arXiv:2601.02894v1 [math.AP] 6 Jan 2026

采用几乎扇形算子的有理核分数阶演化方程：统一 ABC 与 W 动力学的预解式框架

Mohamed Wakrim摩洛哥阿加迪尔伊本·佐赫尔大学理学院m.wakrim@uiz.ac.ma

2026年1月7日

摘要

分数阶演化方程广泛用于描述具有记忆效应和反常时间标度的扩散过程。现有的大多数理论依赖于将 Caputo 型导数与扇形算子结合起来。在许多应用扩散模型中，包括 Kimura 算子和贝塞尔型算子，其自然生成元仅为几乎扇形算子：它的预解式在高频下受到良好控制，但在原点附近可能无法保持有界。这使得标准的基于 Caputo 导数的框架无法直接应用。

本文针对具有有理非奇异核的分数阶演化方程，提出一种预解式方法，涵盖 Atangana–Baleanu（ABC）导数和二参数 W 导数。分析基于拉普拉斯域映射 $z = s^{\alpha-1}$，该映射将反演围道移至生成元的高频预解式区域；参见引理 4.3。在此框架下，我们证明了适定性、相关预解族的强连续性，以及阶数为 $t^{-\alpha\gamma}$ 的分数阶平滑估计。

关键词。 分数阶演化方程；有理核；Atangana–Baleanu (ABC)导数；W 导数；几乎扇形算子；预解族；退化扩散
2020 年数学主题分类。 47D06；34A08；35K65；35R11；35B65；47A10

1 引言

分数阶演化方程已成为刻画具有记忆、遗传效应和反常时间标度的扩散过程的核心工具。在经典框架下，分数阶时间导数——尤其是 Caputo 导数——与生成解析半群的扇形算子相结合。这一方法形成了完善的理论，涵盖解的存在性、唯一性、正则性和长时间行为；例如参见 [1, 3, 5]。关于超越经典解析半群框架的、基于预解式的分数阶演化方程研究视角，还可参见 [8, 9]。

在第 3 节中，我们严格证明了经典 Caputo 分数阶动力学在结构上与几乎扇形算子不相容。其障碍并非技术性的，而是几何性的：拉普拉斯符号 s^α 迫使我们在谱原点附近考察预解式，而几乎扇形性无法对此提供控制。

在广泛的应用模型中，自然的空间生成元并非扇形算子。典型例子包括退化或奇异椭圆算子，其椭圆性在边界的某些部分或定义域的奇异点附近会减弱。群体遗传学中的 Kimura 型算子，以及与径向扩散相关的贝塞尔型算子，都是具有代表性的例子。在适当的加权 L^2 空间中，这些算子通常是自伴且非正的，但其

预解式仅在谱参数较大时满足估计。在原点附近，预解式可能会发散，或无法得到一致控制。这类算子属于近扇形算子。

一个字符串 。**考虑 Caputo 分数阶演化方程** n

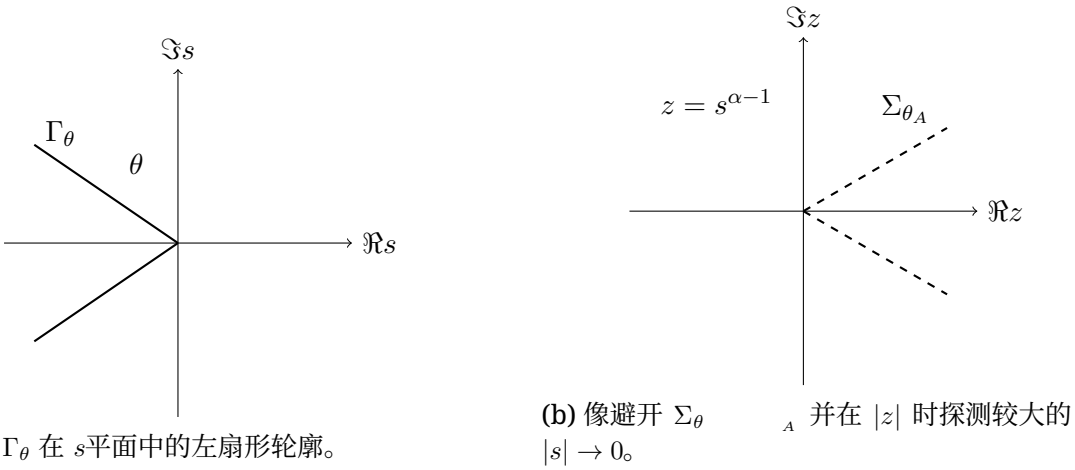
$$^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = f(t), \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{1.1}$$

其中 A 在巴拿赫空间上是近扇形的 X。在拉普拉斯域中，(1.1) 导出如下形式的预解式表达式 $(s^{\alpha}I+A)^{-1}$。在进行拉普拉斯反演时，围道必然趋近原点 $s = 0$ ，并且由于 $s^{\alpha} \to 0$ 当 $s \to 0$时，预解式不得不探测 $z = 0$附近的谱区域。这恰恰是几乎扇形性无法提供估计的区域。这个问题是内在的：Caputo 符号 s^{α} 将分析引向低频区域。第 3节将精确阐明这一障碍，并解释为何 Caputo 动力学通常不适用于近扇形生成元。

通过有理非奇异核实现转向（ABC、W）。对于采用有理非奇异核的分数阶导数，情况则有所不同，例如 Atangana–Baleanu 导数（ABC）以及更一般的双参数 W 导数。尽管 ABC 和 W 源自不同的构造，它们在拉普拉斯域中具有一个关键特征：预解式的计算参数包含 $s^{\alpha-1}$ ，而非 s^{α}。由于 $\alpha - 1 < 0$，低拉普拉斯频率 $|s| \to 0$会映射为较大的谱参数 $|s^{\alpha-1}| \to \infty$。这一机制以大谱参数处的预解式估计，取代了在 $z = 0$ 附近对 $(zI - A)^{-1}$ 进行的问题性求值；而恰恰在大谱参数处，近扇形算子能够获得一致控制。

研究目标与贡献。 我们的目标是构建一个统一的预解式框架，使上述重定向机制一目了然。我们从一个可容许拉普拉斯乘子$K(s)$及其对应的围道积分预解族出发。首先，我们证明该预解族定义良好：围道积分在算子范数下绝对收敛，并在 X上生成有界算子。随后，我们证明该预解族关于时间连续，并满足常数变易公式，从而给出温和解的自然定义。一个关键结果是分数阶平滑估计：对于每个 $\gamma \in [0, 1)$， A^{γ} 沿流的作用均遵循衰减尺度 $t^{-\alpha\gamma}$。在建立抽象结果后，我们验证 ABC 核和 W 核属于这一可容许类，因此两种动力学都可由同一机制处理。最后，我们通过两个典型的退化生成元——Kimura型和贝塞尔型扩散算子——展示该理论的适用范围，并证明在此设定下，温和解与弱形式等价。

几何机制。为清晰起见，图1 描绘了复平面中的围道映射：左扇形拉普拉斯围道 Γ_{θ} 经 $s \mapsto z = s^{\alpha-1}$ 映射到一个避开 A的禁区扇形的区域，而 $|s|$的小值对应于 $|z|$的大值。



(a) Γ_θ 在 s平面中的左扇形轮廓。

(b) 像避开 Σ_θ $_A$ 并在 $|z|$ 时探测较大的 $|s| \to 0$。

图1：映射 $z = s^{\alpha-1}$所诱导的几何重定向。

本文所研究的双参数 W 算子构成一种新的分数阶导数。关于其核性质的详细研究将在后续工作中发表 [14]。据我们所知，该算子此前尚未见于文献。其定义性特征是，相关的拉普拉斯乘子保留了与 Atangana–Baleanu 核相同的几何重定向 $z = s^{\alpha-1}$ ，同时引入一个额外参数 β ，该参数可调节记忆集中度，而不改变预解几何或平滑尺度。

2 预备知识

在全文中， X 表示一个复巴拿赫空间， A： $D(A) \subset X \to X$ 是一个闭稠定线性算子。我们回顾几乎扇形算子的概念，以及后文所需的高频工具。

2.1 几乎扇形算子

定义 2.1（几乎扇形算子）。 若存在 $\theta_A \in$ （0， π）、 $M > 0$ 和 $R > 0$ ，使得

$$\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta_A} \subset \rho(A), \qquad \Sigma_{\theta_A} := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta_A\},$$

and

$$\|(zI - A)^{-1}\| \le M|z|^{-1}, \qquad z \notin \Sigma_{\theta_A},\ |z| \ge R. \tag{2.1}$$

几乎扇形性并不要求当 $|z| \to 0$ 时存在一致的预解式界。几乎扇形算子类及其高频函数演算，与最大正则性和 H^∞-演算技术相关；例如参见 [6, 5]。特别地，0 可能属于 $\sigma(A)$，且预解式在原点附近可能发散，甚至可能不存在。

注 2.2（解释与范围）。 几乎扇形算子自然出现在退化或奇异扩散生成元中。在加权空间中，它们可能是自伴且耗散的，在高频范围内具有稳健的预解式结构，但在 $z = 0$ 附近的控制较差。

2.2 分数次幂与高频界

对于 $\gamma \in [0, 1)$，分数次幂 A^γ 可以通过限制在避开原点的围道上的函数演算来定义（具体构造取决于算子类）。我们假设标准的高频估计成立。这类界对于

