arXiv:2601.02866v1 [math.CA] 6 Jan 2026

由权函数的指标积分生成的新双正交序列

谢苗·雅库博维奇

2026年1月7日

摘要

我们展示了由修正贝塞尔函数平方和伽马函数的指标积分生成的新双正交序列。研究中采用了涉及微分算子的复合正交性。我们引入了广义威尔逊多项式，并研究了其若干性质。

关键词： 正交多项式、修正贝塞尔函数、*Meijer* G-函数、指标积分、*Kontorovich-Lebedev* 变换、威尔逊多项式、帕塞瓦尔等式**美国数学学会学科分类**：44A15, 33C10, 33C52, 33C60

1 引言与预备结果

本文旨在通过涉及修正贝塞尔函数平方和欧拉伽马函数的指标积分，研究关于 L_2-内积的双正交序列的性质 [3]。我们着重强调复合正交性和超几何正交多项式的作用 [2]。作者近期已对这一问题进行了研究 [9], [10]。事实上，我们考虑 Kontorovich-Lebedev 变换的核 [6] $K_{i\tau}(x)$，它是纯虚指标 $i\tau$， $\tau \in \mathbb{R}$ 和正自变量 $x > 0$下的修正贝塞尔函数，也称麦克唐纳函数。该函数关于 τ 为偶函数且取实值，这促使我们研究其指标傅里叶余弦变换（参见 [4, 第二卷]中的条目 2.16.48.19）。

$$\int_0^\infty \cos(\tau y) K_{i\tau}(x) d\tau = \frac{\pi}{2}\, e^{-x\cosh y}, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

由该公式可立即得到在积分号下对 y 逐项求导；凭借绝对一致收敛，这一点很容易得到证明。因此，我们得到以下关系：

$$\int_0^\infty \cos(\tau y)\tau^{2n}K_{i\tau}(x)d\tau = (-1)^n\frac{\pi}{2}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}\left[e^{-x\cosh y}\right], \quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{1.2}$$

此外，通过 x [5] 对 (1.1) 作梅林变换后，我们交换积分次序；这是基于针对麦克唐纳函数的均匀不等式（见 [6, 公式 (1.100)]）的控制收敛

$$|K_{\nu+i\tau}(x)| \le e^{-\delta|\tau|}K_\nu(\cos\delta), \quad x>0,\ \tau,\nu\in\mathbb{R},\ \delta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.3}$$

然后，利用 [4, 第 II 卷] 中的关系式 2.16.2.2，推导出 [6] 中的公式 (1.104)

$$\int_0^\infty \cos(\tau y)\Gamma\left(\frac{s+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-i\tau}{2}\right)d\tau = \frac{\pi}{2^{s-1}}\,\frac{\Gamma(s)}{\cosh^s y}, \quad \mathrm{Re}s>0,\ y\in\mathbb{R},$$

其中 $\Gamma(z)$ 是欧拉伽马函数 [3]。同样，在相同的依据下，对后一等式逐项关于 y 求导，可得如下表示式

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \cos(\tau y)\tau^{2n}\Gamma\left(\frac{s+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-i\tau}{2}\right)d\tau\\ &=(-1)^n\frac{\pi}{2^{s-1}}\Gamma(s)\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}\left[\frac{1}{\cosh^s y}\right],\ n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{1.4}$$

已知 [3] 修正贝塞尔函数 $K_{i\tau}(x)$ 是下列二阶微分算子的特征函数

$$\mathcal{A}\equiv x^2 - x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}, \tag{1.5}$$

即我们有

$$\mathcal{A}\ K_{i\tau}(x) = \tau^2 K_{i\tau}(x). \tag{1.6}$$

因此，利用 (1.1) 和积分号下求导，由 (1.2) 可得以下算子等式

$$\mathcal{A}^n\left[e^{-x\cosh y}\right] = (-1)^n D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\right], \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{1.7}$$

其中，$\mathcal{A}^n$ 是算子 (1.5) 的第 n 次迭代，且 $D_y\equiv\frac{\partial}{\partial y}$。将其推广到次数至多为 n 的任意多项式 $q_n(x)$，可得

$$q_n\left(\mathcal{A}\right)\left[e^{-x\cosh y}\right]=q_n\left(-D_y^2\right)\left[e^{-x\cosh y}\right]. \tag{1.8}$$

同时，将等式 (1.4) 推广到任意多项式 q_n，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \cos(\tau y)q_n(\tau^2)\Gamma\left(\frac{s+i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-i\tau}{2}\right)d\tau\\&=\frac{\pi\,\Gamma(s)}{2^{s-1}}\,q_n\left(-D_y^2\right)\left[\frac{1}{\cosh^s y}\right],\quad n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

此外，我们利用修正贝塞尔函数的乘积公式（参见 [6, 公式 (1.103)）

$$K_\nu(x)K_\nu(y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(t\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{xy}{t}\right)}K_\nu(t)\frac{dt}{t} \tag{1.10}$$

来写出麦克唐纳函数 $K_{i\tau}^2(x)$ 的平方的积分表示，该平方在实数 τ 和正数 x的情况下非负

$$K_{i\tau}^2(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t-\frac{x^2}{2t}}K_{i\tau}(t)\frac{dt}{t}. \tag{1.11}$$

因此，借助 [1] 中的条目 2.2.1.8 和 (1.1)，我们计算 (1.11) 左侧关于 τ 的傅里叶余弦变换，并通过控制收敛定理交换右侧的积分次序。由此得到

$$\int_0^\infty \cos(\tau y)K_{i\tau}^2(x)d\tau=\frac{\pi}{2}K_0\left(2x\cosh\left(\frac{y}{2}\right)\right). \tag{1.12}$$

再次对 y逐项求导后，我们得到

$$\int_0^\infty \cos(\tau y)\tau^{2n}K_{i\tau}^2(x)d\tau=(-1)^n\frac{\pi}{2}D_y^{2n}\left[K_0\left(2x\cosh\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right], \tag{1.13}$$

以及多项式扩展

$$\int_0^\infty \cos(\tau y)q_n(\tau^2)K_{i\tau}^2(x)d\tau=\frac{\pi}{2}\,q_n\left(-D_y^2\right)\left[K_0\left(2x\cosh\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]. \tag{1.14}$$

与此同时，$K_{i\tau}^2(x)$ 的梅林-巴恩斯表示给出（参见 [1, 条目 3.14.18.4]）

$$K_{i\tau}^2(x)=\frac{1}{8\sqrt{\pi}i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\tau\right)\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((s+1)/2)}x^{-s}ds,\ \gamma>0. \tag{1.15}$$

因此，由于绝对一致收敛以及伽马函数的加法公式，我们得到

$$x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\left[K_{i\tau}^2(x)\right]=\frac{1}{8\sqrt{\pi}i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\tau\right)\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((s+1)/2)}s^2x^{-s}ds$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\tau+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\tau+1\right)\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((s+1)/2)}x^{-s}ds-\tau^2K_{i\tau}^2(x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\tau+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\tau+1\right)\frac{\Gamma(s/2+1)}{\Gamma((s+3)/2)}x^{-s}ds$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\tau+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\tau+1\right)\frac{\Gamma(s/2+1)}{\Gamma((s+3)/2)}\frac{x^{-s}}{s}ds-\tau^2K_{i\tau}^2(x)$$

$$=4x^2K_{i\tau}^2(x)-\tau^2K_{i\tau}^2(x)+4\int_x^\infty yK_{i\tau}^2(y)dy,$$

即， $K_{i\tau}^2(x)$ 是下列积分微分算子的特征函数

$$\left(\mathcal{B}f\right)(x)\equiv\left(4x^2-x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\right)f(x)+4\int_x^\infty yf(y)dy \tag{1.16}$$

并且我们得到

$$\mathcal{B}\left[K_{i\tau}^2(x)\right]=\tau^2K_{i\tau}^2(x). \tag{1.17}$$

因此，由（1.13）可得多项式算子等式

$$h_n\left(\mathcal{B}\right)\left[K_0\left(2x\cosh\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]=h_n\left(-D_y^2\right)\left[K_0\left(2x\cosh\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]. \tag{1.18}$$

现在值得提及与列别捷夫变换 [7] 相关的多项式序列 $\{p_n(x)\}_{n\geq0}$，该变换是根据微分算子（1.5）的第 n 次迭代定义的

$$p_n(x)=(-1)^ne^x\mathcal{A}^n\ e^{-x},\ n\in\mathbb{N}_0. \tag{1.19}$$

其积分表示为

$$p_n(x)=\frac{2(-1)^n}{\pi}e^x\int_0^\infty\tau^{2n}K_{i\tau}(x)\ d\tau,\ x>0, \tag{1.20}$$

并满足如下形式的微分递推关系

$$p_{n+1}(x) = x^2 p_n''(x) + x(1-2x)p_n'(x) - xp_n(x),\ n = 0, 1, 2, \dots\ . \tag{1.21}$$

该多项式系统的生成函数由下列级数给出

$$e^{-2x\sinh^2(y/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{(2n)!}\ y^{2n} \tag{1.22}$$

其收敛半径为正。因此

$$e^{-x\cosh y} = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{(2k)!}\ y^{2k},$$

并在收敛半径内对 y 逐项求导，可得

$$D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\right] = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{k+n}(x)}{(2k)!}\ y^{2k}. \tag{1.23}$$

T后一个等式利用 (1.19) 证明了 (1.7)。回到 (1.20)，我们写出

$$\int_{2x}^{\infty} \frac{e^{-t}\ p_n(t)}{(t^2-4x^2)^{1/2}}\ dt = \frac{2(-1)^n}{\pi} \int_{2x}^{\infty} \frac{1}{(t^2-4x^2)^{1/2}} \int_0^{\infty} \tau^{2n} K_{i\tau}(t) d\tau dt.$$

后一个等式右端的积分次序可以交换，这是由控制收敛定理保证的。接着，我们利用 [4, 第二卷]中的条目 2.16.3.6，得到麦克唐纳函数平方的矩公式

$$\begin{aligned}\mu_n(x) &= \int_0^{\infty} \tau^{2n} K_{i\tau}^2(x) d\tau = \frac{(-1)^n\pi}{2^{2n+1}} \int_1^{\infty} \frac{e^{-2xt}\ p_n(2xt)}{(t^2-1)^{1/2}}\ dt \\ &= \frac{(-1)^n\pi}{2^{2n+1}} \int_0^{\infty} e^{-2x\cosh u}\ p_n(2x\cosh u)\ du, \quad x > 0,\ n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

由于 $p_0(x) = 1$，我们对（1.1）中的反傅里叶余弦变换作简单代换，得到

$$\mu_0(x) = \frac{\pi}{2} K_0(2x).$$

因此，由（1.22）可得矩的生成函数 μ_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n(x)}{(2n)!}\ (2y)^{2n} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{-2xt}\ p_n(2xt)}{(t^2-1)^{1/2}}\ dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-2xt\cosh y}}{(t^2-1)^{1/2}}\,dt = \frac{\pi}{2}K_0(2x\cosh y),$$

由于绝对一致收敛，在区间$|y| < \pi/4$ 内可以交换求和与积分的次序（参见 [7]）。此外，这也验证了（1.13）。另一方面，我们利用（1.11）推导出

$$\begin{aligned}\mu_n(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \tau^{2n}\int_0^\infty e^{-t-\frac{x^2}{2t}}K_{i\tau}(t)\frac{dt}{t}d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t-\frac{x^2}{2t}}\int_0^\infty \tau^{2n}K_{i\tau}(t)d\tau\frac{dt}{t} \\ &= \frac{\pi(-1)^n}{4}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n(t)\frac{dt}{t}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

