证明如下结论。

定理 5.5。 假设 (2.1) 对 $\Gamma = \partial D$ 和内半径 $D < \infty$成立。令$0 < \alpha \le 1$。假设 $f\delta^{2-\alpha} \in L^\infty(D \times (0,T))$。那么，问题 (1.1)-(1.3)存在唯一的弱解。此外，

$$\|u\|_{C^{\alpha_\star,\alpha_\star/2}(D\times(0,T))} \le C\left((\operatorname{inrad} D)^\alpha \|f\delta^{2-\alpha}\|_{L^\infty(D\times(0,T))}\right),$$

其中 $C_\star$ 和 $\alpha_\star$ 是仅依赖于 n、 L、 γ 和 α的常数。

证明。 该解在 $V_{\mathrm{loc}}(D \times (0,T)) \cap C(D \times (0,T))$中的存在性可直接由定理 5.4 得出。与 (5.3) 一样， $u(X)$ 受 $\delta(X)^{\alpha_H}$ 控制。因此，它也属于 $C(D)$。特别地，对于 $\alpha_1 = \min\{\alpha_H, \alpha\}$，有

$$|u(X)| \le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha_1}\delta(X)^{\alpha_1}, \tag{5.5}$$

其中 $M =$(内半径 $D)^\alpha \|f\delta^{2-\alpha}\|_{L^\infty(D\times(0,T))}$。

令 $\alpha_\star = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$，其中 α_0 是引理 3.8 中的一个正指数。任取 X， $Y \in D \times (0, T)$。若 $d_p(X, Y) > \max\{\delta(X)\ \delta(Y)\}/2$，则由 (5.5) 得

$$\begin{aligned} |u(X) - u(Y)| &\le |u(X)| + |u(Y)| \\ &\le (CM)\, R^{-\alpha_0}\, (\delta(X) + \delta(Y))^{\alpha_0} \\ &\le (CM)\, R^{-\alpha_\star} d_p(X,Y)^{\alpha_\star}. \end{aligned}$$

因此，不失一般性，我们可以假设 $d_p(X, Y) \le \delta(X)/2$。令$r := \delta(X)$。由于 $Q(X, 2r) \subset D \times (0, T)$，引理 3.8 给出

$$\begin{aligned} |u(X) - u(Y)| &\le C\left(\frac{d_p(X,Y)}{r}\right)^{\alpha_\star}\left(\operatorname*{osc}_{Q(X,r)} u + r^2\|f\|_{L^\infty(Q(X,r))}\right) \\ &\le C\left(\frac{d_p(X,Y)}{r}\right)^{\alpha_\star}\left(\operatorname*{osc}_{Q(X,r)} u + r^\alpha M\right). \end{aligned}$$

与此同时，由 (5.5) 可得

$$|u(Z)| \le (CM)\, R^{-\alpha_1} r^{\alpha_1} \le (CM)\, R^{-\alpha_\star} r^{\alpha_\star}$$

对所有 $Z \in Q(x, r)$ 均成立。结合这两个不等式，便得到所需的 H¨older 半范数估计。□

推论 5.6。 假设 D 有界，且(2.1)对 $\Gamma = \partial D$成立。令$0 < \alpha \le 1$。还假设，对于某些 $n/2 < q < \infty$和 $0 \le t < 2 - n/q$，有 $f\delta^t \in L^\infty(0,T; L^q(D))$。则问题(1.1)-(1.3)存在唯一的弱解。此外，

$$\|u\|_{C^{\alpha_\star,\alpha_\star/2}(D\times(0,T))} \le C(\operatorname{diam} D)^{2-n/q-t}\|f\delta^t\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))},$$

其中， $C_\star$ 和 $\alpha_\star$ 是仅依赖于 n、 L、 q、 t 和 γ的常数。

证明。首先假设 $f \in L^\infty(0,T; L^q(D))$，其中 $n/2 < q < \infty$成立。于是，利用上述论证和A节中的结果，可将 [LzSU68] 中的结果推广为

$$\|u\|_{C^{\alpha_\star,\alpha_\star/2}(D\times(0,T))} \le C(\operatorname{diam} D)^{2-n/q}\|f\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))},$$

其中 C 和 $\alpha_\star$ 是仅依赖于 n、 L、 q 和 γ的正常数。所需结果由插值定理得出。□

6. Inhomogeneous boundary value

最后，我们将定理 5.5 推广到以下非齐次边值问题

$$\mathcal{H}u = f \quad \text{in } D \times (0,T), \tag{6.1}$$

$$u = g \quad \text{on } \partial D \times (0,T), \tag{6.2}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } D. \tag{6.3}$$

