arXiv:2601.02892v1 [math.CO] 6 Jan 2026

通过子图轨道构造余谱顶点

Onur EgeErden* Fatihcan M. Atay†比尔肯特大学数学系，土耳其安卡拉 *06800*

摘要

我们提出了一种在无向图中构造余谱顶点的方法，并给出了一种能够保持该构造的运算。我们证明，该构造可以得到余谱顶点；在满足附加条件时，还可以得到强余谱顶点。此外，我们将余谱顶点推广至图拉普拉斯矩阵的情形，并给出了一种类似的构造方法。

1 引言

设 $G(V,\ E)$ 是一个有限图，其顶点集为 V，边集为 E。我们用 $G \setminus v_i$ 表示从 G 中删除顶点 v_i 后得到的子图。若两个不同的顶点 $v_i,\ v_j \in V$ 在 G 中满足图 $G \setminus v_i$ 和 $G \setminus v_j$ 的邻接矩阵具有相同的谱，则称它们为余谱顶点。

余谱顶点由 Schwenk 引入 [1]，用于研究邻接矩阵的谱是否能够唯一确定图的同构类型。他利用图1中所示的非对称余谱顶点对证明，在 n个顶点的树中，其邻接矩阵的谱能够确定树的比例随着 $n \to \infty$趋于零。

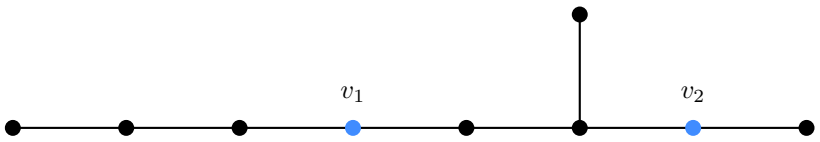

图 1：包含非对称余谱顶点 v_1 和 v_2 的图，二者以蓝色标出。

近来，研究发现，余谱顶点与纯图论以外不同领域的现象有关。一个例子是强余谱顶点，它是余谱性的一个更强版本，源于对图上连续量子游走的研究。研究发现，要在两个顶点之间实现完美态传输，这两个顶点必须是强余谱的 [2, 3]。另一个例子是潜在对称顶点，它在 [4] 中作为网络中顶点对称性的一种推广而被提出。潜在对称顶点的定义是：

*现地址：加拿大滑铁卢大学组合学系，200 University Avenue West, Waterloo。oeerden@uwaterloo.ca

†f.atay@bilkent.edu.tr

在网络的等谱图约化中具有标准图对称性的顶点；等谱图约化是一种在不改变图的邻接矩阵谱的前提下减少图中顶点数量的方法 [5]。潜在对称性具有天然的尺度感，研究表明，它与网络层级分析及网络分解有关 [6]。研究表明，余谱顶点对也是潜在对称的 [7]。此外，研究还证明，对于无向图，逆命题同样成立，因此余谱顶点与潜在对称顶点等同 [7]。余谱顶点也在物理学中得到应用，人们曾利用它们构造出不存在明显对称性的格 [8, 9]。

尽管关于余谱顶点及相关概念已有诸多研究，但解释现有已知余谱顶点实例的理论结果并不多，也缺乏构造新实例的一般方法。在 [10], 中提出了一种从已有余谱顶点得到余谱顶点的显著方法，其中研究了一种保持余谱性的顶点添加／删除操作。虽然其目的并非提供获得新余谱顶点的方法，但近期在 [11] 中针对凯莱图这一特殊情形，给出了一种直接构造余谱顶点（事实上是强余谱顶点）的方法，并利用该构造证明了凯莱图中存在任意大规模的强余谱类。该结果本身沿用了 [12], 中得到的类似结果；在该研究中，作者构造了包含一组两两强余谱顶点的四元集合的凯莱图无限族。另一个聚焦于强余谱顶点的特殊情形见 [13], ，作者给出了在图的笛卡尔积、直积以及图的联接下保持强余谱性的条件，其中一个图为空图或完全图。

本文给出了一种构造余谱顶点的一般方法。该方法不要求图具有任何特定结构，可用于构造具有余谱顶点对的任意大型且复杂的图。我们还提供了一种可修改该构造、同时保留余谱顶点的操作。我们运用这一操作和该构造来解释文献中已有的余谱顶点实例，并给出一些我们自己的实例。此外，我们证明了刻画由此得到的余谱顶点何时也是强余谱顶点的条件。最后，我们从动力学视角将余谱顶点的定义推广到拉普拉斯矩阵。我们注意到，直接照搬原始定义并不能得到相同的拉普拉斯谱；因此，我们采用了一种等价定义，以便进行恰当的推广。根据这一定义，我们得以给出一个针对拉普拉斯余谱顶点的类似构造。

2 符号与背景

假设所有图均非空、无向、连通且无环。记号$G(V, E)$（通常简写为 G）表示一个顶点集有限的图 V，其边集为 E。有时，为了指明特定的图，我们会使用信息更明确的形式 $V(G)$和 $E(G)$。字母 v 的所有形式（例如 v'、 v_i 或 v_i^1）始终表示图的一个顶点。两个顶点 v_i 和 v_j之间的边，即$(v_i, v_j) \in E$，记作 $v_i \sim v_j$。将图 G 中固定顶点 $v_c \in V$ （ G ）的图自同构群记为 $\mathrm{Aut}(G, v_c)$，该作用下的顶点轨道记为 $[v_j]_{v_c} \subseteq V(G)$；也就是说， $[v_j]_{v_c}$ 是图 G中在 $\mathrm{Aut}(G, v_c)$的作用下与 v_j 处于同一轨道的顶点集。

给定一个图 $G(V, E)$，我们考虑向量空间 $\mathbb{R}^n$，其中 $n = |V|$。我们通常将 V与集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$等同，因此顶点 $v \in V$表示一个索引，并用粗体表示 $\mathbb{R}^n$ 中的相应标准基向量；因此，每个顶点 v 都与第 v 个标准

基向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$相关。我们用 $(\boldsymbol{x})_v$表示任意向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的第 v 个分量。类似地，对于矩阵 A，我们将第 (v_i, v_j) 个元素记为 $(A)_{v_i, v_j}$或 A_{v_i, v_j}。给定一个映射$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和一个向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，我们将 $\boldsymbol{x}$ 在 A 作用下生成的子空间定义为$\langle \boldsymbol{x} \rangle_A =$张成空间$\{\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, ..., A^{n-1}\boldsymbol{x}\} =$张成空间$\{\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, ..., A^{n-1}\boldsymbol{x}, \dots\}$。我们用 $\langle \boldsymbol{x} \rangle_A^{\perp}$表示与 $\langle \boldsymbol{x} \rangle_A$ 正交的子空间。

大写字母 A 和 L 分别表示一个图的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵，其中 $L = D - A$，D 表示顶点度的对角矩阵。当需要指定图时，我们也可以写作 $A(G)$ 和 $L(G)$。当存在多个图，并以某种方式$\tilde{}$标记，例如 G、G' 或 G_i时，它们相应的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵 $\tilde{}$也将相应地记为 A、A'、A_i，等等。

我们将 $\phi(G, t)$ 表示邻接矩阵 $\det(tI - A)$ 的特征多项式 A，并将 G 的 Λ_A 特征值集合表示为 A。下面给出 [1]中余谱顶点的定义。