其中，积分次序的交换依据富比尼定理。因此，利用多项式递推关系 p_n [7]

$$p_{n+1}(x) = -x\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}p_k(x), \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{1.26}$$

我们得到

$$\mu_n(x) = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2k}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_k(t)dt, \quad n\in\mathbb{N}.$$

因此，导数 $\mu_n'(x)$ 相应地具有如下形式：

$$\begin{aligned}\mu_n'(x) &= \frac{\pi(-1)^n x}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2k}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}\frac{p_k(t)}{t}dt \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\binom{2n-1}{2k}\mu_k(x). \end{aligned} \tag{1.27}$$

同时，由 (1.25) 可得

$$\mu_n'(x) = \frac{\pi(-1)^{n+1}x}{4}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n(t)\frac{dt}{t^2}.$$

分部积分后，我们得到

$$\frac{\pi(-1)^{n+1}x}{4}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n(t)\frac{dt}{t^2} = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{x}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n(t)dt$$

$$+\frac{\pi(-1)^n}{2x}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n'(t)dt.$$

利用导数关系 p_n' [7]

$$p_n'(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k}p_k(x),\quad n\in\mathbb{N},$$

它给出

$$\mu_n'(x)=\frac{\pi(-1)^{n+1}}{2x}\bigg[\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n(t)dt+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_k(t)dt\bigg].$$

与（1.27）比较，我们可推得等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{2n-1}{2k}\mu_k(x)=\frac{\pi}{2x^2}\bigg[\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n(t)dt$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_k(t)dt\bigg].$$

但是由（1.25）我们观察到

$$\frac{\pi(-1)^n}{4}\int_0^\infty e^{-2t-\frac{x^2}{2t}}p_n(t)dt=\int_x^\infty y\mu_n(y)dy,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

因此，

$$-x^2\mu_0(x)+x^2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{2n-1}{2k}\mu_k(x)=2\bigg[(-1)^n\int_x^\infty y\mu_n(y)dy$$
$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}\int_x^\infty y\mu_k(y)dy\bigg],\ n\in\mathbb{N}.\tag{1.28}$$

对（1.28）求导并利用（1.26）后，化简可得

$$x\mu_0'(x)+x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2n-1}{2(k+1)}\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{2k+1}{2m}\mu_m(x)$$
$$=4(-1)^n\mu_n(x)+2\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}\binom{2n-1}{2k+1}\mu_{k+1}(x),\quad n\in\mathbb{N}.$$

改变求和顺序，可得矩的如下递推关系 μ_n

$$x\mu_0'(x)+x^2(2n-1)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\binom{2(n-1)}{2k}\mu_k(x)\sum_{m=0}^{n-k-2}\frac{1}{2(k+m+1)}\binom{2(n-k-1)}{2m+1}$$

$$=4(-1)^n\mu_n(x)+2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{2n-1}{2k-1}\mu_k(x),\quad x>0,\ n\in\mathbb{N}. \tag{1.29}$$

令 $n=1$，容易看出 $x\mu_0'(x)=-4\mu_1(x)$。此外，利用 [4, 第 I 卷]中的关系式 4.2.3.3, 可将 (1.29) 左端的内层求和表示为高斯超几何函数${}_2F_1$。具体而言，我们推导得

$$\sum_{m=0}^{n-k-2}\frac{1}{2(k+m+1)}\binom{2(n-k-1)}{2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2k}\left[(1+x)^{2(n-k-1)}-(1-x)^{2(n-k-1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2k}(1+x)^{2(n-k-1)}dx-\frac{(2k)!(2(n-k-1))!}{2(2n-1)!}$$

$$=\frac{1}{2(2k+1)}\left[{}_2F_1\left(-2(n-k-1),\ 2k+1;\ 2(k+1);-1\right)-\frac{(2k+1)!(2(n-k-1))!}{(2n-1)!}\right],$$

w此处应用了 [4, 第一卷] 中的条目 2.2.6.1。因此，我们将 (1.29) 改写为

$$(-1)^n\mu_n(x)+\left(\frac{3}{2}-n\right)\mu_1(x)+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k\binom{2n-1}{2k-1}\mu_k(x)$$

$$=\frac{x^2}{8}\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\left[\binom{2n-1}{2k+1}{}_2F_1\left(2(k+1-n),\ 2k+1;\ 2(k+1);-1\right)-1\right]\mu_k(x), \tag{1.30}$$

其中 $x>0,\quad n\in\mathbb{N}$.

值得一提的是 Lebedev-Skalskaya 型核（见 [6, 第 6] 章）及其傅里叶余弦和正弦变换公式 [6,（6.26）、（6.27）], ，即:

$$\int_0^\infty\cos(\tau y)\mathrm{Re}\left[K_{\alpha+i\tau}(x)\right]d\tau=\frac{\pi}{2}\,e^{-x\cosh y}\cosh\left(\alpha y\right),\quad x>0,\ y,\alpha\in\mathbb{R}, \tag{1.31}$$

$$\int_0^\infty\sin(\tau y)\mathrm{Im}\left[K_{\alpha+i\tau}(x)\right]d\tau=\frac{\pi}{2}\,e^{-x\cosh y}\sinh(\alpha y),\quad x>0,\ y,\alpha\in\mathbb{R}. \tag{1.32}$$

因此，与上文一样

$$\int_0^\infty \cos(\tau y)\tau^{2n}\ \mathrm{Re}\left[K_{\alpha+i\tau}(x)\right]d\tau = \frac{\pi}{2}\ (-1)^n D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\cosh\left(\alpha y\right)\right], \tag{1.33}$$

$$\int_0^\infty \sin(\tau y)\tau^{2n}\ \mathrm{Im}\left[K_{\alpha+i\tau}(x)\right]d\tau = \frac{\pi}{2}\ (-1)^n D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\sinh(\alpha y)\right]. \tag{1.34}$$

同时，由 (1.2)、(1.34) 以及 [4, 第一卷] 中的条目 4.2.3.2、4.2.3.3 可得以下表示式

$$\begin{aligned} D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\cosh\left(\alpha y\right)\right] &= \cosh\left(\alpha y\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}D_y^{2k}\left[e^{-x\cosh y}\right]\alpha^{2(n-k)} \\ &+ \sinh\left(\alpha y\right)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}D_y^{2k+1}\left[e^{-x\cosh y}\right]\alpha^{2(n-k)-1} \\ &= \frac{2}{\pi}\Bigg[\cosh\left(\alpha y\right)\int_0^\infty \cos(\tau y)\mathrm{Re}\left[(\alpha+i\tau)^{2n}\right]K_{i\tau}(x)d\tau \\ &- x\sinh\left(\alpha y\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\tau y)}{\tau}\mathrm{Im}\left[(\alpha+i\tau)^{2n}\right]\mathrm{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]d\tau\Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\sinh(\alpha y)\right] &= \frac{2}{\pi}\Bigg[\sinh\left(\alpha y\right)\int_0^\infty \cos(\tau y)\mathrm{Re}\left[(\alpha+i\tau)^{2n}\right]K_{i\tau}(x)d\tau \\ &- x\cosh\left(\alpha y\right)\int_0^\infty \frac{\sin(\tau y)}{\tau}\mathrm{Im}\left[(\alpha+i\tau)^{2n}\right]\mathrm{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]d\tau\Bigg]. \end{aligned}$$

但是，麦克唐纳函数的性质 [4, 第二卷] 表明等式成立

$$x\mathrm{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right] = \tau K_{i\tau}(x). \tag{1.35}$$

因此，我们得到了连续阶导数的最终表示式

$$D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\cosh\left(\alpha y\right)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\cosh\left((\alpha+i\tau)y\right)(\alpha+i\tau)^{2n}\right]K_{i\tau}(x)d\tau, \tag{1.36}$$

$$D_y^{2n}\left[e^{-x\cosh y}\sinh(\alpha y)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\sinh\left((\alpha+i\tau)y\right)(\alpha+i\tau)^{2n}\right]K_{i\tau}(x)d\tau. \tag{1.37}$$

此外，Kontorovich-Lebedev 变换的卷积算子定义如下 [5]

$$(f*g)(x)\equiv f(x)*g(x)=\frac{1}{2x}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(x\frac{u^2+y^2}{uy}+\frac{yu}{x}\right)}f(u)g(y)dudy,\quad x>0. \tag{1.38}$$

它在巴拿赫环 $L^\nu(\mathbb{R}_+)\equiv L_1(\mathbb{R}_+;\,K_\nu(x)dx)$ $\nu\in\mathbb{R}$ 中定义良好，即所有关于测度 $K_\nu(x)dx$ 可求和函数 $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ 所构成的空间，其中

$$||f||_{L^\nu(\mathbb{R}_+)}=\int_0^\infty|f(x)|K_\nu(x)dx$$

是有限的。此外，借助 Kontorovich-Lebedev 变换的乘积公式 (1.10)，因子分解性质成立

$$(Ff)(\tau)=\int_0^\infty K_{i\tau}(x)f(x)dx \tag{1.39}$$

在空间 $L^\nu(\mathbb{R}_+)$ 中。具体而言，我们有

$$(F(f*g))(\tau)=(Ff)(\tau)(Fg)(\tau),\ \tau\in\mathbb{R}$$

当 $f,\ g\in L^\nu(\mathbb{R}_+)$ 时。特别地，对于幂 $f(x)=x^{2a-1},\quad g(x)=x^{2b-1},\quad a,\ b>|\nu|/2$，利用 [4, 第 I 卷] 中的条目 2.3.16.1 以及 [1]中的条目 3.14.2.2，我们有

$$\begin{aligned}x^{2a-1}*x^{2b-1}&=\frac{1}{2x}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u(x^2+y^2)}{2xy}-\frac{xy}{2u}}\,u^{2a-1}y^{2b-1}dudy\\&=x^{2a-1}\int_0^\infty\frac{K_{2a}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^a}\,y^{2(a+b)-1}dy\\&=x^{2(a+b)-1}\,\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{K_{2a}\left(x\sqrt{1+y}\right)}{(1+y)^a}\,y^{a+b-1}dy\\&=2^{a+b-1}\,x^{a+b-1}\,\Gamma(a+b)K_{b-a}(x).\end{aligned} \tag{1.40}$$

另一方面，由于 Kontorovich-Lebedev 变换的帕塞瓦尔等式[6, 公式(4.34)] 以及 [1] 中的条目 3.14.1.3，可由前述等式推出

$$x^{a+b-1}\,\Gamma(a+b)K_{b-a}(x)=\frac{2^{a+b-2}}{\pi^2}\int_0^\infty\tau\sinh(\pi\tau)\frac{K_{i\tau}(x)}{x}\left|\Gamma\left(a+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2d\tau.$$

因此，两边乘以 $x^{2c},\quad c>0$ 并对 $\mathbb{R}_+$ 积分，可得

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(a+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

$$=\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(b+c),$$

这是 Wilson 积分 [2]的极限情形。现在，考虑卷积$x^{2a-1}*x^{2b-1}*x^{2c-1}$，$a$，$b$，$c>|\nu|/2$ 并利用其结合律，可得

$$x^{2a-1}*x^{2b-1}*x^{2c-1}=\frac{2^{a+b-2}\Gamma(a+b)}{x}$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u(x^2+y^2)}{2xy}-\frac{xy}{2u}}\ u^{2c-1}y^{a+b-1}K_{b-a}(y)dudy$$

$$=2^{a+b-1}\Gamma(a+b)x^{2c-1}\int_0^\infty\frac{K_{2c}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^c}y^{a+b+2c-1}K_{b-a}(y)dy.$$