为使问题适定并确保解在抛物边界上连续，我们假设满足零阶相容条件

$$g(\xi,0) = u_0(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \partial D. \tag{6.4}$$

在此假设下，我们引入范数

$$\|g\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\partial D\times(0,T))} := \|g\|_{L^\infty(\partial D\times(0,T))} + (\operatorname{inrad} D)^\alpha [g]_{\alpha,\partial D\times(0,T)}$$

and

$$\|u_0\|_{C^\alpha(D)} := \|u_0\|_{L^\infty(D)} + (\operatorname{inrad} D)^\alpha [u_0]_{\alpha,D}.$$

定理 6.1。 假设 (2.1) 在 $\Gamma = \partial D$ 和内接半径 $D < \infty$ 的条件下成立。设 $0 < \alpha \le 1$, 并假设 $f\delta^{2-\alpha} \in L^\infty(D\times(0,T))$。假设 $g \in C^\alpha(\partial D \times(0,T))$ 和 $u_0 \in C^\alpha(D)$ 满足 (6.4)。那么，问题 (6.1)-(6.2)存在唯一弱解$u \in V_{\mathrm{loc}}(D\times(0,T)) \cap C(D\times(0,T))$。此外，

$$\begin{aligned}&\|u\|_{C^{\alpha_\star,\alpha_\star/2}(D\times(0,T))}\\ &\quad\le C\left((\operatorname{inrad} D)^\alpha \|f\delta^{2-\alpha}\|_{L^\infty(D\times(0,T))} + \|g\|_{C^{\alpha.\alpha/2}(\partial D\times(0,T))} + \|u_0\|_{C^\alpha(D)}\right),\end{aligned}$$

其中， $C_\star$ 和 $\alpha_\star$ 是仅依赖于 n、 L、 γ 和 α的常数。

只需证明以下陈述。我们结合初始时刻附近的杜哈梅尔公式与标准抛物型正则性来证明这一点。

定理 6.2. 假设(2.1) 对 $\Gamma = \partial D$ 和内径 $D < \infty$成立。假设 $g \in C^\alpha(\partial D \times (0,T))$ 和 $u_0 \in C^\alpha(D)$ 满足(6.4)。令 u 为关于 $f = 0$的(6.1)-(6.3) 的一个解。则，

$$\|u\|_{C^{\alpha_{\star\star}}(D\times(0,T))} \le C\left(\|g\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\partial D\times(0,T))} + \|u_0\|_{C^\alpha(D)}\right),$$

其中， C 和 $\alpha_{\star\star}$ 是仅依赖于 n、 L、 γ 和 α的常数。

证明。 **步骤 1**。 令 $M := \|g\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\partial D\times(0,T)))} + \|u_0\|_{C^\alpha(D)}$。利用麦克沙恩延拓，我们在 $\mathbb{R}^n$ 上定义一个 H¨older 连续函数 u ，如下所示

$$\tilde{u_0}(x) := \max\left\{\sup_{a\in\overline{D}}(u(a) - [u_0]_{\alpha,D}|x-a|^\alpha),\ -\|u_0\|_{L^\infty(D)}\right\}. \tag{6.5}$$

˜我们还将抛物算子 $\mathcal{H}$ 扩展到 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ ，并记为 $\mathcal{H}$。令˜$p(x,y,t)$ 为与 $\mathcal{H}$ 相关的热核。根据阿罗森估计（参见[Aro67]），我们有

$$\frac{1}{Ct^{n/2}}\exp\left(-C\frac{|x-y|^2}{t}\right) \le p(x,y,t) \le \frac{C}{t^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{Ct}\right), \tag{6.6}$$

对所有 x， $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$。定义

$$P\tilde{u}_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x,y,t)\tilde{u_0}(y)\,dy.$$

由于 $\int_{\mathbb{R}^n} p(x,\ y,\ t)\ dy = 1$，我们有

$$\|P\tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+)} \le \|\tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.7}$$

此外，由于

$$|P\tilde{u}_0(x,t) - u_0(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} p(x,y,t)|\tilde{u}_0(y) - u_0(x)|\,dy,$$

将后一个不等式代入 (6.6)，得到

$$\begin{aligned}|P\tilde{u}_0(x,t) - u_0(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{Ct}\right) [\tilde{u}_0]_{\alpha,\mathbb{R}^n} (\operatorname{inrad} D)^{-\alpha}|x-y|^\alpha\,dy \\ &\le C[u_0]_{\alpha,D}(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha} t^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