定义 2.1 (余谱顶点)。图 G 的两个不同顶点 $v_i, v_j \in V$ 在 G 中被称为余谱 顶点，如果图 $G \setminus v_i$和 $G \setminus v_j$ 的邻接矩阵的特征多项式相等；即，如果 $\phi(G \setminus v_i, t) = \phi(G \setminus v_j, t)$。

对于无向图 $G(V, E)$，邻接矩阵 A 是对称的，其谱分解为 $A = \sum_{\lambda \in \Lambda_A} \lambda E_\lambda$，其中 E_λ 是到 A的特征子空间上的正交投影映射。下面的定理给出了余谱顶点的等价刻画。

定理 2.2. *[2]* 设 G 是一个图，且 v_i、$v_j \in V(G)$ 是两个不同的顶点。那么，以下条件等价：

1. v_i 和 v_j 是余谱顶点，即 $\phi(G \setminus v_i, t) = \phi(G \setminus v_j, t)$。
2. $(A^k)_{(v_i,v_i)} = (A^k)_{(v_j,v_j)}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。 3. $(E_\lambda)_{(v_i,v_i)} = (E_\lambda)_{(v_j,v_j)}$ 对所有 $\lambda \in \Lambda_A$均成立。 4. 子空间 $\langle \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \rangle_A$ 和 $\langle \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \rangle_A$ 正交。

定理 2.2 的第三个条件等价于投影向量 $E_\lambda \boldsymbol{v}_c$ 和 $E_\lambda \boldsymbol{v}_j$ 的模相等。强余谱性是这一条件的加强版本：

定义 2.3 (强余谱顶点 [2])。设 $G(V, E)$ 是一个图，且 $A = \sum_{\lambda \in \Lambda_A} \lambda E_\lambda$是其邻接矩阵，其中 E_λ 是到 A的特征子空间的正交投影映射。若两个顶点 $v_i, v_j \in V(G)$ 满足 强余谱，则称它们为 $E_\lambda \boldsymbol{v}_i = \pm E_\lambda \boldsymbol{v}_j, \forall \lambda \in \Lambda_A$。

我们将使用余谱性的一个等价定义，并将其推广到拉普拉斯矩阵。为了区分余谱性的不同概念，我们将使用 A-余谱和 L-余谱这两个术语，其中 A-余谱的含义与原始定义 2.1相同。在这些构造中，我们会在括号内注明相关的余谱关系。

定义 2.4 (A-余谱 和 L-余谱顶点)。设 $G(V, E)$ 为一个图，且 $v_i, v_j \in V$ 是 G 的两个顶点。分别以 A 和 L 表示 G 的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵。若在 G 中，由 A 作用生成的子空间 $\langle \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \rangle_A$ 和 $\langle \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \rangle_A$ 正交，即 $\langle \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \rangle_A \perp \langle \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \rangle_A$，则称 v_i 和 v_j 在 G 中是 A-余谱的。类似地，若在 G 中，由 L 作用生成的子空间 $\langle \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \rangle_L$ 和 $\langle \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \rangle_L$ 正交，即 $\langle \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \rangle_L \perp \langle \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \rangle_L$，则称 v_i 和 v_j 在 G 中是 L-余谱 的。

注 2.5。 需要指出的是，文献中存在拉普拉斯余谱图或 L-余谱图的概念（例如 [14, 15]），其定义是拉普拉斯谱相同。我们对拉普拉斯余谱顶点的定义并非这一意义上原始余谱顶点概念的直接推广；因为按照我们对 L-余谱顶点的定义，删除其中一个顶点后得到的图，其拉普拉斯谱不一定相同。我们采用的是另一种定义，它基于由 $\langle \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \rangle_L$ 和 $\langle \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j \rangle_L$ 在 L作用下生成的子空间。尽管这两种定义对于邻接矩阵而言是一致的，但对于拉普拉斯矩阵而言则有所不同。

3 构造余谱顶点

我们给出一种算法过程，利用两个任意的图来构造一对余谱顶点。

构造 I（A-余谱）。设 G 是一个图，其顶点标记为 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V(G)$，其中 $n = |V(G)|$。在 $V(G)$ 中任取一个顶点，并将其记为 v_c；我们称它为该构造中的固定顶点。设 H 是另一个图，其顶点标记为 $v'_1, v'_2, \ldots, v'_r \in V(H)$，其中 $r = |V(H)|$。按如下方式构造图 $\widetilde{G}$：取 H 和两个 G 的副本，分别记为 $G^1(V^1, E^1)$ 和 $G^2(V^2, E^2)$。分别将 G^1 和 G^2 的顶点记为 $v_1^1, v_2^1, \ldots, v_n^1$ 和 $v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2$。现在可在 G^1 和 H 之间任意添加边，但须满足以下条件：对于每一条连接顶点 $v_j^1 \in V(G^1)$ 和顶点 $v'_\alpha \in V(H)$ 的新增边，都应在 v'_α 与某个顶点 $v_m^2 \in V(G^2)$ 之间添加一条边，使得 $v_m \in [v_j]_{v_c}$；也就是说，v_j 和 v_m 在自同构群 $\mathrm{Aut}(G, v_c)$ 的作用下属于 G 中的同一轨道。换言之，在最终的图 $\widetilde{G}$ 中，所有顶点 $v'_\alpha \in V(H)$ 在子图 G^1 和 G^2 的相应轨道中都应具有相同数量的邻点。图 2 展示了该构造的示意图。

我们证明，固定顶点 v_c 及其副本构成一个余谱对。

定理 3.1. 设 G 和 H 是两个图，且设 $\widetilde{G}$ 是按构造 I 构造的图，其中固定顶点为 $v_c \in V(G)$，子图为 G^1、G^2、H。那么，v_c^1 和 v_c^2 在 A-余谱于 $\widetilde{G}$。

证明。令 A 表示 G 的邻接矩阵。我们断言，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，以下结论均成立：

(i) $(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v'_\alpha} = 0$ 对于所有 $v'_\alpha \in V(H)$ (ii) $(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} = -(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^2}$ 对于所有 $v_m \in V(G)$ (iii) $(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} = (\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^1}$ 对于任意 v_m，$v_\ell \in V(G)$，使得 $v_\ell \in [v_m]_{v_c}$。

显然，断言（ii）和（iii）也共同蕴含

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^2} = (\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^2} \text{ for any } v_m, v_\ell \in V(G) \text{ such that } v_\ell \in [v_m]_{v_c}.$$

我们对 k 使用归纳法进行证明。

基例 $k = 0$: 显然。

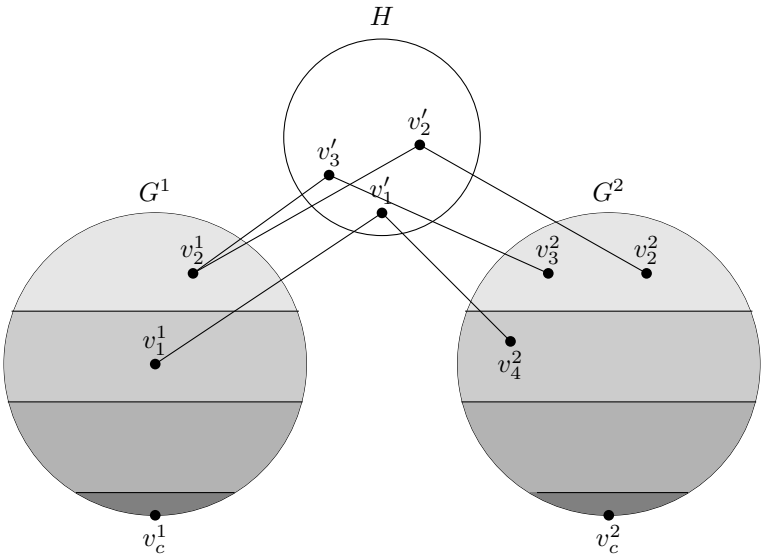

图 2：构造 I 示意图。图 G^1 和 G^2 在自同构群 $\mathrm{Aut}(G, v_c)$ 的作用下被划分为轨道，并以灰度区分，其中最深的灰色区域仅包含 v_c，即该构造的固定顶点。顶点 v_1、v_4 和 v_2、v_3 属于同一轨道。对于从 G^1 中的一个顶点到顶点 $v'_\alpha \in V(H)$ 的每条边，都存在一条对应的边，从同一轨道中的 G^2 的一个顶点连接到 $v'_\alpha \in V(H)$。定理 3.1 证明，在并图 $\widetilde{\ } G$ 中，顶点 v^1_c 和 v^2_c 是 A-余谱的。