扇形算子是标准的；当函数演算限制在远离原点的区域时，这些估计也可推广到若干近扇形情形；参见 [5, 6]。

$$\|A^{\gamma}(zI-A)^{-1}\| \le C_{\gamma}|z|^{\gamma-1}, \qquad z \notin \Sigma_{\theta_A},\ |z| \ge R, \tag{2.2}$$

对于某个 $C_{\gamma} > 0$ 以及所有 $\gamma \in [0,1)$ 。

注 2.3. 估计式（2.2）对于扇形算子是经典结果；在仅假设高频预解算子控制，即 $z \in \mathbb{C}\setminus\ \Sigma_{\theta}$且 $|z|$ 充分大时，该结果对近扇形算子仍然成立。在本框架中，无需对原点附近的预解式作任何估计。

3 Caputo 分数阶动力学的失效

我们回顾一下，为什么一般而言，若不附加低频假设，Caputo 分数阶方程与近扇形生成元并不相容。
考虑齐次 Caputo 问题

$${}^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}u(t) + Au(t) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \quad u(0) = u_0. \tag{3.1}$$

进行拉普拉斯变换可得

$$\widehat{u}(s) = (s^{\alpha}I + A)^{-1}\, s^{\alpha-1}u_0, \qquad \Re s > 0. \tag{3.2}$$

命题 3.1 (Caputo 动力学的结构性失效)。 设 A 为近扇形。假设 $0 \in \sigma(A)$ 或 $\|(zI-A)^{-1}\|$ 不一致有界，当 $z \to 0$。那么，一般而言，仅凭高频预解估计(3.2) 无法证明 (2.1)的拉普拉斯反演。

证明。 形式上，拉普拉斯反演给出

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{st}\,(s^{\alpha}I + A)^{-1}s^{\alpha-1}u_0\,ds,$$

其中 Γ 是布ром维奇型围道，因此趋近于 $s = 0$。由于 $0 < \alpha < 1$，沿着 Γ，当 $s \to 0$ 时有 $s^{\alpha} \to 0$ ，所以预解式因子（$s^{\alpha}I + A$）$^{-1}$ 必然会探及任意接近 0 的谱参数 $z = s^{\alpha}$ 。

几乎扇形性仅在 $|z| \ge R$时给出估计 $\|(zI-A)^{-1}\| \le M|z|^{-1}$ ，因此无法在原点邻域内提供控制。若 $0 \in \sigma(A)$，则预解式在 $z = 0$处奇异。若 $0 \notin \sigma(A)$，但 $\|(zI-A)^{-1}\|$ 在 $z \to 0$时无界，那么对于接近 0 的 s ，被积函数的表现为

$$\|(s^{\alpha}I + A)^{-1}s^{\alpha-1}\| \to \infty,$$

且无法在 $s = 0$ 的邻域内构造可积主控函数。
无论哪种情况，仅凭高频估计（2.1）都无法获得证明拉普拉斯反演所需的绝对收敛性。

□

注 3.2。 其障碍在于几何性质：Caputo动力学迫使预解式在谱变量 $z = s^{\alpha}$ 的原点附近取值。

4 抽象核预解式框架

现在我们单独说明，仅有高频 预解式控制时实现适定性的机制。关键在于用一种核乘子取代Caputo符号 s^{α} ，其逆变换会在 $z = s^{\alpha-1}$ 处取预解式的值。

4.1 拉普拉斯反演围道

设 A 是角度为 $\theta_A \in (0,\ \pi)$ 的近扇形算子。取 $\theta \in (\pi/2,\ \theta_A)$，并定义左扇形轮廓

$$\Gamma_\theta = \Gamma_\theta^+ \cup \Gamma_\theta^-, \qquad \Gamma_\theta^\pm = \{re^{\pm i\theta} : r \in (0,\infty)\},$$

从 $+\infty e^{i\theta}$ 到 $+\infty e^{-i\theta}$定向。复数幂取在$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$上的主值分支。

4.2 可容许核乘子

定义 4.1（可容许核乘子）。若函数 $K:\ \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ 是解析的，且存在常数 $C_0, C_\infty > 0$，使得对所有 $s \in \Gamma_\theta$，则称其为可容许的。

$$|K(s)| \le \begin{cases} C_0, & 0 < |s| \le 1, \\ C_\infty\, |s|^{\alpha-1}, & |s| \ge 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

对于 $|s| \ge 1$，增长条件 $|K(s)| \le C_\infty |s|^{\alpha-1}$ 并未声称是最优的。不过，它足以确保拉普拉斯反演积分绝对收敛，并与近扇形预解式估计相容。虽然可以考虑更尖锐的条件，但这不会扩大当前理论所涵盖的生成元类别。

注 4.2。条件（4.1）是最小条件：它确保了 $s = 0$ 附近的可积性，并结合e^{st} 在 Γ_θ上的条件，确保无穷远处的可积性。

4.3 $z = s^{\alpha-1}$诱导的几何重定向

引理 4.3（几何重定向）。设 $0 < \alpha < 1$ 且设 $s \in \Gamma_\theta$，其中

$$\Gamma_\theta^\pm = \{re^{\pm i\theta} : r > 0\}, \qquad \theta \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right),$$

复数幂取在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的主值分支。令 $z = s^{\alpha-1}$。则：

（*i*）当 $|s| \to 0$ 沿 Γ_θ 时，$|z| = |s|^{\alpha-1} \to \infty$，

（*ii*）$\arg z = (\alpha - 1) \arg s$，

（*iii*）若 $(1 - \alpha)\,\theta \ge \theta_A$，则 $z \notin \Sigma_{\theta_A}$（因此 $z \in \rho(A)$）。

证明。令 $s = re^{i\varphi}$，其中 $r = |s| > 0$，且 $\varphi = \arg(s) \in (-\pi,\ \pi)$。沿着 Γ_θ，我们在 Γ_θ^+上有 $\varphi = +\theta$，并在 Γ_θ^-上有 $\varphi = -\theta$。

（*i*） 由于 $0 < \alpha < 1$，我们有 $\alpha - 1 < 0$。因此

$$|z| = |s^{\alpha-1}| = |s|^{\alpha-1} = r^{\alpha-1}.$$

当 $r \to 0^+$ 时，指数 $\alpha - 1 < 0$ 迫使 $r^{\alpha-1} \to +\infty$。这证明了（i）。（*ii*）
对于主值分支，复数幂满足

$$s^{\alpha-1} = r^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\varphi}.$$

因此 $\arg(z) = \arg(s^{\alpha-1}) = (\alpha - 1)\varphi = (\alpha - 1)\arg(s)$，这就是（ii）。

（*iii*） 在 $\Gamma_\theta^\pm$ 上，我们有 $\arg(s) = \pm\theta$，因此根据（ii）

$$\arg(z) = (\alpha - 1)(\pm\theta) = \pm(\alpha - 1)\theta.$$

取绝对值并利用 $\alpha - 1 < 0$，可得

$$|\arg(z)| = |(\alpha - 1)\theta| = (1 - \alpha)\theta.$$

回忆一下

$$\Sigma_{\theta_A} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ |\arg z| < \theta_A\}.$$

因此， $z \notin \Sigma_{\theta_A}$ 等价于 $|\arg(z)| \geq \theta_A$。在给定的角度条件 $(1-\alpha)\theta \geq \theta_A$ 下，我们确实有

$$|\arg(z)| = (1-\alpha)\theta \geq \theta_A,$$

因此 $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta_A} \subset \rho(A)$。这证明了 (iii)。 □

4.4 沿围道的高频预解式界

引理 4.4 (沿 Γ_θ 的预解式界)。 假设 A 按照定义 2.1 的含义是近扇形的，即存在 $\theta_A \in (0, \pi)$、$M > 0$ 和 $R > 0$，使得 $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta_A} \subset \rho(A)$， 并且

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq M|z|^{-1} \qquad \textit{for all } z \notin \Sigma_{\theta_A},\ |z| \geq R.$$

固定 θ，并考虑 $s \in \Gamma_\theta$。令 $z = s^{\alpha-1}$。则存在常数 $C > 0$，使得对每个 $s \in \Gamma_\theta$,

$$\|(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \leq \begin{cases} C\,|s|^{1-\alpha}, & 0 < |s| \leq 1, \\ C, & |s| \geq 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

证明。 令 $s \in \Gamma_\theta$ 并设 $z = s^{\alpha-1}$。我们将证明分为两种情况。

情形 1：区域 $0 < |s| \leq 1$。 由于 $0 < \alpha < 1$，我们有 $\alpha - 1 < 0$，因此

$$|z| = |s^{\alpha-1}| = |s|^{\alpha-1} = \frac{1}{|s|^{1-\alpha}}.$$

特别地，当 $0 < |s| \leq 1$ 时，我们有 $|z| \geq 1$。为使用近扇形估计，我们还需要 $|z| \geq R$。只要 $|s|$ 足够小，这一条件便自动成立：事实上， $|z| \geq R$ 等价于 $|s|^{\alpha-1} \geq R$，即

$$|s| \leq R^{-1/(1-\alpha)}.$$

因此，对每个满足以下条件的 $s \in \Gamma_\theta$

$$0 < |s| \leq \min\{1,\ R^{-1/(1-\alpha)}\},$$

我们同时有 $z \notin \Sigma_{\theta_A}$ （由引理 4.3，满足相应的角度条件）以及$|z| \geq R$。预解式界（2.1）于是给出

