arXiv:2601.02895v1 [math.AT] 6 Jan 2026

Lie-Rinehart 对的同伦代数

DAMJAN PIŠTALO

摘要。证明：在微分分次 Lie-Rinehart 对范畴中，对拟同构对进行 Dwyer-Kan 局部化（A, M），其中 A 是域 k 上的半自由交换微分分次代数（特征为零），而 M 是 A-模范畴中的胞腔复形；所得范畴等价于满足相同余纤维化条件的强同伦 Lie-Rinehart（SH LR）对范畴。后者是一个纤维化对象范畴。我们为 SH LR 对引入余纤维化，构造分解，并证明提升性质。利用这些性质，我们证明某些 BV 型分解在同伦意义下的唯一性。将范围限制在底层交换微分分次代数为有限型的微分分次 LR 对，并采用另一种（余）纤维性条件，我们证明函子（A, M）$\mapsto$ A 是一个具有可呈现纤维的笛卡尔纤维化。在 Dwyer-Kan 局部化下，这两种（余）纤维性条件给出等价的 ∞-范畴。

目录

1. 引言 1 2. 微分分次 Lie-Rinehart 对的范畴 4 3. 强同伦 Lie-Rinehart 对的范畴 6 4. 微分分次与 SH LR 对的等价性 12 5. 余纤维化、分解与提升性质 18 6. BV 型分解 29 7. 微分分次 Lie-Rinehart 代数的笛卡尔纤维化 34 附录 A. 微分分次原代数 37 参考文献 40

1. 引言

Lie 代数丛已在几何与物理的诸多领域得到广泛应用，例如叶层理论、Poisson 几何、场论等。因此，可以预期，建立一套完善的 Lie 代数丛同伦论，将成为同伦几何中的有用工具。

日期：2026年1月7日。2020 数学主题分类。55U35, 17B55, 16 W25。

在代数情形中，我们讨论（层上的）微分分次 Lie-Rinehart 对。迄今为止，这类对象的同伦论主要是在固定的导出（仿射）概形 ([23]) 上的态射框架下发展起来的，这一背景适用于导出变形理论 ([24]) 的应用。对于微分分次 LR 对之间的一般态射，目前还缺乏系统性的研究。

微分分次 Lie-Rinehart 对的态射 $(f_0,\ f) : (A,\ M) \to (B,\ N)$ 是一个交换微分分次代数的态射 $f_0 \colon B \to A$，以及一个 A-模态射 $f \colon M \to A \otimes_B N$，并且与锚和括号相容。它唯一地经由 Lie-Rinehart 拉回 $(A,\ f_0^! N) = (A,\ \mathrm{Der}(A) \times_{\mathrm{Der(A,B)}} B \otimes_A N)$ 分解。在底层交换微分分次代数满足有限性条件，且满足适当的（余）纤维性条件时，将一个 dg LR 对映到其底层仿射导出概形（反范畴交换微分分次代数）的函子是一个笛卡尔纤维化（定理 33）。由于不存在“推前”，该函子不是笛卡尔余纤维化，因此没有特别理由认为 dg Lie-Rinehart 对的范畴是一个可呈现的 ∞-范畴。本文旨在说明，除同伦余极限的存在性之外，抽象同伦论的许多内容仍然适用。事实上，大多数结果的证明都不需要上述有限性条件。

在本文中，k 是一个固定的特征零域。将由 dg LR 对 (A, M) 构成的范畴（其中 A 是半自由交换微分分次代数，M 是 A-模中的一个胞腔复形）在准同构对 (f_0, f) 处局部化后，记为 $\mathtt{dgLR}(k)^{\mathrm{cof}}$。我们证明，它等价于满足相同余纤维化条件的强同伦李-莱因哈特对范畴的局部化。后一个范畴是一个纤维对象范畴 ([25]) 的德怀尔 - 坎局部化。值得注意的是，我们区分强同伦态射的两种一般形式：线性和一般。尽管这两种概念都给出纤维对象范畴，但它们在提升性质方面有所不同（引理 21、引理 25）。通过探究李代数的 Koszul 对偶，我们在定理 15 中建立了以下等价关系

$$\mathcal{L}_- C_- : \mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof,lin}}(k) \rightleftarrows \mathtt{dgLR}(k)^{\mathrm{cof}} : \imath$$

即 dg LR 对与带有线性 SH 态射的 SH LR 对的无穷范畴之间的等价关系。在 [23], 和 [4]中，不同背景下也出现了类似的构造。在定理 17 中，我们证明，宽子范畴的包含映射

$$\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof,lin}}(k) \hookrightarrow \mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$$

通过显式构造其右伴随，这也构成无穷范畴之间的等价；其伴随的单位和余单位显然都是弱等价。值得注意的是，定理 15 在更一般的情形下仍然成立，即 A 可以是任意交换微分分次代数。然而，在这种情况下，尚不清楚该等价是否能推广到一般态射。在 1-范畴 Gabriel-Zisman 局部化的层面上，定理 15 和定理 17 中的等价范畴还进一步等价于由一般 A 构成的 SH LR 对范畴（$A,\ M$）（其中 M是由 A-模构成的胞腔复形），且态射为一般态射（推论 29）。

在第 7 节中，我们考察其底层交换微分分次代数为有限型的微分分次 Lie-Rinehart 对。在这些对象中，我们区分出良好的微分分次 LR 对；所谓良好，是指一个良好的微分分次 LR 对的拉回既具有正确的同伦型，同时其自身也是一个良好的微分分次 LR 对。一方面，良好的微分分次 LR 对范畴（在 Dwyer-Kan 局部化下）等价于 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft},\ \mathrm{cof}}(k)$；另一方面，

$$p : \mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft,nice}}(k) \to \mathtt{cdga}^{\mathrm{ft}}(k)^{\mathrm{op}}, \quad (A, M) \mapsto A$$

它是一个笛卡尔纤维化。其纤维是 [23] 中研究的可呈现无穷范畴。

第 5 节和第 6 节并不具有相同的无穷范畴风格，而是着重于抽象同伦论中的“经典”计算工具，超越纤维化对象范畴的结构所能提供的内容。

在第 5 节中，我们定义了 SH LR 对的余纤维化，证明了提升性质，并建立了分解等工具。这是线性态射与一般态射之间的差异首次发挥作用：在固定交换微分分次代数上的线性态射所构成的提升图中，提升也是线性态射。一般而言，即使提升图中的所有映射都是线性的，提升也不一定是线性的。

在第 6 节中，我们用 SH LR 对（$QA,\ QM$）来处理 dg LR 对（$A,\ M$）的分解，其中 QA 半自由，且 QM 是 QA 模中的胞腔复形。这里，我们运用第 5 节的工具来证明通常的同伦意义下的唯一性。本节主要受 B(F)V-BRST 复形的启发，并建立在文献 [26]中研究的 Koszul-Tate 解消的同伦代数解释之上。

其余 各节旨在介绍本文通篇使用的 1-范畴概念 .

第 2 节回顾微分分次 LR 对及其态射的概念，并介绍到锚定模的自由-遗忘伴随。

第 3 节讨论 SH LR 对及其（线性和一般）态射。在文献（[33], [12]）中，SH LR 对（A, M）通常通过 $M[1]$ 上的多重导子来定义。等价地，它是一个微分分次A-模 M，带有一个满足某种莱布尼茨法则的 L_∞-结构，以及一个 A-多重线性 L_∞态射（锚） $\Gamma\colon M \rightsquigarrow$导子代数$(A)$。SH 态射（$A, M$） $\rightsquigarrow (B, N)$ 的定义适用于 M为可对偶化 A-模的 SH LR 对（A, M）：它与切瓦利-艾伦伯格$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$复形之间的态射 $f^*\colon (\mathrm{Sym}_B(N^*[-1]),\ d_{\mathrm{CE}}) \to (\mathrm{Sym}_A(M^*[-1]),\ d_{\mathrm{CE}})$ 方向相反，并且该态射与增广$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$$\mathrm{Sym}_A(M^*) \to A$的复合可经由增广 $\mathrm{Sym}_B(M^*) \to B$ 分解。运用 [25], 中发展的微分分次原代数语言，该定义可直接从可对偶化模推广到余纤维模，甚至分次平坦模。这些态射称为一般态射。线性 SH 态射还满足条件 $f^*(A) \subseteq B$。定义 9 根据 SH LR 结构刻画了线性 SH 态射。对于固定基底交换微分分次代数 A，它们是 L_∞-代数之间的 A-多重线性态射，并且与锚相容。

记号。 我们采用上同调约定：微分使次数增加 1。

定义在 k 上的非正分次微分分次交换代数范畴记为$\mathtt{cdga}(k)$。给定 $A \in \mathtt{cdga}(k)$， $\mathtt{Mod}(A)$表示 k-向量空间的无界上链复形范畴，其上带有 A作用。具体而言，上链复形 M 是一个 A-模，当且仅当它是分次 A-模，且其微分满足分次莱布尼茨恒等式

$$d(a \cdot m) = d_A a \cdot m + (-1)^{|a|} a \cdot dm. \tag{1.1}$$

态射必须保持 A-模结构并遵循微分。

A-模的自由分次对称代数为

$$\operatorname{Sym}_A M = \oplus_{k\in\mathbb{N}} M^{\otimes_A k}/\mathcal{I},$$

其中，$\mathcal{I}$是由$\{m\otimes n - (-1)^{|m|\cdot|n|} n\otimes m \colon m,n\in M\}$生成的理想。其乘法（分次对称张量积）记为 $\odot$。指标 k 称为权。权为 k 的元素构成的 A-模 $\operatorname{Sym}_A M$记为 $\operatorname{Sym}^k_A M$。有时，对称积 $m_1\odot\cdots\odot m_k$ 记为 $m_{1\ldots k}$。

含有 k 个元素的集合的所有置换构成的群记为 Σ_k。(l,m)-非交错置换的集合记为 $\operatorname{Sh}(l,m)\subset\Sigma_{l+m}$。

给定一个 k-置换 $\sigma\in\Sigma_k$ 以及 $m_1,\ldots,m_k\in M$，数 $|m_1,\ldots,m_k|_\sigma\in\{\pm 1\}$ 由下式隐式定义：

$$m_{\sigma(1)}\odot\ldots\odot m_{\sigma(k)} = (-1)^{|m_1,\ldots,m_k|_\sigma} m_1\odot\ldots\odot m_1.$$

$\mathbb{N}$ 表示包括零在内的自然数集合。不含零的自然数集合记作 $\mathbb{N}_{>0}$.

致谢。 作者谨此致谢：本工作的绝大部分是在卢森堡大学博士后研究期间完成的。

2. 微分分次 Lie-Rinehart 对的范畴

首先，我们回顾锚定模和 LR 对的概念，并在比现有文献稍具一般性的情形下建立一些初步结果，但这些结果绝非出人意料。其中尤为重要的是锚定模与 LR 对之间的自由-遗忘伴随，它将 [15, 定理 2.12]同时推广到基代数可变的情形以及（微分）分次情形。

定义 1. （微分）分次锚定模是一个二元组 (A,M)，其中 $A\in\mathtt{c}(\mathtt{d})\mathtt{ga}(k)$，$M\in\mathtt{Mod}(A)$，并带有一个 A-模态射 $\Gamma\colon M\to$ 导子代数(A)，称为锚。

（微分）分次锚定模的一个态射 $(f_0,f)\colon (A,M)\to(B,N)$ 是一个态射 $f_0\colon B\to A$ 的（微分）分次代数，连同一个 A-模态射 $f\colon M\to A\otimes_B N$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f\quad} & A\otimes_B N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Der}(A) & \xrightarrow{-\circ f_0} & \operatorname{Der}(B,A). \end{array}$$

交换。右侧的垂直映射由 $a\otimes n\mapsto a\cdot f_0\circ\Gamma(n)$ 给出。

（微分）分次锚定模的范畴记为 $(\mathtt{d})\mathtt{gAnch}(k)$。

定义 2。一个（微分）分次 Lie-Rinehart 对是一个（微分）分次锚定模 (A,M)，连同一个 M 上的（微分）分次李代数结构，使得

- $\Gamma\colon M\to\operatorname{Der}(A)$ 是（微分）分次李代数的态射；并且

- M 中的李括号满足分次莱布尼茨法则

$$[m, an] = \Gamma(m)(a) \cdot n + (-1)^{|a||m|} a \cdot [m, n].$$

.

(微分)分次 Lie-Rinehart 对的态射 $(f_0, f) : (B, M) \to (A, N)$ 是一个锚定模态射，并且与括号相容，其含义是对于 $f(m) = \sum_i b_i \otimes n_i$, $f(m') = \sum_j b'_j \otimes n'_j$,

$$f([m, m']) = \sum_{i,j} (-1)^{|b'_j||n_i|} b_i b'_j \otimes [n_i, n'_j] + \sum_j \Gamma(m)(b'_j) \otimes n'_j - (-1)^{|m||m'|} \sum_i \Gamma(m')(b_i) \otimes n_i. \tag{2.1}$$

(微分)分次 Lie-Rinehart 对的范畴记为 $(\mathtt{d})\mathtt{gLR}(k)$.