归纳步骤：假设断言(i)、(ii) 和(iii) 对 $k-1$成立。我们将证明它们对k也成立。对于任意 $v'_\alpha \in V(H)$ 我们有

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c))_{v'_\alpha} = \sum_{\substack{v'_\beta \sim v'_\alpha \\ v'_\beta \in V(H)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c))_{v'_\beta} + \sum_{\substack{v^1_m \sim v'_\alpha \\ v_m \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c))_{v^1_m} + \sum_{\substack{v^2_\ell \sim v'_\alpha \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c))_{v^2_\ell}. \quad (1)$$

根据断言 (i) 的归纳假设，对于所有 $v'_\beta \in V(H)$，我们有 $(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c))_{v'_\beta} = 0$。因此，$\sum_{v'_\beta \sim v'_\alpha} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c))_{v'_\beta} = 0$。根据构造 I，对于每个满足$_{v'_\beta \in V(H)} v^1_m \sim v'_\alpha$ 的顶点 $v_m \in V(G)$，都存在一个对应的顶点 $v_{\ell_m} \in [v_m]_{v_c}$，使得 $v^2_{\ell_m} \sim v'_\alpha$。利用这些事实，

方程（1）的右边变为

$$\sum_{\substack{v_m^1 \sim v'_\alpha \\ v_m \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} + \sum_{\substack{v_\ell^2 \sim v'_\alpha \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^2}$$
$$= \sum_{\substack{v_m^1 \sim v'_\alpha \\ v_m \in V(G)}} \left[(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} + (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_{\ell_m}^2}\right]$$

其中 $v_{\ell_m} \in [v_m]_{v_c}$ 由构造得到。分别在下面的第一个和第二个等式中使用断言 (ii) 和 (iii)的归纳假设，可得

$$\sum_{\substack{v_m^1 \sim v'_\alpha \\ v_m \in V(G)}} \left[(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} + (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_{\ell_m}^2}\right]$$
$$= \sum_{\substack{v_m^1 \sim v'_\alpha \\ v_m \in V(G)}} \left[(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} - (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_{\ell_m}^1}\right] = 0.$$

因此，（1）的右边为零。这证明了 (i) 对 k 的断言。为证明 (ii)，注意对于任意 $v_m^1 \in V(G^1)$，

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} = \sum_{\substack{v_\ell \sim v_m \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^1} + \sum_{\substack{v'_\alpha \sim v_m^1 \\ v'_\alpha \in V(H)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v'_\alpha}.$$

根据断言 (i) 的归纳假设，第二项为零；因此，

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} = \sum_{\substack{v_\ell \sim v_m \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^1}.$$

根据断言 (ii)，然后根据 (i) 的归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{v_\ell \sim v_m} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^1} &= -\sum_{\substack{v_\ell \sim v_m \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^2} \\ &= -\sum_{\substack{v_\ell \sim v_m \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^2} - \sum_{\substack{v'_\alpha \sim v_m^2 \\ v'_\alpha \in V(H)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v'_\alpha} \\ &= -(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^2},\end{aligned}$$

这证明了断言(ii)。最后，为了证明断言(iii)，令 v_m、$v_\ell \in V(G)$ 为两个满足$v_\ell \in [v_m]_{v_c}$的顶点。那么必定存在一个图自同构 $\gamma \in$ 自同构群(G, v_c) 使得 $\gamma(v_\ell) = v_m$。现在，

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} = \sum_{\substack{v_j \sim v_m \\ v_j \in V(G)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_j^1} + \sum_{\substack{v'_\alpha \sim v_m^1 \\ v'_\alpha \in V(H)}} (\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v'_\alpha}.$$

由于根据断言(i)的归纳假设，最后一项为零，

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1}=\sum_{\substack{v_j\sim v_m\\ v_j\in V(G)}}(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_j^1}. \tag{2}$$

根据以下事实： v_m 和 v_ℓ 在 G中经由 γ 所对应的邻点属于同一自同构轨道，并根据断言 (iii)的归纳假设，可得

$$\sum_{\substack{v_j\sim v_m\\ v_j\in V(G)}}(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_j^1}=\sum_{\substack{v_s\sim v_\ell\\ v_s\in V(G)}}(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_s^1}$$

由于 $(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))^{v_m^1}=\sum_{v_j\in V}^{v_j\sim v_m}G()(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))^{v_j^1}$ 对于任意顶点 $v_m\in V(G)$，方程 (2)现在推出

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1}&=\sum_{\substack{v_j\sim v_m\\ v_j\in V(G)}}(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_j^1}\\ &=\sum_{\substack{v_s\sim v_\ell\\ v_s\in V(G)}}(\widetilde{A}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_s^1}=(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_\ell^1}\end{aligned}$$

由此证明了断言 (iii) ，并完成了归纳论证。

现在我们已经证明了断言 (ii)，即

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1}=-(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^2},\quad \forall v_m\in V(G)\text{ and }k\in\mathbb{N}.$$

特别地，这意味着对于所有 $k\in\mathbb{N}$,

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_c^1}+(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))_{v_c^2}=(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2))^T(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)=0.$$

因此，我们得出 $\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2\perp\langle\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2\rangle_{\widetilde{A}}$，或者（由于 $\widetilde{A}$ 是对称的）等价地,

$$\langle\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2\rangle_{\widetilde{A}}\perp\langle\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2\rangle_{\widetilde{A}}.$$

因此， v_c^1 和 v_c^2 在 $\widetilde{G}$中是 A-余谱的。 □

例 3.2。图 3 展示了一个符合构造 I 的简单例子。在图中，子图 G^1 和 G^2 以红色顶点和边突出显示，黑色顶点可视为 H。该构造的固定顶点为 $v_c=v_1$。顶点 v_1^1 和 v_1^2 以蓝色标示。可以看出，红色顶点 v_2、 v_3 和 v_4 在 Aut(G,v_1)作用下都属于同一个轨道。连接 H 和 G^1的顶点与 G^2 的边也满足构造 I 的要求。根据定理 3.1，顶点 v_1^1 和 v_1^2 是 A-余谱的。

例 3.3. 另一个余谱顶点的例子，取自 [7], ，如图 4所示，其中余谱性可由构造 I 和定理 3.1得出。

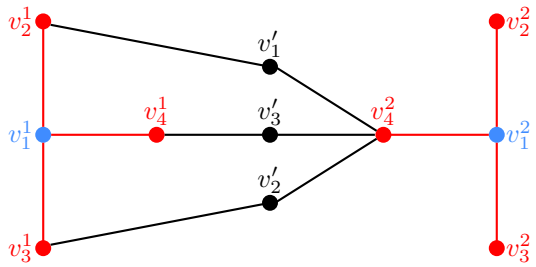

图 3：红色子图与蓝色顶点彼此同构，分别表示构造 G^1 和 G^2 中的子图I。它们与中间黑色顶点（表示子图）的连接 H满足构造I的条件，因此根据定理3.1，顶点 v_1^1 和 v_1^2 是 A-余谱的。