同时，帕塞瓦尔等式表明

$$x^{2a-1}*x^{2b-1}*x^{2c-1}$$

$$=\frac{2^{2(a+b+c)-5}}{\pi^2}\int_0^\infty\tau\sinh(\pi\tau)\frac{K_{i\tau}(x)}{x}\left|\Gamma\left(a+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

并取某个 $d>0$，相应地可得，

$$\int_0^\infty\left(x^{2a-1}*x^{2b-1}*x^{2c-1}\right)x^{2d}dx$$

$$=\frac{2^{2(a+b+c+d)-7}}{\pi^2}\int_0^\infty\tau\sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(a+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(d+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau.$$

但由上述内容以及 [1] 中的关系式 3.14.18.4 可得

$$\int_0^\infty\left(x^{2a-1}*x^{2b-1}*x^{2c-1}\right)x^{2d}dx=2^{a+b-1}\Gamma(a+b)\int_0^\infty x^{2(c+d)-1}$$

$$\times\int_0^\infty\frac{K_{2c}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^c}y^{a+b+2c-1}K_{b-a}(y)dydx$$

$$= 2^{a+b+c+d-2}\Gamma(a+b)\Gamma(c+d)\int_0^\infty y^{a+b+c+d-1}K_{d-c}(y)K_{b-a}(y)dy$$

$$= \frac{2^{2(a+b+c+d)-5}\Gamma(a+b)\Gamma(b+c)\Gamma(c+d)\Gamma(d+b)\Gamma(c+a)\Gamma(a+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

因此，我们得到恒等式

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\left|\Gamma\left(a+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(d+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}$$

这表示完整的 Wilson 积分 [2]。因此，可以将 Wilson 积分推广到幂的一般卷积乘积。具体而言，有如下公式

$$\int_0^\infty \left(*\prod_{k=1}^n x^{2a_k-1}\right)x^{2a_{n+1}}dx$$

$$= \frac{4^{\sum_{k=1}^{n+1}a_k-n}}{2\pi^2}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\left|\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau, \tag{1.41}$$

其中 $n=2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ a_k>|\nu|/2,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n+1.$（1.41）右端可以用 Meijer G函数 [4,第三卷] 在单位点处表示。事实上，有

$$\frac{4^{\sum_{k=1}^{n+1}a_k-n}}{2\pi^2}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\left|\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

$$= \frac{4^{\sum_{k=1}^{n+1}a_k+1-n}}{2i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k+s\right)\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k-s\right)}{\Gamma(s)\Gamma(-s)\Gamma(1/2+s)\Gamma(1/2-s)}ds$$

$$= 4^{\sum_{k=1}^{n+1}a_k+1-n}\pi\, G^{n+1,n+1}_{n+3,n+3}\left(1\middle|\begin{matrix}1-a_1,1-a_2,\ldots,1-a_{n+1},0,\ \frac{1}{2}\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n+1},\ 1,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

因此，

$$\int_0^\infty \left(*\prod_{k=1}^n x^{2a_k-1}\right)x^{2a_{n+1}}dx = 4^{\sum_{k=1}^{n+1}a_k+1-n}\pi$$

$$\times G^{n+1,n+1}_{n+3,n+3}\left(1\middle|\begin{matrix}1-a_1,1-a_2,\ldots,1-a_{n+1},0,\ \frac{1}{2}\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n+1},\ 1,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right). \tag{1.42}$$

因此，相应地，对于 $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau)\cos(y\tau)\left|\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

$$= 4\pi\, G_{n+3,n+3}^{n+1,n+1}\left(e^{-y}\middle|\begin{matrix}1-a_1, 1-a_2,\ldots,1-a_{n+1}, 0,\ \frac{1}{2}\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n+1},\ 1,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right). \tag{1.43}$$

因此，立即可得等式

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \tau^{2m+1} \sinh(\pi\tau)\left|\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

$$= 4\pi(-1)^m \frac{d^{2m}}{dy^{2m}}\left[G_{n+3,n+3}^{n+1,n+1}\left(e^{-y}\middle|\begin{matrix}1-a_1, 1-a_2,\ldots,1-a_{n+1}, 0,\ \frac{1}{2}\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n+1},\ 1,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]\Bigg|_{y=0}. \tag{1.44}$$

后一个 $2m$ 阶导数，我们按照 [8[中的方法，利用 Hoppe 公式进行计算。事实上，利用 [4, 第 III 卷]中的关系式 8.2.2.32，我们得到

$$\frac{d^{2m}}{dy^{2m}}\left[G_{n+3,n+3}^{n+1,n+1}\left(e^{-y}\middle|\begin{matrix}1-a_1, 1-a_2,\ldots,1-a_{n+1}, 0,\ \frac{1}{2}\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n+1},\ 1,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]\Bigg|_{y=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k}{k!}\, G_{n+4,n+4}^{n+1,n+2}\left(1\middle|\begin{matrix}0, 1-a_1, 1-a_2,\ldots,1-a_{n+1}, 0,\ \frac{1}{2}\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n+1},\ 1,\ \frac{1}{2}, k\end{matrix}\right)$$

$$\times \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^{2m}. \tag{1.45}$$

另一方面，回顾 (1.5)、(1.6)，并对任意 $j \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ 取……，则 (1.44) 的左侧可写成如下形式

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \tau^{2m+1} \sinh(\pi\tau)\left|\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

$$= \frac{2^{1-2a_j}}{\pi^2}\int_0^\infty x^{2a_j-1}\int_0^\infty \tau^{2m+1}\sinh(\pi\tau)K_{i\tau}(x)\left|\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau dx$$

$$= \frac{2^{1-2a_j}}{\pi^2}\int_0^\infty x^{2a_j-1}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\mathcal{A}^m K_{i\tau}(x)\left|\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau dx.$$

积分 在积分中对 x 分部积分 n 次并消去积分项，可得 s

$$\frac{2^{1-2a_j}}{\pi^2}\int_0^\infty x^{2a_j-1}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\mathcal{A}^m K_{i\tau}(x)\left|\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau dx$$

$$=\frac{2^{1-2a_j}}{\pi^2}\int_0^\infty \mathcal{A}^m x^{2a_j}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\frac{K_{i\tau}(x)}{x}\left|\prod_{k=1,k\neq j}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau dx.$$

最后，关于 Kontorovich-Lebedev 卷积的帕塞瓦尔恒等式 [6, 公式（4.34）]使我们得到等式

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \tau^{2m+1}\sinh(\pi\tau)\left|\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(a_k+\frac{i\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$$

$$=4^{n-\sum_{k=0}^{n+1}a_k}\int_0^\infty \left(x^{2a_1-1}*x^{2a_2-1}\dots x^{2a_{j-1}-1}*x^{2a_{j+1}-1}\cdots *x^{2a_{n+1}-1}\right)\mathcal{A}^m x^{2a_j}dx. \quad (1.46)$$

2 权函数 $K_{i\tau}^2(x)$,$\left[\mathrm{Re}[K_{1+i\tau}(x)]\right]^2$, $\left[\mathrm{Im}\ [K_{1+i\tau}(x)]\right]^2$的正交多项式

本节旨在研究具有正参数 $x>0$、满足以下正交关系的正交多项式序列 $\{P_n(\tau^2,x)\}_{n\geq 0}$, $\{Q_n(\tau^2,x)\}_{n\geq 0}$, $\{R_n(\tau^2,x)\}_{n\geq 0}$的性质及其相互关系

$$\int_0^\infty P_n(\tau^2,x)P_m(\tau^2,x)K_{i\tau}^2(x)d\tau=\delta_{n,m}, \quad (2.1)$$

$$\int_0^\infty Q_n(\tau^2,x)Q_m(\tau^2,x)\left[\mathrm{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\right]^2 d\tau=\delta_{n,m}, \quad (2.2)$$

$$\int_0^\infty R_n(\tau^2,x)R_m(\tau^2,x)\left[\mathrm{Re}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\right]^2 d\tau=\delta_{n,m}, \quad (2.3)$$

其中 $\delta_{n,m}$ 为克罗内克符号。从（2.1）出发可知，除归一化因子外，它等价于以下 n 条件

$$\int_0^\infty P_n(\tau^2,x)\tau^{2m}K_{i\tau}^2(x)d\tau=0,\quad m=0,1,\dots,n-1. \quad (2.4)$$

用系数表示序列 $\{P_n\}_{n\geq 0}$

$$P_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}(x)\tau^k, \tag{2.5}$$

we d记其首项系数为 $a_{n,n}(x)\equiv a_n(x)\neq 0$，其值为（见（2.4 ））

$$\int_0^\infty P_n(\tau^2,x)\tau^{2n}K_{i\tau}^2(x)d\tau=\frac{1}{a_n(x)} \tag{2.6}$$

并保证多项式序列的正则性。此外，它满足三项递推关系

$$\tau P_n(\tau,x)=A_{n+1}(x)P_{n+1}(\tau,x)+B_n(x)P_n(\tau,x)+A_nP_{n-1}(\tau,x),\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{2.7}$$

其中 $P_{-1}(\tau,\ x)\equiv 0$ 和

$$A_{n+1}(x)=\frac{a_n(x)}{a_{n+1}(x)},\quad B_n(x)=\frac{b_n(x)}{a_n(x)}-\frac{b_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)},\quad b_n(x)\equiv a_{n,n-1}(x). \tag{2.8}$$

回顾矩 (1.24) 的等式（参见 (1.13)、(1.14)）

$$\mu_k(x)=\int_0^\infty \tau^{2k}K_{i\tau}^2(x)d\tau=\frac{\pi}{2}\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\left[K_0\left(2x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]\Big|_{y=0},$$

它立即推出了关于正交性 (2.1 的复合算子等式)

$$P_n\left(D_y^2,x\right)P_m\left(D_y^2,x\right)\left[K_0\left(2x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]\Big|_{y=0}=\frac{2}{\pi}\delta_{n,m}.$$

此外，正交条件 (2.2) 变为

$$P_n\left(D_y^2,x\right)D_y^{2m}\left[K_0\left(2x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]\Big|_{y=0}=0,\quad m=0,1,\ldots,n-1. \tag{2.9}$$

因此，三项递推关系 (2.7) 也可以写成复合形式，即

$$D_y^2P_n\left(D_y^2,x\right)\left[K_0\left(2x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]\Big|_{y=0}=A_{n+1}(x)P_{n+1}\left(D_y^2,x\right)\left[K_0\left(2x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]\Big|_{y=0}$$

$$+B_n(x)P_n\left(D_y^2,x\right)\left[K_0\left(2x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]\Big|_{y=0}+A_n(x)P_{n-1}\left(D_y^2,x\right)\left[K_0\left(2x\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right]\Big|_{y=0}. \tag{2.10}$$

根据矩 $\mu_n(x)$ 引入汉克尔行列式

$$D_n(x)=\begin{vmatrix}\mu_0(x) & \mu_1(x) & \dots & \dots & \mu_n(x)\\ \mu_1(x) & \mu_2(x) & \dots & \dots & \mu_{n+1}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \mu_n(x) & \mu_{n+1}(x) & \dots & \dots & \mu_{2n}(x)\end{vmatrix},\ n\in\mathbb{N}_0,$$

多项式的正交归一序列 $\{P_n(\tau,\ x)\}_{n\geq 0}$ 相应地可写为,

$$P_n(\tau,x)=\frac{a_n(x)}{D_{n-1}(x)}\begin{vmatrix}\mu_0(x) & \mu_1(x) & \dots & \dots & \mu_n(x)\\ \mu_1(x) & \mu_2(x) & \dots & \dots & \mu_{n+1}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \mu_{n-1}(x) & \mu_n(x) & \dots & \dots & \mu_{2n-1}(x)\\ 1 & \tau & \dots & \dots & \tau^n\end{vmatrix},\tag{2.11}$$