定理 3. 遗忘函子 $\mathrm{For}: (\mathtt{d})\mathtt{gLR}(k) \to (\mathtt{d})\mathtt{gAnch}(k)$ 有一个左伴随，即自由 *Lie-Rinehart* 函子，记为 LR。

证明。 给定一个(微分)分次向量空间 V，其上的自由(d)g Lie k-代数记为 Lie(V)，它具有自然的权分次

$$\mathrm{Lie}(V) = \bigoplus_{k \geq 1} \mathrm{Lie}^k(V),$$

其中 Lie^k(V) 由恰好涉及 k 个 V 元素的括号张成。

现在考虑一个带锚的 (d)g 模 (A, M)。如果锚平凡，则自由 Lie-Rinehart 对 (A, $\mathrm{LR}_A(M)$) 是 A 上的自由 (d)g Lie A-代数，因此自然带有分次结构。一般而言，$\mathrm{LR}_A(M)$ 是一个过滤带锚的 (d)g A-模的并

$$\mathrm{LR}_A^{\leq 1}(M) \subset \mathrm{LR}_A^{\leq 2}(M) \subset \dots \tag{2.2}$$

该模递归地从 $\mathrm{LR}_A^{\leq 1}(M) = M$ 开始定义，使得对于每个 $k \geq 1$，$\mathrm{LR}_A^{\leq 2}(M)$ 作为一个 (d)g 向量空间，是 $\mathrm{Lie}^{\leq k}(M) = \bigoplus_{l=1\dots k} \mathrm{Lie}^l(M)$ 的商。将商映射记为 q_k。

假设带锚的 A-模 $\mathrm{LR}_A^{\leq k}(M)$ 已针对某个 k 定义。$\mathrm{LR}_A^{\leq k+1}(M)$ 是 $\mathrm{Lie}^{\leq k+1}(M)$ 关于以下关系取商所得:

$$[x, r] = 0, \ \ x \in \mathrm{LR}^{\leq l}(M), r \in \mathrm{Ker}(q_m), l + m = k + 1; \tag{2.3}$$

$$[ax, y] - (-1)^{|a||x|}[x, ay] = (-1)^{(|a|+|x|)|y|} \Gamma(y)(a) \cdot x - (-1)^{|a||x|} \Gamma(x)(a) \cdot y, \tag{2.4}$$

对于 $x \in \mathrm{LR}^{\leq l}(M)$、 $y \in \mathrm{LR}^{\leq m}(M)$ 和 $l + m = k + 1$. 锚可扩展为

$$\Gamma([x, y]) = [\Gamma(x), \Gamma(y)], \ \ x \in \mathrm{LR}^{\leq l}(M), y \in \mathrm{LR}^{\leq m}(M), l + m = k + 1,$$

以及由以下方式给出的 A-模结构

$$a \cdot [x, y] = (-1)^{|a||x|}([x, ay] - \Gamma(x)(a) \cdot y), \ \ a \in A, x \in \mathrm{LR}^{\leq l}(M), y \in \mathrm{LR}^{\leq m}(M).$$

一个 (d)g 锚定模的态射 $(f_0, f) : (A, M) \to (B, N)$ 会诱导出一个 (d)g LR 对的态射 $(f_0, \mathrm{LR}(f)) : (A, \mathrm{LR}_A(M)) \to (B, \mathrm{LR}_B(N))$，其中 $\mathrm{LR}(f)$ 由其限制递归定义（这些限制是锚定模态射）

$$\mathrm{LR}^{\leq k}(f) : \mathrm{LR}_A^{\leq k}(M) \to A \otimes_B \mathrm{LR}_B^{\leq k}(N),$$

如下

- $\mathrm{LR}^{\leq 1}(f) = f$;
- 假设 $\mathrm{LR}^{\leq k}(f)$ 对某个 k 有定义，则 $\mathrm{LR}^{\leq k+1}(f)$ 由方程 2.1 定义，其中 $m \in \mathrm{LR}^{\leq p}(M)$ $m\prime \in \mathrm{LR}^{\leq q}(M)$，且 $p + q = k + 1$。

□

本节最后指出，微分分次 LR 对可以像其经典对应物一样进行拉回。

给定一个 dg LR 对 (A, M)，以及一个交换微分分次代数 $A \to B$ 上的态射 $f_0 \colon A \to B$，沿 f_0 对 (A, M) 作拉回，记为 $(B, f_0^! M)$。作为一个 dg B-模，$f_0^! M$ 等于该拉回

$$\mathrm{Der}(B, B) \times_{\mathrm{Der}(A,B)} B \otimes_A M.$$

锚是到 $\mathrm{Der}(B, B)$ 的投影，括号定义为

$$\begin{aligned}&[(\rho, \sum_i b_i \otimes m_i), (\rho', \sum_j c_j \otimes n_j)]\\ =&([\rho, \rho'], \sum_{i,j} (-1)^{|m_i||c_j|} b_i c_j \otimes [m_i, n_j] + \sum_j \rho(c_j) \otimes n_j - (-1)^{|\rho'|(|b_i|+|m_i|)} \sum_i \rho'(b_i) \otimes m_i).\end{aligned}$$

记

$$p : \mathrm{Der}(B, B) \times_{\mathrm{Der}(A,B)} B \otimes_A M \to B \otimes_A M$$

为典范映射。则

$$(f_0, p) : (B, f_0^! M) \to (A, M)$$

是 dg LR 对的态射

我们不加证明地陈述分解性质。这是命题 12 的特殊情形。

命题 4。 给定一个 *dg LR* 对的态射 $(f_0, f) : (B, M) \to (A, N)$ 存在唯一的态射 $(\mathrm{Id}_B, \overline{f}) : (B, M) \to (B, f_0^! N)$ 使得

$$(f_0, f) = (f_0, p) \circ (\mathrm{Id}_B, \overline{f}).$$

3. 强同伦 Lie-Rinehart 对的范畴

本节介绍 SH LR 对和 SH 态射的概念，并证明本文中将用到的一些初步结果。我们首先回顾有关 L_∞-代数的相关构造。

给定一个 L_∞-代数 L，其定义在 k 上，记其约化切瓦利-埃伦伯格余代数为 $C_k(L)$——即 CE 余代数的余单位的核。具体而言，它是约化分次对称余代数 $\mathrm{Sym}_k^{>0}(L[1])$，其余乘法为

$$\overline{\Delta}(l_1 \odot \cdots \odot l_n) = \sum_{\substack{k=1,\dots n-1 \\ \sigma \in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} (-1)^{|l_1,\dots,l_n|_\sigma} (l_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot l_{\sigma(k)}) \otimes (l_{\sigma(k+1)} \odot \cdots \odot l_{\sigma(n)}),$$

以及一个由负移位的n元括号余生成的微分（其含义见 [18, 推论 11.59]）

$$D^n_{C_k(L)}(l_1 \odot \cdots \odot l_n) = -(-1)^{\sum_{i=1}^n (n-i)|l_i|} s^{-1}[sl_1, \dots, sl_n]_n, \quad n \in \mathbb{N}_{>0}. \tag{3.1}$$

L_∞ 结构完全编码在切瓦利-埃伦伯格微分中。事实上，给定一个分次向量空间 V，分次对称余代数 $\mathrm{Sym}_k(V[1])$ 上的微分通常被称为 $L_\infty[1]$-代数在 $V[1]$ 上的结构。方程 3.1 给出了 V 上的 L_∞-结构与 $V[1]$ 上的 $L_\infty[1]$-结构之间的一一对应，将给定的 L_∞-代数赋予其切瓦利-埃伦伯格余代数。 $L_\infty[1]$-态射记作 $V[1] \rightsquigarrow W[1]$，通常定义为相应切瓦利-埃伦伯格余代数之间的态射 $F\colon \mathrm{Sym}_k(V[1]) \to \mathrm{Sym}_k(W[1])$，或定义为它们的余生成元之间的态射（$f^n\colon \mathrm{Sym}_k^n(V[1]) \to W[1]$）$_{n\geq 1}$。具体地，

$$F(m_1 \odot \cdots \odot m_n) = \sum_{\substack{r=1,\dots n \\ 1\leq n_1<\dots<n_r\leq n \\ \sigma \in \mathrm{Sh}(n_1,\dots,n_r)}} (-1)^{|v_1,\dots,v_n|_\sigma} f^{n_1}(v_{\sigma(1)\dots\sigma(n_1)}) \odot \cdots \odot f^{n_r}(v_{\sigma(n-n_r+1)\dots\sigma(n)}). \tag{3.2}$$

若 f^1 是拟同构，则映射 $(f^n)_n$ 称为无穷拟同构。 $L_\infty[1]$态射的移位有时也称为 L_∞-态射。特别地，给定微分分次李代数的态射 $f\colon L \to L'$，

$$\mathrm{déc}^{-1}(f)\colon L[1] \to L'[1], \quad l \mapsto s^{-1} f(sl)$$

（连同对于 $k>1$ 的零映射 $\mathrm{Sym}^k(L[1]) \to L'[1]$）是一个 $L_\infty[1]$ 态射。

如果 V 是有限维的，则 V 上的 $L_\infty[1]$-代数结构可由切瓦利-埃伦伯格代数对偶编码——一个形式幂级数

$$\widehat{\mathrm{Sym}}_k(V^*) = \varprojlim_n \mathrm{Sym}_k(V^*)/\mathrm{Sym}_k^{>n}(V^*),$$

连同一个连续的平方为零微分。等价地，它是范畴阿廷分次代数中的逆系对象 $(\mathrm{Sym}_k(V^*)/\mathrm{Sym}_k^{>n}(V^*))_n\widehat{\ }$，仍记作 $\mathrm{Sym}_k(V^*)$，并连同一个平方为零微分（附录 A）。后面的表述可立即推广到无限维分次向量空间：向量空间 V 是其有限维子空间 $V = \varinjlim_i V_i$ 的直接极限。据此， V 上的 $L_\infty[1]$-代数结构对偶化为逆系阿廷分次 k-代数上的一个微分

$$\widehat{\mathrm{Sym}}_k(V^*) := (\mathrm{Sym}_k(V_i^*)/\mathrm{Sym}_k^{>n}(V_i^*))_{i,n},$$

赋予其原 Artin 微分分次 k-代数的结构。在 [27], 原 Artin 微分分次k-代数范畴中赋予一种模型结构，使得上述对偶给出 L_∞-代数范畴与余纤维原 Artin 微分分次 k-代数范畴的相反范畴之间的等价。

与 $L_\infty[1]$ 代数结构不同，(A, M) 上的 SH LR$[1]$（或 $LR_\infty[1]$）结构通常不能由分次余代数 $\mathrm{Sym}_A(M)$ 上的微分确定。不过，只要 M 是平坦的分次 A-模，它就能由对偶分次原代数上的微分确定。具体而言，根据 Lazard 定理，分次 A-模 M 平坦，当且仅当它是有限自由分次 A-模所构成的有向系统的余极限 $M = \varinjlim_i M_i$。由此，SH LR$[1]$ 结构等价地由原有限 A-延拓上的平方为零微分编码。

$$\widehat{\mathrm{Sym}}_A(M^*) := (\mathrm{Sym}_A(M_i^*)/\mathrm{Sym}_A^{>n}(M_i^*))_{i,n},$$

$\widehat{\ }$它限制在增广 $\mathrm{Sym}_A(M^*) \to A$ ([25, 节 5], 附录 A) 的核上。其权$k-1$分量分别限制到 A和 M^*后，得到一个次数为一的导子 $\sigma^{k-1}\colon A \to \mathrm{Sym}_A^{k-1}(M)^*$，以及一个原分次向量空间之间的次数为一的态射 $d^k\colon M^* \to \mathrm{Sym}_A^k(M)^*$，它满足关于 A-模结构和 σ^{k-1} 的某种莱布尼茨法则。这样的对 (d^k, σ^k) 对偶地是 M 上的权 $k-1$ 多重导子：一个对 (D^k, ρ^{k-1})，其中 $\rho^{k-1}\colon \mathrm{Sym}_A^{k-1}(M) \to \mathrm{Der}(A)$ 是分次 A- 模之间的次数为一的态射，而 $D^k : \mathrm{Sym}_k^k(M) \to M$ 是分次向量空间之间的次数为一的态射，使得

$$D^k(m_1 \odot \cdots \odot a\cdot m_k) = (-1)^{|a|(1+|m_1|+\ldots+|m_k|)} a \cdot D^k(m_1 \odot \cdots \odot m_k) + \rho^{k-1}(m_1 \odot \cdots \odot m_{k-1})(a) \cdot m_k$$

特别地，切瓦利-埃伦伯格微分的零权分量确定了 A和 M 上的微分，使得 A 是一个微分分次代数，而 M 是一个微分分次 A-模。

$\widehat{\ }$最后，$\mathrm{Sym}_A(M^*)$ 上的微分平方为零，当且仅当多重导子族 $(D, \sigma) := (D_k, \sigma_k)_{k\in\mathbb{N}_{>0}}$ 确定了 M 上的 SH LR$[1]$ 结构，定义如下：

定义 5。 设 $A \in \mathtt{cdga}(k)$，且 $M \in \mathtt{Mod}(A)$。这一对 (A, M)，连同一族多重导子 $(D, \sigma) := (D^k, \rho^{k-1})_{k\in\mathbb{N}_{>0}}$，满足

(1) D^1 等于 M 上的微分，而 ρ^0 等于 A 上的微分；(2) $D = (D^k)_{k\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是 M 上的一个 $L_\infty[1]$ 结构；以及(3) ***Maurer-Cartan*** 方程 $\rho \circ D + \frac{1}{2}[\rho, \rho] = 0$（详见方程 ***3.4***）成立；