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq M|z|^{-1} = M\,|s|^{1-\alpha}.$$

对于环域中 s 的其余取值

$$R^{-1/(1-\alpha)} \leq |s| \leq 1,$$

量 $z = s^{\alpha-1}$ 始终位于 $\rho(A)$ 的一个固定紧子集中：事实上， $|z| = |s|^{\alpha-1} \in [1, R]$， 且 $\arg(z)$ 由围道确定。由于预解算子映射 $z \mapsto (zI - A)^{-1}$ 在 $\rho(A)$ 上解析（因而连续），它在该紧集上有界。因此，存在 $C_1 > 0$ 使得

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq C_1 \qquad \text{whenever } R^{-1/(1-\alpha)} \leq |s| \leq 1.$$

合并这两种子情况，并在必要时增大常数，可得

$$\|(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \leq C\,|s|^{1-\alpha} \qquad \text{for all } 0 < |s| \leq 1,$$

因为在环域上 $|s|^{1-\alpha} \geq R^{-1}$，所以可以通过扩大 C，将一致有界性吸收到 $C|s|^{1-\alpha}$ 中。

情形 2：区域 $|s| \geq 1$。 考虑像集

$$\mathcal{K} := \{\, s^{\alpha-1} : s \in \Gamma_\theta,\ |s| \geq 1 \,\}.$$

由于映射 $s \mapsto s^{\alpha-1}$ 在 Γ_θ 上连续（取定所选的支），且当 $|s|^{\alpha-1} \leq 1$ 时$|s| \geq 1$，可知 $\mathcal{K}$ 有界。此外，$\mathcal{K}$ 是闭集（它包含沿射线趋近的极限点），因此 $\mathcal{K}$ 是紧集。由引理4.3 （同样需满足适当的角度条件），$\mathcal{K} \subset \mathbb{C}\backslash\Sigma_{\theta_A} \subset \rho(A)$。因此预解式在 $\mathcal{K}$上有界：存在 $C_2 > 0$ 使得

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq C_2 \qquad \text{for all } z \in \mathcal{K}.$$

等价地，

$$\|(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \leq C_2 \qquad \text{for all } s \in \Gamma_\theta,\ |s| \geq 1.$$

结论。 取 $C :=$ 最大值$\{C_1,\ C_2,\ M\}$ 即可得到（4.2）。 □

4.5 K-预解族

定义 4.5 （K-预解族）。 设 A 为近扇形算子，且 K 为可容许核乘子。对于 $t > 0$，定义

$$V_K(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} e^{st}\, K(s)\, (s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\, ds. \tag{4.3}$$

命题 4.6 （绝对收敛）。 对于每个 $t > 0$，积分 (4.3) 在算子范数下绝对收敛，并定义了 X上的一个有界算子。

证明。 固定 $t > 0$。沿着 Γ_θ，我们将两条射线参数化为 $s = re^{\pm i\theta}$, $r \in (0, \infty)$。由于$\theta \in (\pi/2, \pi)$, 我们有 $\Re(s) = r\cos\theta < 0$，因此存在 $c := -\cos\theta > 0$，使得

$$|e^{st}| = e^{t\Re(s)} \leq e^{-crt}.$$

我们在算子范数下估计被积函数，并将围道分为 $0 < r \leq 1$ 和$r \geq 1$两种情形。

(i) 情形 $0 < r \leq 1$。 根据容许性（4.1），$|K(s)| \leq C_0$ 对于 $|s| \leq 1$成立，而由引理 4.4 可得 $\|(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \leq C\,|s|^{1-\alpha} = C\,r^{1-\alpha}$ 对于 $|s| \leq 1$成立。因此，对于 $0 < r \leq 1$,

$$\|e^{st}K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \leq C_0\, C\, r^{1-\alpha} e^{-crt}.$$

由于在每条射线上 $|ds| = dr$，我们得到

$$\int_0^1 C_0\, C\, r^{1-\alpha} e^{-crt}\, dr < \infty \qquad \text{because } 1 - \alpha > -1.$$

（ii）情形 $r \geq 1$。 由容许性（4.1），$|K(s)| \leq C_\infty |s|^{\alpha-1} = C_\infty r^{\alpha-1}$ 对于 $|s| \geq 1$成立；根据引理 4.4，存在 $C' > 0$ 使得 $\|(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \leq C'$ 对于 $|s| \geq 1$成立。因此，对于 $r \geq 1$,

$$\|e^{st}K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \leq C_\infty\, C'\, r^{\alpha-1} e^{-crt}.$$

Thus

$$\int_1^\infty C_\infty\, C'\, r^{\alpha-1} e^{-crt}\, dr < \infty,$$

因为指数项的增长速度超过任何多项式增长。
在两条射线上结合 (i) 和 (ii) 可知，(4.3) 中的围道积分在算子范数下绝对收敛。此外，同样的估计还给出了 $\|V_K(t)\|$ 的有限界，因此$V_K(t)$ 在 X 上定义了一个有界算子。

□

引理 4.7 （拉普拉斯变换）。对于 $x \in X$ 和 $R\lambda > 0$,

$$\mathcal{L}\{V_K(\cdot)x\}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} V_K(t)x\, dt = K(\lambda)\,(\lambda^{\alpha-1}I - A)^{-1}x.$$

证明。 固定 $x \in X$ 和 $R\lambda > 0$。根据定义,

$$V_K(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} e^{st} K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}x\, ds.$$

利用定义（4.3）以及富比尼定理（围道积分绝对收敛，故该定理适用），对于 $R\lambda > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} V_K(t)x\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} \left(\int_0^\infty e^{-(\lambda-s)t}\, dt\right) K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}x\, ds.$$

前提是可以应用富比尼定理。我们通过绝对可积性来证明这一点：沿着 Γ_θ ，有$R(s) < 0$，因此 $R(\lambda - s) \geq R\lambda > 0$ 并且

$$\int_0^\infty |e^{-(\lambda-s)t}|\, dt = \frac{1}{\Re(\lambda - s)} \leq \frac{1}{\Re\lambda}.$$

此外 ，命题 4.6 为 L^1- $\|K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\|$ 在 Γ_θ上提供了一个主控函数。因此 ore

$$\int_{\Gamma_\theta}\int_0^\infty |e^{-(\lambda-s)t}|\, \|K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}x\|\, dt\, |ds| < \infty,$$

并且富比尼定理适用。
计算内层积分可得

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda-s)t}\, dt = \frac{1}{\lambda - s}, \qquad \Re\lambda > 0,\ \Re s < 0.$$

Thus

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} V_K(t)x\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} \frac{K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}}{\lambda - s}\, ds\ x.$$

算子值函数 $F(s) = K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}$ 在由围道围成且 λ 位于 Γ_θ右侧的区域内关于 s 解析。根据标准的柯西围道论证（针对此处使用的布pом维奇型围道），积分等于 $F(\lambda)x$，即

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} V_K(t)x\, dt = K(\lambda)(\lambda^{\alpha-1}I - A)^{-1}x.$$

□

定理 4.8 (强连续性)。 设 A 为近扇形，且 K 为可容许。则 $\{V_K(t)\}_{t>0}$ 在 $(0,\infty)$上强连续。

此外，若 $V_K(t)x \to x$ 当 $t \downarrow 0$ 时对每个 $x \in X$ 均成立（这对 *ABC* 和 *W* 情形中使用的归一化核成立），则可通过设定 $V_K(0) = I$，将该族延拓为定义在 $[0,\infty)$ 上的强连续族。

证明。 **步骤 1：在 $(0,\infty)$ 上的强连续性**。 固定 $x \in X$ 和 $t_0 > 0$。令 $t_n \to t_0$ 满足 $t_n > 0$。由（4.3），

$$V_K(t_n)x - V_K(t_0)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} \left(e^{st_n} - e^{st_0}\right) K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}x\, ds.$$

对每个固定的 $s \in \Gamma_\theta$, $e^{st_n} \to e^{st_0}$。为应用控制收敛，我们利用在 Γ_θ 上有$R(s) < 0$。对于紧区间 $[t_0/2, 2t_0]$ 内的 t，

$$|e^{st}| \le e^{-c|s|t_0/2},$$

以及命题 4.6 中构造的主控函数表明

$$\int_{\Gamma_\theta} e^{-c|s|t_0/2} \, \|K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \, |ds| < \infty.$$

因此，被积函数由一个与 n无关的 $L^1(\Gamma_\theta)$-函数控制，由控制收敛可得 $V_K(t_n)x \to V_K(t_0)x$。

步骤 2：在 $t = 0$ 归一化条件下进行延拓。 现在假设 $V_K(t)x \to x$ 当 $t \downarrow 0$ 对每个 $x \in X$成立。然后定义 $V_K(0) = I$即可得到在 $t = 0$处的强连续性，从而在 $[0, \infty)$上强连续。在 ABC 和 W 情形下，这一 $t \downarrow 0$ 性质可由引理 4.7中的拉普拉斯恒等式以及向量值拉普拉斯变换的标准阿贝尔定理推出；参见 [4, 第 1]章。 □