其中我们令 $D_{-1}(x)\ =1$。回顾 (1.19) 和 (1.25)，我们将 (2.11) 写成如下的n重积分，其中涉及多项式 p_n

$$P_n(\tau,x)=\frac{a_n(x)}{D_{n-1}(x)}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\int_{\mathbb{R}_+^n}\exp\left(-2\sum_{j=1}^n t_j-\frac{x^2}{2}\sum_{j=1}^n\frac{1}{t_j}\right)$$

$$\times\begin{vmatrix}1 & -p_1(t_1) & \dots & \dots & (-1)^n p_n(t_1)\\ -p_1(t_2) & p_2(t_2) & \dots & \dots & (-1)^{n+1}p_{n+1}(t_2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{n-1}p_{n-1}(t_n) & (-1)^n p_n(t_n) & \dots & \dots & -p_{2n-1}(t_n)\\ 1 & \tau & \dots & \dots & \tau^n\end{vmatrix}\frac{dt_1dt_2\dots dt_n}{t_1t_2\dots t_n}.\tag{2.12}$$

特别地（见 (1.24)），我们有

$$P_0(\tau,x)=\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}K_0\left(2x\right)\right]^{-1/2}$$

并且由于 $p_1(x)\ =-x,\quad p_2(x)\ =3x^2-x$，我们得到

$$\mu_1(x)=\frac{\pi x}{4}K_1(2x),\ \mu_2(x)=\frac{\pi x}{16}\left[3x\left(K_2(2x)-K_0(2x)\right)-K_1(2x)\right].$$

因此，由式 (2.11)

$$P_1(\tau,x)=a_1(x)\left(\tau-\frac{\mu_1(x)}{\mu_0(x)}\right),$$

其中，利用式 (2.4)， $a_1(x)$ 的值可写为

$$a_1(x) = \sqrt{\frac{D_0(x)}{D_1(x)}} = \left[\mu_2(x) - \frac{\mu_1^2(x)}{\mu_0(x)}\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi x}}\left[3x\left(K_2(2x) - K_0(2x)\right) - K_1(2x) - \frac{2xK_1^2(2x)}{K_0(2x)}\right]^{-1/2}.$$

但是（参见 [4,第 II 卷]）

$$K_2(2x) - K_0(2x) = \frac{1}{x}\, K_1(2x).$$

因此，最终我们得到

$$a_1(x) = 2\sqrt{\frac{2K_0(2x)}{\pi x K_1(2x)}}\left[K_0(2x) - xK_1(2x)\right]^{-1/2}.$$

注意到，麦克唐纳函数平方的矩的指标积分 (1.24) 可视为 Lebedev 型变换 [5], ，我们利用其逆变换来建立单项式的积分表示 τ^{2n-1}， $n \in \mathbb{N}$。

引理 1。 设 $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}$. 则下列积分表示成立

$$\tau^{2n-1} = -\frac{2^{2n+1}}{\pi^2}\sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\int_0^\infty K_{i\tau/2}(y)\left[I_{i\tau/2}(y) + I_{-i\tau/2}(y)\right]\mu_n'(y)\,dy, \tag{2.13}$$

其中 $I_\nu(z)$ 是第一类修正贝塞尔函数 *[4, 第 II 卷]*。

证明。 事实上，取 Kontorovich-Lebedev 积分 [7]

$$\frac{\tau^{2n-1}}{\sinh(\pi\tau)} = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}K_{i\tau}(t)p_n(t)\frac{dt}{t}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.14}$$

我们采用 Erd´elyi-Kober 积分 [5] （参见 [4, 第二卷]中的条目 2.16.3.1）

$$\int_0^x \frac{K_{i\tau}(t)}{(x^2-t^2)^{1/2}}dt = \frac{\pi K_{i\tau/2}(x/2)}{4\cosh(\pi\tau/2)}\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{x}{2}\right) + I_{-i\tau/2}\left(\frac{x}{2}\right)\right], \quad x > 0 \tag{2.15}$$

通过.....得到 其倒数变换给出了 Macdonald 函数的如下表示 n

$$K_{i\tau}(x) = \frac{1}{2\cosh(\pi\tau/2)}\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t\;K_{i\tau/2}(t/2)}{(x^2-t^2)^{1/2}}\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{t}{2}\right) + I_{-i\tau/2}\left(\frac{t}{2}\right)\right]dt. \tag{2.16}$$

因此，将后一个表达式代入（2.14），并考虑到（1.24），我们进行分部积分，并利用控制收敛交换积分次序；对于右端（2.16）中的积分，这一点可借助梅林-巴恩斯表示加以证明（见 [1]中的条目 3.14.15.4）。于是得到等式

$$\tau^{2n-1}=\frac{(-1)^n}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\int_0^\infty e^{-t}p_n(t)$$

$$\times\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{y\ K_{i\tau/2}\left(y/2\right)}{(t^2-y^2)^{1/2}}\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)+I_{-i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]\frac{dydt}{t}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\lim_{t\to0}\frac{p_n(t)}{te^t}\int_0^t\frac{y\ K_{i\tau/2}\left(y/2\right)}{(t^2-y^2)^{1/2}}\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)+I_{-i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]dy$$

$$+\frac{(-1)^n}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\int_0^\infty K_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)+I_{-i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]$$

$$\times\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{d}{dt}\left[\frac{p_n(t)}{te^t}\right](t^2-y^2)^{1/2}dtdy$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\left[\lim_{t\to0}\frac{p_n(t)}{te^t}\int_0^t\frac{y\ K_{i\tau/2}\left(y/2\right)}{(t^2-y^2)^{1/2}}\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)+I_{-i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]dy\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty K_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)+I_{-i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{e^{-t}p_n(t)}{(t^2-y^2)^{1/2}}dtdy\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\left[\lim_{t\to0}\frac{p_n(t)}{te^t}\int_0^t\frac{y\ K_{i\tau/2}\left(y/2\right)}{(t^2-y^2)^{1/2}}\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)+I_{-i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]dy\right.$$

$$\left.+\frac{2^{2n+1}(-1)^n}{\pi}\int_0^\infty K_{i\tau/2}\left(y\right)\left[I_{i\tau/2}\left(y\right)+I_{-i\tau/2}\left(y\right)\right]\mu_n'\left(y\right)dy\right].$$

与此同时，回顾（2.16），我们注意到

$$\lim_{t\to0}\frac{p_n(t)}{te^t}\int_0^t\frac{y\ K_{i\tau/2}\left(y/2\right)}{(t^2-y^2)^{1/2}}\left[I_{i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)+I_{-i\tau/2}\left(\frac{y}{2}\right)\right]dy$$

$$=2\cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right)\lim_{t\to0}\frac{p_n(t)}{te^t}\int_0^t K_{i\tau}(y)dy=0,\ n\in\mathbb{N}.$$

由此我们证明了等式 (2.13)，并完成了引理 1 的证明。

□

该引理可用于构造一个以任意多项式为特征函数的积分算子。具体而言，我们有以下结果。

定理 1。 令 $n \in \mathbb{N}$、 $\tau \in \mathbb{R}$. 任意多项式 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_{n,\ k} x^k$ 满足如下形式的第二类积分方程

$$f_n(4\tau^2) - f_{n,0} = \frac{i\tau}{2}\ \sinh(\pi\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(4(y-i)^2) - f_{n,0}}{(y-i)[\cosh(\pi y) + \cosh(\pi\tau)]} dy. \tag{2.17}$$

证明。 事实上，考虑到 (1.26)，我们将 (2.13) 写成如下形式

$$\tau^{2n-1} = \frac{2^{2n+1}(-1)^{n+1}}{\pi^2} \sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{2k}$$

$$\times \int_0^{\infty} y K_{i\tau/2}(y) \left[I_{i\tau/2}(y) + I_{-i\tau/2}(y)\right] \mu_k(y)\, dy.$$

应用 (1.24) 和 [4, Vol. I], 中的关系式 4.2.3.2，可得

$$\tau^{2n-1} = \frac{i}{\pi^2} \sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) \int_0^{\infty} y K_{i\tau/2}(y) \left[I_{i\tau/2}(y) + I_{-i\tau/2}(y)\right]$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (t-2i)^{2n-1} K_{it/2}^2(y) dt dy. \tag{2.18}$$

根据不等式 (1.3) 和控制收敛，积分次序的交换是有保证的。因此，我们得到单项式积分方程

$$\tau^{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} (t-2i)^{2n-1} \mathcal{K}(\tau, t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.19}$$

其中，核 $\mathcal{K}$ 由如下积分定义

$$\mathcal{K}(\tau, y) = \frac{i}{4\pi^2} \tau \sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) \int_0^{\infty} u K_{i\tau/2}\left(\frac{u}{2}\right) K_{iy/2}^2\left(\frac{u}{2}\right) \left[I_{i\tau/2}\left(\frac{u}{2}\right) + I_{-i\tau/2}\left(\frac{u}{2}\right)\right] du. \tag{2.20}$$

同时，回忆一下 [4, 第二卷]中的条目 2.16.3.6，核 (2.20) 可表示为。然后利用 (2.16) 和富比尼定理，我们推导得出

$$\mathcal{K}(\tau, y) = \frac{i}{2\pi^2} \tau \sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) \int_0^{\infty} u K_{i\tau/2}\left(\frac{u}{2}\right) \int_u^{\infty} \frac{K_{iy}(t)}{(t^2-u^2)^{1/2}} dt \left[I_{i\tau/2}\left(\frac{u}{2}\right) + I_{-i\tau/2}\left(\frac{u}{2}\right)\right] du$$

$$= \frac{i}{2\pi^2} \tau \sinh(\pi\tau) \int_0^{\infty} K_{iy}(t) \int_0^{t} K_{i\tau}(u) du dt. \tag{2.21}$$

我们利用[4, 第一卷], 2中的关系式 2.4.18.4、2.5.46.5、2.5.46.9，以及 [4, 第二卷]中的关系式 16.2.1、2.16.6.1，在同样的论证依据下计算后一个迭代积分。因此，我们推导得出

$$\mathcal{K}(\tau,y)=\frac{i}{2\pi^2}\tau\sinh(\pi\tau)\int_0^\infty K_{iy}(t)\int_0^t K_{i\tau}(u)dudt$$

$$=\frac{i}{2\pi^2}\tau\sinh(\pi\tau)\int_0^\infty K_{iy}(t)\int_0^\infty\left[1-e^{-t\cosh u}\right]\frac{\cos(\tau u)}{\cosh u}dudt$$

$$=\frac{i}{2\pi}\tau\sinh(\pi\tau)\left[\frac{\pi}{4\cosh(\pi y/2)\cosh(\pi\tau/2)}-\frac{2}{\sinh(\pi y)}\int_0^\infty\frac{\sin(uy)\cos(\tau u)}{\sinh(2u)}du\right]$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{i\tau\sinh(\pi\tau/2)}{\cosh(\pi y/2)+\cosh(\pi\tau/2)}. \tag{2.22}$$

因此，经过简单代换即可轻松得到（2.17），从而完成定理 1 的证明。

□

推论 1. 令 $\tau, y\in\mathbb{R}$. 。以下含修正贝塞尔函数乘积的积分值为

$$\int_0^\infty xK_{i\tau}(x)\,K_{iy}^2(x)\left[I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)\right]dx$$

$$=\int_0^\infty xK_{iy}(x)\,K_{i\tau}^2(x)\left[I_{iy}(x)+I_{-iy}(x)\right]dx=\frac{\pi^2}{4[\cosh(\pi y)+\cosh(\pi\tau)]}. \tag{2.23}$$