因此，若 $d_{\mathbb{R}^n}(x,\ y) \ge t^{1/2}$ 且 $s \le t$，则

$$|P\tilde{u}_0(x,t) - Pu_0(y,s)| \le C[u_0]_{\alpha,D}(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha} d_p((x,t),(y,s))^{\alpha/2}.$$

结合该不等式、引理 3.8 和 (6.7)，得到

$$\|Pu_0\|_{C^{\alpha'}(D\times\mathbb{R}_+)} \le C\|\tilde{u}_0\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \le C\|u_0\|_{C^\alpha(D)} \le CM,$$

其中 $\alpha' := \min\{\alpha_0, \alpha\}$ 是一个仅依赖于 n、L 和 α 的正常数。

步骤 2。令 v 为狄利克雷问题的解

$$\begin{aligned}\mathcal{H}v &= 0 \quad \text{in } D\times(0,T), \\ v = \tilde{g} := g - Pu_0 &\quad \text{on } \partial D\times(0,T), \\ v(\cdot,0) &= 0 \quad \text{in } D.\end{aligned}$$

由 (6.4)，对所有 $\xi \in \partial D$ 和 $\tilde{g} \in C^{\alpha'}$，$\tilde{g}(\xi,0) = 0$，且 $^{\alpha'/2}(\partial_p(D\times(0,T)))$。根据比较原理，我们有

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(D)} \le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha'} t^{\alpha'/2}. \tag{6.8}$$

令 $X = (x,t)$ $Y = (y,s) \in D\times(0,T)$。只需证明

$$|v(X) - v(Y)| \le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha_{\star\star}} d_p(X,Y)^{\alpha_{\star\star}} \tag{6.9}$$

对所有 $X, Y \in D\times(0,T)$，其中 $\alpha_{\star\star}$ 为正常数。

步骤 3。我们将证明分为两种情况。首先假设

$$\max\{\delta(X), \delta(Y)\} \le 4d_p(X,Y). \tag{6.10}$$

令 $X_*, Y_* \in \partial_p(D\times(0,T))$ 满足 $\delta(X) = d_p(X,X_*)$，且 $\delta(Y) = d_p(Y,Y_*)$。不失一般性，我们可以假设 $X_* = (x_*,t)$ 且 $x_* \in \partial D$，或者 $X_* = (x,0)$。根据三角不等式，我们有

$$|v(X) - v(Y)| \le |v(X) - v(X_*)| + |v(X_*) - v(Y_*)| + |v(Y_*) - v(Y)|.$$

由于

$$d_p(X_*,Y_*) \le d_p(X_*,X) + d_p(X,Y) + d_p(Y,Y_*),$$

第二项可由下式估计

$$|v(X_*) - v(Y_*)| \le [\tilde{g}]_{\alpha',\partial D\times(0,T)}(d_p(X,Y) + 2r)^{\alpha'} \le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha'} d_p(X,Y)^{\alpha'}.$$

接下来，我们估计另外两项。如果 $X_* = (x,0)$，则由 (6.8) 可得

$$|v(X) - v(X*)| = |v(x,t)| \le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha'} t^{\alpha'/2} = CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha'} \delta(X)^{\alpha'}.$$

令 $X_* = (x_*, t)$。我们在 X_* 附近使用引理 3.9。根据一个广为人知的迭代技巧（参见例如 [Lie96，引理 4.6]），对于任意 $r \le R \le t^{1/2}$，有 (6.11)

$$\operatorname*{osc}_{Q(X_0,r)\cap D\times(0,T)} v \le C\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta} \operatorname*{osc}_{Q(X_0,R)\cap D\times(0,T)} v + [\tilde{g}]_{\alpha',\partial D\times(0,T)}(\sqrt{rR})^{\alpha'}\right).$$

这里，$0 < \beta \le \alpha'/2$ 是一个仅依赖于 C_1、C_2 和 α_0的正常数。为估计右端，我们考虑两个子情形。若 $t^{1/2} \ge \operatorname{inrad} D$，则选择$R = \operatorname{inrad} D$。由于

$$\operatorname*{osc}_{Q(X_0,R)\cap D\times(0,T)} v \le 2\|u\|_{L^\infty(D\times(0,T))} \le 2M,$$

我们得到

$$\operatorname*{osc}_{Q(X_0,r)\cap D\times(0,T)} v \le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\beta} r^{\beta}.$$