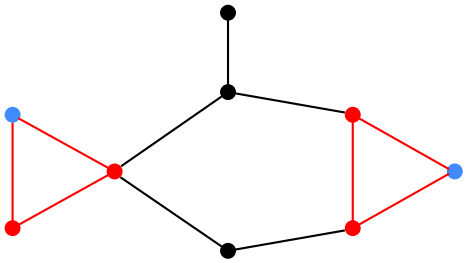

图 4：红色子图对应于构造 G^1 和 G^2 中的I，蓝色顶点则对应于 A-余谱顶点。

注3.4. 与图 G相关联的向量空间 $\mathbb{R}^n$，连同图的邻接矩阵A，可以看作一个动力系统，其中 $\mathbb{R}^n$ 是相空间，A 是定义该动力学的线性映射。向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 于是成为该动力系统的“状态”，其值定义在图 G的顶点上。从这个角度看，定理 3.1 就更清楚了。~事实上，该定理之所以成立，是因为在由图 G的邻接~ ~ ~矩阵 A 所诱导的动力系统中，“初始条件” $\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2$沿着轨迹 $\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2, A(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2)$ $A^2(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2)$依次演化，其状态 $\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2)$在对应于子图 H的分量上的值始终为 0；也就是说，

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v'_\alpha} = 0, \quad \forall v'_\alpha \in V(H), \forall k \in \mathbb{N}.$$

本质上，这意味着在此初始条件下，这些顶点的存在不会影响动力系统；实际上，系统的行为就像在子图 G^1 和 G^2上运行着两个相同且互不相交的子动力系统，这一点可由

$$(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^1} = -(\widetilde{A}^k(\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2))_{v_m^2}, \quad \forall v_m \in V(G), \forall k \in \mathbb{N}.$$

最后这个等式意味着 $\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2 \perp \langle \boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2 \rangle_{\widetilde{A}}$，这与余谱性等价。

只要不破坏内在的动力学对称性，就可以对构造 I 进行修改，同时仍保持余谱性。下面的构造 II给出了一种这样的操作。

~**构造 II** (A-余谱)。 设 G 是由图 G和 H通过构造 I 得到的图，固定顶点为 $v_c \in V(G)$。考虑在自同构群(G, v_c) 作用下的顶点轨道 $[v_j]_{v_c}$ ，该作用于 G上。在图 $\widetilde{G}$中，根据构造有两份 G ，G^1 和 G^2，因此这些轨道也各有两份，记为

$$[v_j^1]_{v_c} \subseteq V(G^1), \quad [v_j^2]_{v_c} \subseteq V(G^2).$$

现在通过将 $[v_j^1]_{v_c}$ 的顶点与 $[v_j^2]_{v_c}$ 的顶点一一对应地连接，从 $\widetilde{G}$ 构造图 $\widehat{G}$ ；也就是说，将每个 $v_m^1 \in [v_j^1]_{v_c}$ 恰好连接到 $[v_j^2]_{v_c}$ 中的一个顶点，使得每个 $v_k^2 \in [v_j^2]_{v_c}$ 也恰好连接到 $[v_j^1]_{v_c}$ 中的一个顶点。

~**引理 3.5.** 设 G 是通过构造法 *I*得到的图，其中一对 A余谱顶点 v_c^1 和 v_c^2。若 $\widetilde{G}$ 按照构造法 *II* 所述进行修改，得到新图 $\widehat{G}$，那么， v_c^1 和 v_c^2 仍然 A 在 $\widehat{G}$ 中余谱。

注 3.6。 注意，可以用不同方式应用构造法 II 来构造不同的图。图 5给出了一个例子。

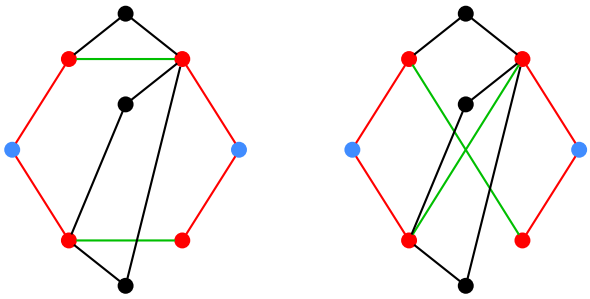

图 5：将构造 II 应用于由构造 I得到的图。这里，红色子图分别对应于构造 G^1 和 G^2 中的 I，其中 A-余谱顶点以蓝色标出。绿色边是在以两种不同方式应用构造 II 时添加的边。不难看出，这两个图不同构（右图中，度为 4 和 5 的两个顶点相连，而左图中并未相连）。根据引理 3.5，在两个图中，蓝色顶点仍然是 A-余谱的。

例 3.7。 利用定理3.1和引理3.5，我们可以阐明文献中关于余谱顶点和潜在对称性的许多例子。图6给出了其中三个例子，其中对应于 G^1 和 G^2 的子图以红色标出，而 A-余谱顶点以蓝色标出。

尽管上文给出的所有 A-余谱顶点示例都是利用小型子图 G 和 H构造的，但在构造 I中， G或 H 的大小都没有上界。

还有一种略有不同的拉普拉斯构造I其中不再是G^1 和 G^2 连接到 H的顶点，而是它们彼此连接，同时遵循轨道结构。

构造 III (L-余谱)。 设 G 为一个图。在 $v_c \in V(G)$ 中选取一个顶点；我们称其为该构造的固定顶点 。将 G 的顶点按

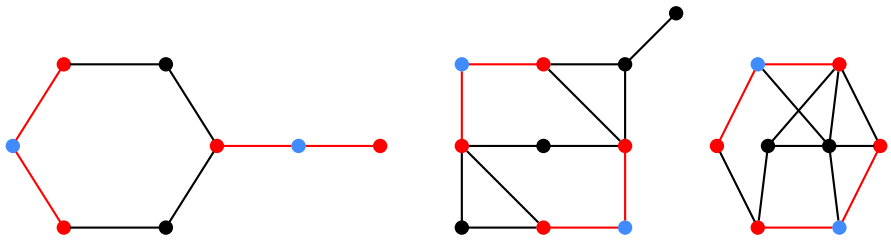

图 6：这三个图均来自 [4]。在每个图中，蓝色顶点对并不对称，但 A余谱同，因此在潜在意义上对称。最左侧的图可以通过构造I 得到，另外两个图则可以通过构造II得到。

自同构群(G, v_c)的作用划分为轨道。现在，取 G 的两个副本，并将它们分别记为 $G^1(V^1, E^1)$ 和 $G^2(V^2, E^2)$。（将 G^1 和 G^2 的顶点记为 v_j^1、v_k^2 等。）最后，通过在 G^1 和 G^2 之间添加任意数量的边来构造一个新图 $\widetilde{G}$，但须满足以下条件：每条连接顶点$v_j^1 \in V(G^1)$与顶点 $v_m^2 \in V(G^2)$的边，都必须连接属于同一轨道的顶点；也就是说，如果 $(v_j^1, v_m^2) \in E(\widetilde{G})$，那么必须有 $v_m \in [v_j]_{v_c}$。该构造的示意图见图7。