反过来，通过列别捷夫变换（参见 *[5,* 公式 *(7.53)]*），麦克唐纳函数的平方可表示为指标积分

$$xK_{i\tau}^2(x)=-\frac{d}{dx}\int_0^\infty\frac{y\sinh(\pi y)K_{iy}^2(x)}{\cosh(\pi\tau)+\cosh(\pi y)}dy,\ x>0,\tau\in\mathbb{R}. \tag{2.24}$$

将（2.17）用于多项式（2.3），可得

$$P_n(4\tau^2,x)-a_{n,0}(x)=\frac{i\tau}{2}\ \sinh(\pi\tau)\int_{-\infty}^\infty\frac{P_n(4(y-i)^2,x)-a_{n,0}(x)}{(y-i)[\cosh(\pi y)+\cosh(\pi\tau)]}dy, \tag{2.25}$$

其中 $x>0,\ \tau\in\mathbb{R}$. 于是，三项递推关系 (2.5) 表明

$$P_n(4\tau^2,x)=\frac{i}{2\tau}\ \sinh(\pi\tau)\int_{-\infty}^\infty\frac{(y-i)P_n(4(y-i)^2,x)}{\cosh(\pi y)+\cosh(\pi\tau)}dy. \tag{2.26}$$

同时，由于矩 (1.24) 关于 $x>0$ 连续可微，且由 (2.11) 可知多项式系数 $a_{n,k}(x)$ 也具有相同性质（见 (2.3)），因此对正交条件 (2.2) 关于 x 求导。由此得到

$$\int_0^\infty \frac{\partial P_n(\tau^2,x)}{\partial x}\tau^{2m}K_{i\tau}^2(x)d\tau$$

$$+2\int_0^\infty P_n(\tau^2,x)\tau^{2m}K_{i\tau}(x)\frac{\partial K_{i\tau}(x)}{\partial x}d\tau=0,\ m=0,1,\dots,n-1, \tag{2.27}$$

利用恒等式 (1.35) 及其关于麦克唐纳函数导数的对应公式，可以证明积分号下求导是合理的 [4, 第 II 卷]

$$\frac{\partial K_{i\tau}(x)}{\partial x}=-\mathrm{Re}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]. \tag{2.28}$$

此外，恒等式 (1.35)、(2.28) 以及简单的变量代换，给出了如下形式的正交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial P_n(\tau^2,x)}{\partial x}\tau^{2m}K_{i\tau}^2(x)d\tau+ixa_{n,0}(x)\int_{-\infty-i}^{\infty-i}(\tau+i)^{2m-1}K_{i\tau}^2(x)d\tau$$

$$+ix\int_{-\infty-i}^{\infty-i}\left[P_n((\tau+i)^2,x)-a_{n,0}(x)\right](\tau+i)^{2m-1}K_{i\tau}^2(x)d\tau=0,\ m=0,1,\dots,n-1.$$

我们注意到，由于被积函数在水平带状区域 $-1\le\mathrm{Im}\tau\le 0$ 内的解析性（作为 τ 的函数）以及其可积性，后一积分的积分路径可以移至实轴。与此同时（参见 (1.35)、(2.28)、(1.24)）

$$ixa_{n,0}(x)\int_{-\infty-i}^{\infty-i}(\tau+i)^{2m-1}K_{i\tau}^2(x)d\tau=ixa_{n,0}(x)\int_0^\infty\tau^{2m-1}\left[K_{1+i\tau}^2(x)-K_{1-i\tau}^2(x)\right]d\tau$$

$$=2a_{n,0}(x)\int_0^\infty\tau^{2m}\frac{\partial K_{i\tau}^2(x)}{\partial x}d\tau=2a_{n,0}(x)\mu_m'(x). \tag{2.29}$$

当 $m=0$ 时，如果以主值意义理解其收敛性，将式 (2.29) 中的积分路径移至实直线，所得结果相同。因此，正交条件 (2.2) 可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial P_n(\tau^2,x)}{\partial x}\tau^{2m}+ixP_n((\tau+i)^2,x)(\tau+i)^{2m-1}\right]K_{i\tau}^2(x)d\tau=0,\ m<n. \tag{2.30}$$

另一方面，利用恒等式 (1.35)，条件 (2.2) 可以写成。对于 $m=1$，2、.....、$n-1$，我们有

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\tau^{2(m-1)}\left[\tau K_{i\tau}(x)\right]^2d\tau=x^2\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\tau^{2(m-1)}\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau,$$

这意味着这些条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\tau^{2m}\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau=0,\quad m=0,\dots,n-2. \tag{2.31}$$

条件 (2.31) 意味着序列 $\{P_n\}$ 关于权函数 $\left[\operatorname{Im}\ [K_{1+i\tau}(x)]\right]^2$ 是准正交的。因此，用连接系数 $h_{n,\ k}(x)$ 将其表示为 $\{Q_n\}$ (参见 (2.2)) 后

$$P_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}h_{n,k}(x)Q_k(\tau,x),$$

它满足 (2.31) 中的等式

$$\sum_{k=0}^{m}h_{n,k}(x)d_{k,m}(x)=0,\quad m=0,\dots,n-2, \tag{2.32}$$

其中

$$d_{k,m}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}Q_k(\tau^2,x)\tau^{2m}\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau. \tag{2.33}$$

回顾 (2.6)、(1.35)，我们得到积分的值

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\tau^{2(n-1)}\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau=\frac{2}{x^2a_n(x)}.$$

此外，线性方程组（2.32）的系数矩阵为下三角矩阵，且行列式非零$\prod_{k=0}^{m}d_{k,\ k}(x)$，其中（见（2.33））

$$d_{k,k}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}Q_k(\tau^2,x)\tau^{2k}\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau=\frac{2}{q_k(x)} \tag{2.34}$$

且 $q_k(x)$ 是该多项式的首项系数

$$Q_k(\tau,x)=q_k(x)\tau^k+r_k(x)\tau^{k-1}+\text{lower terms},$$

有零解。因此，记 $\alpha_n(x)\equiv h_{n,\ n}(x)$ $\beta_n(x)\equiv h_{n,\ n-1}(x)$，我们得到多项式 P_n，Q_n 之间的关系

$$P_n(\tau,x)=\alpha_n(x)Q_n(\tau,x)+\beta_n(x)Q_{n-1}(\tau,x). \tag{2.35}$$

通过比较系数，很容易看出

$$\alpha_n(x)=\frac{a_n(x)}{q_n(x)},\quad \beta_n(x)=\frac{1}{q_{n-1}(x)}\left[b_n(x)-\frac{a_n(x)r_n(x)}{q_n(x)}\right].$$

同时，(2.1)、(2.2)、(2.7)、(1.35)、(2.35) 推出

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_n^2(\tau^2,x)\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau=2[\alpha_n^2(x)+\beta_n^2(x)]$$

$$=\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{\infty}P_n^2(\tau^2,x)\tau^2K_{i\tau}^2(x)d\tau=\frac{2}{x^2}\ B_n(x),$$

此外，等式 (2.6)、(2.7)、(2.34)、(2.35) 得出

$$\frac{2x^2}{q_n(x)}\left[\alpha_n(x)-\frac{\beta_n(x)r_n(x)}{q_{n-1}(x)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\tau^{2(n+1)}K_{i\tau}^2(x)d\tau=-\frac{2b_{n+1}(x)}{a_n(x)a_{n+1}(x)},$$

$$2\alpha_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)Q_n(\tau^2,x)\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau$$

$$=\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\tau^2Q_n(\tau^2,x)K_{i\tau}^2(x)d\tau=\frac{2}{x^2a_n(x)}\left[r_n(x)-\frac{q_n(x)b_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)}\right],$$

$$2\beta_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)Q_{n-1}(\tau^2,x)\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau$$

$$=\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\tau^2Q_{n-1}(\tau^2,x)K_{i\tau}^2(x)d\tau=2\frac{q_{n-1}(x)}{x^2a_n(x)},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)Q_n(\tau^2,x)K_{i\tau}^2(x)d\tau=\frac{2q_n(x)}{a_n(x)}$$

$$=x^2\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\tau^2,x)\frac{Q_n(\tau^2,x)-Q_n(0,x)}{\tau^2}\Big[\operatorname{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\Big]^2d\tau=\frac{2x^2\beta_n(x)q_n(x)}{q_{n-1}(x)}.$$

由此我们推导出了这些恒等式

$$B_n(x) = x^2[\alpha_n^2(x) + \beta_n^2(x)] = \frac{a_n^2(x)x^2}{q_n^2(x)} + \frac{q_{n-1}^2(x)}{x^2 a_n^2(x)},$$

$$\frac{b_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)} = \frac{r_n(x)}{q_n(x)} - \frac{x^2 a_n^2(x)}{q_n^2(x)},$$

$$\frac{b_n(x)}{a_n(x)} = \frac{r_n(x)}{q_n(x)} + \frac{q_{n-1}^2(x)}{x^2 a_n^2(x)}.$$

然后，将多项式的三项递推关系写为如下形式 Q_n s

$$\tau Q_n(\tau, x) = \hat{A}_{n+1}(x)Q_{n+1}(\tau, x) + \hat{B}_n(x)Q_n(\tau, x) + \hat{A}_n(x)Q_{n-1}(\tau, x),$$

其中 $Q_{-1}(\tau,\ x) \equiv 0$ 且

$$\hat{A}_{n+1}(x) = \frac{q_n(x)}{q_{n+1}(x)}, \quad \hat{B}_n(x) = \frac{r_n(x)}{q_n(x)} - \frac{r_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)},$$

我们得到以下等式

$$B_n(x) - \hat{B}_n(x) = \frac{q_{n-1}^2(x)}{x^2 a_n^2(x)} - \frac{q_n^2(x)}{x^2 a_{n+1}^2(x)} = \frac{q_n^2(x)}{x^2 a_n^2(x)} \left[\hat{A}_n^2(x) - A_{n+1}^2(x)\right].$$

另一方面，条件 (2.31) 给出

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\tau^2, x)\tau^{2m} K_{1+i\tau}^2(x)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\tau^2, x)\tau^{2m} \operatorname{Re}\left[K_{1+i\tau}^2(x)\right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\tau^2, x)\tau^{2m} \left[\operatorname{Re}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\right]^2 d\tau, \quad m = 0, \ldots, n-2.$$

此外，

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(\tau^2, x)\tau^{2m} K_{1+i\tau}^2(x)d\tau = \int_{-\infty+i}^{\infty+i} P_n((\tau+i)^2, x)(\tau+i)^{2m} K_{i\tau}^2(x)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_n((\tau+i)^2, x)(\tau+i)^{2m} K_{i\tau}^2(x)d\tau,$$

i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n((\tau+i)^2, x)(\tau+i)^{2m} K_{i\tau}^2(x)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\tau^2, x)\tau^{2m} \left[\operatorname{Re}\left[K_{1+i\tau}(x)\right]\right]^2 d\tau, \quad m = 0, \ldots, n-2. \tag{2.36}$$

注 1。作者建议感兴趣的读者引入正交多项式 $R_n(\tau^2,\ x)$（见（2.3））， 以便进一步建立序列 $P_n(\tau^2,\ x)$ 的性质和关系。

3 广义威尔逊多项式

本节结合第 1 节的结果，通过考察以下正交关系来推广威尔逊多项式

$$\int_0^\infty \left|\frac{\prod_{k=1}^{p+1}\Gamma\left(a_k+i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 W_n(\tau^2,[a]_{p+1})W_m(\tau^2,[a]_{p+1})d\tau=\delta_{n,m}, \tag{3.1}$$