称为一个 ***SH LR[1]-对***。

以下对 SH LR$[1]$ 结构的刻画很有用：

命题 6. 对于 $A \in \mathtt{cdga}(k)$ 和 $M \in \mathtt{Mod}(A)$，(A, M) 上的 ***SH LR[1]*** 结构等价于 M 上的一个$L_\infty[1]$-代数结构（其一元括号是 M上的微分），以及一个$L_\infty[1]$-代数态射 $\Gamma\colon M \rightsquigarrow \mathrm{Der}(A)[1]$，称为锚，满足

(1) $\Gamma^n : \mathrm{Sym}_k^n(M) \to \mathrm{Der}(A)[1]$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_{>0}$都是 A-多重线性的[1]；以及(2) M 上的 $L_\infty[1]$ 结构不满足 A-多重线性的情形由分次莱布尼茨法则控制

$$D^k(m_1 \odot \cdots \odot a\cdot\ m_k) = (-1)^{|a|(1+|m_1|+\ldots+|m_k|)} a\cdot\ D^k(m_1 \odot \cdots \odot m_k) + s\Gamma^{k-1}(m_1 \odot \cdots \odot m_{k-1})(a)\cdot\ m_k.$$

注 7. 由 ***(1)***，锚赋予 $\mathrm{Sym}_A(M)[-1]$ 一个分次锚定 A-模结构。

[1]对于分次 A-模范畴 N，A-模结构由 $N[1]$ 给出：$a \cdot sn = (-1)^{|a|} s(a\cdot n)$

证明. 对于所有 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，定义次数为一的 A-多重线性映射

$$\rho^n : \mathrm{Sym}_k^n(M) \to \mathrm{Der}(A), \quad (m_1 \odot \cdots \odot m_n) \mapsto s\Gamma^n(m_1 \odot \cdots \odot m_n) \tag{3.3}$$

记 ρ^0 为 A上的微分，则当且仅当对所有 $n \in \mathbb{N}$，$(D^n,\ \rho^{n-1})$ 是权为 n 的多重导子时，条件 (1) 和 (2) 显然成立。接下来要证明，Maurer-Cartan 方程 $\rho \circ D + \frac{1}{2}[\rho,\rho] = 0$成立，当且仅当 $(\Gamma^n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ 是一个 L_∞-态射。通过直接计算即可得证（Koszul 符号见记号说明）：

$$\begin{aligned}
&\rho \circ D + \frac{1}{2}[\rho,\rho](m_1 \odot \cdots \odot m_n) \\
&= \sum_{\substack{k=1,\dots n \\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} (-1)^{|m_1,\dots,m_n|_\sigma} \rho^{n-k+1}(D^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}) \odot m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0,\dots,n \\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} (-1)^{|m_1,\dots,m_n|_\sigma + |m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}|} [\rho^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}), \rho^{n-k}(m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)})] \\
&= s \left(\sum_{\substack{k=1,\dots n \\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} (-1)^{|m_1,\dots,m_n|_\sigma} \Gamma^{n-k+1}(D^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}) \odot m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}) \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1,\dots,n-1 \\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} (-1)^{|m_1,\dots,m_n|_\sigma} D^2(\Gamma^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}) \odot \Gamma^{n-k}(m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)})) \right) \\
&+ d_A \circ \rho^n(m_{1\dots n}) - (-1)^{|\rho^n(m_{1\dots n})|} \rho^n(m_{1\dots n}) \circ d_A.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

As

$$d_A \circ \rho^n(m_{1\dots n}) - (-1)^{|\rho^n(m_{1\dots n})|} \rho^n(m_{1\dots n}) \circ d_A = d_{\mathrm{Der}(A)} \rho^n(m_{1\dots n}) = s(-d_{\mathrm{Der}(A)[1]} \Gamma^n(m_{1\dots n})),$$

根据 [18, 命题 12.2, 3], 3.4 中的右侧为零，当且仅当 Γ 是一个 $L_\infty[1]$-态射。 □

注 8。 还有另一种更一般得多的 *SH LR* 对概念，它源于（带色）*LR* 运算子是 *Koszul* 的这一事实 [31]。从这个意义上说，*SH LR* 对是一个 C_∞-代数 A ，连同一个 L_∞-代数 M；其中 M 是 A 上的无穷模，反之亦然，并满足所有相容条件（精确到同伦）。不过，这种一般性并非本文目标所必需。与完全运算子方法的另一个区别在于，后者给出了不同（且较不常见）的态射概念。当 $f_0 = \mathrm{id}_A$时，两者一致；详情请参见文献 [20]中的 *Lie* 拟代数丛态射与余态射。

迄今为止，SH 态射的概念仍较为模糊，针对不同需求采用了各种不同的概括形式。在处理分次平坦模时，可以用切瓦利-埃伦伯格代数来推理，并将 SH LR[1] 对（$A,\ M$）$\to$（$B,\ N$）的一般态射定义为一对（$f_0,\ f^*$），其中 $f_0 \colon\ B \to A$是一个$\widehat{\qquad\qquad\qquad\qquad}$交换微分分次代数的态射，而 f^*：$(\mathrm{Sym}_B(N^*)\ d_{\mathrm{CE}}) \to (\mathrm{Sym}_A(M^*)\ d_{\mathrm{CE}})$ 是一个微分分次原代数的态射，使得

图表

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathrm{Sym}}_B(N^*) & \xrightarrow{f^*} & \widehat{\mathrm{Sym}}_A(M^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f_0} & A \end{array} \tag{3.5}$$

交换图。f^*的零权分量对偶于一个 A-模态射 $f^1\colon M \to A \otimes_B N$。若 f_0和 f^1均为拟同构，则 SH 态射 $(f_0,\ f^*)$ 是弱等价（或 SH拟同构）。注意，只有当 $A \otimes_B N$ 具有正确的同伦型时，弱等价的概念才是同伦相干的。

与一般态射不同，线性 SH 映射是根据 SH LR[1] 结构定义的：

定义 9. 设 (A, M)、(B, N) 为 *SH LR[1]*对，$f_0\colon B \to A$ 为交换微分分次代数之间的态射，并且

$$f = (f^n : \mathrm{Sym}_A^n(M) \to A \otimes_B N)_{n>0}$$

一族分次 A-模的态射。若 $(f_0, f)\colon (A, M) \rightsquigarrow (B, N)$ 是一个线性 SH 态射，则

(1) 将 f 延拓为分次余代数映射

$$F : \mathrm{Sym}_A(M) \to \mathrm{Sym}_A(A \otimes_B N) = A \otimes_B \mathrm{Sym}_B(N)$$

(2) 记 $f^n(m_1 \odot \cdots \odot m_n) = \sum_\alpha a_\alpha^{m_{1\dots n}} \otimes n_\alpha^{m_{1\dots n}}$，由方程 *3.2* 给出，在进行$(-1)$-移位后，是一个锚定模的态射（注 7）；并且

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k=1\dots n \\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} (-1)^{|m_1,\dots,m_n|_\sigma} f^n(D^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}) \odot m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}) \\ =& \sum_{\substack{k=0,\dots,n \\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} \sum_\alpha (-1)^{|m_1,\dots,m_n|_\sigma} \rho^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)})(a_\alpha^{m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}}) \otimes n_\alpha^{m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}} \\ +& \sum_{\substack{r=1,\dots n \\ 0=n_0<\dots<n_r=n \\ \sigma\in \mathrm{Sh}(n_1-n_0,\dots,n_r-n_{r-1})}} \sum_{\alpha_1,\dots\alpha_r} (-1)^{|m_1,\dots,m_n|_\sigma + \sum_{i=0}^{r-1} |a_{\alpha_{i+1}}^{m_{\sigma(n_i+1)\dots\sigma(n_{i+1})}}|(1+|n_{\alpha_1}^{m_{\sigma(1)\dots\sigma(n_1)}}|+\dots+|n_{\alpha_i}^{m_{\sigma(n_{i-1}+1)\dots\sigma(n_i)}}|)} \\ &\frac{1}{r!} a_{\alpha_1}^{m_{\sigma(1)\dots\sigma(n_1)}} \cdots a_{\alpha_r}^{m_{\sigma(n_{r-1}+1)\dots\sigma(n_r)}} D^r(n_{\alpha_1}^{m_{\sigma(1)\dots\sigma(n_1)}} \odot \cdots \odot n_{\alpha_r}^{m_{\sigma(n_{r-1}+1)\dots\sigma(n_r)}}). \end{aligned}$$

若 $f^i = 0$ 对 $i > 1$ 成立，则称态射 f 为严格的。

特别地，$f^1\colon M \to A \otimes_B N$ 是 dg A-模的一个态射。假设 $A \otimes_B N$ 具有正确的同伦型，则线性映射 (f_0, f) 是 SH拟同构，当且仅当 f_0和 f^1都是拟同构。

注 10. 对于线性 *SH* 态射

$$(\mathrm{id}_A, f) : (A, M) \rightsquigarrow (A, N),$$

条件(2) 等价于要求 f 是 L_∞ 代数的态射。事实上，所有系数 $a_\alpha^{m_1\cdots n}$都可以设为 1，而条件二给出了 L_∞ 态射的刻画，见 [18,命题 12.2.3。]。

等价地，线性 SH 态射是满足 $f^*(B) \subseteq A$ 的 SH 态射（f_0， f^*）。证明是在微分分次前系统中的一项直接但繁琐的练习，与 [25, 定理 23] 类似。

命题*11.* 设 (A, M) 和 (B, N) 是 *SH LR*[1] 对，其中 M 作为分次 A-模是平坦的，而 N 作为分次 B-模是平坦的。设 $f_0\colon B \to A$ 是交换微分分次代数的一个态射，并设 $f = (f^n\colon \mathrm{Sym}_A^n(M) \to A \otimes_B (N))_{n>0}$ 是一族分次 A-模态射。记 $F\colon \mathrm{Sym}_A(M) \to \mathrm{Sym}_A(A \otimes_B N)$ 为由 f （方程 *3.2*）余生成的分次余代数映射，并记为

$$F^* : A \otimes_B \widehat{Sym}_B(N^*) = \widehat{Sym}_A(A \otimes_B N^*) \to \widehat{Sym}_A(M^*)$$

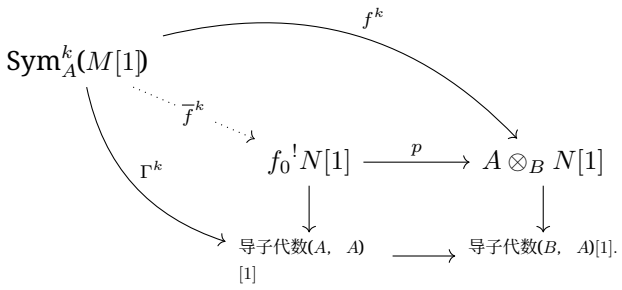
与 F 对偶的有限型分次 A-代数态射。 F^*，通过基变换伴随 [25, 命题 11] 识别为分次有限型 A-代数之间的态射 $Sym_B N^* \to Sym_A M^*$，当且仅当(f_0, f) 是线性 *SH* 态射时，才保持 *Chevalley-Eilenberg* 微分。

尽管一般 SH LR 对的拉回并未定义，但目标为 dg LR 对的线性 SH 态射可唯一地经由该拉回分解。

命题 12。 给定一个 *SH LR* 对(A, M)、[2]一个 *dg LR* 对(B, N)以及一个线性 *SH* 态射$(f_0, f) : (A, M) \rightsquigarrow (B, N)$，则存在唯一的线性 *SH* 态射$(\mathrm{Id}_A, f) : (A, M) \rightsquigarrow (A, f_0^! N)$ 使得

$$(f_0, f) = (f_0, p) \circ (\mathrm{Id}_A, \overline{f}).$$

证明。 态射（f^k： $\mathrm{Sym}_A^k(M[1]) \to f_0^! N[1]$）$_{k\in\mathbb{N}}$定义为分次$A$-模范畴中的泛箭头



性质（ 定义 9 的 1) 显然成立。性质 (2) 可通过直接计算验证 . □

[2]即一个 SH LR [1] 对（A， $M[1]$）

4. 微分分次与 SH LR 对的等价性

微分分次李代数与 L_∞-代数之间的等价性，是由 Lie [19, Chapter 11]，算子的巴—余巴构造推得的，这与本节密切相关。先简要回顾一下。

设 L 是一个 L_∞ 代数，并令 $C_k(L)$ 为其约化切瓦利-埃伦伯格余代数。$C_k(L)$ 的余巴复形是以 $C_k(L)[-1]$ 为生成元的自由分次李代数，其微分由下式生成：

$$d_{\mathcal{L}_k(C_k(L))}(sx) = -sd_{C_k(L)}x - \frac{1}{2}\sum_i (-1)^{|x_i^{(1)}|}[(sx)_i^{(1)}, (sx)_i^{(2)}], \ \ x \in C_k(L),$$

其中 $\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$ 是约化余乘积。之后将该微分分次李代数记为 $\mathcal{L}_k(C_k(L))$。将 $\mathtt{dgLie}(k)$ 记为微分分次李代数范畴，将 $\mathtt{Lie}_\infty(k)$ 记为具有 L_∞ 态射的 L_∞ 代数范畴，并将 $\imath$ 记为前一范畴到后一范畴的包含映射。根据李代数的巴—余巴伴随，赋值 $L \mapsto \mathcal{L}_k \circ C_k(L)$ 是该包含映射的左伴随

$$\mathcal{L}_k \circ C_k : \mathtt{Lie}_\infty(k) \leftrightarrows \mathtt{dgLie}(k) : \imath. \tag{4.1}$$