定理 4.9 (常数变易公式)。 设 $u_0 \in X$ 且令 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); X)$ 满足其拉普拉斯变换 $\widehat{f}(s)$ 在 $Rs > 0$ 上存在（例如 $f \in L^1([0,\infty); X)$，或者更一般地，$e^{-\sigma t} f(t) \in L^1([0,\infty); X)$ 对每个 $\sigma > 0$ 都成立。对 $t \ge 0$ 定义

$$u(t) = V_K(t)u_0 + \int_0^t V_K(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau.$$

于是，对于 $Rs > 0$,

$$\widehat{u}(s) = K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}u_0 + K(s)(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\widehat{f}(s).$$

证明。 令 $t > 0$。根据 K-预解族的定义，

$$A^\gamma V_K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} e^{st}\, K(s)\, A^\gamma (s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\, ds.$$

我们首先证明可以将 A^γ 置于积分号下。这将由构造一个关于算子范数的可积主控函数以及分数幂 A^γ的闭性得到。令 $z = s^{\alpha-1}$。对于 $0 < |s| \le 1$，引理 4.3 表明 $z \in \rho(A)$ 且 $|z|$ 足够大。因此，根据高频预解估计（2.2），存在常数 $C_\gamma > 0$ 使得

$$\|A^\gamma (zI - A)^{-1}\| \le C_\gamma |z|^{\gamma-1} = C_\gamma |s|^{(\alpha-1)(\gamma-1)}.$$

由于对于 $0 < \alpha < 1$ 和 $0 \le \gamma < 1$，$(\alpha-1)(\gamma-1) \ge \alpha\gamma - 1$，我们得到

$$\|A^\gamma (s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \le C_\gamma |s|^{\alpha\gamma-1}, \qquad 0 < |s| \le 1.$$

由容许性可知，存在 $C_0 > 0$ 使得对于 $|s| \le 1$，$|K(s)| \le C_0$。此外，由于在 Γ_θ 上，$R(s) = |s|\cos\theta$，其中 $\cos\theta < 0$，因此对于 $c = -\cos\theta > 0$，有 $|e^{st}| \le e^{-c|s|t}$。consequently，对于 $0 < |s| \le 1$，我们得到

$$\|e^{st} K(s) A^\gamma (s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \le C\, |s|^{\alpha\gamma-1} e^{-c|s|t},$$

对于某个常数 $C > 0$。
对于 $|s| \ge 1$，容许性给出 $|K(s)| \le C_1 |s|^{\alpha-1}$，而集合 $\{s^{\alpha-1} : s \in \Gamma_\theta,\ |s| \ge 1\}$ 是紧的，并且包含于 $\rho(A)$ 中。因此存在 $C_2 > 0$ 使得

$$\|A^\gamma (s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \le C_2, \qquad |s| \ge 1.$$

因此，对于 $|s| \ge 1$,

$$\|e^{st} K(s) A^\gamma (s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\| \le C\, |s|^{\alpha-1} e^{-c|s|t}.$$

合并这两个区域可在 Γ_θ 上得到一个可积主控函数。沿射线积分并进行变量代换 $\rho = |s|t$，我们得到

$$\|A^\gamma V_K(t)\| \le C t^{-\alpha\gamma} \int_0^\infty \rho^{\alpha\gamma-1} e^{-c\rho}\, d\rho = C_\gamma\, t^{-\alpha\gamma},$$

其中 $C_\gamma > 0$ 仅取决于 α、γ 和预解式常数。 □

4.6 分数阶平滑

解析半群理论的一个核心特征是平滑：即使初始数据较粗糙，解也会对 $t>0$ 立即变得更加正则。在近扇形算子情形下，无法在 $z=0$ 附近使用经典半群论证，但围道机制仍能给出精确的分数阶平滑尺度。

定理 4.10 (分数阶平滑)。 设 $\gamma\in[0,1)$ 并假设 (2.2)。则存在$C_\gamma>0$ 使得

$$\|A^\gamma V_K(t)\|\le C_\gamma\, t^{-\alpha\gamma},\qquad t>0.$$

证明。 固定 $t>0$。根据 K-预解族的定义，

$$A^\gamma V_K(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} e^{st}\,K(s)\,A^\gamma(s^{\alpha-1}I-A)^{-1}\,ds.$$

将 A^γ 移入积分号内是合理的，因为我们将构造一个在算子范数下绝对可积的主控函数，且分数幂 A^γ 是闭算子。

令 $z=s^{\alpha-1}$。对于 $|s|\le 1$，引理 4.3 保证 $z\notin\Sigma_{\theta_A}$ 且 $|z|=|s|^{\alpha-1}$ 足够大。因此，高频预解估计（2.2）适用，并得

$$\|A^\gamma(zI-A)^{-1}\|\le C_\gamma|z|^{\gamma-1}=C_\gamma|s|^{(\alpha-1)(\gamma-1)}.$$

由于 $0<\alpha<1$ 和 $0\le\gamma<1$，我们有 $(1-\alpha)(1-\gamma)\ge 0$，因此

$$(\alpha-1)(\gamma-1)=\alpha\gamma-\alpha-\gamma+1=\alpha\gamma-1+(1-\alpha)+(1-\gamma)\ge\alpha\gamma-1.$$

由于 $|s|\le 1$，这意味着

$$|s|^{(\alpha-1)(\gamma-1)}\le|s|^{\alpha\gamma-1}.$$

利用 K 的容许性，它给出 $|K(s)|\le C_0$ 对于 $|s|\le 1$，再结合 Γ_θ 上的指数衰减估计$|e^{st}|\le e^{-c|s|t}$，因此被积函数有如下界

$$\|e^{st}K(s)A^\gamma(s^{\alpha-1}I-A)^{-1}\|\le C\,|s|^{\alpha\gamma-1}e^{-c|s|t},\qquad |s|\le 1.$$

对于 $|s|\ge 1$，容许性给出 $|K(s)|\le C_\infty|s|^{\alpha-1}$。令

$$E:=\{s^{\alpha-1}:s\in\Gamma_\theta,\ |s|\ge 1\}.$$

于是 E 是紧的，且包含于 $\rho(A)$ 由引理 4.3。由于映射 $z\mapsto A^\gamma(zI-A)^{-1}$ 在 $\rho(A)$上连续，我们得到

$$\sup_{z\in E}\|A^\gamma(zI-A)^{-1}\|<\infty.$$

因此，对于 $|s|\ge 1$,

$$\|e^{st}K(s)A^\gamma(s^{\alpha-1}I-A)^{-1}\|\le C\,|s|^{\alpha-1}e^{-c|s|t},$$

由于指数衰减，该函数可积。

最后，将积分路径射线参数化为 $s=re^{\pm i\theta}$, $r>0$，则在每条射线上都有 $|ds|=dr$。对积分取范数并结合上述估计，可得

$$\|A^\gamma V_K(t)\|\le C\int_0^\infty r^{\alpha\gamma-1}e^{-crt}\,dr.$$

通过变量代换 $\rho=rt$，可得

$$\|A^\gamma V_K(t)\|\le C\,t^{-\alpha\gamma}\int_0^\infty\rho^{\alpha\gamma-1}e^{-c\rho}\,d\rho=C_\gamma\,t^{-\alpha\gamma},$$

其中 $C_\gamma=C\,\Gamma(\alpha\gamma)/c^{\alpha\gamma}$。证明至此结束。 □

5 ABC 与 W 动力学的特化

现在验证 ABC 和 W核都能产生可容许乘子，因此符合抽象框架，并为近似扇形生成元生成适定动力学。

5.1 ABC（Atangana–Baleanu Caputo 意义下）

设 $0<\alpha<1$。ABC 导数在拉普拉斯域中的特征如下：

$$\mathcal{L}\{{}^{\mathrm{ABC}}D_t^{\alpha}u\}(s)=\Phi_\alpha(s)\big(\widehat{u}(s)-s^{-1}u(0)\big),\qquad \Re s>0, \tag{5.1}$$

其符号为

$$\Phi_\alpha(s)=B(\alpha)\,\frac{s^{\alpha}}{(1-\alpha)s^{\alpha}+\alpha}. \tag{5.2}$$

相关核乘子为

$$K_\alpha^{\mathrm{ABC}}(s):=\frac{\Phi_\alpha(s)}{s}=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\,\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+c},\qquad c=\frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{5.3}$$

引理 5.1（ABC 乘子是可容许的）。 函数 K_α^{ABC}在定义 *4.1.* 所述意义下是可容许的。

证明。 在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 上具有解析性。我们在围道 Γ_θ 上估计 K_α^{ABC}。
情形 1： $0<|s|\le 1$。 回想 $c=\alpha/(1-\alpha)>0$。由于映射 $s\mapsto s^{\alpha}$ 在 Γ_θ 上连续，且当 $|s|\le 1$ 时在 $|s^{\alpha}|\le 1$ 上连续，因此有

$$|s^{\alpha}+c|\ge c-|s^{\alpha}|\ge c-1.$$

若 $c\ge 2$，则得到 $|s^{\alpha}+c|\ge c/2$。若 $c<2$，则 $s^{\alpha}+c$ 在 Γ_θ 上仍远离 0（因为 $c>0$，且 Γ_θ 避开正实轴），因此存在 $m_0>0$ 使得

$$|s^{\alpha}+c|\ge m_0\qquad \text{for all } s\in\Gamma_\theta,\ 0<|s|\le 1.$$

因此

$$|K_\alpha^{\mathrm{ABC}}(s)|=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\,\frac{|s|^{\alpha-1}}{|s^{\alpha}+c|}\le\frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)m_0}\,|s|^{\alpha-1}.$$