其中 $[a]_p=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{p+1})\ \ p\in\mathbb{N}_0\backslash\{0,1\},\ \ a_j>|\nu|/2,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1,\ \ \nu\in\mathbb{R}$。权函数的矩由公式 (1.44) 计算。此外，我们求得常数多项式 $W_0(\tau,\ [a]_{p+1})$，其形式为

$$W_0(\tau,[a]_{p+1})=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[G^{p+1,p+1}_{p+3,p+3}\left(1\middle|\begin{matrix}1-a_1,1-a_2,\ldots,1-a_{p+1},0,\ \frac{1}{2}\\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{p+1},\ 1,\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]^{-1/2}. \tag{3.2}$$

正交条件

$$\int_0^\infty \left|\frac{\prod_{k=1}^{p+1}\Gamma\left(a_k+i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 W_n(\tau^2,[a]_{p+1})\tau^{2m}d\tau=0,\quad m=0,1,\ldots,n-1 \tag{3.3}$$

利用 (1.46)，可将其写成复合正交性的形式 $[10],$，其中使用了微分算子 (1.5) 和卷积 (1.38)。事实上，它变为

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(x^{2a_1-1}*x^{2a_2-1}\ldots x^{2a_{j-1}-1}*x^{2a_{j+1}-1}\cdots*x^{2a_{p+1}-1}\right)\\ &\times W_n\left(\frac{\mathcal{A}}{4},[a]_{p+1}\right)\mathcal{A}^m x^{2a_j}dx=0,\quad m=0,1,\ldots,n-1.\end{aligned} \tag{3.4}$$

然而，利用分部积分，并根据算子 (1.5) 的结构消去积分项，我们将 (3.4) 改写如下

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \mathcal{A}^m\left[x\left(x^{2a_1-1}*x^{2a_2-1}\ldots x^{2a_{j-1}-1}*x^{2a_{j+1}-1}\cdots*x^{2a_{p+1}-1}\right)\right]\\ &\times W_n\left(\frac{\mathcal{A}}{4},[a]_{p+1}\right)x^{2a_j}\frac{dx}{x}=0,\quad m=0,1,\ldots,n-1.\end{aligned} \tag{3.5}$$

但由于 $\mathcal{A}\, x^{2a_j} = x^{2a_j}\left(x^2 - 4a_j^2\right)$，我们得到

$$W_n\left(\frac{\mathcal{A}}{4}, [a]_{p+1}\right) x^{2a_j} = x^{2a_j}\hat{W}_n(x^2, [a]_{p+1}). \tag{3.6}$$

因此，等式 (3.5) 具有如下形式

$$\int_0^\infty x^{2a_j-1}\mathcal{A}^m\left[x\left(x^{2a_1-1} * x^{2a_2-1}\dots x^{2a_{j-1}-1} * x^{2a_{j+1}-1}\dots * x^{2a_{p+1}-1}\right)\right]$$

$$\times\hat{W}_n(x^2, [a]_{p+1})\, dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \tag{3.7}$$

$\hat{}$ 多项式 W_n 与 W_n 之间的关系可通过列别捷夫变换 (1.39) 建立。事实上，回顾卷积 (1.38) 的帕塞瓦尔等式 [6, 公式 (4.34)]，并根据绝对一致收敛在积分号下进行微分，可得

$$\mathcal{A}^m\left[x\left(x^{2a_1-1} * x^{2a_2-1}\dots x^{2a_{j-1}-1} * x^{2a_{j+1}-1}\dots * x^{2a_{p+1}-1}\right)\right]$$

$$= 4^{1/2+m-p+\sum_{k=0,k\neq j}^{p+1} a_k}\int_0^\infty \tau^{2m}\, K_{2i\tau}(x)\left|\frac{1}{\Gamma(2i\tau)}\prod_{k=1,\ k\neq j}^{p+1}\Gamma\left(a_k + i\tau\right)\right|^2 d\tau. \tag{3.8}$$

将 (3.8) 两边乘以 $x^{2a_j-1}\hat{}W_n(x^2, [a]_{p+1})$，并对 $\mathbb{R}_+$ 积分。由于利用 (1.3) 的控制收敛定理，我们交换所得等式右侧的积分次序。然后，考虑到 (3.6)，可得

$$\int_0^\infty x^{2a_j-1}\hat{W}_n(x^2, [a]_{p+1})\int_0^\infty \tau^{2m}\, K_{2i\tau}(x)\left|\frac{1}{\Gamma(2i\tau)}\prod_{k=1,\ k\neq j}^{p+1}\Gamma\left(a_k + i\tau\right)\right|^2 d\tau dx$$

$$= \int_0^\infty \tau^{2m}\int_0^\infty x^{2a_j-1}\hat{W}_n(x^2, [a]_{p+1})K_{2i\tau}(x)dx\left|\frac{1}{\Gamma(2i\tau)}\right.$$

$$\left.\times\prod_{k=1,\ k\neq j}^{p+1}\Gamma\left(a_k + i\tau\right)\right|^2 d\tau = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

同时，在 [1], 中应用条目 3.14.1.3，我们观察到 Kontorovich-Lebedev 积分

$$\frac{1}{|\Gamma(a_j + i\tau)|^2}\int_0^\infty x^{2a_j-1}\hat{W}_n(x^2, [a]_{p+1})K_{2i\tau}(x)dx \tag{3.9}$$

是一个多项式。此外，利用 (1.6)、(3.6) 和分部积分，可以显式计算它。事实上，将 W_n 表示为系数

$$W_n(\tau,[a]_{p+1})=\sum_{k=0}^{n} f_{n,k}\tau^k, \tag{3.10}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\Gamma(a_j+i\tau)|^2}\int_0^\infty x^{2a_j-1}\hat{W}_n(x^2,[a]_{p+1})K_{2i\tau}(x)dx\\&=\frac{1}{|\Gamma(a_j+i\tau)|^2}\int_0^\infty K_{2i\tau}(x)W_n\left(\frac{\mathcal{A}}{4},[a]_{p+1}\right)x^{2a_j}\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{|\Gamma(a_j+i\tau)|^2}\sum_{k=0}^{n} f_{n,k}\int_0^\infty \tau^{2k}K_{2i\tau}(x)x^{2a_j-1}dx=4^{a_j-1}W_n(\tau^2,[a]_{p+1}). \tag{3.11}$$

另一种方法是回到等式 (3.3)，并采用 Kontorovich-Lebedev 积分 (2.14)，将其代入 (3.3) 的右端。因此，对于$m=1$，2，.....，$n-1$，我们有

$$\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\left|\frac{\prod_{k=1}^{r+1}\Gamma\left(a_k+i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 W_n(\tau^2,[a]_{r+1})\int_0^\infty e^{-x}K_{i\tau}(x)p_m(x)\frac{dxd\tau}{x}=0.$$

根据控制收敛定理，可以交换积分次序，因此我们写成

$$\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)F_n(x)\frac{dx}{x}=0,\ m=1,2,\dots,n-1, \tag{3.12}$$

其中我们记

$$F_n(x)=\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\left|\frac{\prod_{k=1}^{r+1}\Gamma\left(a_k+i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 K_{i\tau}(x)W_n(\tau^2,[a]_{r+1})d\tau. \tag{3.13}$$

同时，利用不等式 (1.3)，不难证明，对于每个 n，函数 $F_n(x)$ 可展开为拉盖尔多项式 [3, Ch. 4, Th. 3] 的级数，从而得到

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k}L_k(x), \tag{3.14}$$

其中

$$c_{n,k}=\int_0^\infty e^{-x}L_k(x)F_n(x)dx, \tag{3.15}$$

且帕塞瓦尔等式成立

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_{n,k}^2=\int_0^\infty e^{-x}F_n^2(x)dx. \tag{3.16}$$

从级数（3.14）的部分和出发，将其代入（3.12），利用拉盖尔多项式的正交性、（1.26）以及在积分号下取极限（类似于展开定理的证明），可得到等式

$$\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)F_n(x)\frac{dx}{x}=\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)\sum_{k=0}^{m-1}c_{n,k}L_k(x)\frac{dx}{x}$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}c_{n,k}L_k(x)dx=0,\ m=1,2,\dots,n-1.$$

这立即意味着

$$c_{n,0}=c_{n,1}=\cdots=c_{n,n-2}=0,\quad n=2,3,\dots.$$

因此，（3.14）可写为

$$F_n(x)=\sum_{k=n-1}^{\infty}c_{n,k}L_k(x)$$

同理，对于 $m\geq n$

$$\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)F_n(x)\frac{dx}{x}=\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)\sum_{k=n-1}^{m-1}c_{n,k}L_k(x)\frac{dx}{x}$$

$$=\sum_{k=n-1}^{m-1}c_{n,k}\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)L_k(x)\frac{dx}{x}=\sum_{k=n-1}^{m-1}c_{n,k}l_{m,k}, \tag{3.17}$$

其中已知值 $l_{m,k}$ 定义为

$$l_{m,k}=\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)L_k(x)\frac{dx}{x},\ l_{m,k}=0,\ m<k+1,\ m,k\in\mathbb{N}. \tag{3.18}$$

此外，回顾（1.26），我们依次推导出：

$$\sum_{k=n-1}^{m-1} c_{n,k} \int_0^\infty e^{-x} p_m(x) L_k(x) \frac{dx}{x} = -\sum_{k=n-1}^{m-1} c_{n,k}$$
$$\times \sum_{q=k}^{m-1} \binom{2m-1}{2q} \int_0^\infty e^{-x} p_q(x) L_k(x) dx,$$

这意味着

$$l_{m,k} = -\sum_{q=k}^{m-1} \binom{2m-1}{2q} \int_0^\infty e^{-x} p_q(x) L_k(x) dx, \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

此外，由（3.18）和拉盖尔多项式的三项递推关系 [3] ，我们得到

$$(k+1) l_{m,k+1} = (2k+1) l_{m,k} - k l_{m,k-1} - \int_0^\infty e^{-x} p_m(x) L_k(x) dx. \tag{3.19}$$

然后，对相关多项式进行分部积分，并利用其导数的等式[3], [7]

$$p_n'(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n}{2r} p_r(x), \tag{3.20}$$

$$x L_n'(x) = n L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

得到 m， $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty e^{-x} p_m(x) L_k(x) dx = \int_0^\infty e^{-x} p_m'(x) L_k(x) dx + \int_0^\infty e^{-x} p_m(x) L_k'(x) dx$$
$$= k l_{m,k} - k l_{m,k-1} - \sum_{r=k-1}^{m-1} \binom{2m}{2r} \Big[(k+1) l_{r,k+1} + (2k+1) l_{r,k} + k l_{r,k-1} \Big].$$

因此，最终我们推导出以下递推关系

$$l_{m,k+1} - l_{m,k} = \sum_{r=k-1}^{m-1} \binom{2m}{2r} \left[l_{r,k+1} + \frac{2k+1}{k+1} l_{r,k} + \frac{k}{k+1} l_{r,k-1} \right].$$

此外，结合 (3.17)，可得等式

$$\int_0^\infty e^{-x} p_m(x) F_n(x) \frac{dx}{x} = \sum_{k=n-1}^{m-1} c_{n,k} l_{m,k}. \tag{3.21}$$

考虑到空和，该等式对所有 m， $n \in \mathbb{N}$均成立。对于 $m \in \mathbb{N}$ ，我们将 (3.13) 右端代入 (3.21) 左端，并根据控制收敛定理交换积分次序。然后利用[7, 公式 (1.20)] 计算内层积分，得到

$$\pi(-1)^m \int_0^\infty \left| \frac{\prod_{k=1}^{r+1} \Gamma\left(a_k + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1})\ \tau^{2m} d\tau = \sum_{k=n-1}^{m-1} c_{n,k} l_{m,k}. \tag{3.22}$$