此外，伴随的单位是 L_∞ 代数之间的无穷拟同构 $L \rightsquigarrow \mathcal{L}_k(C_k(L))$，而伴随的余单位是微分分次李代数之间的拟同构 $\mathcal{L}_k(C_k(L)) \to L$。因此，上述伴随在 Dwyer-Kan 局部化下给出一个等价。

现在设 (A, M) 是一个 SH LR 对。特别地， M是一个 L_∞代数，并且锚是一个 L_∞态射Γ: $M \rightsquigarrow \mathbf{Der}(A)$。分别用 η_k 和 ϵ_k 表示伴随 4.1 的单位和余单位。注意，Γ可分解为

$$\begin{array}{ccccc} M & & \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_k} & & & & \\ \mathcal{L}_k C_k(M) & \xrightarrow[\mathcal{L}_k C_k(\Gamma)]{} & \mathcal{L}_k C_k(\mathrm{Der(A)}) & \xrightarrow[\epsilon_k]{} & \mathrm{Der}(A) \end{array} \tag{4.2}$$

将水平复合记为

$$\gamma : \mathcal{L}_k C_k(M) \to \mathrm{Der}(A).$$

作为分次李代数的映射， γ 由其在生成元上的限制唯一确定，具体来说，由以下态射确定

$$\gamma_{\mathrm{gen}} : C_k(M)[-1] \to \mathrm{Der}(A), \ \ s(m_1 \odot \cdots m_n) \mapsto s\Gamma^n(m_1, \ldots, m_n)$$

它是分次向量空间的态射。将 $C_A(M)$记为分次对称 A余代数 $\mathrm{Sym}_A(M[1])$，它本身是 $\mathrm{Sym}_k(M[1])$ 的一个商——后者是 $C_k(M)$ 的底层分次余代数。由于 Γ^n是 A多线性的，映射 γ_{gen}可经由 $C_A(M)[-1]$分解。因此， $C_A(M)[-1]$是一个分次锚定 A模。$\mathrm{L}_A C_A(M) := LR(C_A(M)[-1])$ 表示 $C_A(M)[-1]$的自由 LR 代数。显然，$\mathrm{L}_A(C_A(M))$ 是自由分次李代数 $\mathrm{L}_k(C_k(M))$ 的一个商。尽管切瓦利-埃伦伯格余代数 $C_k(M)$ 上的微分不能下降到商 $C_A(M)$ 上，但 $\mathrm{L}_k(C_k(M))$ 上的全微分确实可以下降到商 $\mathrm{L}_A(C_A(M))$ 上：

引理 13. $L_k(C_k(M))$上的微分可下降到商 $L_A(C_A(M))$。

证明. 回忆一下，给定一个分次 A-模 N， $N[-1]$ 上的 A-模结构定义为 $asn = (-1)^{|a|}s(an)$。记 p 为投影 $p : \mathcal{L}_k(C_k(M)) \to \mathcal{L}_A(C_A(M))$。注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1,\dots n\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)}} (-1)^{|m_1,\ \dots m_n|_\sigma + m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}}\big[sm_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}, sm_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}\big]\\
=&\sum_{\substack{k=1,\dots n\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k)\ \sigma(1)=1}} (-1)^{|m_1,\dots m_n|_\sigma + m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}}\big[sm_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}, sm_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}\big],
\end{aligned}$$

下文中， τ 表示所涉及的置换。例如，给定 $\sigma \in S_3$，在

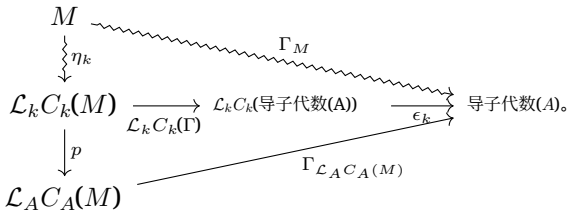
$$(-1)^{|m_{1\dots 3}|_\tau} m_{\sigma(2)} \odot m_{\sigma(1)} \odot a m_{\sigma(3)},$$

$\tau := \sigma \circ (1,2)$。我们得到

$$\begin{aligned}
&(p\circ d)s(am_1\odot m_2\odot\cdots\odot m_n)\\
&\quad= -\sum_{\substack{k=1\dots n\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\sigma} s(D^k(am_{\sigma(1)\dots\sigma(k)})\odot m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)})\\
&\qquad-\sum_{\substack{k=1\dots n-1\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(k+1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\sigma+|a|(|m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}|)} s(D^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)})\odot am_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)})\\
&\qquad-\sum_{\substack{k=1\dots n-1\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\sigma+|m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}|}[asm_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}, sm_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}]\\
&\quad= -\sum_{\substack{k=1\dots n-1\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\sigma} as(D^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)})\odot m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)})\\
&\qquad-\sum_{\substack{k=1\dots n-1\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\tau+(|a|+1)(|m_{\sigma(2)\dots\sigma(k)}|+1)}\rho^{k-1}(m_{\sigma(2)\dots\sigma(k)})(a)sm_{\sigma(1)}\odot m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}\\
&\qquad-\sum_{\substack{k=1\dots n-1\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(k+1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\sigma} as(D^k(m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)})\odot m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)})\\
&\qquad-\sum_{\substack{k=1\dots n-1\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\sigma+|m_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}|}a[sm_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}, sm_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}]\\
&\qquad+\sum_{\substack{k=1\dots n-1\\ \sigma\in \mathrm{Sh}(k,n-k),\sigma(1)=1}} (-1)^{|m_1\dots m_n|_\tau+(|a|+1)(|m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)}|+1)}\rho^{n-k}(m_{\sigma(k+1)\dots\sigma(n)})(a)sm_{\sigma(1)\dots\sigma(k)}\\
&\quad=(-1)^{|a|}d_Aa\cdot p(sm_{1\dots n})+a\cdot(p\circ d)(sm_{1\dots n}).
\end{aligned}$$

这表明，微分在 $C_k(M)[-1]$ 上的限制可下降到商中，成为一个 A-模导子。通过归纳法，可以很容易地验证，微分保持由 2.3 和 2.4 生成的理想。□

因此，图 4.2 扩展为



记 η_A L_∞-态射 $p \circ \eta_k \colon M \to \mathcal{L}_A C_A(M)$ 为，明确地说

$$\eta_A^n(m_1 \odot \cdots \odot m_n) = m_1 \odot \cdots \odot m_n \in C_A(M) \subset \mathcal{L}_A C_A(M).$$

根据注 10， η_A 是 SH LR 对的态射。事实上，如果 M 是一个余纤维 A-模范畴，则它是一个 SH拟同构：

引理 14。 *给定一个 SH LR 对 (A, M)，其中 M是一个余纤维 A-模范畴，则映射 $\eta_A \colon M \rightsquigarrow L_A C_A(M)$ 是一个 SH拟同构。*

证明。 在 $\mathcal{L}_A C_A(M)$ 上赋予总滤子，例如 $[m_1, m_2 \odot m_3] \in F^3 \mathcal{L}_A C_A(M)$。形式上，滤过定义如下。作为一个分次的 A-模范畴，

$$\mathcal{L}_A C_A(M) = LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]).$$

从自由 LR 对上的滤过 2.2 出发，在 m 上递归定义 $F^{m,\,n}$，即

- $F^{1,n} LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]) = \mathrm{Sym}_A^{\leq n}(M[1])[-1]$; and
- for $m > 1$, $F^{m,n} LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1])$ is the submodule of $LR^{\leq m}(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1])$ generated by $F^{1,n} LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1])$, and

$$\{[x, x'] \colon \; x \in F^{i,\,k} LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]) \quad x' \in F^{j,\,l} LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]) \quad i + j = m, \quad k + l = n\}。$$

最后，总滤子定义为

$$F^n LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F^{m,n} LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]).$$

显然，微分保持总滤子，从而得到滤复形 $(F^n \mathcal{L}_A C_A(M))_n$。若 M 中的锚是平凡的，那么 $\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]$中的锚也平凡，因此其上的自由分次 LR 对就是自由分次 Lie A-代数，故配备权分次而非滤过。在这种情况下，上述构造中的总滤子也可以替换为 $LR(\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1])$上的总权分次。若 $n > 1$ 的 n-元括号也都是平凡的，则微分保持权分次。

对于任意 M，记 M_{tr}为 dg LR 对，其底层 dg A-模范畴 M与原对象相同，但括号和锚均为平凡的。滤过 $(F^n \mathcal{L}_A C_A(M))_n$的关联分次复形是分次复形 $\mathcal{L}_A C_A(M_{\mathrm{tr}})$。

最后，单位的 $\eta_A \colon M \rightsquigarrow \mathcal{L}_A C_A(M)$ 的第一分量 η_A^1 是包含映射

$$M = F^1 \mathcal{L}_A C_A(M) \hookrightarrow \mathcal{L}_A C_A(M).$$

根据谱序列论证，如果 $(F^n\mathcal{L}_AC_A(M))$ 的关联分次复形在权重不等于一的情况下无挠，那么它就是拟同构；等价地说，如果 $\mathcal{L}_AC_A(M_{\mathrm{tr}})$ 在这些权重下无挠。

由于余纤维化模是胞腔复形的收缩，而无挠模的收缩仍然无挠，因此可以假设 M 是 A 中的胞腔复形，其含义见 [5], ：即一个分次自由的 A-模，其生成元构成一个良序集，且微分满足降低条件

$$M = A\langle m_i\rangle_{i\in I},\quad d(m_i)\in A\langle m_i\rangle_{j<i}.$$

将其权为 n 的分量记为 $(\mathcal{L}_AC_A)^n(M_{\mathrm{tr}})$，其中 $n\neq 1$。在特殊情形下，$d_M(m_i)=0$；更一般地，若 $M_{\mathrm{tr}}=A\otimes_k V$ 对于一个微分分次向量空间 V 成立——将其视为具有平凡括号的微分分次李代数，

$$(\mathcal{L}_AC_A)^n(M_{\mathrm{tr}}) = A\otimes_k(\mathcal{L}_kC_k)^n(V). \tag{4.3}$$

右端由运算子论证可知是无挠的，例见 [19, 定理 **11.4.7**]。一般情形可由此通过超限归纳得到。具体而言，记 $V=k\langle m_i\rangle_{i\in I}$。在分次李代数层面，等式 **4.3** 仍然成立，并推出

$$(\mathrm{Lie}_A\,\mathrm{Sym}_A)^n(M[1])[-1] = A\otimes_k(\mathrm{Lie}_k\,\mathrm{Sym}_k)^n(V[1])[-1]. \tag{4.4}$$

$\mathbf{Lie}_k\,\mathbf{Sym}_k(V[1])[-1]$ 的基由霍尔树给出——这是一类二叉树，其顶点标记为 $\mathbf{Sym}_k(M[1])$ 中带有平凡系数的单项式。给定这样一棵树，将其标签定义为所有出现在顶点标签中的变量所组成的多重集。例如，$[[m_1,m_2],m_2\odot m_3]$ 的标签为 $\{m_3,{m_2}^2,m_1\}$。如例所示，标签按降序排列。$(\mathbf{Lie}_k\,\mathbf{Sym}_k)^n(V[1])[-1]$ 由标签基数为 n 的霍尔树张成。$(\mathbf{Lie}_k\,\mathbf{Sym}_k)^n(V[1])[-1]$ 中霍尔树的有序标签在字典序下构成一个良序集，记作 Λ。给定一个标签 $a\in\Lambda$，若 $x\in$是标签小于或等于a的霍尔树的线性组合，则记作 $\mathbf{Lie}_k\,\mathbf{Sym}_k)^n_{\leq a}(V[1])[-1]$。由于胞腔复形微分具有递减性质，这在 $(\mathbf{L}_AC_A)^n(M_{\mathrm{tr}})$ 上诱导出一个滤过 $((\mathbf{L}_AC_A)^n_{\leq a}(M_{\mathrm{tr}}))_{a\in\Lambda}$。无挠性通过对该滤过使用归纳法得到证明。以下观察与证明有关：

记 V_0 为带零微分的分次向量空间 V，记 M_0 为张量积 $A\otimes_k V_0$，并赋予平凡括号和锚。由于 $(\mathcal{L}_AC_A)^n(M_0)$ 中的微分不会改变标签，因此 $(\mathcal{L}_AC_A)^n(M_0)$ 是由具有固定标签的霍尔树张成的微分分次子模的直和

$$(\mathcal{L}_AC_A)^n(M_0) = \oplus_{a\in\Lambda}(\mathcal{L}_AC_A)^n_a(M_0),$$

其中每个分量都是无环链复形的直和项，因而是无挠的（见上面的特殊情形）。

回到归纳法，对于 $0\in\Lambda$ 这个极小元，

$$(\mathcal{L}_AC_A)^n_{\leq 0}(M_{\mathrm{tr}}) = (\mathcal{L}_AC_A)^n_0(M_0)$$

是无挠的。假设对于某个 $a\in A$，$(\mathcal{L}_AC_A)^n_{<a}(M_{\mathrm{tr}})$ 是无挠的，并考虑两步过滤

$$(\mathcal{L}_AC_A)^n_{<a}(M_{\mathrm{tr}})\hookrightarrow(\mathcal{L}_AC_A)^n_{\leq a}(M_{\mathrm{tr}}).$$