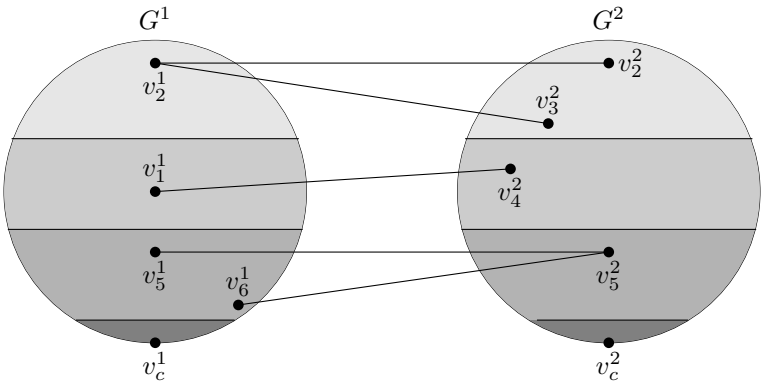

图7：构造 III 的示意图。图 G^1 和 G^2 在自同构群 Aut(G, v_c)的作用下被划分为若干轨道。这些轨道以不同深浅的灰色表示，其中最深的灰色区域仅包含 v_c。顶点 v_5、v_6；v_1、v_4 以及 v_2、v_3 分别属于同一轨道。G^1 与 G^2 的顶点之间的每条边，都连接属于同一轨道副本的顶点。根据定理 3.8，图 G中的~顶点 v_c^1 和 v_c^2 是 L-余谱同的。

~**定理 3.8.** 设 G 是一个图，且 G 由 G 通过构造 *III*得到，其中固定顶点为 $v_c \in V(G)$，子图为 G^1、G^2。那么 v_c^1 和 v_c^2 在 L中是 $\widetilde{G}$-余谱的。

4 构造强余谱顶点

本节将证明，在某些条件下，构造 AI中的余谱顶点也是强余谱的。首先，我们需要一些预备结果，其中第一个结果见下述引理。

引理 4.1. 设 G 是一个图，$v_i \in V(G)$ 是 G 的一个顶点。考虑群 自同构群(G, v_i) 的作用下 G 的轨道 $[v_j]_{v_i}$ 。再考虑与顶点 v_i 关联的标准基向量 $\boldsymbol{v}_i$ ，以及 $\boldsymbol{v}_i$ 关于邻接矩阵 $A(G)$ 的特征向量 $\boldsymbol{w}_\lambda$ 的谱分解：

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{\lambda \in \Lambda_A} c_\lambda \boldsymbol{w}_\lambda.$$

那么，对于所有满足 $c_\lambda \neq 0$ 的 $\lambda \in \Lambda_A$ ，以及同一轨道中的所有顶点 v_ℓ, v_m ，即对于所有满足 $v_m \in [v_\ell]_{v_i}$ 的 $v_\ell, v_m \in V(G)$ ，都有 $(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_\ell} = (\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_m}$ 。

除了对本文后续内容有用之外，以下定理本身也值得关注。

~**定理 4.2.** 设 G 和 H 是两个图，且 G 是通过构造 I从它们构造出的图，其中固定顶点为 $v_c \in V(G)$。考虑图 G中的顶点 v_c 。与该顶点关联的标准基向量 $\boldsymbol{v}_c$ 关于邻接矩阵 $A(G)$的谱分解为

$$\boldsymbol{v}_c = \sum_{\lambda \in \Lambda_A} c_\lambda \, \boldsymbol{w}_\lambda.$$

~若 $c_\lambda \neq 0$ 属于此谱分解，则 λ 也是 A（G）的特征值。

证明。 我们知道， $\widetilde{G}$ 的顶点可以划分为子图 G^1、G^2 和 H的顶点。设 $\lambda \in \Lambda_A$ 是 A 的一个特征值，且 $c_\lambda \neq 0$ 属于 $\boldsymbol{v}_c$的谱分解。考虑与 $A(G)$的特征向量 $\boldsymbol{w}_\lambda$ 相关联的向量 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda \in \mathbb{R}^{|V(\widetilde{G})|}$，其对 $v \in V(\widetilde{G})$ 定义如下：

$$(\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_v := \begin{cases} 0 & \text{if } v = v'_\alpha \in V(H) \\ (\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_k} & \text{if } v = v^1_k \in V(G^1) \\ -(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_k} & \text{if } v = v^2_k \in V(G^2) \end{cases}$$

We ~ ~ ~将证明 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 是 $A = A(G)$的特征向量。对于 G的顶点 $v'_\alpha \in V(H)$，我们有 e

$$(\widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\alpha} = \sum_{\substack{v^1_k \sim v'_\alpha \\ v_k \in V(G)}} (\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v^1_k} + \sum_{\substack{v^2_\ell \sim v'_\alpha \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v^2_\ell} + \sum_{\substack{v'_\beta \sim v'_\alpha \\ v'_\beta \in V(H)}} (\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\beta}$$

$$= \sum_{\substack{v^1_k \sim v'_\alpha \\ v_k \in V(G)}} (\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_k} - \sum_{\substack{v^2_\ell \sim v'_\alpha \\ v_\ell \in V(G)}} (\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_\ell}$$

其中最后一个等式由 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$的定义可得。根据构造I，顶点 $v'_\alpha \in V(H)$ 与 G^1 和 G^2的对应轨道相连的边数相等。换言之，对于顶点 $v'_\alpha \in V(H)$ 与 $v^1_k \in V(G^1)$之间的每条边，都存在一条相应的边连接

v'_α 和顶点 $v^2_\ell \in V(G^2)$ 使得 $v_\ell \in [v_k]_{v_c}$，反之亦然。这一事实与引理4.1 共同推出

$$(\widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\alpha} = \sum_{\substack{v^1_k \sim v'_\alpha \\ v_k \in V(G)}} (\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_k} - \sum_{\substack{v^2_\ell \sim v'_\alpha \\ v_\ell \in V(G)}} (\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_\ell} = 0 = \lambda(\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\alpha}.$$

对于顶点 $v^1_k \in V(G^1)$，我们有

$$(\widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v^1_k} = \sum_{\substack{v_\ell \sim v_k \\ v_\ell \in V(G)}} (\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v^1_\ell} + \sum_{\substack{v'_\alpha \sim v^1_k \\ v'_\alpha \in V(H)}} (\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\alpha} = \sum_{\substack{v_\ell \sim v_k \\ v_\ell \in V(G)}} (\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_\ell}$$

$$= \lambda(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_k} = \lambda(\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v^1_k}$$

其中，第二个和第四个等式由 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 的定义得出，第三个等式则是因为 $\boldsymbol{w}_\lambda$ 是 $A(G)$ 对应于特征值 λ 的特征向量。对 G^2 的顶点也可作类似论证。因此，

$$\widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda = \lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$$

，因此 λ 是 A 的一个特征值，断言得证。 □

定义 4.3. 我们将 A在定理4.2中考虑的特征值称为 A 由经 G诱导的特征值，并将这类特征值组成的集合记为 Λ^A_G。在定理 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 4.2 的证明中构造的特征向量的归一化版本 类似地称为 由 A 经 G诱导的特征向量。

引理 4.4. 设 G 和 H 是两个图。设 G 是按照构造 I构造的图，其中固定顶点为 $v_c \in V(G)$，子图为 G^1、 G^2、 H。考虑邻接矩阵 $\widetilde{A}$、它的特征向量以及向量 $\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c$。谱分解

$$\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\widetilde{A}}} c_\lambda \boldsymbol{y}_\lambda$$