ˆ 考虑到 (3.10)，并记 $f_{n,n} \equiv f_n,\ f_{n,n-1} \equiv f_n$，令 $m = n$ 属于其中，并回顾 (3.22) (3.1)，可推出

$$c_{n,n-1} = \frac{(-1)^n \pi}{f_n\ l_{n,n-1}}.$$

此外， p_n 的首项为 $(-1)^n(2n-1)!!$（见 [7]）。因此，由 (3.18) 可得$l_{n,n-1} = -(2n-1)!!(n-1)!$，从而

$$c_{n,n-1} = \frac{(-1)^{n-1} \pi}{f_n\ (2n-1)!!(n-1)!}. \tag{3.23}$$

令 $m = n+1$ ，并且由 (3.1) 可知

$$\int_0^\infty \left| \frac{\prod_{k=1}^{r+1} \Gamma\left(a_k + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1})\ \tau^{2(n+1)} d\tau = -\frac{\hat{f}_{n+1}}{f_{n+1} f_n},$$

由 (3.22)、(3.23) 可得

$$\frac{(-1)^n}{\pi} c_{n,n}(2n+1)!!\ n!\ f_n + \frac{l_{n+1,n-1}}{(2n-1)!!(n-1)!} = -\frac{\hat{f}_{n+1}}{f_{n+1}}. \tag{3.24}$$

同时，回顾 (3.13)，我们对等式两边应用算子 (1.5)，并由于绝对一致收敛而在积分号下求导。于是，序列 $\{W_n(\tau, [a]_{r+1})\}_{n\geq 0}$ 的 (1.6) 和三项递推关系可写成

$$\tau W_n(\tau, [a]_{p+1}) = H_{n+1} W_{n+1}(\tau, [a]_{p+1}) + E_n W_n(\tau, [a]_{p+1}) + H_n W_{n-1}(\tau, [a]_{p+1}) \tag{3.25}$$

可得序列 $\{F_n(x)\}_{n\geq}$ 满足以下微分递推关系 $_0$

$$\mathcal{A} F_n(x) = H_{n+1} F_{n+1}(x) + E_n F_n(x) + H_n F_{n-1}(x),\ x > 0. \tag{3.26}$$

接着，利用 (1.19) 并进行分部积分，可将 (3.21) 的左端写成如下形式

$$\int_0^\infty e^{-x}p_m(x)F_n(x)\frac{dx}{x} = -\int_0^\infty e^{-x}p_{m-1}(x)\mathcal{A}F_n(x)\frac{dx}{x}$$

$$= -\int_0^\infty e^{-x}p_{m-1}(x)\Big[H_{n+1}F_{n+1}(x) + E_nF_n(x) + H_nF_{n-1}(x)\Big]\frac{dx}{x}. \tag{3.27}$$

因此，与 (3.21) 的右端比较可知，情形 $m = n$ 立即给出恒等式

$$H_n = -\frac{l_{n,n-1}c_{n,n-1}}{l_{n-1,n-2}\ c_{n-1,n-2}}, \tag{3.28}$$

可写成如下形式

$$H_n = -(2n-1)(n-1)\ \frac{c_{n,n-1}}{c_{n-1,n-2}},\ n \neq 1. \tag{3.29}$$

因此，根据（3.10）

$$c_{n,n-1} = (-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}c_{1,0}}{(2n-1)!}\prod_{k=2}^{n}H_k = (-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}c_{1,0}\ f_1}{f_n(2n-1)!},\ H_{n+1} = \frac{f_n}{f_{n+1}}. \tag{3.30}$$

与（3.23）比较可得 $c_{1,\ 0}f_1 = \pi$ 的值。

另一种方法是回顾（3.18），并对（3.27）进行类似处理。具体而言，我们有

$$l_{m,k} = -\int_0^\infty e^{-x}p_{m-1}(x)\mathcal{A}L_k(x)\frac{dx}{x}. \tag{3.31}$$

然而，考虑到拉盖尔多项式的二阶线性微分方程 [3, formula (4.18.8)], ，我们看到，算子（1.5）作用于拉盖尔多项式 $L_k(x)$ 后得到如下关系

$$\mathcal{A}L_k(x) = x^2L_k(x) + kxL_{k-1}(x).$$

因此，根据拉盖尔多项式的三项递推关系，由式 (3.19)、(3.31) 可得

$$l_{m,k} = -\int_0^\infty e^{-x}p_{m-1}(x)xL_k(x)dx - k\int_0^\infty e^{-x}p_{m-1}(x)L_{k-1}(x)dx$$

$$= k(k-1)l_{m-1,k} - k(2k-1)l_{m-1,k-1} + k(k-1)l_{m-1,k-2}$$

$$+(k+1)l_{m-1,k+1} - (2k+1)l_{m-1,k} + kl_{m-1,k-1},$$

即，化简后

$$l_{m,k} = (k+1)l_{m-1,k+1} + (k^2-3k-1)l_{m-1,k} + 2k(1-k)l_{m-1,k-1}$$

$$+k(k-1)l_{m-1,k-2}, \quad m,k \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

与此同时，回到 (3.15) 并利用 (3.25)，可得

$$H_{n+1}c_{n+1,k} + E_n c_{n,k} + H_n c_{n-1,k} = \int_0^\infty e^{-x} L_k(x) \mathcal{A} F_n(x) dx$$

$$= \int_0^\infty \mathcal{A}\left[e^{-x} x L_k(x)\right] F_n(x) \frac{dx}{x}.$$

回顾公式（1.5）以及拉盖尔多项式的微分方程，我们依次得到:

$$\mathcal{A}\left[e^{-x} x L_k(x)\right] = e^{-x}x^3 L_k(x) - x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\left[e^{-x} x L_k(x)\right]$$

$$= e^{-x}x^3 L_k(x) - x\frac{d}{dx}\left[-e^{-x}x^2 L_k(x) + e^{-x} x L_k(x) + e^{-x}x^2 L_k'(x)\right]$$

$$= -e^{-x}x\left[L_k(x) + 3x\left(L_k'(x) - L_k(x)\right) + x^2\left(L_k''(x) - 2L_k'(x)\right)\right]$$

$$= e^{-x}x\Big[\left((3+2k)x - 2k - 1\right) L_k(x) + (2-x)k\ L_{k-1}(x)\Big].$$

结论　因此，利用拉盖尔多项式的三项递推关系，我们推导出

$$H_{n+1}c_{n+1,k} + E_n c_{n,k} + H_n c_{n-1,k} = 2kc_{n,k-1} - (2k+1)c_{n,k} + (3+2k)\int_0^\infty e^{-x} x L_k(x) F_n(x) dx$$

$$-k\int_0^\infty e^{-x} x L_{k-1}(x) F_n(x) dx$$

$$= 2kc_{n,k-1} - (2k+1)c_{n,k} + (3+2k)\int_0^\infty e^{-x}\left[(2k+1)L_k(x) - (k+1)L_{k+1}(x) - kL_{k-1}(x)\right] F_n(x) dx$$

$$+k\int_0^\infty e^{-x}\left[kL_k(x) - (2k-1)L_{k-1}(x) + (k-1)L_{k-2}(x)\right] F_n(x) dx$$

$$= -(k+1)(3+2k)c_{n,k+1} + (5k^2+6k+2)c_{n,k} - 4k^2 c_{n,k-1} + k(k-1)c_{n,k-2}.$$

由此，我们最终得到以下恒等式

$$H_{n+1}c_{n+1,k} + E_n c_{n,k} + H_n c_{n-1,k}$$

$$= -(k+1)(3+2k)c_{n,k+1} + (5k^2+6k+2)c_{n,k} - 4k^2 c_{n,k-1} + k(k-1)c_{n,k-2}, \qquad (3.33)$$

其中（见上文） n， $k \in \mathbb{N}_0$， $c_{n,\ -2} = c_{n,\ -1} = c_{n,\ 0} = \cdots = c_{n,\ n-2} = 0$. 令 $k = n-2$，立即得到（3.30）。可以用行列式表示系数 $c_{n,\ k}$， $k \geq n-1$ 。事实上，回顾（3.22）并利用（3.1），对于 $m > n$，我们得到

$$\sum_{k=n}^{m}(-1)^k f_{m,k}\sum_{q=n}^{k} c_{n,q-1}l_{k,q-1} = \sum_{q=n}^{m} c_{n,q-1}\sum_{k=q}^{m}(-1)^k f_{m,k}\ l_{k,q-1} = 0.$$

记

$$s_{m,q} = \sum_{k=q}^{m}(-1)^k f_{m,k}\ l_{k,q-1}$$

我们将含有 m 个方程和 m 个未知数的非齐次线性方程组写成 s

$$c_{n,n}, c_{n,n+1}, \ldots, c_{n,n+m-1},\ m \in \mathbb{N}$$

其下三角矩阵的行列式非零。事实上，考虑到（3.23），可得

$$\sum_{q=n+1}^{n+\nu} c_{n,q-1}s_{n+\nu,q} = \frac{(-2)^{n-1}\pi s_{n+\nu,n}}{f_n\ (2n-1)!},\ \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

其中相应的行列式的值为 $\prod_{j=1}^{m} s_{n+j,\ n+j}$ 并且根据克拉默法则，唯一解相应地表示为

此外，将 (3.13) 视为逆Kontorovich-Lebedev变换 $[6,\ \text{Ch.}\ 2]$, 这意味着，反过来说，

$$W_n(\tau^2, [a]_{r+1}) = \frac{2}{\pi^2}\left|\frac{\Gamma(2i\tau)}{\prod_{k=1}^{r+1}\Gamma\left(a_k + i\tau\right)}\right|^2 \int_0^\infty K_{i\tau}(x)F_n(x)\frac{dx}{x}, \qquad (3.34)$$

其中积分 (3.34) 至少在关于范数 $L_2(\mathbb{R}_+;\ \tau\sinh(\pi\tau)d\tau)$ 的均方意义下收敛。此外，帕塞瓦尔等式成立

$$\int_0^\infty F_n^2(x)\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{2}\int_0^\infty \tau\sinh(\pi\tau)\left|\frac{\prod_{k=1}^{r+1}\Gamma\left(a_k + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^4 W_n^2(\tau^2, [a]_{r+1})d\tau. \qquad (3.35)$$

函数 $F_n(x)$ 可以用算子形式表示为多项式 W_n。事实上，考虑到 (1.5)、(1.6)、(3.10)、(3.13)，并在积分号下逐项求导，我们有

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \left| \frac{\prod_{k=1}^{r+1} \Gamma(a_k + i\tau)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 K_{i\tau}(x)\tau^{2k} d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \mathcal{A}^k \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \left| \frac{\prod_{k=1}^{r+1} \Gamma(a_k + i\tau)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 K_{i\tau}(x) d\tau$$

$$= W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) [\Phi(x)], \tag{3.36}$$

其中 $\Phi(x)$ 是如下 Kontorovich-Lebedev 积分

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \left| \frac{\prod_{k=1}^{r+1} \Gamma(a_k + i\tau)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 K_{i\tau}(x) d\tau, \quad x > 0. \tag{3.37}$$

反过来，我们得到等式（与（3.34）比较）

$$\frac{\pi^2}{2} \left| \frac{\prod_{k=1}^{r+1} \Gamma(a_k + i\tau)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 = \int_0^\infty K_{i\tau}(x)\Phi(x) \frac{dx}{x}.$$