As

$$(\mathcal{L}_A C_A)^n_{\leq a}(M_{\mathrm{tr}})/(\mathcal{L}_A C_A)^n_{<a}(M_{\mathrm{tr}}) = (\mathcal{L}_A C_A)^n_a(M_0),$$

$(\mathcal{L}_A C_A)^n_{\leq a}(M_{\mathrm{tr}})$ 也无挠。 □

最后，我们已经做好准备，证明带有线性态射的微分分次 LR 对与 SH LR 对之间的等价性。

定理 15。 (1) 从微分分次 *LR* 对范畴到带有线性 *SH* 态射的 *SH LR* 对范畴的包含映射 $\imath$: $\mathtt{dgLR}(k) \to \mathtt{SHLR}^{\mathrm{lin}}(k)$ 具有一个左伴随，记为 $L_- C_-$ ，它将一个 *SH LR* 对 (A, M) 关联到上文定义的微分分次 *LR* 对 $(A, L_A C_A(M))$。

(2) 记 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{cof}}(k)$ 为 $\mathtt{dgLR}(k)$ 的全子范畴，其对象是形如 (A, M) 的对，其中 A 是半自由交换微分分次代数， M 是 A-模中的胞腔复形。全子范畴 $\mathtt{SHLR}^{\mathrm{lin},\mathrm{cof}}(k) \subset \mathtt{SHLR}^{\mathrm{lin}}(k)$ 以类似方式定义。伴随 $L_- C_- \dashv \imath$ 限制为

$$\mathcal{L}_- C_- : \mathtt{SHLR}^{\mathrm{lin},\mathrm{cof}}(k) \rightleftarrows \mathtt{dgLR}^{\mathrm{cof}}(k) : \imath, \tag{4.5}$$

从而在它们的 *Dwyer-Kan* 局部化之间诱导出一个等价。

证明。 **(1)** 根据通过泛态射定义伴随的方式，只需证明：给定一个线性 SH 态射 $(f_0, f) : (A, M) \rightsquigarrow (B, N)$，其中 (B, N) 是一个 dg LR 对，存在唯一的 dg LR 对态射 $(f_0, f) : (A, \mathcal{L}_M C_A(M)) \to (B, N)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} (A, M) & & \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}, \eta_A)} & \overset{(f_0, f)}{\rightsquigarrow} & \\ (A, \mathcal{L}_A C_A(M)) & \xrightarrow[(f_0, \overline{f})]{} & (B, N). \end{array}$$

由命题 12，证明可归结为 $A = B$, $f_0 = \mathrm{id}$ 的情形。在这种情况下， f 特别是一个 L_∞-代数的无穷态射，因此可分解为

$$M \overset{\eta_k}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}_k C_k(M) \xrightarrow{\tilde{f}} N,$$

其中， f 作为分次李代数态射，在 $\mathrm{Sym}_k(M[1])[-1]$ 的生成元上唯一确定，其表达式为

$$\tilde{f}(s(m_1 \odot \cdots \odot m_n)) = s f^n(m_1 \odot \cdots \odot m_n).$$

由于 f^n 是 A-多重线性的， f 在 $\mathrm{Sym}_k(M[1])[-1]$ 上的限制可经由一个 A-线性映射分解为 $\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1]$，记作 f_{gen}。由于 N 是一个 dg LR 对，其高阶锚均为零，因此

$$\Gamma \circ f^n(m_1 \odot \cdots \odot m_n) = \Gamma^n(m_1 \odot \cdots \odot m_n).$$

因此，$\overline{f}_{\mathrm{gen}}$ 是锚定分次 A-模之间的映射，并唯一确定一个分次 LR 对的态射 f: $LR\mathrm{Sym}_A(M[1])[-1] \to N$。剩下只需验证 f与微分相容。不过，这显然成立，因为 $\overline{f}$，即复合映射

$$\mathcal{L}_k C_k(M) \overset{p}{\twoheadrightarrow} \mathcal{L}_A C_A(M) \xrightarrow{\overline{f}} N$$

确实如
此。

(2) 回想一下， [25] 中的 SH拟同构具有三取二性质。根据引理 **14**，伴随的单位是线性SH拟同构。由单位的自然性和三取二性质可知，$\mathcal{L}_- C_-$ 将线性 SH拟同构映为拟同构。对于一个 dg LR 对 (A, M)，记 $\epsilon_A \colon \mathcal{L}_A C_A(M) \to M$ 为伴随的单位。与任何伴随一样，复合

$$M \overset{\eta_A}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}_A C_A(M) \xrightarrow{\epsilon_A} M$$

是恒等映射。由三取二性质可知，该单位是 dg LR 对之间的拟同构。最后， [6,推论 3.6] 适用，且伴随 4.5 在 $\mathtt{SHLR}^{\mathrm{lin},\mathrm{cof}}(k)$ 与 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{cof}}(k)$ 的 Dwyer-Kan 局部化之间诱导出一个等价。

□

注 16。 (1) 对于一个 ***SH LR*** 对 （A、 M），若 M 是 A-模的一个胞腔复形，则 $L_A C_A$（M）不仅是 A-模的一个胞腔复形，也是 A 上微分分次李–***Rinehart*** 代数的 ***Nuiten*** 的半模型结构中的一个胞腔复形。因此，这种等价性具有三重含义：将 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{cof}}$（$k$）重新定义为由形如 （$A$、 M） 的对组成，其中 A 是半自由的，而 M 是 ***Nuiten*** 的半模型结构中的一个胞腔复形，也会得到相同的结果。第 *7* 节采用字母解释。

(2) A 是半自由的这一点并未用到。同样，如果 M 只是一个余纤维的 A-模，而不是一个胞腔复形，该构造仍然适用。因此，上述证明针对不同的余纤维化条件给出了三个三重等价性。然而，目前尚不清楚由此得到的九个无穷范畴是否彼此全部等价。之所以强调某一个特定的余纤维化条件，是因为在该条件下，等价性可以推广到一般态射。

最后，我们转而讨论一般态射。设 $A = (k[x_i]_{i\in I},\ d_A)$ 是一个半自由交换微分分次代数，且$M = (A\langle m_j\rangle_{j\in J},\ d_M)$ 是 A-模范畴中的一个胞腔复形。赋予 $(A,\ M)$ 一个 $\widehat{\text{SH}}$ LR 对结构，并将 $\mathrm{Sym}_A M^*$ 上对应的切瓦利-埃伦伯格微分记为 d_{CE}。将 A 上的卡勒微分分次模记为 Ω_A。记生成元 $dx_i \in \Omega_A$ 为 ξ_i，并将其 **(1)**-移位记为 c_i。$\widehat{\ }$通过其切瓦利-埃伦伯格复形定义另一个 SH LR 对 $(A,\ M)$，其复形为 $\mathrm{Sym}_A(M^* \oplus \Omega_A^* \oplus \Omega_A^*[-1])$，微分为

$$\begin{aligned} d(x_i) &= c_i^* + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ i_1<\ldots<i_n\in I}} \frac{1}{n_1!\cdots n_n!}(\xi_{i_1}^*\partial_{i_1})^{n_1}\cdots(\xi_{i_n}^*\partial_{i_n})^{n_n} d_{CE}(x_i);\\ d(m_j^*) &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ i_1<\ldots<i_n\in I}} \frac{1}{n_1!\cdots n_n!}(\xi_{i_1}^*\partial_{i_1})^{n_1}\cdots(\xi_{i_n}^*\partial_{i_n})^{n_n} d_{CE}(m_j^*);\\ d(\xi_i^*) &= -c_i^*; \qquad d(c_i^*) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

微分算子

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ i_1<\ldots<i_n\in I}} \frac{1}{n_1!\cdots n_n!}(\xi_{i_1}^*\partial_{i_1})^{n_1}\cdots(\xi_{i_n^*}\partial_{i_n})^{n_n}$$

将单项式中的每个变量子集 x_k 重命名为 ξ_k^*，然后求和。例如 ，

$$x_1^2x_2m_j \mapsto x_1^2x_2m_j + 2x_1\xi_1^*x_2m_j + 2x_1\xi_1^*\xi_2^*m_j + {\xi_1^*}^2x_2m_j + x_1^2\xi_2^*m_j + {\xi_1^*}^2\xi_2^*m_j.$$

记 $\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}$ 为由 SH LR 对 (A, M) 构成的范畴，其中 A 是半自由交换微分分次代数， M 是 A-模范畴中的胞腔复形。我们首先证明，赋值 $(A, M) \mapsto (A, M)$ 构成宽子范畴包含映射的右伴随

$$\imath : \mathtt{SHLR}^{\mathrm{lin,cof}}(k) \rightleftarrows \mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k) : (-, \overline{\cdot}). \tag{4.7}$$

为此，只需构造伴随的余单位 $\epsilon_{(A,M)} : (A, M) \to (A, M)$，使其满足以下泛性质：给定一个 SH LR 对 (B, N)，以及一个一般的 SH 态射 $f : (B, N) \rightsquigarrow (A, M)$，存在唯一的线性 SH 态射 $\underline{f} : (B, N) \to (A, M)$，使得 $f = \epsilon \circ \underline{f}$.

余单位 ϵ 定义为映射

$$\epsilon^* : \widehat{\mathrm{Sym}}_A M^* \to \widehat{\mathrm{Sym}}_A(M^* \oplus \Omega_A^* \oplus \Omega_A^*[-1]), \quad \epsilon^*(x_i) = x_i + \xi_i^*, \quad \epsilon^*(m_i^*) = m_i^*.$$

据此，唯一的映射 $\underline{f}$ 定义为[3]

$$\underline{f}^* : \widehat{\mathrm{Sym}}_A(M^* \oplus \Omega_A^* \oplus \Omega_A^*[-1]) \to \widehat{\mathrm{Sym}}_B(N^*),$$
$$\underline{f}^*(x_i) = f_0^*(x_i), \quad \underline{f}^*(\xi_i^*) = f_{>0}^*(x_i), \quad \underline{f}^*(c_i^*) = d_{CE}(f_{>0}^*(x_i)) \quad \underline{f}^*(m_j^*) = f^*(m_j^*),$$

显然，伴随的余单位是弱等价。根据三取二性质，伴随的单位也同样是弱等价，因此该伴随在无穷范畴层面上是等价。这就完成了以下定理的证明：

定理 17。 宽子范畴的包含映射

$$\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof,lin}}(k) \hookrightarrow \mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$$

在 *Dwyer-Kan* 局部化下是无穷范畴的一个等价。

5. Cofibrations, factorizations, and lifting properties

首先，我们处理固定基底交换微分分次代数上的 SH LR 对的态射。在此背景下，SH LR$[1]$ 对 (A, M) 被称为 M上的 SH LR$[1]$代数。态射 $(\mathrm{id}\ f) : (A, M) \to (A, N)$ 记为 f。

定义 18。 给定 A上的 *SH LR[1]* 代数 M 和 N，*SH LR[1]*代数 *($f^1 = f$, $f^i = 0$ for $i \neq 1$)* 的严格态射 $f : M \to N$ 称为

(1) 余纤维化，如果它是 A-模的相对胞腔复形；以及(2) 纤维化，
如果它是 A-模的纤维化。

特别地，如果 M 是 A-模的胞腔复形，则称其为余纤维。

注 19。 本节的所有结果在将余纤维化定义为 A-模的余纤维化，而不是相对胞腔复形时仍然成立。不过，证明会变得更加复杂。

[3] f_k^* 表示 f^*的权 k 分量

下面的引理表明，从余纤维 SH LR[1] A-代数出发的态射可以分解为先余纤维化、后弱等价：

引理 20. 给定 $A \in \mathtt{cdga}(k)$，设 M 和 N 是定义在 A上的 *SH LR[1]* 代数，且 M 是余纤维，并设$f = (f^n)_{n\in\mathbb{N}}$: $M \rightsquigarrow N$是一个线性 *SH[1]*态射。给定 $\mathtt{Mod}(A)$ 中 f^1的一个分解

$$M \overset{\imath}{\hookrightarrow} \overline{M} \overset{p^1}{\twoheadrightarrow} N$$

为一个相对胞腔复形后接一个平凡纤维化，存在一个定义在 M 上的 *SH LR[1]*代数结构，使得 $\imath$ 是一个（严格的）*SH LR[1]* 态射，并且存在一个将 p^1 延拓为线性 *SH[1]* 态射的延拓 $p = (p^n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $f = p \circ \imath$。若对 $k > k_0$， $f^k = 0$成立，则对于适当的 *SH LR[1]*结构 M，可以选取 p使其满足相同的性质。

证明。作为一个胞腔复形， $M = Av_j{}_{j\in J}$带有一个满足降低条件 $d(v_j) \in Av_k{}^{k<j}\cdot$的微分。记 $M = (M \oplus A\langle x_i\rangle_{i\in I}, d) = (A\langle x_i, v_j\rangle, d)$，其中 I是一个良序集，且相对于该集合，d 满足降低条件 $d(x_i) \in M \oplus A\langle x_l\rangle_{l<i}$。根据定义，对于 $n > 1$， p^n 是将 f^n延拓为在生成元 x_i上取零的映射，而锚为 $\Gamma = \Gamma_N \circ p$。显然，$f^k = 0$ 蕴含 $p^k = 0$。