情形 2： $|s|\ge 1$。 于是 $|s^{\alpha}+c|\ge|s^{\alpha}|=|s|^{\alpha}$，从而

$$|K_\alpha^{\mathrm{ABC}}(s)|\le\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\,\frac{|s|^{\alpha-1}}{|s|^{\alpha}}=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\,|s|^{-1}\le\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\,|s|^{\alpha-1},$$

因为 $\alpha-1\in(-1,0)$，且 $|s|\ge 1$。
结合这两种情况可得 (4.1)，因此 K_α^{ABC}是可容许的。 □

定义 ABC 预解族如下

$$V_{\mathrm{ABC}}(t):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta}e^{st}\,K_\alpha^{\mathrm{ABC}}(s)\,(s^{\alpha-1}I-A)^{-1}\,ds,\qquad t>0. \tag{5.4}$$

定理5.2 (近扇形 A的 **ABC 演化**。设 A 为近扇形。对于每个$u_0\in X$和 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$，该问题

$${}^{\mathrm{ABC}}D_t^{\alpha}u(t)+Au(t)=f(t),\qquad u(0)=u_0,$$

存在唯一的温和解

$$u(t)=V_{\mathrm{ABC}}(t)u_0+\int_0^t V_{\mathrm{ABC}}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

此外，对于每个 $\gamma\in[0,1)$，

$$\|A^{\gamma}V_{\mathrm{ABC}}(t)\|\le C_\gamma\,t^{-\alpha\gamma},\qquad t>0.$$

证明。 应用定理 4.8、4.9和4.10 其中 $K = K_\alpha^{\mathrm{ABC}}$。 □

从 ABC 到 W：扩展的可容许类。 W 算子通过引入第二个参数 $\beta \in (0,1]$ 来扩展 ABC 核。该参数改变了记忆的形状，同时保持相同的预解几何 $z = s^{\alpha-1}$，因而具有相同的平滑尺度。取 $\beta = 1$ 时可恢复 ABC 乘子，而 $\beta < 1$ 则产生更加分散的记忆效应。在拉普拉斯乘子的层面上，这带来了一个明显大于单一 ABC 核的可容许族。从数值视角来看，因子 $\big(1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\big)^{-\beta}$ 对高频贡献提供了可调节的阻尼，这在处理粗糙数据或非规则强迫项时可能很有用。

备注 5.3（关于 $\beta > 1$）。 情形 $\beta > 1$ 形式上对应于更加集中的记忆核。在此情形下，定义 4.1中的可容许性条件可能失效，因为拉普拉斯乘子沿围道的高频部分可能呈现过度增长（取决于所选的支和扇形区域）。对 $\beta > 1$ 的系统分析超出了本文范围，将另行讨论。

5.2 W 动力学（双参数核）

设 $0 < \alpha < 1$ 和 $0 < \beta \le 1$。W 导数的特征表示为

$$\mathcal{L}\{{}^{W}D_t^{\alpha,\beta}u\}(s) = \Psi_{\alpha,\beta}(s)\big(\widehat{u}(s) - s^{-1}u(0)\big), \qquad \Re s > 0, \tag{5.5}$$

其符号为

$$\Psi_{\alpha,\beta}(s) = B_{\alpha,\beta}\,\frac{s^{\alpha}}{\big(1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\big)^{\beta}}. \tag{5.6}$$

相应乘子为

$$K^W_{\alpha,\beta}(s) := \frac{\Psi_{\alpha,\beta}(s)}{s} = B_{\alpha,\beta}\,\frac{s^{\alpha-1}}{\big(1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\big)^{\beta}}. \tag{5.7}$$

引理 5.4 （W 乘子是可容许的）。 函数 $K^W_{\alpha,\beta}$ 按照定义 *4.1* 的意义是可容许的。

证明。 函数 $s \mapsto K^W_{\alpha,\beta}(s)$ 在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ 上解析，因为 $s^{\alpha-1}$ 在此处解析（主值分支），且分母 $\big(1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\big)^{\beta}$ 在 Γ_θ 上从不为零（其中 $\theta \in (\pi/2, \theta_A)$ 固定）。**第 1 部分：对 $0 < |s| \le 1$ 的估计。** 写成 $s = re^{\pm i\theta}$，其中 $r \in (0,1]$。于是

$$s^{\alpha-1} = r^{\alpha-1}e^{\pm i(\alpha-1)\theta}, \qquad \text{so that} \qquad |s^{\alpha-1}| = r^{\alpha-1} = |s|^{\alpha-1}.$$

由于 $\alpha \in (0,1)$ 且 $\theta \in (\pi/2, \theta_A) \subset (\pi/2, \pi)$，我们有 $(\alpha-1)\theta \in (-\pi, 0)$，因此 $\arg(s^{\alpha-1})$ 在射线 $\Gamma_\theta^{\pm}$ 上始终与 0 保持一致的距离。因此，存在常数 $c_1 > 0$ （仅取决于 α 和 θ），使得

$$\big|1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\big| \ge c_1\,|s^{\alpha-1}|, \qquad 0 < |s| \le 1,\ s \in \Gamma_\theta. \tag{5.8}$$

将 (5.8 提升到 $\beta \in (0,1]$ 可得

$$\big|1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\big|^{\beta} \ge c_1^{\beta}\,|s^{\alpha-1}|^{\beta}.$$

因此，对于 $0 < |s| \le 1$ 和 $s \in \Gamma_\theta$，

$$|K^W_{\alpha,\beta}(s)| = B_{\alpha,\beta}\,\frac{|s|^{\alpha-1}}{\big|1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\big|^{\beta}} \le B_{\alpha,\beta}\,\frac{|s|^{\alpha-1}}{c_1^{\beta}\,|s^{\alpha-1}|^{\beta}} = \frac{B_{\alpha,\beta}}{c_1^{\beta}}\,|s|^{(1-\beta)(\alpha-1)}.$$

由于 $\alpha-1<0$ 和 $1-\beta\in[0,1)$，我们有 $(1-\beta)(\alpha-1)\le 0$，因此 $|s|^{(1-\beta)(\alpha-1)}\le 1$ 对于 $0<|s|\le 1$。因此

$$|K^W_{\alpha,\beta}(s)|\le \frac{B_{\alpha,\beta}}{c_1^{\beta}},\qquad 0<|s|\le 1,\ s\in\Gamma_\theta,$$

这保证了在原点附近满足 (4.1) 中所要求的有界性。

Part 2：对 $|s|\ge 1$ 的估计。 设 $s\in\Gamma_\theta$ 且 $|s|\ge 1$。则 $|s^{\alpha-1}|=|s|^{\alpha-1}\le 1$。Hen ce

$$\left|1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\right|\ge 1-(1-\alpha)|s^{\alpha-1}|\ge 1-(1-\alpha)=\alpha,$$

因此

$$\left|1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\right|^{\beta}\ge\alpha^{\beta}.$$

由此可得，对所有满足 $|s|\ge 1$ 的 $s\in\Gamma_\theta$，

$$|K^W_{\alpha,\beta}(s)|=B_{\alpha,\beta}\,\frac{|s|^{\alpha-1}}{\left|1+(1-\alpha)s^{\alpha-1}\right|^{\beta}}\le\frac{B_{\alpha,\beta}}{\alpha^{\beta}}\,|s|^{\alpha-1}.$$

结论。 结合这两种情形，我们得到常数

$$C_0:=\frac{B_{\alpha,\beta}}{c_1^{\beta}},\qquad C_\infty:=\frac{B_{\alpha,\beta}}{\alpha^{\beta}},$$

使得对所有 $s\in\Gamma_\theta$,

$$|K^W_{\alpha,\beta}(s)|\le\begin{cases}C_0, & 0<|s|\le 1,\\ C_\infty|s|^{\alpha-1}, & |s|\ge 1.\end{cases}$$

这正是（4.1），因此 $K^W_{\alpha,\beta}$ 是可容许的。 □

定义 W预解族为

$$V_W(t):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta}e^{st}\,K^W_{\alpha,\beta}(s)\,(s^{\alpha-1}I-A)^{-1}\,ds,\qquad t>0.\tag{5.9}$$

定理5.5（近扇形 A的W演化。 设 A 为近扇形。对于每个 $u_0\in X$和 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$，问题

$${}^{W}D_t^{\alpha,\beta}u(t)+Au(t)=f(t),\qquad u(0)=u_0,$$

存在唯一的温和解

$$u(t)=V_W(t)u_0+\int_0^t V_W(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

此外，对于每个 $\gamma\in[0,1)$，

$$\|A^{\gamma}V_W(t)\|\le C_\gamma\,t^{-\alpha\gamma},\qquad t>0.$$

证明。 应用抽象结果，取 $K=K^W_{\alpha,\beta}$。 □

备注 5.6。 $\beta>1$ 这一情形形式上对应于高度集中的记忆核。在这种情况下，由于高频处增长过快，拉普拉斯乘子的可容许性条件可能无法满足。对这一情形进行系统分析超出了本文的范围，留待另行研究。

6 比较、范围与学术定位

6.1 Caputo 核与有理非奇异核的比较

第 3 节中的障碍是内在的：Caputo符号 s^{α} 迫使预解式在$z=0$附近取值。相比之下，在 $s^{\alpha-1}$ 处计算预解式的有理非奇异核，可通过相同的几何重定向机制绕过这一困难。