属于 $\boldsymbol{v}^1_c - \boldsymbol{v}^2_c$ 的特征向量恰好是由 G 诱导的 $\widetilde{A}$ 的那些特征向量。也就是说，如果 $c_\lambda \neq 0$、，那么 λ 是由 G 诱导的 A 的特征值，而特征向量 $\boldsymbol{y}_\lambda$ 等于由 G 诱导的 A 的特征向量 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$。

下一个结果表明，只需检查由 A 诱导的 G 的特征值，即可确保通过构造I 得到的 A-余谱顶点的强余谱性。

定理 4.5。 设 G 和 H 是两个图，并设 G 是通过构造 I 由它们得到的图，其中固定顶点为 $v_c \in V(G)$。假设由 G 诱导的 A 的特征值都是 $\widetilde{A}$ 的单特征值。那么，顶点 v^1_c 和 v^2_c 强余谱。

证明。 考虑 A-余谱顶点 v^1_c 和 v^2_c。现在，关于邻接矩阵 $\widetilde{A} = A(\widetilde{G})$， $\boldsymbol{v}^1_c$ 和 $\boldsymbol{v}^2_c$ 的谱分解为

$$\boldsymbol{v}^1_c = \sum_{\lambda \in \Lambda^{\widetilde{A}}_{\widetilde{G}}} \alpha^1_\lambda \widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda + \sum_{\lambda \in X} \beta^1_\lambda \boldsymbol{y}^1_\lambda \quad \text{and} \quad \boldsymbol{v}^2_c = \sum_{\lambda \in \Lambda^{\widetilde{A}}_{\widetilde{G}}} \alpha^2_\lambda \widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda + \sum_{\lambda \in X} \beta^2_\lambda \boldsymbol{y}^2_\lambda \tag{3}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 是由 G诱导的 $\widetilde{A}$的特征向量； $\boldsymbol{y}_\lambda^1$、 $\boldsymbol{y}_\lambda^2$ 表示 $\widetilde{A}$的其他特征向量，并且

$$X := \left(\Lambda_{\widetilde{A}} \setminus \Lambda_G^{\widetilde{A}}\right) \cup \left\{\lambda \in \Lambda_G^{\widetilde{A}} \mid \mu_{\widetilde{A}}(\lambda) > 1\right\}$$

$\widetilde{\ }$表示 A 中未由 G诱导出的特征值集合。这里，$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda)$是 λ 作为 A的$\widetilde{\ }$特征值时的重数。注意，如果 A 由 G 诱导出的某些特征值作为 $\widetilde{A}$的特征值时，其重数为$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda) > 1$，那么 X 可能也包含这些特征值。若是如此，在（3）中，与 λ 对应的特征向量 $\boldsymbol{y}_\lambda^1$ 和 $\boldsymbol{y}_\lambda^2$ 选取为与特征向量 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$正交。

现在，向量 $\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2$ 也有一个谱分解，根据引理4.4，其中应仅包含$\widetilde{\ }$特征向量 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$，它们属于 A 由 G诱导出的特征向量，即其形式为

$$\boldsymbol{v}_c^1 - \boldsymbol{v}_c^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda_G^{\widetilde{A}}} (\alpha_\lambda^1 - \alpha_\lambda^2)\, \widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda.$$

由（3），可直接推出

$$\beta_\lambda := \beta_\lambda^1 = \beta_\lambda^2 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{y}_\lambda := \boldsymbol{y}_\lambda^1 = \boldsymbol{y}_\lambda^2, \quad \forall \lambda \in X.$$

（后者并不显然，因为如果 λ 的特征子空间维数大于一， $\boldsymbol{y}_\lambda^1$ 和 $\boldsymbol{y}_\lambda^2$ 可能是同一特征值对应的不同特征向量。）此外，

$$\alpha_\lambda := \alpha_\lambda^1 = \widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda^T \boldsymbol{v}_c^1 = -\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda^T \boldsymbol{v}_c^2 = -\alpha_\lambda^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda_G^{\widetilde{A}},$$

其中等式由（3）及 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$的定义得出，并将其缩放为单位向量。现在，对于$\sim\lambda \in \Lambda_{\widetilde{A}}$，令 E_λ 为投影到 A 对应于 λ的特征子空间上的正交投影映射。那么，

$$\begin{aligned} E_\lambda \boldsymbol{v}_c^1 = E_\lambda \boldsymbol{v}_c^2 = \beta_\lambda \boldsymbol{y}_\lambda \qquad & \text{if } \lambda \in X \text{ and } \lambda \notin \Lambda_G^{\widetilde{A}}, \\ E_\lambda \boldsymbol{v}_c^1 = -E_\lambda \boldsymbol{v}_c^2 = \alpha_\lambda \widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda \quad & \text{if } \lambda \notin X \text{ and } \lambda \in \Lambda_G^{\widetilde{A}}. \end{aligned}$$

这意味着，如果 $X \cap \Lambda_G^{\widetilde{A}} = \emptyset$，即如果由 G 诱导的 $\widetilde{A}$ 的特征值全都是 $\widetilde{A}$的单特征值，那么 v_c^1 和 v_c^2 在 $\widetilde{G}$中是强余谱的。 □

$\sim$备注 4.6。 定理 4.5 在存在 $\lambda \in X \cap \Lambda_G^A$时不成立，等价地说，在存在 $\lambda \in \Lambda_G^{\widetilde{A}}$且其作为 $\widetilde{A}$的特征值时重数为 $\mu_{\widetilde{A}}$（λ） > 1 的情况下不成立。在这种情况下，我们有 $E_\lambda \boldsymbol{v}_c^1 = \beta_\lambda \boldsymbol{y}_\lambda + \alpha_\lambda \widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 以及 $E_\lambda \boldsymbol{v}_c^2 = \beta_\lambda \boldsymbol{y}_\lambda - \alpha_\lambda \widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$，因此一般而言，这些向量会变得线性无关。然而，由于构造 I 在对子图 H进行修改后仍然成立，因此可以在保持 v_c^1 和 v_c^2余谱性的同时，消除这类特征值简并。引理 4.7 给出了一种可能有助于进行此类修改的操作。

引理 *4.7.* 设 G 是一个图， λ 是 $A(G)$ 的一个特征值，其重数为 $\mu_A(\lambda) = \ell > 1$。设 $\boldsymbol{y}_\lambda$ 是与 λ 相关联的 $A(G)$ 的一个特征向量。对于某个 $v_m \in V(G)$，有 $(\boldsymbol{y}_\lambda)_{v_m} \neq 0$。令 $\sim G$ 为从 G 通过连接单个顶点 $\hat{}v$ 到 v_m 得到的图。那么， λ 作为 $A(G)$ 的特征值的重数 $\mu_{\widehat{A}}(\lambda)\widehat{\ }$ 等于 $\ell - 1$。

其余证明内容见附录。

致谢

O.E.E.感谢土耳其科学技术研究理事会为本研究提供奖学金资助（BİDEB 2211 国内研究生奖学金计划）。

证明

引理的证明 *3.5*。 在定理 3.1 的证明中，我们提出了三个独立的断言，并通过归纳法一并证明。显然，连接轨道这一操作不会影响这三个断言的基例。断言 (i) 的归纳步骤显然也不受影响。断言 (ii) 和(iii)的归纳步骤也仍然成立；因为在归纳步骤中，根据连接轨道这一操作的定义，并利用断言 (ii) 和 (iii)的归纳假设，新添加的边会在断言 (ii) 和(iii)的等式两边贡献相同的项。因此，定理 3.1 的证明仍然适用，故 v_c^1 和 v_c^2 是 A-同谱于 G。

□

定理 *3.8*的证明。 我们断言，以下结论对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立：

(i) $\left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} = \left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^2}$,

(ii) $\left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} = \left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^1}, \forall v_m, v_j \in V(G)$ such that $v_j \in [v_m]_{v_c}$.