在权一中， D^1是M上的微分。接下来，我们定义 D^2。对于所有 i_1， $i_2 \in I$（分别是 $i \in I$， $j \in J$），任取$\overline{m}_{i_1 i_2}$ （分别是 m_{ij}） $\in M$ 使得

$$p^1(\overline{m}_{i_1 i_2}) = D^1(p^2(x_{i_1} \odot x_{i_2})) + D^2(p^1(x_{i_1}) \odot p^1(x_{i_2})) - p^2(D^1(x_{i_1}) \odot x_{i_2}) - (-1)^{|x_{i_1}|}p^2(x_{i_1} \odot D^1(x_{i_2})),$$
$$p^1(\overline{m}_{ij}) = D^1(p^2(v_i \odot x_j)) + D^2(p^1(v_i) \odot p^1(x_j)) - p^2(D^1(x_i) \odot v_j) - (-1)^{x_i}p^2(x_i \odot D^1(v_j)).$$

定义临时微分 $\tilde{D}^2$ 为 k-线性的分次对称映射，使得令 ρ^1 如方程 3.3 中所定义，

$$\tilde{D}^2(ax_i, bv_j) = (-1)^{|a|+(1+|x_i|)|b|}ab\overline{m}_{ij} + (-1)^{(|b|+|v_j|)(|a|+|x_i|)+|b|}b\rho^1(v_j)(a)\cdot x_i + (-1)^{|a|}a\rho^1(x_i)(b)\cdot v_j;$$
$$\tilde{D}^2(ax_i, bx_j) = (-1)^{|a|+(1+|x_i|)|b|}ab\overline{m}_{ij} + (-1)^{(|b|+|x_j|)(|a|+|x_i|)+|b|}b\rho^1(x_j)(a)\cdot x_i + (-1)^{|a|}a\rho^1(x_i)(b)\cdot x_j;$$
$$\tilde{D}^2(av_i, bv_j) = D^2((av_i) \odot (bv_j)).$$

根据构造， $[\tilde{D}^2, D^1]$是 dg A-模的一个态射，因此是 $\mathbf{Hom}_A(M^{\otimes 2}, M)$ 中的一个圈，并且 $\overline{p^1}\circ [\tilde{D}^2, D^1] = 0$。此外， $[\tilde{D}^2, D^1] \circ \imath = \imath \circ [D^2_M, D^1_M] = 0$。最后，在模范畴 $\mathbf{Mod}(A)$ 中短正合列（同伦纤维列）的拟同构

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}_u & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(\overline{M}^{\odot 2}, \overline{M}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M^{\odot 2}, \overline{M}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^1\circ -} & & \downarrow{\scriptstyle p^1\circ -} \\ \mathrm{Ker}_d & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(\overline{M}^{\odot 2}, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M^{\odot 2}, N), \end{array}$$

$[\tilde{D}^2, D^1]$ 是 $_u$ 核中的一个圈，它在 $_d$核中的像为零。由于同伦纤维之间诱导的映射是拟同构，因此它是一个边界。于是，存在一个 A-双线性映射 δ^2，使得对于 $D^2 = \tilde{D}^2 + \delta^2$，$[D^2, D^1] = 0$, $p^1 \circ D^2 = p^1 \circ \tilde{D}^2 = p^2 \circ D^1 + D^2 \circ p^1 + D^1 \circ p^2$成立；对于 $D^2 \circ \imath$，同样成立。

假设 D^k 已定义到 $k = n$为止。 D^{n+1} 定义如下。对于 $A\langle x_i, v_j\rangle_{i\in I, j\in J}$ 中的一族生成元（$x_1, \dots, x_k$, $v_{k+1}, \dots v_{n+1}$），（其中至少有一个生成元 x_i），记 $y_i = x_i$ 为 $i \leq k$，记 $y_j = v_j$ 为 $j > k$，并任取一个 $m_{y_1 \dots y_{n+1}}$，使得

$$
\begin{aligned}
&p^1(\overline{m}_{y_1\dots y_{n+1}})\\
&= \sum_{\substack{l=1,\dots,n+1\\ k_1+\ldots+k_l=n+1}} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(k_1,\dots,k_l)} (-1)^{|y_1\dots y_{n+1}|_\sigma} D^l(p^{k_1}(y_{\sigma(1)}\odot\cdots\odot y_{\sigma(k)})\odot\cdots\odot p^{k_l}(y_{\sigma(n+2-k_l)}\odot\cdots\odot y_{\sigma(k_k)}))\\
&- \sum_{k=1,\dots,n+1} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(k,n+1-k)} (-1)^{|y_1\dots y_{n+1}|_\sigma} p^{n+2-k}(D^k(y_{\sigma(1)}\odot\cdots\odot y_{\sigma(k)})\odot y_{\sigma(k+1)}\odot\cdots\odot y_{\sigma(n+1)}).
\end{aligned}
$$

定义临时微分 $\tilde{D}^{n+1}$ 为满足以下条件的 k-线性分次对称映射：对于上述的 $y_1, \dots, y_{n+1}$，

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}^{n+1}(a_1y_1,\dots,a_{n+1}y_{n+1}) &= (-1)^{\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|(1+|y_1|+\ldots+|y_{i-1}|)} a_1\cdots a_{n+1}\overline{m}_{y_1\dots y_{n+1}}\\
&+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|(1+|y_1|+\ldots+|y_{i-1}|)+|y_k|(|y_{k+1}|+\ldots+|y_{n+1}|)+|a_k|(1+|a_{k+1}|+\ldots+|a_{n+1}|+|y_1|+\ldots+|y_{n+1}|)}\\
&\quad a_1\cdots\hat{a}_k\cdots a_{n+1}\rho^{n+1}(y_1\odot\cdots\odot\hat{y}_k\odot\cdots\odot y_{n+1})(a_k)\cdot y_k;\\
\tilde{D}^{n+1}(a_1v_1,\dots,a_{n+1}v_{n+1}) &= D^{n+1}(av_1\odot\cdots\odot a_{n+1}v_{n+1}).
\end{aligned}
$$

根据构造，

$$\eta = [\tilde{D}^{n+1}, D^1] + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}[D^k, D^{n+2-k}]$$

是一个 A-线性映射，且 $\eta\circ\imath = 0$。不那么显然的是，$p^1\circ\eta = 0$。记 $D = D^1+\ldots+D^n+\tilde{D}^{n+1}$。由归纳法，$[D, D]$在权重 $\leq n$中消失。因此，$p^1\circ\eta$是 $\frac{1}{2}p\circ[D_N, D_N]$的权重 $n+1$分量。根据构造，$[p, D]$在权重 $\leq n+1$中消失，因此 $p^1\circ\eta$进一步等于 $[D, D]\circ p$的权重 $n+1$分量，而后者为零，因为 N是一个 L_∞代数。由 Nijenhuis–Richardson括号的雅可比恒等式，η是 $\mathrm{Hom}_A(M^{\odot n+1}, M)$中的一个圈。最后，在模范畴 $\mathrm{Mod}(A)$ 中的短正合列（同伦纤维列）的拟同构中

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ker}_u & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(\overline{M}^{\odot n+1}, \overline{M}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M^{\odot n+1}, \overline{M})\\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^1\circ -} & & \downarrow{\scriptstyle p^1\circ -}\\
\mathrm{Ker}_d & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}(\overline{M}^{\odot n+1}, N) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}(M^{\odot n+1}, N),
\end{array}
$$

η 是$_u$ 核中的一个圈，它在$_d$核中的像为零。由于诱导的同伦纤维之间的映射是拟同构，因此它是一个边界。取 $\delta\in{}_u$核，使得 $[\delta, D^1] = \eta$。$p^1\circ\delta$是$_d$核中的一个圈，因此存在一个圈 $\delta'\in{}_u$核，使得 $p^1\circ\delta = p^1\circ\delta'$。$\Delta := \delta - \delta'$满足 $[\Delta, D^1] = \eta$且 $p^1\circ\Delta = 0$。对于 $D^{n+1} = \tilde{D}^{n+1}+\Delta$,

$$[D^{n+1}, D^1] + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}[D^k, D^{n+2-k}] = 0,$$

$$p^1 \circ D^{n+1} = p^1 \circ \tilde{D}^{n+1} = \sum_{k=2}^{n} p^k \circ D^{n+2-k} + \sum_{k=1}^{n+1} D^{n+2-k} \circ p^k,$$

and

$$D^{n+1} \circ \imath - \imath \circ D^{n+1} = \tilde{D}^{n+1} \circ \imath - \imath \circ D^{n+1} = 0.$$

□

以下引理确立了在固定底空间上的提升性质：

引理 21. 给定 $A \in \mathtt{dgca}(k)$，设 K, L, M, N 是定义在 A 上的 *SH LR[1]* 代数，且 M 余纤维。设 $f\colon M \to N$ 是一个余纤维化，且 $\phi\colon L \twoheadrightarrow K$ 是一个纤维化。设 $g\colon M \rightsquigarrow L$ 和 $\psi\colon N \rightsquigarrow K$ 是线性 *SH[1]* 态射，满足 $\phi \circ g = \psi \circ f$。若 f 或 ϕ 是弱等价，则存在一个线性 *SH[1]* 态射 $l\colon N \to L$，使得 $g = l \circ f$，且 $\psi = \phi \circ l$。

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{g}{\rightsquigarrow} & L \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle f} & \overset{l}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ N & \underset{\psi}{\rightsquigarrow} & K; \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \overset{g}{\rightsquigarrow} & L \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \overset{l}{\swarrow} & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle\phi} \\ N & \underset{\psi}{\rightsquigarrow} & K. \end{array}$$

证明。注意，只需找到一个 L_∞-代数的态射 $l = (l^n)_n$，其中每个 l^n A 都是多重线性的，并满足 $g = l \circ f$ 和 $\psi = \phi \circ l$。事实上，等式 $\psi = \phi \circ l$ 蕴含其与锚相容。我们用归纳法进行。$l^1 : N \to L$ 由 A-模范畴的提升性质给出。假设已为 $k < n$ 定义了 l^k，剩下的就是找到 $l^n : \mathrm{Sym}^n_A N \to L$，使得

$$[l^n, D^1] = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} [l^k, D^{n-k+1}], \tag{5.1}$$

$$\phi \circ l^n = \psi^n, \tag{5.2}$$

and

$$l^n \circ f^{\odot n} = g^n. \tag{5.3}$$

首先注意，方程（5.1）右侧是 $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Sym}^n_A N,\ L)$ 中的一个圈。事实上，通过直接验证可知，对易子 $[l^k, d^{n-k+1}]$ 是 A-线性的，并且

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} [[l^k, D^{n-k+1}], D^1] &= -\sum_{k=2}^{n-1} [[l^k, D^1], D^{n-k+1}] - \sum_{k=2}^{n-1} [D^{n-k+1}, D^1], l^k] \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=2}^{k-1} [[l^l, D^{k-l+1}], D^{n-k+1}] + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=2}^{n-k} [[D^l, D^{n-k-l}], l^k] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=2}^{n-k} [D^l, D^{n-k-l}], l^k] + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=2}^{n-k} [D^l, D^{n-k-l}], l^k] = 0. \end{aligned}$$

A-模之间的映射

$$f^{\odot n} \circ - : \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, K) \to \mathrm{Hom}_A(M^{\odot n}, K); \quad f^{\odot n} \circ - : \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, L) \to \mathrm{Hom}_A(M^{\odot n}, L),$$

在第一种情况下是平凡纤维化，在第二种情况下是纤维化。同样，

$$-\circ\phi : \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, L) \to \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, K); \quad -\circ\phi : \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, L) \to \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, K)$$

在第一种情况下是纤维化，在第二种情况下是平凡纤维化。记 $A\langle\psi^n, [\psi^n, D^1]\rangle$ 为分次 A-模范畴中的 0-圆盘：即由一个次数为 0 的元素 ψ^n 和一个次数为 1 的元素 $d\psi^n$ 生成的自由分次 A-模，其微分为 $d(\psi^n) = [\psi^n, D^1]$。存在一个复形的典范态射

$$A\langle\psi^n, [\psi^n, D^1]\rangle \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, K),$$

它由将生成元 ψ^n 和 $[\psi^n, D^1]$ 分别映射到 $\mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, K)$ 中的对应元素所确定。(同伦)拉回之间的泛映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{A/\psi}(N^{\odot n}, L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, L) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ\phi} \\ A\langle\psi^n, [\psi^n, D^1]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(N^{\odot n}, K) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{A/\psi\circ f}(M^{\odot n}, L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M^{\odot n}, L) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ\phi} \\ A\langle\psi^n \circ f, [\psi^n \circ f, D^1]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M^{\odot n}, K), \end{array}$$

记为 u，它是一个拟同构：若 f 是弱等价，则它是拟同构的同伦拉回方形（ [7]中的模型方形）之间的态射；若 ϕ是弱等价，则它是无挠 A-模之间的态射。我们希望证明它还是一个纤维化（逐次满射）。作为分次模，对于分次向量空间 V_M，记 $M = A \otimes_k V_M$。作为相对胞腔复形， f 是映射$A \otimes_k \imath$：
$A \otimes_k V_M \to A \otimes_k V_N$，其中 $\imath$： $V_M \hookrightarrow V_N$ 是分次向量空间的包含映射。分次向量空间的任意满射都可分裂。记 $S =$ 核 ϕ，则作为分次向量空间， $L \cong S \oplus K$。作为分次向量空间，

$$\mathrm{Hom}_{A/\psi}(N^{\odot n}, L) \cong \mathrm{Hom}_k({V_N}^{\odot n}, S) \oplus A\langle\psi^n, [\psi^n, D^1]\rangle,$$

and

$$\mathrm{Hom}_{A/\psi\circ f}(M^{\odot n}, L) \cong \mathrm{Hom}_k({V_M}^{\odot n}, S) \oplus A\langle\psi^n \circ f, [\psi^n \circ f, D^1]\rangle.$$