此外，回顾（1.19）、（3.36），我们将（3.12）改写为

$$\int_0^\infty e^{-x} p_{m+1}(x) F_n(x) \frac{dx}{x} = (-1)^{m+1} \int_0^\infty \mathcal{A} W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) \left[e^{-x}\right]$$

$$\times \mathcal{A}^m [\Phi(x)] \frac{dx}{x} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-2. \tag{3.38}$$

因此，Kontorovich-Lebedev 变换的帕塞瓦尔等式给出

$$\int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \left| \frac{\prod_{k=1}^{r+1} \Gamma(a_k + i\tau)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 \tau^{2m}$$

$$\times \int_0^\infty \mathcal{A} W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) \left[e^{-x}\right] K_{i\tau}(x) \frac{dx d\tau}{x} = 0, \ m = 0, 1, 2, \ldots, n-2. \tag{3.39}$$

同时，通过 (1.19) 和 (1.26) 可得

$$\tau \sinh(\pi\tau) \int_0^\infty \mathcal{A} W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) \left[e^{-x}\right] K_{i\tau}(x) \frac{dx}{x}$$

$$= \tau \sinh(\pi\tau) \sum_{k=0}^{n} f_{n,k}(-1)^{k+1} \int_0^\infty e^{-x} p_{k+1}(x) K_{i\tau}(x) \frac{dx}{x}$$

$$= \tau \sinh(\pi\tau) \sum_{k=0}^{n} f_{n,k}(-1)^{k} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{2k+1}{2\nu} \int_0^\infty e^{-x} p_{\nu}(x) K_{i\tau}(x) dx. \tag{3.40}$$

此外， [1], (1.5)、(1.6)、(3.10) 中的条目 3.14.3.1 以及 Macdonald 函数的性质 (1.35) 表明，该积分

$$\frac{1}{\pi}\, \tau \sinh(\pi\tau) \int_0^\infty \mathcal{A}W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) \left[e^{-x}\right] K_{i\tau}(x) \frac{dx}{x}$$

等于 $\tau^2 W_n(\tau^2,\ [a]_{r+1})$。具体而言，由于分部积分，我们推导得

$$\frac{1}{\pi}\, \tau \sinh(\pi\tau) \int_0^\infty \mathcal{A}W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) \left[e^{-x}\right] K_{i\tau}(x) \frac{dx d\tau}{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \tau^2 \sinh(\pi\tau) \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \tau^{2k} \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{Im}\left[K_{1+i\tau}(x)\right] dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f_{n,k} \tau^{2(k+1)} = \tau^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1}).$$

现在，回到 (3.13)，我们将等式两边乘以 $e^{-x} L_k(x)$，并对 $\mathbb{R}_+$ 积分。然后，由于控制收敛，我们交换右侧的积分次序，得到系数$c_{n,\ k}$，其形式为

$$c_{n,k} = \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \left| \frac{\prod_{m=1}^{r+1} \Gamma\left(a_m + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1})$$

$$\times \int_0^\infty e^{-x} L_k(x) K_{i\tau}(x) dx d\tau. \tag{3.41}$$

由 x 计算的内层积分在 [1, 条目 3.23.11.3] 中以广义超几何函数 ${}_4F_3$ 在单位点处表示，并得到公式

$$\int_0^\infty e^{-x} L_k(x) K_{i\tau}(x) dx = \frac{\pi}{2\cosh(\pi\tau/2)}\ {}_4F_3\left(\frac{1+k}{2},\ 1+\frac{k}{2},\ \frac{1+i\tau}{2},\ \frac{1-i\tau}{2};\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1\right)$$

$$+ \frac{(k+1)\pi\tau}{2\sinh(\pi\tau/2)}\ {}_4F_3\left(\frac{3+k}{2},\ 1+\frac{k}{2},\ 1+\frac{i\tau}{2},\ 1-\frac{i\tau}{2};\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1; 1\right).$$

因此我们得 推导出这些值 $c_{n,\ k}$，它们可用涉及多项式 W_n 的积分表示 τ^2，$[a]_{r+}$ $_1)$

$$c_{n,k} = \pi \int_0^\infty \tau \sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) \left|\frac{\prod_{m=1}^{r+1}\Gamma\left(a_m + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1})$$

$$\times {}_4F_3\left(\frac{1+k}{2},\ 1+\frac{k}{2},\ \frac{1+i\tau}{2},\ \frac{1-i\tau}{2};\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1\right) d\tau$$

$$+\pi(k+1) \int_0^\infty \cosh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) \left|\frac{\prod_{m=1}^{r+1}\Gamma\left(a_m + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 \tau^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1})$$

$$\times {}_4F_3\left(\frac{3+k}{2},\ 1+\frac{k}{2},\ 1+\frac{i\tau}{2},\ 1-\frac{i\tau}{2};\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1; 1\right) d\tau,\ (n,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0.$$

现在回到（3.34），我们写成

$$\frac{\pi^2}{2}\left|\frac{\prod_{k=1}^{r+1}\Gamma\left(a_k + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)}\right|^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1}) = \int_0^\infty K_{i\tau}(x) F_n(x) \frac{dx}{x}.$$

因此，我们将后一等式的两边乘以 $W_m(\tau^2, [a]_{r+1})$，并对$\mathbb{R}_+$进行积分。然后，利用（3.1）和（3.34），交换积分次序；根据柯西–施瓦茨不等式和控制收敛定理，这是合理的，从而得到

$$\int_0^\infty \int_0^\infty W_m(\tau^2, [a]_{r+1}) K_{i\tau}(x) F_n(x) \frac{d\tau dx}{x} = \frac{\pi^2}{2}\delta_{n,m}.$$

同时，等式（1.1）、（1.6）、（3.36）以及对内层积分进行分部积分（其中x ）给出了如下复合正交性

$$\int_0^\infty \int_0^\infty W_m(\tau^2, [a]_{r+1}) K_{i\tau}(x) F_n(x) \frac{d\tau dx}{x}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty W_m(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) \left[K_{i\tau}(x)\right] \Phi(x) \frac{d\tau dx}{x}$$

$$= \int_0^\infty W_m(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) W_n(\mathcal{A}, [a]_{r+1}) \left[e^{-x}\right] \Phi(x) \frac{dx}{x} = \pi\delta_{n,m}.$$

另一方面，在 (3.41) 中应用拉盖尔多项式的罗德里格斯公式、分部积分以及麦克唐纳函数导数的恒等式 [4, 第 II 卷]

$$\frac{d^k}{dx^k} K_{i\tau}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} K_{2\nu-k+i\tau}(x),$$

我们得到

$$c_{n,k} = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \left| \frac{\prod_{m=1}^{r+1} \Gamma\left(a_m + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1})$$
$$\times \int_0^\infty e^{-x} x^k K_{2\nu-k+i\tau}(x) dx d\tau.$$

后一个内积分通过 x 运用 [1] 中的条目 3.14.3.1 计算，化简后得到以下表达式

$$c_{n,k} = \frac{\pi}{(2k+1)!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \int_0^\infty \left| \frac{\prod_{m=1}^{r+1} \Gamma\left(a_m + i\tau\right)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 W_n(\tau^2, [a]_{r+1})$$
$$\times (-i\tau)_{2(k-\nu)+1} (i\tau)_{2\nu+1} d\tau. \tag{3.42}$$

将 Pochhammer 符号用第一类斯特林数$s(n,\ k)$ [11], 表示，可得

$$(-i\tau)_{2(k-\nu)+1} = \sum_{\lambda=0}^{2(k-\nu)+1} (-1)^{2(k-\nu)+1-\lambda} s(2(k-\nu)+1, \lambda)(-i\tau)^\lambda,$$
$$(i\tau)_{2\nu+1} = \sum_{\omega=0}^{2\nu+1} (-1)^{2\nu+1-\omega} s(2\nu+1, \omega)(i\tau)^\omega.$$

因此，(3.42) 中的有限实数和可按如下方式处理

$$S_{k+1}(\tau^2) = \frac{\pi}{(2k+1)!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} (-i\tau)_{2(k-\nu)+1} (i\tau)_{2\nu+1}$$
$$= \frac{\pi}{(2k+1)!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \mathrm{Re}\left[(-i\tau)_{2(k-\nu)+1} (i\tau)_{2\nu+1} \right]$$

$$= \frac{\pi}{(2k+1)!} \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\lambda=0}^{k-\nu} \sum_{\omega=0}^{\nu} (-1)^{\lambda+\omega} \binom{k}{\nu} \tau^{2(\lambda+\omega)} \Big[s(2(k-\nu)+1, 2\lambda)\ s(2\nu+1, 2\omega)$$
$$+ \tau^2 s(2(k-\nu)+1, 2\lambda+1)\ s(2\nu+1, 2\omega+1) \Big],\ k \in \mathbb{N}_0,$$

并且我们看到，$S_{k+1}(\tau^2)$表示关于 τ^2的 $k+1$次多项式。因此，正交性 (3.1) 保证了多项式展开

$$S_{k+1}(\tau^2) = \sum_{j=0}^{k+1} c_{j,k} W_j(\tau^2, [a]_{r+1})$$

以及帕塞瓦尔等式

$$\sum_{j=0}^{k+1} c_{j,k}^2 = \int_0^\infty \left| \frac{\prod_{m=1}^{r+1} \Gamma(a_m + i\tau)}{\Gamma(2i\tau)} \right|^2 S_{k+1}^2(\tau^2) d\tau.$$

致谢

这项工作部分得到了 CMUP 的资助。CMUP 的经费来自葡萄牙国家基金，由 FCT 通过项目（编号 UID/00144/2025）提供。

参考文献

1. Yu. A. Brychkov, O.I. Marichev, N.V. Savischenko, 梅林变换手册. 应用数学进展, CRC出版社, 博卡拉顿, FL, 2019.2. R. Koekoek, P.A. Lesky, R.F. Swarttouw, 超几何正交多项式及其 *q*-类比物, 收录于：施普林格数学专著, 施普林格出版社, 纽约, 2010.3. N.N. Lebedev, 特殊函数及其应用, 多佛出版社, 纽约, 1972.4. A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev, 积分与级数. 第一卷：初等函数, 第二卷：特殊函数, Gordon and Breach出版社, 纽约和伦敦, 1986, 第三卷：更多特殊函数, Gordon and Breach出版社, 纽约和伦敦, 1990.5. S. Yakubovich and Yu. Luchko, 积分变换与卷积的超几何方法,（Kluwers数学与应用丛书：第287卷）, 多德雷赫特, 波士顿, 伦敦, 1994.6. S. Yakubovich, 指标变换, 世界科学出版公司, 新加坡, 新泽西州, 伦敦和香港, 1996.7. S. Yakubovich, 关于伯努利数、欧拉数和黎曼ζ值的若干恒等式、联系公式及显式公式,《*Analysis*》**35** (2015), 1, 59- 71.8. S. Yakubovich, 关于 YOR 积分及与 Kontorovich-Lebedev 变换相关的多项式系统,《积分变换与特殊函数》**24**(2013

),

8, 672-683。

9. S. Yakubovich，关于通过 Kontorovic 实现的正交性与卷积正交性 h-列别捷夫变换，计算与应用数学杂志，384(2021)，论文编号：113178。10. S. Yakubovich，复合正交性方法及非经典权函数下的新序列正交多项式与函数，数学分析与应用杂志499 (2021)，第 2 期，论文编号：125032。11. E.W. Weisstein，Pochhammer 符号，摘自 MathWorld——Wolfram 资源。https://mathworld.wolfram.com/PochhammerSymbol.html

谢苗·雅库博维奇数学系，波尔图大学理学院，Campo Alegre 街 687 号，4169-007 波尔图，葡萄牙电子邮箱：syakubov@fc.up.pt