若 $t^{1/2} \le \operatorname{inrad} D$，则令 $R = t^{1/2}$。将 (6.8) 应用于 (6.11) 的右端，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname*{osc}_{Q(X_0,r)\cap D\times(0,T)} v &\le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha'} t^{\alpha'/2-\beta/2} r^{\beta} + CM(\operatorname{inrad} D)^{-\alpha'}(rt^{1/2})^{\alpha'/2}\\ &\le CM(\operatorname{inrad} D)^{-\beta} r^{\beta}.\end{aligned}$$

这表明 (6.9) 对任意 $0 < \alpha_{\star\star} \le \beta$均成立。

步骤 4. 现在假设 (6.10) 不成立。不失一般性，我们可以假设 $d_p(X,Y) \le \delta(X)/4$。令 $r := \delta(X)$。取一个以 X或 Y为中心的圆柱 $Q(Z, r/4)$，使得 $X, Y \in Q(Z, r/4)$。根据三角不等式，

$$\frac{3}{4}r \le \delta(Z) \le \frac{5}{4}r.$$

由于 $Q(Z,\ 3r/4) \subset D \times (0,\ T)$，由引理 3.8 可得

$$|v(X) - v(Y)| \le C\left(\frac{d_p(X,Y)}{r}\right)^{\alpha_0} \operatorname*{osc}_{Q(Z,r/2)} u.$$

与步骤 3 一样，取 Z_*。然后，按照步骤 3 中相同的论证，可得

$$\begin{aligned}|v(Z) - v(W)| &\le |v(Z) - v(Z_*)| + |v(Z_*) - v(W)|\\ &\le (CM)\,(\operatorname{inrad} D)^{-\beta} r^{\beta}\end{aligned}$$

对所有 $W \in Q(Z,\ r/2)$ 均成立。令 $\alpha_{\star\star} = \min\{\beta, \alpha_0\}$，并结合上述不等式，可得所需估计 (6.9)。□

Appendix A. Proof of Lemma 3.9

引理 *3.9* 的证明。 步骤 1。 本步骤中，假设 u 是$\mathcal{H}u = f$在 $Q(\Xi_0,\ 4R)$ 中的非负上解。记 $\Xi_0 = (\xi_0,\ t_0)$，并定义 $Q(\Xi_0,\ 4R)$ 的以下子集：

$$\begin{aligned}Q_1 &:= B(\xi_0, R) \times (t_0 - 12R^2, t_0 - 8R^2),\\ Q_2 &:= B(\xi_0, 2R) \times (t_0 - 16R^2, t_0 - 8R_2),\\ Q_3 &:= B(\xi_0, 3R) \times (t_0 - 16R^2, t_0 - 4R_2).\end{aligned}$$

根据（1.8），令 $m := \inf_{\partial D\times(0,T)\cap Q_1} u$。我们将截断函数 $u_m(X)$ 定义为

$$u_m^-(X) := \begin{cases}\min\{u(X), m\} & \text{if } X \in D \times (0,T),\\ m & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们的目标是证明

$$m \le \frac{C}{\gamma}\left(\operatorname*{ess\,inf}_{Q(\Xi_0,R)} u_m^- + k(4R)\right). \tag{A.1}$$

这里， C 是一个仅依赖于 n 和 L的常数。

取 $\eta \in C_c^\infty(B(\xi,2R))$，使得 $\eta = 1$ 在 $B(\xi,R)$上成立，且 $|\nabla\eta| \le C/R$。于是，$u_m^-(\cdot,t)\eta \in H_0^1(B(\xi,2R))$，并且对所有 $t \in (t_0 - 12R^2, t_0 - 8R^2)$，$u_m^-\eta \ge 1$ 在$B(\xi,R)$上几乎处处成立。由(2.1)，我们有

$$m^2\gamma R^{n-2} \le C\int_{B(\xi,2R)} |\nabla(u_m^-(\cdot,t)\eta)|^2\,dx$$

对所有 $t \in (t_0 - 12R^2, t_0 - 8R^2)$成立。对指定的时间区间进行积分，得到

$$\begin{aligned} m^2\gamma R^n &\le C\iint_{Q_1} |\nabla(u_m^-(\cdot,t)\eta)|^2\,dxdt \\ &\le \frac{2C}{R^2}\iint_{Q_1} |u_m^-(\cdot,t)|^2\,dxdt + 2C\iint_{Q_1} |\nabla(u_m^-(\cdot,t)|^2\,dxdt. \end{aligned} \tag{A.2}$$