泛映射

$$u : \mathrm{Hom}_{A/\psi}(N^{\odot n}, L) \to \mathrm{Hom}_{A/\psi\circ f}(M^{\odot n}, L)$$

在上述同构下可分解为满射 $-\circ\imath$ 和零圆盘上的恒等映射。

将（5.1）右侧与 $f^{\odot n}$ 复合，得到

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}[g^k, D^{n-k+1}] = [g^n, D^1].$$

同伦纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fib} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A/\psi}(N^{\odot n}, L) \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & u\downarrow{\scriptstyle \sim} \\ A\langle g^n, [g^n, D^1]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A/\psi\circ f}(M^{\odot n}, L) \end{array}$$

是无挠的。由于 (5.6) 的左端是同伦纤维中的一个圈，并且经由竖直箭头映射到$[g^n, D^1]$，因此它是某个从 A 到 $M^{\odot n}$ 的导子在微分作用下的像，记为 l^n。显然，它满足方程 (5.2) 和 (5.3)。

□

接下来我们转向 SH LR$[1]$ 对的一般态射。 $\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$中的 SH LR$[1]$ 对的纤维化就是纤维对象范畴 [25] 中的纤维化。

定义 22. 设(A, M) 和(B, N) 为 ***SH LR**[1]*对，其中 $M \in \mathtt{Mod}(A)$和 $N \in \mathtt{Mod}(B)$ 为胞腔复形。***SH LR**[1]*对的严格态射$(f_0\colon B \to A, f^1\colon M \to A \otimes_B N)$称为

(1) 若 f_0 逐次 ***surjective***，且 f^1 是 A-模的一个相对胞腔复形，则称为余纤维化；以及(2) 若 f_0 是交换微分分次代数的一个相对胞腔复形，且 f^1 是胞腔复形的一个投影，则称为纤维化

$$f^1 : (A\langle v_i\rangle_{i\in I}, d_V) \twoheadrightarrow (A\langle v_j\rangle_{j\in J}, d_V)$$

$$with\ J \subset I,\ and\ f(v_i) = \begin{cases} v_i & for\ i \in J \\ 0 & for\ i \in I \setminus J \end{cases}.$$

注 23. 如果将余纤维化和纤维化定义为上述映射的收缩，本节中的所有结果仍然成立。不过，证明会变得更加复杂。

我们首先将具有任意 A 和胞腔复形 M 的 SH LR$[1]$ 对（A， M）替换为 $\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$ 中的一个元素。根据 [25, 引理 26], ，给定一个交换微分分次代数 A、 A-模范畴中的胞腔复形 M，以及交换微分分次代数范畴中的余纤维替换 r_A： $QA \to A$，存在一个由胞腔复形给出的余纤维替换 p_M： $QM \to M$，其位于 QA-模范畴中，使得 $M = A \otimes_{QA} QM$.

引理 24。 对于 r_A： $QA \to A$ 以及如上的 p_M： $QM \to M$，存在 QA, QM）上的 ***SH LR**[1]* 结构，使得 （r_A、id）：（A, M） →（QA, QM）是 ***SH LR**[1]*对的纤维化。

证明。 由于 QA 是余纤维的，其 Kähler 微分模也是余纤维的。因此，函子 Der(QA， –) =Hom$_{QA}$(Ω^1(QA) –) 保持平凡纤维化。记（Γ_A^k）$_k$为（A， M）中的锚，则（QA， QM）中的锚由 $\mathtt{Mod}(QA)$ 中的提升性质给出

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathrm{Der}(QA, QA)[1] \\ & & \overset{\Gamma^k_{QA}}{\dashrightarrow} & & \big\downarrow \sim \\ QM^{\odot k} & \xrightarrow{p_M} & M^{\odot k} & \xrightarrow{\Gamma^k_A} & \mathrm{Der}(QA, A)[1]. \end{array}$$

只需在 QM 上找到一个 $L_\infty[1]$ 代数结构（D^k_{QM}）$_k$，使得

$$p_M \circ D^k_{QM} = D^k_M \circ p_M^{\odot k}. \tag{5.4}$$

我们用归纳法进行。假设已为 $k < n$ 定义了 D^k。作为分次模， $M = A\langle m_i\rangle_{i\in I}$，且 $QM = QA\langle m_i\rangle_{i\in I}$，其中 I 是一个良序集。对每个单项式 $m_1 \odot \cdots \odot m_n \in M^{\odot n}$，固定一个 $m_{m_1\ldots i_n} \in$ —

QM，使得 $p_M(m_{\overline{m_1\dots i_n}}) = D^n_M(m_1 \odot \cdots \odot m_n)$，并对由方程 3.3 给出的 ρ 定义一个临时微分 $\tilde{D}^n_{QM}$：$QM^{\odot n} \to QM$，其定义如下：

$$\begin{aligned}\tilde{D}^n_{QM}(a_1 m_1, \dots, a_n m_n) &= (-1)^{\sum_{i=1}^n |a_i|(1+|m_1|+\dots+|m_{i-1}|)} a_1 \cdots a_n \overline{m}_{m_1 \dots m_n} \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^{\sum_{i=1}^n |a_i|(1+|m_1|+\dots+|m_{i-1}|)+|m_k|(|m_{k+1}|+\dots+|m_n|)+|a_k|(1+|a_{k+1}|+\dots+|a_n|+|m_1|+\dots+|m_n|)} \\ &\quad a_1 \cdots \hat{a}_k \cdots a_n \rho^k_{QA}(m_1 \odot \cdots \odot \hat{m}_k \odot \cdots \odot m_n)(a_k) \cdot m_k\end{aligned}$$

与之前类似，

$$[\tilde{D}^n_{QM}, D^1_{QM}] + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} [D^k_{QM}, D^{n-k+1}_{QM}] \tag{5.5}$$

是 A-多重线性的，并且是 $\mathrm{Hom}_{QA}(QM^{\odot n}, QM)$，中的一个圈，其与 p_M的复合为零。显然， $\tilde{D}^n$满足条件（5.4）。剩下需要证明的是，作为分次QA-模的态射，表达式（5.5）等于一个边界 $[\Delta, D^1_{QM}]$，且满足 $p \circ \Delta = 0$。在这种情况下， $D^n_{QM} := \tilde{D}^n_{QM} - \Delta$ 是将 L_∞-结构延拓到权 n的正确延拓。

由于（同伦）纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fib} & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{QA}(QM^{\odot n}, QM) \\ {\scriptstyle p\circ -}\downarrow\sim & & {\scriptstyle p_M \circ -}\downarrow\sim \\ 0 & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{QA}(QM^{\odot n}, M) \end{array}$$

是无挠的，而表达式（5.5）是其圈算子，因此它是一个边界。

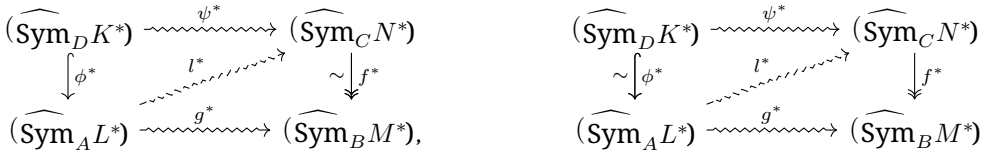
□

在一般情形下，提升性质同样成立：

引理 25. 设 (A, L)、(B, M)、(C, N) 和 (D, K) 是 *SH LR*[1]对。假设 $D \in \mathtt{cdga}(k)$ 是半自由的； $L \in$ 模范畴(A)、 $M \in \mathtt{Mod}(B)$、 $N \in \mathtt{Mod}(C)$ 和 $K \in \mathtt{Mod}(D)$ 是胞腔复形。设 $f : (B, M) \to (C, N)$ 是一个余纤维化，且 $\phi : (A, L) \to (D, K)$ 是一个纤维化。设 $g : (B, M) \rightsquigarrow (A, L)$ 和 $\psi : (C, N) \to (D, K)$ 是 *SH* 态射。若 f或 ϕ是弱等价，则存在一个 *SH* 态射$l : (C, N) \rightsquigarrow (A, L)$，使得 $g = l \circ f$，且 $\psi = \phi \circ l$。

$$\begin{array}{ccc} (B,M) & \overset{g}{\rightsquigarrow} & (A,L) \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle f} & \overset{l}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ (C,N) & \overset{\psi}{\rightsquigarrow} & (D,K); \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} (B,M) & \overset{g}{\rightsquigarrow} & (A,L) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \overset{l}{\swarrow} & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle\phi} \\ (C,N) & \overset{\psi}{\rightsquigarrow} & (D,K). \end{array}$$

证明。 对偶地，构造 l^* 于



按权归纳。在零权重情形下，限制 $l_0^*|_A\colon A \to C$，记作 l_0，使得 $f_0 \circ l_0 = g_0$和 $l_0 \circ \phi_0 = \psi_0$，由 cdga (k) 中的提升性质给出。将 l_0^* 限制到 L^*，对偶地，B-模的一个态射 $l^1\colon N \to C \otimes_A L$，在归纳步骤中作为特殊情形 $n = 0$ 构造。

假设 l^* 已经定义到权 $n-1$。作为半自由交换微分分次代数，$D = (\mathsf{Sym}_k V_D,\ d_D)$，其中 V_D是一个分次向量空间。作为相对胞腔复形，ϕ_0 是包含映射 $\mathsf{Sym}_k V_D$ ，$\to \mathsf{Sym}_k V_A$，对应于分次向量空间的包含映射 $V_D \subseteq V_A$

从分 次代数到逆分次代数的映射由其在逆极限中的取值唯一确定, as

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}\,\mathcal{C}}(X, (Y_i)_{i\in I}) = \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \varprojlim_{i\in I} Y_i).$$

由此，l^* 到权 n （对于 $n > 0$）的任何延拓，只要$\sum_{k\le n} {l^*}_k$ 保持为乘法的，就要求权 n-分量 ${l^*}_n|_A\colon A \to (\mathsf{Sym}_C^n N)^*$ 是取值于 $(\mathsf{Sym}_C^n N)^*$ 的任意导子与一个完全由 l_k^* 确定的固定项之和，对于 $k < n$。事实上，利用由 $l_0\colon A \to C$所确定的 $(\mathsf{Sym}_C^n N)^*$ 上的 A-模结构,

$$\begin{aligned} l_n^*(v_1 \cdots v_s) &= \sum_{k=1}^{s} v_1 \cdots l_n^*(v_k) \cdots v_s + \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_s=n \\ n_k<n}} l_{n_1}^*(v_1) \cdots l_{n_s}^*(v_s) \\ &=: {l_n^*}^{\mathrm{Der}}(v_1 \cdots v_s) + {l_n^*}^{\epsilon}(v_1 \cdots v_s). \end{aligned}$$

同样，$g_n^*|_A = {g_n^*}_{\text{导子代数}} + {g_n^*}^{\epsilon}$，以及 $\psi_n^*|_A = {\psi_n^*}_{\text{导子代数}} + {\psi_n^*}^{\epsilon}$.注意到 $f^* \circ {l_n^*}^{\epsilon} = {g^*}^{\epsilon}{}_n$，以及 ${l_n^*}^{\epsilon} \circ \phi_0 = {\psi_n^*}^{\epsilon}$。剩下的工作是找出 ${l_n^*}^{\mathrm{Der}}$，使得

$$[{l_n^*}^{\mathrm{Der}}, d_0] = -\sum_{k=1}^{n-1} [l_k^*, d_{n-k}] - [{l_n^*}^{\epsilon}, d_0], \tag{5.6}$$

$$f^* \circ {l_n^*}^{\mathrm{Der}} = {g_n^*}^{\mathrm{Der}}, \tag{5.7}$$

and

$$ {l_n^*}^{\mathrm{Der}} \circ \phi_0 = {\psi_n^*}^{\mathrm{Der}}. \tag{5.8}$$

̂为简化记号，记 $N^{*\hat{\odot} n}:=(\mathrm{Sym}_C^n N)^*$。根据̂$\mathbf{Hom}_k(A, N^{*\hat{\odot} n})$ 上微分的平方零性质， $[[l_n^{*\epsilon}, d_0], d_0] = 0$。此外，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}[[l_k^*, d_{n-k}], d_0] &= -\sum_{k=1}^{n-1}[[l_k^*, d_0], d_{n-k}] - \sum_{k=1}^{n-1}[d_{n-k}, d_0], l_k^*] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{k-1}[[l_l^*, d_{k-l}], d_{n-k}] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-k-1}[d_l, d_{n-k-l}], l_k^*] \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-k-1}[d_l, d_{n-k-l}], l_k^*] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-k-1}[d_l, d_{n-k-l}], l_k^*] = 0.\end{aligned}$$

This ̂表明，方程（5.6）的右侧是 $\mathbf{Der}(A, N^{*\hat{\odot} n})$ 中的一个圈。映射

$$f^* \circ - : \mathrm{Der}(A, N^{*\hat{\odot} n}) \to \mathrm{Der}(A, M^{*\hat{\odot} n}), \text{ and } f^* \circ - : \mathrm{Der}(D, N^{*\hat{\odot} n}) \to \mathrm{Der}(D, M^{*\hat{\odot} n})$$