6.2 与早期近扇形算子相关研究的关系

人们已在多种框架下研究了具有近扇形算子的抽象分数阶柯西问题，代表性工作见 [7]。关于谱控制有限条件下演化方程的相关泛函分析方法（包括最大正则性和函数演算工具），可参见 [6, 5]。例如，较新的分数阶演化方程预解族观点见 [8, 9]。大多数基于 Caputo 的理论都要求在原点附近满足额外假设。本文的方法则另辟蹊径：通过采用无需在 $z=0$附近要求预解式估计的有理核结构，免去了低频控制的要求。

与 [7], 中提出的方法不同，后者的预解式表示仍涉及拉普拉斯反演，并会探测算子在原点附近的性质；我们的框架经过专门设计，使反演围道仅在高频区域 $z=s^{\alpha-1}\to\infty$对预解式进行取值。这种几何重定向免除了对生成元施加额外低频假设的必要，也是该框架能够适用于近扇形算子的关键机制。

虽然 [8, 9] 的抽象预解族方法为分数阶演化方程提供了通用的泛函分析框架，但它们并未解决 Caputo 型拉普拉斯符号在 $z=0$ 附近所引起的几何障碍。我们的贡献与此正交：我们找出一类可容许的有理乘子，它们能够强制进行高频预解式求值，从而恢复近扇形生成元的适定性。

6.3 普适类

与近扇形生成元的相容性由两个结构要素决定：（i）在低频处表现为 $s^{\alpha-1}$ 的核乘子；（ii）对生成元的高频预解式控制。这由此确立了适用于退化扩散的一类时间分数阶模型的自然普适类。

7 退化椭圆算子的应用

该抽象框架专为预解式仅在高谱频率处受到控制的生成元而设计。这种情况在退化扩散算子中很常见：它们在适当的加权希尔伯特空间中通常是自伴且耗散的，但其预解式在原点附近可能是奇异的，或难以得到良好控制。

一个统一的特点是，在自然的加权 L^2 空间中，下文的算子是自伴且非正的，因此其谱包含于 $(-\infty,0]$。因此，在正实轴周围任意扇形区域之外，预解式都满足扇形型估计，且该估计对 $|z|$ 充分大时一致。这与定义 2.1相符。

7.1 Kimura型扩散算子

考虑一维木村算子

$$Ku(x)=x(1-x)u''(x),\qquad x\in(0,1).$$

一个自然的希尔伯特空间为

$$X = L^2\big((0,1), x^{-1}(1-x)^{-1}\,dx\big),$$

Kimura 型算子及其退化扩散结构将在 [10], 和K 中详细讨论；它可以实现为与闭二次型相关联的自伴非正算子

$$\mathcal{E}(u,u) = \int_0^1 x(1-x)|u'(x)|^2\,dx.$$

命题 7.1 （木村算子的几乎扇形性）。 对于每个 $\theta \in (\pi/2, \pi)$ ，存在 $M_\theta > 0$ 使得

$$\|(zI - K)^{-1}\| \le \frac{M_\theta}{|z|}, \qquad z \notin \Sigma_\theta, \quad |z| \ge 1.$$

特别地， K 是近扇形的。

证明。 由于 K 是自伴且非正的， $\sigma(K) \subset (-\infty, 0]$ 且 $\|(zI - K)^{-1}\| = \text{dist}(z, \sigma(K))^{-1} = \text{dist}(z,(-\infty,0])^{-1}$。若 $z \notin \Sigma_\theta$，则由几何关系可得 $\text{dist}(z,(-\infty,0]) \ge c_\theta|z|$，因此该界成立。 □

定理 7.2 （Kimura 演化：适定性与平滑）。 令 $\alpha \in (0,1)$ 且 $\beta \in (0,1]$。对于每个 $u_0 \in X$ 和 $f \in L^1_{\text{loc}}([0,\infty); X)$，以下两个问题

$${}^{\text{ABC}}D_t^\alpha u(t) + Ku(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \qquad \textit{and} \qquad {}^{W}D_t^{\alpha,\beta} u(t) + Ku(t) = f(t), \quad u(0) = u_0,$$

存在由相应预解族给出的唯一温和解。此外，对每个$\gamma \in [0,1)$，

$$\|K^\gamma u(t)\| \le C\, t^{-\alpha\gamma}\Big(\|u_0\| + \int_0^t \|f(\tau)\|\,d\tau\Big).$$

证明。 结合命题 7.1 与定理 5.2和 5.5，并使用定理 4.10中的平滑估计。 □

7.2 贝塞尔型径向扩散算子

令 $\nu > -1/2$ 并考虑

$$\mathcal{B}_\nu u(r) = u''(r) + \frac{2\nu+1}{r}u'(r), \qquad r > 0,$$

在加权空间中

$$X_\nu = L^2\big((0,\infty), r^{2\nu+1}\,dr\big).$$

贝塞尔型算子、热核估计及相关谱估计的经典讨论见 [11]。算子 $\mathcal{B}_\nu$ 可实现为自伴且非正的算子。

命题 7.3 (贝塞尔算子的几乎扇形性)。 对于任意 $\theta \in (\pi/2, \pi)$ 都存在 $M_\theta > 0$ 使得

$$\|(zI - \mathcal{B}_\nu)^{-1}\| \le \frac{M_\theta}{|z|}, \qquad z \notin \Sigma_\theta, \quad |z| \ge 1.$$

证明。 论证与命题 7.1相同，使用 $\sigma(\mathcal{B}\nu) \subset (-\infty, 0]$。 □

定理 7.4 (贝塞尔演化)。 设 $\alpha \in (0,1)$ 且 $\beta \in (0,1]$。对于任意 $u_0 \in X_\nu$ 和$f \in L^1_{\text{loc}}([0,\infty); X_\nu)$，相应的 *ABC* 和 *W* 问题均存在唯一的温和解，并且对于任意 $\gamma \in [0,1)$，

$$\|\mathcal{B}_\nu^\gamma u(t)\|_{X_\nu} \le C\, t^{-\alpha\gamma}\Big(\|u_0\|_{X_\nu} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{X_\nu}\,d\tau\Big).$$

证明。 结合命题 7.3、抽象理论和平滑估计 e. □

8 温和解与弱解

我们在当前情形下给出一个便于使用的温和解/弱解等价性结论。

8.1 温和解

定义 8.1（温和解）。设 $u_0 \in X$ 和 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);\, X)$。函数 $u:\ [0,\infty) \to X$ 是一个温和解，满足

$$\mathcal{D}u(t) + Au(t) = f(t), \qquad u(0) = u_0, \tag{8.1}$$

（其中 $\mathcal{D}$ 表示 ${}^{\mathrm{ABC}}D^{\alpha}_{t}$ 或 ${}^{W}D^{\alpha,\ \beta}_{t}$），如果它满足常数变易公式

$$u(t) = V(t)u_0 + \int_0^t V(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

其中 V 是相应的预解族。

8.2 弱解

令 A^* 表示 A 的伴随算子（在巴拿赫空间中，使用适当的对偶配对）。

定义 8.2（弱解）。函数 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);\, X)$ 是弱解（8.1）的条件是：对任意 $\varphi \in D(A^*)$ 以及任意 $t > 0$,

$$\int_0^t \langle u(\tau),\, \mathcal{D}_{t-\tau}\varphi\rangle\, d\tau + \int_0^t \langle Au(\tau), \varphi\rangle\, d\tau = \int_0^t \langle f(\tau), \varphi\rangle\, d\tau + \langle u_0, \varphi\rangle,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示对偶配对。

8.3 等价性

定理 8.3（温和解与弱解的等价性）。设 A 为近扇形，$u_0 \in X$，且 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);\, X)$。则 u 是温和解，当且仅当按照定义*8.2*，它是弱解。

证明。我们证明两个蕴含方向，并强调复数域中拉普拉斯变换的唯一性原理。

(i) 温和 $\Rightarrow$ 弱解。假设 u是定义8.1意义下的温和解，即

$$u(t) = V(t)u_0 + \int_0^t V(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau, \qquad t \geq 0,$$

其中 V 是相应的预解族（ABC 或 W）。固定 $\varphi \in D(A^*)$，并与 φ取对偶配对。利用富比尼定理（由 L^1_{loc} 关于 f 的假设以及 $V(t)$ 在紧时间区间上的有界性可知此操作成立），可得到定义8.2中的弱恒等式。等价地，也可以对等式两边取拉普拉斯变换：引理4.7 给出，对于$\mathrm{R}s > 0$,

$$\widehat{u}(s) = K(s)\,(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\, u_0 + K(s)\,(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\, \widehat{f}(s),$$

并以 φ 进行检验，得到弱公式的拉普拉斯域形式，逆变换后即为定义8.2。

(ii) 弱 $\Rightarrow$ mild。假设 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); X)$ 满足弱公式（定义 8.2）。固定 $\varphi \in D(A^*)$。由于 $t \mapsto u(t)\ \varphi$ 和 $t \mapsto f(t)\ \varphi$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)$，因此当 $\mathrm{R}s > 0$ 时，它们的拉普拉斯变换存在。对弱恒等式两边取拉普拉斯变换，并使用拉普拉斯刻画（5.1）–（5.3）（ABC 情形）或（5.5）–（5.7）（W 情形），可得当 $\mathrm{R}s > 0$ 时，

$$\langle \widehat{u}(s), \varphi\rangle = \Big\langle K(s)\,(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}(u_0 + \widehat{f}(s)),\, \varphi \Big\rangle,$$