由于 $u_m^- \le m$，由引理 3.6 可得

$$\begin{aligned} \iint_{Q_2} (u_m^-)^2\,dxdt &\le m\iint_{Q_2} u_m^-\,dxdt \\ &\le m\cdot C\left(\operatorname*{ess\,inf}_{Q(\Xi_0,R)} u_m^- + k(4R)\right)R^{n+2}. \end{aligned}$$

因此，(A.2)右端的前一项受(A.1)右端控制。下面考虑后一项。取一个非负函数 $\eta \in C^\infty(Q_2)$，使得 $\eta = 1$ 在 Q_1上成立， $\eta = 0$ 在 Q_2的侧边界和底部附近成立，且 $|\nabla\eta|^2 + |\frac{\partial\eta}{\partial t}| \le CR^2$。用非负函数$\varphi = [(m - u_m^-)]_h\eta^2$测试(3.2)，得到

$$\iint_{Q_1} |\nabla u_m^-|^2\,dxdt \le Cm\left(\frac{1}{R}\iint_{Q_2} |\nabla u_m^-|\,dxdt + k(4R)R^n\right).$$

令 $v = u_m^- + k(4R)$，并固定 $-2/n < p < 0$。由 H¨older 不等式可得

$$\iint_{Q_2} |\nabla v|\,dxdt \le \left(\iint_{Q_2} |\nabla v|^2 v^{p-1}\,dxdt\right)^{1/2}\left(\iint_{Q_2} v^{1-p}\,dxdt\right)^{1/2}.$$

取 $\eta \in C^\infty(Q_3)$，使得 $\eta = 1$ 在 Q_2上， $\eta = 0$ 在 Q_3的侧边界和顶部附近，且 $|\nabla\eta|^2 + |\frac{\partial\eta}{\partial t}| \le CR^2$。由于 v 在 $Q(4R)$中满足 $\mathcal{H}v \ge f$，将检验函数 $\varphi = [v^p]_h\eta^2$ 代入 (3.2) 并取极限 $h \to 0$，可得

$$\iint_{Q_2} |\nabla v|^2 v^{p-1}\,dxdt \le \frac{C}{R^2}\iint_{Q_3} v^{p+1}\,dxdt.$$

因此，可得

$$\iint_{Q_2} |\nabla v|\,dxdt \le \left(\iint_{Q_3} v^{p+1}\,dxdt\right)^{1/2}\left(\iint_{Q_2} v^{1-p}\,dxdt\right)^{1/2}.$$

由于 $0 < 1 + p < 1 - p < (n+2)/n$，由引理 3.6 可得 (A.1)。

步骤 2. 令 u 为引理 3.9 中的函数。对于 $0 < r < R$，令

$$M(r) := \operatorname*{ess\,sup}_{Q(\Xi_0,r)\cap D} u, \quad m(r) := \operatorname*{ess\,inf}_{Q(\Xi_0,r)\cap D} u.$$

将 (A.1) 应用于 $M(4R) - u$，可得

$$M(4r) - \sup_{\partial D\times(0,T)\cap Q_1(r)} u \le \frac{C}{\gamma}\left(M(4r) - M(r) + k(4r)\right),$$

其中 $Q_1(r) = B(\xi_0, r) \times (t_0 - 12r^2, t_0 - 8r^2)$。类似地，对于 $u - m(4r)$，可得

$$\inf_{\partial D\times(0,T)\cap Q_1(r)} u - m(4r) \le \frac{C}{\gamma}\left(m(r) - m(4r) + k(4r)\right).$$

将这些结果相加，得到

$$\operatorname*{osc}_{Q(\Xi_0,r)} u \le \left(1 - \frac{\gamma}{C}\right) \operatorname*{osc}_{Q(\Xi_0,4r)} u + \frac{\gamma}{C} \operatorname*{osc}_{\partial D\times(0,T)\cap Q(\Xi_0,4r)} u + 2k(4r).$$