显然，断言 (i) 和 (ii) 共同推出 $(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2))^{v_m^2} = (\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2))^{v_j^2}$ 也成立。我们将用归纳法证明。

基例 $k = 0$：显然。

归纳步骤：假设断言 (i) 和 (ii) 对 $k-1$成立。我们将证明它们对 k也成立。为证明断言 (i)，对于任意 $v_m \in V(G)$，

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} &= d_{v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} - \sum_{v_j \sim v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^1} \\ &\quad + \sum_{\substack{v_\ell \in V(G) \\ v_\ell^2 \sim v_m^1}}\left[\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} - \left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_\ell^2}\right] \\ &= d_{v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^2} - \sum_{v_j \sim v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1 + \boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^2}\end{aligned}$$

其中我们对断言使用了归纳假设（i）和（ii）以及以下构造事实：

若 $v_\ell^2 \sim v_m^1$，则 $v_\ell \in [v_m]_{v_c\circ}$。同理，我们得到

$$\begin{aligned}
&d_{v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^2} - \sum_{v_j\sim v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^2}\\
&= d_{v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^2} - \sum_{v_j\sim v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^2}\\
&\qquad + \sum_{\substack{v_\ell\in V(G)\\ v_\ell^1\sim v_m^2}}\left[\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^2} - \left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_\ell^1}\right]\\
&= \left(\widetilde{L}^{k}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^2}
\end{aligned}$$

证明断言(i)。现在证明断言(ii)，考虑两个顶点 v_m，$v_j \in V(G)$ 使得 $v_j \in [v_m]_{v_c\circ}$ 我们有

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{L}^{k}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} &= d_{v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} - \sum_{v_\ell\sim v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_\ell^1}\\
&\qquad + \sum_{\substack{v_r\in V(G)\\ v_r^2\sim v_m^1}}\left[\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} - \left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_r^2}\right]\\
&= d_{v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} - \sum_{v_\ell\sim v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_\ell^1} \qquad (4)
\end{aligned}$$

这里与断言(i)类似，我们对断言(i) 和(ii) 使用归纳假设，并利用如下事实：若 $v_r^2 \sim v_m^1$ 则 $v_r \in [v_m]_{v_c\circ}$ 现在，由于 v_j 和 v_m 属于同一个自同构轨道，因此它们的邻点也属于同一个自同构轨道。于是，根据断言(ii)，(4)变为

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{L}^{k}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} &= d_{v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_m^1} - \sum_{v_\ell\sim v_m}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_\ell^1}\\
&= d_{v_j}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^1} - \sum_{v_s\sim v_j}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_s^1}\\
&= d_{v_j}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^1} - \sum_{v_s\sim v_j}\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_s^1}\\
&\qquad + \sum_{\substack{v_r\in V(G)\\ v_r^2\sim v_j^1}}\left[\left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^1} - \left(\widetilde{L}^{k-1}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_r^2}\right]\\
&= \left(\widetilde{L}^{k}(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_j^1}
\end{aligned}$$

其中，在第二个等式中我们用到了这一事实： $d_{v_m} = d_{v_j}$ 在第三个等式中，我们则使用了关于断言(i) 和(ii) 的归纳假设，以及以下事实：若 $v_r^2 \sim v_j^1$，则 $v_r \in [v_j]_{v_c}$，与之前类似。因此，我们已经证明了断言(ii)，归纳论证至此完成。

现在，我们特别证明了 $\left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_c^1}=\left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)_{v_c^2}, \forall k\in\mathbb{N}$。等价地,

$$\left(\widetilde{L}^k(\boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2)\right)^T(\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2)=0 \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

因此，$\langle \boldsymbol{v}_c^1+\boldsymbol{v}_c^2\rangle_{\widetilde{L}} \perp \langle \boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2\rangle_{\widetilde{L}}$，所以 v_c^1 和 v_c^2 在 $\widetilde{G}$中是 L-余谱的。 □

引理的证明 *4.1*。由于 v_ℓ 和 v_m 属于同一个轨道 $[v_\ell]_{v_i}$,

$$(A^k\boldsymbol{v}_i)_{v_\ell}=(A^k\boldsymbol{v}_i)_{v_m} \quad \forall k\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

现在，$(A^k\boldsymbol{v}_i)_{v_\ell}$ 和 $(A^k\boldsymbol{v}_i)_{v_m}$ 可以写成

$$(A^k\boldsymbol{v}_i)_{v_\ell}=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}\lambda^k c_\lambda(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_\ell} \quad \text{and} \quad (A^k\boldsymbol{v}_i)_{v_m}=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}\lambda^k c_\lambda(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_m}.$$

因此，（5）等价于

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_A}\lambda^k c_\lambda(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_\ell}=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}\lambda^k c_\lambda(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_m} \quad \forall k\in\mathbb{N},$$

这意味着，对于所有满足 $c_\lambda\neq 0$的 $\lambda\in\Lambda_A$，

$$(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_\ell}=(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_m}.$$ □

引理的证明 *4.4*。设 $\boldsymbol{v}_c=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\boldsymbol{w}_\lambda$ 是 $\boldsymbol{v}_c$ 关于$\sim A(G)$ 的谱分解，并设 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 表示由 G诱导的 A。考虑向量 $\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$。我们将证明 $\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$。

令 $v'_\alpha\in V(H)$。那么 $(\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\alpha}=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda(\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\alpha}=0$，因为对于由 G 诱导的 A 的所有特征向量，$(\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v'_\alpha}=0$ $\widetilde{}$。

令 $v_k^1\in V(G^1)$。那么

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda\Big)_{v_k^1}&=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda(\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda)_{v_k^1}=\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda(\boldsymbol{w}_\lambda)_{v_k}\\&=\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\boldsymbol{w}_\lambda\Big)_{v_k}=(\boldsymbol{v}_c)_{v_k}=\begin{cases}0 & \text{if } v_k\neq v_c\\ 1 & \text{if } v_k=v_c\end{cases}\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda\Big)_{v_k^2}=\begin{cases}0 & \text{if } v_k\neq v_c\\ -1 & \text{if } v_k=v_c.\end{cases}$$

因此，$\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda=\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2$。根据定理 4.2，如果 $c_\lambda\neq 0$ 是 $\boldsymbol{v}_c$的谱分解中的$\widetilde{}$，那么 $\lambda\in\Lambda_A$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 是 A的特征值和特征向量。由于向量的谱分解是唯一的，这意味着 $\sum_{\lambda\in\Lambda_A}c_\lambda\widetilde{\boldsymbol{w}}_\lambda$ 是 $\boldsymbol{v}_c^1-\boldsymbol{v}_c^2$ 关于$\widetilde{}$相对于 A的谱分解。

□

^引理的证明 4.7。设 $n = |V(G)|$。我们可以假设图 G 的顶点按与 G 的顶点相同的顺序编号，只是额外顶点 $\hat{v}$ 是最后一个$(n+1)$阶^顶点。因此， $A(G)$ 可以假设具有如下形式