因此

$$\widehat{u}(s) = K(s)\,(s^{\alpha-1}I - A)^{-1}\big(u_0 + \widehat{f}(s)\big) \quad \text{in } X, \qquad \Re s > 0.$$

根据引理 4.7，右端是以下函数的拉普拉斯变换：

$$t \mapsto V(t)u_0 + \int_0^t V(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

因此它是一个 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$-函数。最后，根据 在 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$ 中拉普拉斯变换的唯一性（例如，参见 [4, 定理。1.7.3]），我们得出结论： u 几乎处处与该常数变易表达式相同；又由于温和解的连续性，该等式对所有 $t \geq 0$ 均成立。因此， u是一个温和解。

根据 $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$ 中拉普拉斯变换的唯一性可得唯一性。这就证明了等价性。

□

9 数值示例

本节通过数值示例展示定理 4.10中确立的分数阶平滑结果。我们的目的并非设计收敛数值格式，也非研究精确渐近常数，而是验证抽象理论对典型近扇形生成元所预测的定性行为。关于分数阶扩散及相关时间非局部动力学的数值与建模背景，参见例如 [12, 13]。本文考虑两种互补情形：

- 一个 有界退化算子 （Kimura 型）与 Atangana–Baleanu 核（$\beta = 1$）相结合；
- 一个 奇异无界算子 （Bessel 型）与 W 核（$0 < \beta < 1$）相结合。

这使我们能够在同一预解式框架内比较 ABC 和 W 动力学，并突出附加参数 β 的作用。

9.1 木村算子：ABC 动力学（$\beta = 1$）

我们首先考虑 Kimura 扩散算子 K 作用于 (0,1)，其实现方式如第 7 节所述。我们固定参数 $\alpha = 0.5$ 和 $\gamma = 0.5$。在此情形下，抽象分数阶平滑估计定理4.10 给出一致有界估计

$$\|K^\gamma V_{\mathrm{ABC}}(t)\| \leq C\,t^{-\alpha\gamma}, \qquad t > 0.$$

为构造 $\|K^\gamma V_{\mathrm{ABC}}(t)u_0\|$的离散替代模型，我们取 u_0 =sin(πx) 作为初始数据，该数据属于加权空间 $X = L^2((0,1)\ x^{-1}(1-x)^{-1}\,dx)$ 且足够光滑。算子 K 通过在均匀网格上对相应狄利克雷型进行分片线性（P1）有限元离散来逼近，网格包含 $N = 1000$ 个内部点，从而得到一个负半定矩阵 K_h。离散演化通过对拉普拉斯反演公式进行数值近似来定义

$$u_h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta} e^{st}\,K_\alpha(s)\,(s^{\alpha-1}I - K_h)^{-1}u_{0,h}\,ds,$$

其中，围道积分沿着 Γ_θ 的射线计算。接着，我们令 $w_h(t) = K_h^\gamma u_h(t)$，其中 K_h^γ 由对称矩阵的谱演算定义。

图 2 展示了 $\|w_h(t)\|$ 在双对数尺度上的衰减情况，以及参考斜率$t^{-\alpha\gamma}$ 和 $t^{-\gamma}$。数值曲线始终低于上界 $t^{-\alpha\gamma}$，这与定理4.10一致。在中等和较大的时间尺度上，衰减变得更快，并趋近于

空间衰减率 $t^{-\gamma}$，反映了木村算子的低频谱模态占主导地位。这一行为与如下事实一致：定理 4.10给出的是全局上界，而非渐近等价性。

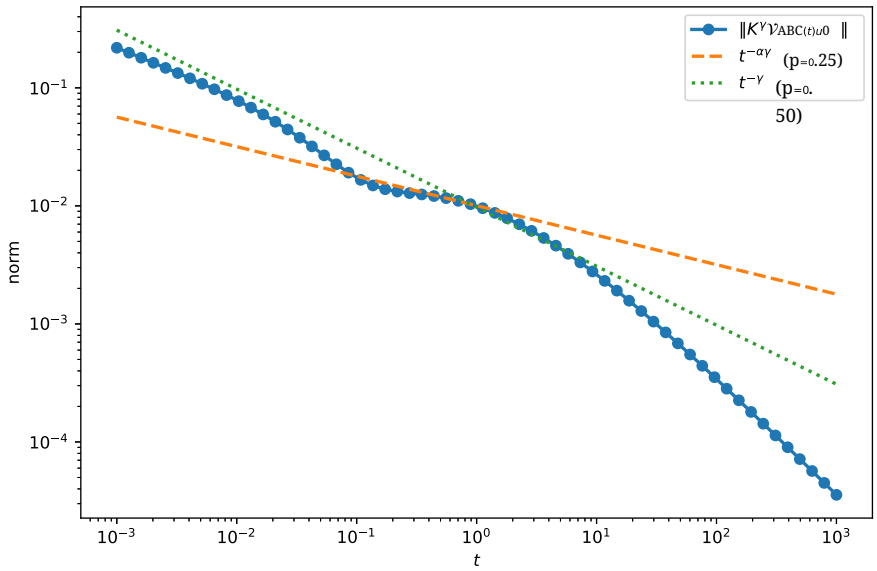


图2：木村算子在 ABC 动力学（$\alpha = 0.5, \gamma = 0.5$）下 $\|K^\gamma V_{\mathrm{ABC}}(t)u_0\|$ 的衰减。虚线对应理论界 $t^{-\alpha\gamma}$，而点线显示更快的参考速率 $t^{-\gamma}$。

为进一步阐明这一转变，图 3报告了局部衰减指数

$$-\frac{d\log\|w_h(t)\|}{d\log t}$$

作为时间的函数。在较短时间内，指数接近 $\alpha\gamma$，表明处于真正的分数阶区域。随着时间变长，指数逐渐趋近 γ，对应于由空间主导的衰减。这种转变并不与抽象估计矛盾，反而体现了其非渐近特性。

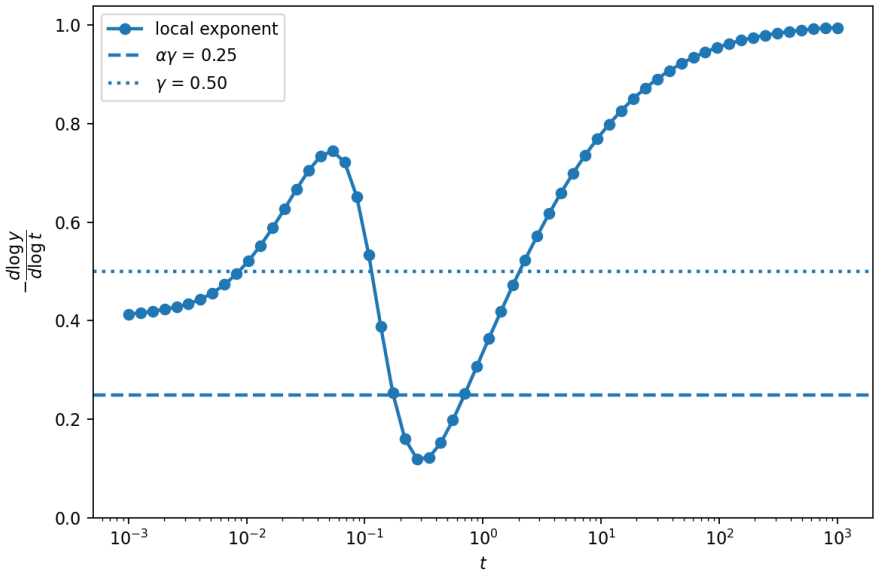


图 3：木村算子的局部衰减指数 $-\frac{d}{d\log t}\log\|K^{\gamma}V_{\mathrm{ABC}}(t)u_0\|$。水平虚线和点线分别对应 $\alpha\gamma$ 和 γ。

9.2 贝塞尔算子：W 动力学 ($0<\beta<1$)

现在我们转而讨论贝塞尔型算子ν 作用于加权空间 $X_\nu = L^2((0,\infty), r^{2\nu+1}\,dr)$，该算子如第 7 节所述。与 Kimura 情形不同，$\mathcal{B}_\nu$ 是无界的，且在原点处奇异。因此，它是检验 W 算子的自然案例；W 算子在拉普拉斯乘子的层面引入了额外参数 β。

我们固定 $\nu = 0.25$、$\alpha = 0.5$、$\beta = 0.8$ 和 $\gamma = 0.5$。抽象理论预测相同的分数阶平滑界

$$\|\mathcal{B}_\nu^{\gamma} V_W(t)\| \lesssim t^{-\alpha\gamma}, \qquad t > 0,$$

且与 β 无关。

数值过程与木村算子的情形类似。算子$\mathcal{B}_\nu$ 采用适用于加权空间的对称格式进行离散化，从而得到负半定矩阵 B_h。通过使用乘子 $\mathcal{K}_W(s)$ 进行围道积分，对 W-预解族进行近似，并令 $w_h(t) = B_h^{\gamma} u_h(t)$。