反复使用这个不等式，即可得到所需估计。 □

Acknowledgments

本研究得到日本学术振兴会科学研究费助成事业（doi:10.13039/501100001691）项目编号 23H03798 的资助。

References

[Aik02] Hiroaki Aikawa, *Hölder continuity of the Dirichlet solution for a general domain*, 《伦敦数学学会通报》 **34** 2002 6, 691 702 1924196 （），第—期。MR Anc Alano Ancona, [86] *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* R^n, 《伦敦数学学会杂志》(2 **34** 1986 2, 274 290 856511)（），第—期。MR Aro D. G. Aronson, [67] *Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation*, 《美国数学会通报》 **73** 1967 890 896 217444 （），—。MR Dav E. B. Davies, [87] *The equivalence of certain heat kernel and Green function bounds*, 《泛函分析杂志》71（1987），第1期，88–103。MR 879702[GL88] Nicola Garofalo 和 Ermanno Lanconelli, *Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences* **308** 1988 ，《美国数学会汇刊》（），第2期，811–836。MR 951629[GZ82] Ronald Gariepy 和 William P. Ziemer, *Thermal capacity and boundary regularity*, 《微分方程杂志》 **45** 1982 3, 374 388 672714 （），第—期。MR Har a Takanobu [24] *Strong barriers for weighted quasilinear equations* Hara, ，《花兰数学年刊》49（2024），第2期，529–545。MR 4791992[Har24b] *Uniformly elliptic equations on domains with capacity density conditions: Existence of hölder continuous solutions and homogenization results* 2024 ，。[Har25a] ， *Global hölder solvability of linear and quasilinear poisson equations*, 2025。[Har25b] ， *Global Hölder solvability of second order elliptic equations with locally integrable lower-order coefficients* **153** 2025 11, 4769 4779 ，《美国数学会会刊》（），第—期。MR 4971571[Hir13] Kentaro Hirata, *Two sided global estimates of heat kernels in Lipschitz domains*, 《位势论及其相关领域》，数理科学研究所讲义录别册，第B43卷，京都数理科学研究所（RIMS），2013年，第29–45页。MR 3220451[HKM06] Juha Heinonen、Tero Kilpel ¨ainen 和 Olli Martio, ， *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations* 2006, 《多佛出版社》，纽约州米尼奥拉，未删节重印1993年版。MR 2305115[KLV21] Juha Kinnunen、Juha Lehrb ¨ack 和 Antti Vahakangas, *Maximal function methods for Sobolev spaces* 257, 《数学调查与专著》，第卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2021年。MR 4306765[Lan75] Ermanno Lanconelli, *Sul problema di Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine a coefficienti discontinui* 4 **106** 1975 11 38 399659 , 《纯粹与应用数学年刊》（）（），—。MR

[Lew88] 约翰·L·刘易斯， *Uniformly fat sets*，《美国数学会汇刊》**308** （1988），第1期，177–196。MR 946438[Lie 96] 加里·M·利伯曼， *Second order parabolic differential equations*，世界科学出版社，Inc.，新泽西州里弗埃奇，1996年。MR 1465184[LzSU68] O. A. Ladyˇ zenskaja、瓦西里·A·索洛尼科夫和娜塔莉娅·N·乌拉采娃， *Linear and quasilinear equations of parabolic type* 23, ，数学专著译丛，第Vol.卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1968年，S. Smith俄译。MR 241822[Mos64] J¨urgen Moser， *A Harnack inequality for parabolic differential equations*，《纯粹与应用数学通讯》**17** 1964 101 134 159139 （），—。MR Mos J. 莫泽，[71] *On a pointwise estimate for parabolic differential equations*，《纯粹与应用数学通讯》**24** 1971 727 740 288405 （），—。MR NU A. I. 纳扎罗夫和娜塔莉娅·N·乌拉采娃，[11] *The Harnack inequality and related properties of solutions of elliptic and parabolic equations with divergence-free lower-order coefficients*，《代数与分析》**23** 2011 1, 136 168 2760150 （），第—期。MR Tru 尼尔·S·特鲁丁格，[68] *Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations*，《纯粹与应用数学通讯》**21** 1968 205 226 226168 （），—。MR Wan Andreas Wannebo，《美国数学会会刊》[90] *Hardy inequalities* **109**（1990），第1期，85–95。MR 1010807[Zha02] 张启， *The boundary behavior of heat kernels of Dirichlet Laplacians*，《微分方程杂志》**182** 2002 2, 416 430 1900329 （），第—期。MR Zie William P. Ziemer，[80] *Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations* **35** 1980 305 563383 ，《微分方程杂志》（），第3期，291–, MR [Zie82] *Interior and boundary continuity of weak solutions of degenerate parabolic equations* _____ **271** 1982 2, 733 748 654859 ，《美国数学会汇刊》（），第—期。MR *Email address*: takanobu.hara.math@gmail.com

Tohoku University, Mathematical Institute, 6-3, Aramaki Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai, Miyagi 980-8578, Japan