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A & & 1 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

最后一行和一列中的非零项位于 $(\hat{v}, v_m)$ 和 $(v_m, \hat{v})$ 位置。

^我们将稍作修改，沿用 [16] 中定理 9.5.1 的证明。令 $\lambda_i(A)$ 和 $\lambda_i(A)$^分别表示 A 和 A 中按重数计的第 i 大特征值。现在假设，与 λ 对应的 A 的特征值 $\lambda_i(A)$ 从 $i = j$ 到 $i = j + \ell - 1$。由于 A 是通过删除 A 的一个顶点（即删除对应于 $\hat{v}$ 的一行和一列）得到的，因此交错定理^（例如 [16, 定理 9.5.1]）表明， A 的特征值与 A 的特征值相互交错，即

$$\lambda_i(\widehat{A}) \geq \lambda_i(A) \geq \lambda_{i+1}(\widehat{A}) \quad \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

现在，令 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ 为 A 的一组标准正交特征向量，其特征值为 $\lambda_1(A)$ $\lambda_2(A) \ldots, \lambda_n(A)$^，且满足 $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{y}_\lambda$；令 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n+1}$ 为 A 的一组标准正交特征向量，其特征值为 $\lambda_1(A)$ $\lambda_2(A) \ldots, \lambda_{n+1}(A)$。令 W_i 和 U_i 分别表示由 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_i$ 和$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i$ 张成的子空间。最后，令

$$R = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{1 \times n} \end{bmatrix}$$

b ^是从 A中删除与顶点$\hat{v}$ vi对应的行和列后得到的矩阵 a

$$R^T \widehat{A} R = A.$$

现在，对于任意 $i = 1$、.....、 n，我们有 W_i 是 i维的，而 $R^T U_{i-1}$ 至多是$(i-1)$维的。因此，取 $i = j$，存在一个向量 $\boldsymbol{y} \in W_j \cap (R^T U_{j-1})^\perp$。该向量满足

$$\boldsymbol{y}^T R^T \boldsymbol{u}_k = 0 \quad \text{for } k = 1, \ldots, j-1$$

因此 $R\boldsymbol{y} \in U_{j-1}^\perp$。由瑞利不等式可知

$$\lambda_j(\widehat{A}) \geq \frac{(R\boldsymbol{y})^T \widehat{A}(R\boldsymbol{y})}{(R\boldsymbol{y})^T R\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^T A \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}} \geq \lambda_j(A) = \lambda$$

^当且仅当 $\boldsymbol{y}$ 和 $R\boldsymbol{y}$ 分别是 A 和 A的特征向量，且特征值为λ时，等号成立。现在，如果 $\boldsymbol{y}$ 和 $R\boldsymbol{y}$ 是特征值为 λ的特征向量，那么必然有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_\lambda$ ，因为 W_j中只有一个关于特征值 λ 的线性无关特征向量。但这意味着 $R\boldsymbol{y}_\lambda$ 是 A 的一个^特征向量，特征值为 λ。然而，

$$(\widehat{A} R\boldsymbol{y}_\lambda)_{\hat{v}} = (R\boldsymbol{y}_\lambda)_{v_m} = (\boldsymbol{y}_\lambda)_{v_m} \neq 0 \quad \text{and} \quad (R\boldsymbol{y}_\lambda)_{\hat{v}} = 0$$

其中，左边的等号源于以下事实：$\hat{v}$ 只有一个邻点 v_m，并且根据假设，$(\boldsymbol{y}_\lambda)_{v_m} \neq 0$；右边的等号则根据 R的定义得出。因此，

$$0 \neq (\widehat{A}R\boldsymbol{y}_\lambda)_{\hat{v}} = \lambda(R\boldsymbol{y}_\lambda)_{\hat{v}} = \lambda \cdot 0 = 0$$

这与假设矛盾。因此，我们得到的瑞利不等式都是严格不等式，所以我们 $\widehat{}$ $\widehat{}$必有 $\lambda_j(A) > \lambda_j(A)$。对 $-A$ 和 $-A$使用相同的论证，可得

$$-\lambda_{j+\ell}(\widehat{A}) = \lambda_{n+2-j-\ell}(-\widehat{A}) > \lambda_{n+2-j-\ell}(-A) = -\lambda_{j+\ell-1}(A).$$

因此

$$\lambda_{j+\ell-1}(A) > \lambda_{j+\ell}(\widehat{A}).$$

由于

$$\lambda_j(A) = \lambda_{j+1}(A) = \cdots = \lambda_{j+\ell-1}(A),$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$交错定理表明， A 的特征值中，只有 $\lambda_{j+1}(A) \ldots, \lambda_{j+\ell-1}(A)$等于 λ。因此， $= \ell - 1$ A的特征值⁀λ 的重数为$\mu_{\widehat{A}}(\lambda)$。 □

参考文献

[1] A. J. Schwenk. 几乎所有树都是余谱的。载于 Frank Harary 编，《图论新方向》，第 275–307 页。Academic Press，纽约，1973 年。[2] Chris D. Godsil 和 Jamie Smith. 强余谱顶点。《Australasian Journal of Com- binatorics》，88：1–21，2024 年。[3] G. de Morais Coutinho. 谱极值顶点、强余谱性与态传输。《电子组合学杂志》，23(1)，2016 年。[4] D. Smith 和 B. Webb. 现实网络与理论网络中的隐藏对称性。《物理学A：统计力学及其应用》，514：855–867，2019 年。[5] L. Bunimovich 和 B. Webb.《等谱变换》。Springer，纽约，2014 年。[6] L. Bunimovich、D. Smith 和 B. Webb. 通过等谱约化发现网络中的隐藏结构、层级结构和核心。《应用数学与非线性科学》，4(1)：231–254，2019 年。[7] M. Kempton、J. Sinkovic、D. Smith 和 B. Webb. 通过等谱约化刻画余谱顶点。《线性代数及其应用》，594：226–248，2020 年。[8] C. V. Morfonios、M. Röntgen、M. Pyzh 和 P. Schmelcher. 潜在对称性产生的平带。《物理评论B》，104(3)：035105，2021 年。[9] M. Röntgen、X. Chen、W. Gao、M. Pyzh、P. Schmelcher、V. Pagneux 和 A. Coutant. 受隐藏对称性保护的拓扑态。《物理评论B》，110(3)：035106，2024 年。[10] C. V. Morfonios、M. Pyzh、M. Röntgen 和 P. Schmelcher. 通过顶点的游走等价性保持余谱性的图修改及特征向量性质。《线性代数及其应用》，624：53–86，2021 年。

[11] P. Sin. 凯莱图中大量的强余谱顶点。《Vietnam Journal of Math- ematics》，52(2)：411–420，2024 年。[12] A. S. Árnadóttir 和 C. Godsil. 正规凯莱图中的强余谱顶点。《离散数学》，346(5)：113341，2023 年。[13] H. Monterde. 加权图中的强余谱性与孪生顶点。arXiv:2111.01265，2021 年。[14] M. Liu、Y. Yuan、L. You 和 Z. Chen. 哪些余谱图具有相同的度序列? 《离散数学》，341(11)：2969–2976，2018 年。[15] A. Das 和 P. Panigrahi. 关于邻接矩阵、拉普拉斯矩阵和归一化拉普拉斯矩阵的新型同时余谱图类。《克拉古耶瓦茨数学杂志》，43(2)：303–323，2019 年。[16] C. Godsil 和 G. F. Royle. 《代数图论》，第 207 卷。Springer，纽约，2001 年。