图4 展示了 $\|\mathcal{B}_\nu^{\gamma} u(t)\|$ 在双对数尺度下的衰减情况。与 Kimura–ABC 情形一样，数值曲线始终低于参考衰减率 $t^{-\alpha\gamma}$。图中还表明，瞬态区间明显受到参数选择 $\beta<1$的影响：初始衰减较慢，反映出记忆核分布得更为分散。在较大的时间尺度下，衰减加快并趋近于空间衰减率 $t^{-\gamma}$，这同样是由谱效应导致的。

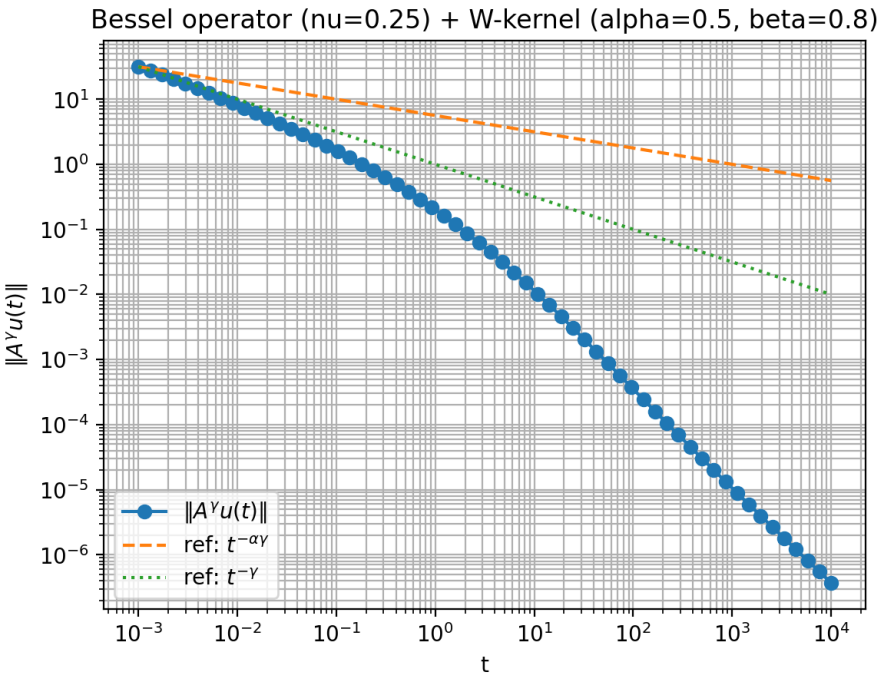


图 4：W 动力学（$\alpha = 0.5$,$\beta = 0.8$, $\gamma = 0.5$）下贝塞尔算子（$\nu = 0.25$）的 $\|\mathcal{B}_\nu^\gamma u(t)\|$ 衰减。虚线和点线分别对应参考衰减率 $t^{-\alpha\gamma}$ 和 $t^{-\gamma}$。

相应的局部衰减指数如图5所示。与抽象平滑界一致，该指数在短时间内从接近 $\alpha\gamma$ 的值开始，并逐渐过渡到较大时间尺度下的 γ。与 ABC 情形相比，这一过渡更加平滑、渐进，凸显了参数 β所带来的额外建模灵活性，同时保持了相同的预解几何和全局平滑尺度。

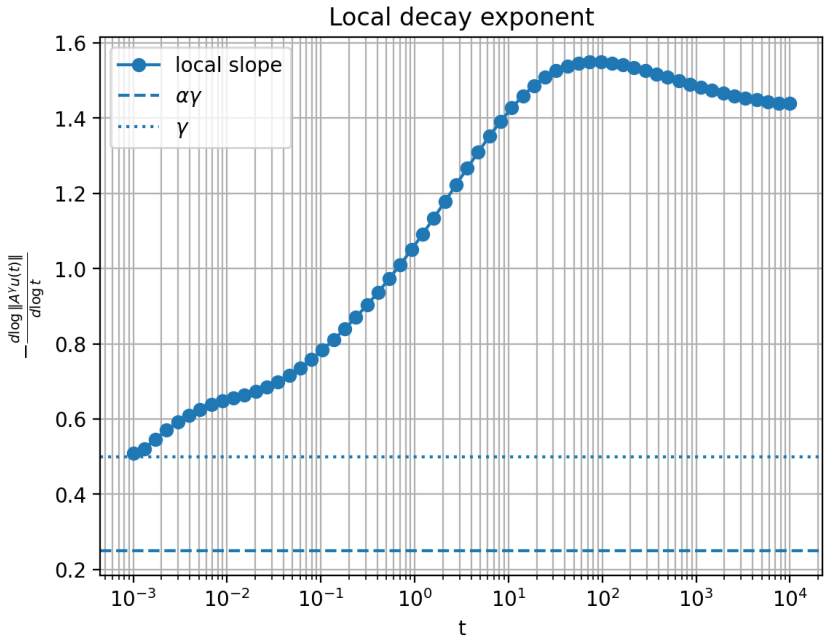


图 5：W 动力学下贝塞尔算子的局部衰减指数 $-\frac{d}{d\log t}\log\|\mathcal{B}_\nu^\gamma u(t)\|$。水平参考线对应 $\alpha\gamma$和 γ。

这些数值实验与 ABC 和 W 核的抽象平滑估计一致。它们表明，W 算子在保留相同分数阶平滑尺度的同时，还能在瞬态区间提供额外的灵活性；这一特性在预解几何层面并不可见，却能从随时间变化的行为中清楚地观察到。

比较：Kimura（ABC）与贝塞尔（W）。比较 Kimura–ABC 和贝塞尔–W 实验，有助于区分哪些现象源自核，哪些源自空间算子。在这两种情况下，$\|A^{\gamma}u(t)\|$ 的早期衰减都遵循分数阶尺度 $t^{-\alpha\gamma}$，这与定理4.10的预测一致，也符合围道表示所依据的相同几何重定向机制。在较长时间下，观察到的衰减会偏离这一参考斜率，并逐渐体现底层算子的谱分布，从而进入一个衰减更快、由空间因素主导的区间。

W 核中的附加参数 β 不会改变预测的平滑尺度，但会明显影响瞬态行为：对于 $\beta < 1$，短时分数阶区间与长时空间区间之间的交叉过渡通常比 ABC 情形（对应于 $\beta = 1$）更加平滑、渐进。总体而言，应将这些图视为定性一致性检验：它们支持这样一种观点，即短时界由预解几何决定，而具体的交叉过渡动态则取决于核形状（通过 β）以及 A 的谱。

10 结论

我们为由与几乎扇形算子相容的有理非奇异核驱动的分数阶演化方程，构建了统一的预解式框架。其核心机制是拉普拉斯域映射 $z = s^{\alpha-1}$，该映射将低拉普拉斯频率重新指向高谱参数。这一几何论证解释了近扇形区间内Caputo动力学的不相容性，并系统处理了ABC和W导数，包括适定性、常数变易公式以及精确的分数阶平滑估计，并将其应用于退化扩散生成元。不同于针对近扇形生成元的基于Caputo的方法（这类方法通常要求在原点附近附加谱假设），本文框架确定了一个核驱动的普适类，在该类中，仅凭拉普拉斯反演的几何性质即可保证相容性；另请参见 [7, 8]。

参考文献

[1] Podlubny, I.：《分数阶微分方程》。Academic Press（1999）[2] Atangana, A., Baleanu, D.：具有非局部和非奇异核的新型分数阶导数：理论及其在热传递模型中的应用。arXiv:1602.03408（2016）[3] Prüss, J.：《演化积分方程及其应用》。Birkhäuser（1993）[4] Arendt, W.，Batty, C.J.K.，Hieber, M.，Neubrander, F.：《向量值拉普拉斯变换与柯西问题》。《数学专著丛书》，第 96 卷。Birkhäuser（2001）[5] Haase, M.：《扇形算子的函数演算》。Birkhäuser（2006）[6] Kunstmann, P.C.，Weis, L.：抛物型方程的最大 L^p 正则性、傅里叶乘子定理与 H^{∞}函数演算。载于：《演化方程的泛函分析方法》，《数学讲义》。Springer（2004）[7] Wang, R.-N.，Chen, D.-H.，Xiao, T.-J.：具有近扇形算子的抽象分数阶柯西问题。《微分方程杂志》**252**，202–235（2012）

[8] Bazhilov, V.，Lizama, C.：分数阶演化方程与预解族。《微分方程杂志》**269**，5233–5262（2020）[9] Li, C.，Zheng, Z.：分数阶微分方程的抽象柯西问题。《数学分析及其应用杂志》**427**，1–19（2015）[10] Epstein, C.，Mazzeo, R.：《种群生物学中的退化扩散算子》。普林斯顿大学出版社（2013）[11] Davies, E.B.：热核估计、贝塞尔算子与谱理论。《泛函分析杂志》**86**，16–27（1989）[12] Meerschaert, M.M.，Scheffler, H.P.：具有无限均值等待时间的连续时间随机游走的极限定理。《应用概率杂志》**41**，623–638（2004）[13] Lischke, A.，Pang, G.，Gulian, M.，Song, F.，Glusa, C.，Zheng, X.，Mao, Z.，Cai, W.，Meerschaert, M.M.，Ainsworth, M.，Karniadakis, G.E.：什么是分数阶拉普拉斯算子？《计算物理杂志》**404**，109009（2020）[14] Wakrim, M.：W 算子：具有有理拉普拉斯符号的二参数分数阶导数。准备中的手稿。