是平凡纤维化。 ，而第二种情形下是纤维化。同样，映射

$$- \circ \phi_0 : \mathrm{Der}(A, N^{*\hat{\odot} n}) \to \mathrm{Der}(D, N^{*\hat{\odot} n}), \text{ and } - \circ \phi_0 : \mathrm{Der}(A, M^{*\hat{\odot} n}) \to \mathrm{Der}(D, M^{*\hat{\odot} n})$$

在第一种情形下是纤维化，而在第二种情形下是平凡纤维化。记 $k\langle {\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, [{\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, d_0]\rangle$ 为 $\mathbf{Der}(A, M^{*\hat{\odot} n})$ 中由 ${\psi^*}_{\mathrm{Der}n}$ 生成的子复形（以及它在微分下的像）。注意，拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_{/\psi^*}(A, N^{*\hat{\odot} n}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A, N^{*\hat{\odot} n}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ\phi_0} \\ k\langle {\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, [{\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, d_0]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Der}(D, N^{*\hat{\odot} n}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_{/f^*\circ\psi^*}(A, M^{*\hat{\odot} n}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A, M^{*\hat{\odot} n}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ\phi_0} \\ k\langle f^* \circ {\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, [f^* \circ {\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, d_0]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Der}(D, M^{*\hat{\odot} n}) \end{array}$$

事实上是同伦拉回，并且复合 $f^* \circ -$ 在拉回中诱导的映射是拟同构。需要注意的是，它还是一个纤维化（即逐次满射）。具体而言， ̂̂给定 $\xi \in \mathbf{Der}_{/f^*\circ\psi^*}(A, M^{*\hat{\odot} n})$，设 $\xi_1 \in \mathbf{Der}(A, N^{*\hat{\odot} n})$ 满足 $\xi_1 = f^* \circ \xi$. 定义一个导子 ξ_2，从 ̂$A = \mathrm{Sym}_k V_A$ 到 $N^{*\hat{\odot} n}$，在生成元上的定义为

$$\xi_2(v) = \begin{cases} \psi_n^{\mathrm{Der}}(v) & \text{for } v \in V_D \\ \xi_1(v) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

̂根据构造， $\xi_2 \in \mathbf{Der}_{/\psi}(A, N^{*\hat{\odot} n})$，且 $\xi_2 \circ \phi_0 = \xi$.

将 (5.6) 的右端与 f^* 复合，得到

$$[{g_n^*}^{\mathrm{Der}}, d_0] = \sum_{k=1}^{n-1}[g_k^*, d_{n-k}] - [{g_n^*}^{\epsilon}, d_0].$$

同伦纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fib} & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{/\psi^*}(A, N^{*\hat{\odot} n}) \\ \downarrow \sim & & f^*\circ - \downarrow \sim \\ k\langle g^{*\,\mathrm{Der}}_n, [g^{*\,\mathrm{Der}}_n, d_0]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{/f^*\circ\psi^*}(A, M^{*\hat{\odot} n}) \end{array}$$

是无挠的。由于 (5.6) 的左侧是同伦纤维中的一个圈，经竖直箭头映射到 $[g^{*\text{导子代数}n},\ d_0]$，因此它是某个从 A到 $N^{*\hat{\odot} n}$ 的导子的微分像，该导子记作 $l^{*\text{导子代数}n}$，满足 $f^*\circ l^{*\text{导子代数}n} = g^{*\text{导子代数}n}$，且 $l^{*\text{导子代数}}_n \circ \phi_0 = \psi^{*\text{导子代数}}_n$。

现在让我们将 l^*_n 延拓到 L^*，其中 $n \geq 0$，且具有 $l^*_{<0} = 0$。作为 SH LR[1] 对之间的纤维化，ϕ 对偶地是分次原A代数之间的映射

$$\phi_0^* : \widehat{\mathrm{Sym}}_D\langle\langle v_i^*\rangle\rangle_{i\in I} \to \widehat{\mathrm{Sym}}_A\langle\langle v_j^*\rangle\rangle_{j\in J}, \quad av_i^* \mapsto \phi_0(a)v_i^*.$$

任何将 $l^*_{<n}$ 延拓到权 n 的乘法扩张，都是任意一个 A-线性导子与一个完全由 $l^*_{<n}$ 和 $l^*_n|_A$确定的项之和。事实上，记

$$(l^*_{n(i,k)} : \mathrm{Sym}_A^{\leq\beta(k)} L^*_{\beta(i)} \to \mathrm{Sym}_C^{<k} N_i^*)$$

一个表示此类延拓 l^*_n的逆系统态射。

$$\begin{aligned} l^*_{n(i,k)}(a\cdot v_1^*\cdots v_m^*) &= \sum_{k=1}^{n} av_1^*\cdots l^*_n(v_k^*)\cdots v_m^* + \sum_{\substack{k_0+\ldots+k_n=n \\ k_i\neq n \text{ for } i>0}} l^*_{k_0}(a)\cdot l^{*}{}_{k_1}(v_1^*)\cdots l^*_{k_m}(v_m^*) \\ &= (l_n^{*\,\mathrm{Der}}{}_{(i,k)} + l_n^{*\,\epsilon}{}_{(i,k)})(a\cdot v_1^*\cdots v_m^*). \end{aligned}$$

由 ($l^{*\text{导子代数}(i,\ k)}_n$) 和 ($l^{*\,\epsilon}_{n\ (i,\ k)}$) 表示的分次原代数态射分别记为 $l_n^{*\,\mathrm{Der}}$ 和 $l_n^{*\,\epsilon}$。显然，$l^*_n = l_n^{*\,\mathrm{Der}} + l_n^{*\,\epsilon}$。

同理，$g^*_n = g^{*\text{导子代数}_n} + g^{*\epsilon}{}_n$，以及 $\psi^*{}_n = \psi^{*\text{导子代数}_n} + \psi^{*\epsilon}{}_n$。注意到 $f^*\circ l^{*\epsilon}{}_n = g^{*\epsilon}$，以及 $l^{*\epsilon}{}_n \circ \phi^* = \psi^{*\epsilon}{}_n$。剩下的就是找到 $l^{*\,\mathrm{Der}}_n$，使得

$$[l_n^{*\,\mathrm{Der}}, d_0] = -\sum_{k=1}^{n-1}[l^*_k, d_{n-k}] - [l_n^{*\,\epsilon}, d_0], \tag{5.9}$$

$$f^*\circ l_n^{*\,\mathrm{Der}} = g_n^{*\,\mathrm{Der}}, \tag{5.10}$$

and

$$l_n^{*\,\mathrm{Der}}\circ\phi^* = \psi_n^{*\,\mathrm{Der}}. \tag{5.11}$$

记 $\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*$ 是权为 n 的 A-线性导子空间。注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}_{A,n}(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*) &= \varprojlim_{i,k}\varinjlim_{j,l}\mathrm{Der}_{A,n}((\mathrm{Sym}_A^{\leq l} L_j)^*, (\mathrm{Sym}_C^{\leq k} N_i)^*)\\ &\cong \varprojlim_{i,k>n}\varinjlim_{j,l\geq k}\mathrm{Der}_{A,n}((\mathrm{Sym}_A^{\leq l} L_j)^*, (\mathrm{Sym}_C^{\leq k} N_i)^*)\\ &\cong \varprojlim_{i}\varinjlim_{j}\mathrm{Hom}_A(L_j^*, (\mathrm{Sym}_C^n N_i)^*)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(L^*, (\mathrm{Sym}_C^n N)^*) \cong \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Sym}_C^n N, C\otimes_A L)\end{aligned} \tag{5.12}$$

在自然同构 5.12 下，映射

$$\phi^*\circ - : \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*) \twoheadrightarrow \mathrm{Der}_K(\widehat{\mathrm{Sym}}_D K^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*)$$
$$\phi^*\circ - : \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*) \twoheadrightarrow \mathrm{Der}_K(\widehat{\mathrm{Sym}}_D K^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*)$$

在第一种情况下是纤维化，在第二种情况下是平凡纤维化，而映射

$$- \circ f^* : \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*) \twoheadrightarrow \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*)$$
$$- \circ f^* : \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*) \twoheadrightarrow \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*)$$

在第一种情况下是平凡纤维化，在第二种情况下是纤维化。因此，诱导出的（同伦）纤维积之间的映射

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Der}_{A/\psi^*}(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*)\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ\phi^*}\\ k\langle {\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, [{\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, d_0]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Der}_D(\widehat{\mathrm{Sym}}_D K^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*),\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Der}_{A/f^*\psi^*}(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_A(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*)\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\circ\phi^*}\\ k\langle f^*{\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, [f^*{\psi^*}_n^{\mathrm{Der}}, d_0]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Der}_D(\widehat{\mathrm{Sym}}_D K^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*),\end{array}$$

是弱等价。还可容易看出它是满射。最后，5.9 的右端是一个圈（在 $n=0$ 的情况下恒等于零），因而是（微分分次向量空间的）同伦纤维中的一个圈

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Fib} & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{A/\psi^*}(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_C N^*)\\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle f^*}\downarrow{\scriptstyle\sim}\\ k\langle {g^*}_n^{\mathrm{Der}}, [{g^*}_n^{\mathrm{Der}}, d_0]\rangle & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{A/f^*\psi^*}(\widehat{\mathrm{Sym}}_A L^*, \widehat{\mathrm{Sym}}_B M^*),\end{array}$$

它通过（垂直）平凡纤维化映射到 $[{g^*}_n^{\mathrm{Der}}, d_0]$。因此，它必定是满足方程 (5.10) 和 (5.11) 的导子 ${l^*}_n^{\mathrm{Der}}$ 的边界 $[l^*$导子代数n，$d_0]$。□

6. BV 型分解

我们首先回顾　在代数玩具模型上讲述经典 BV-BRST 形式体系（[8]）的故事。L et

$$X = \mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(k[x_1, \dots x_n])$$

作为我们的环境空间——在拉格朗日量形式体系中，它是构型空间，我们称变量x_i为场。令

$$\Sigma = \mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$$

为 X 中的一个曲面——称它为拉格朗日量的临界曲面。令

$$\mathcal{F} \subset T_X$$

为一个分布——称为无穷小规范对称性的空间。无穷小规范对称性恰好限制在 Σ 上，并且该限制

$$\mathcal{F}|_\Sigma \subset T_\Sigma = \mathrm{Der}(A)$$

是对合的。因此，(A,$\mathcal{F}|_\Sigma$) 是一个 LR 对。在 BV 形式体系的第一步，我们取一个$\mathcal{F}|_\Sigma$的自由解消

$$q : A\langle v_i^* \rangle \xrightarrow{\sim\!\!\!\!\rightarrow} \mathcal{F}|_\Sigma$$

在 A-模范畴中。它具有 SH LR 代数的结构，其中 q 是 SH LR 代数的严格态射（引理 20）。其切瓦利-埃伦伯格复形中与 v_i^* 对偶的生成元 v_i 称为鬼。下一步，我们取一个 A 的 Koszul-Tate 解消

$$p_{\mathrm{KT}} : (k[x_i, x_i^*, v_j^*], \delta) \xrightarrow{\sim\!\!\!\!\rightarrow} A$$

在 dg $\mathcal{O}_X$-代数范畴中。变量 x_i^* 称为反场，变量 v_j^* 称为反鬼场。在最后一步，我们将场、鬼、反场和反鬼组合起来，构造一个 SH LR 对，其切瓦利-埃伦伯格复形（$k[x_i, x_i^*, v_j^*][[v_j]], s$）称为 BV 复形。映射（$p_{\mathrm{KT}}, \mathrm{id}$），对偶地，

$$A \otimes_{k[x_i, x_i^*, v_j^*]} - : (k[x_i, x_i^*, v_j^*][[v_j]], s) \to (A[[v_j]], d)$$

是 SH LR 对的一个（严格）态射（引理 24）。

总之，经典 BV 形式体系通过严格 SH 态射组成的之字形链，将 (A,$\mathcal{F}|_\Sigma$) 替换为 $\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$ 中的一个对象

$$(A, \mathcal{F}|_\Sigma) \xleftarrow{\sim\!\!\!\!\rightarrow} (A, A\langle v_i^* \rangle) \xhookrightarrow{\sim} (k[x_i, x_i^*, v_j^*], k[x_i, x_i^*, v_j^*]\langle v_i^* \rangle).$$

在拉格朗日场论中，场与反场互为对偶，鬼与反鬼互为对偶。因此，BV 复形具有一个（-1）移位辛结构。移位辛结构超出了本文的讨论范围，因此我们只能在此止步，不再讲述 BV-BRST 形式体系的精彩故事。对我们而言，重要的是上述过程适用于任意 dg LR 对，而不只是（可能奇异的）曲面上的对合分布，即使由此得到的 BV 复形一般未必具有 (-1) 移位辛结构。我们称之为 dg LR 对的 BV 分解，它在同伦意义下唯一：

定义 26. *dg LR* 对 (A, M) 的 *BV* 解是一个 *SH*拟同构 $(A, QM) \xrightarrow{\sim} (QA, Q'M)$，其中 QA 是半自由交换微分分次代数，QM 是由 A-模构成的胞腔复形，而 $Q'M$ 是由 QA-模构成的胞腔复形；此外还配有一个线性 *SH*拟同构 $\pi_Q : (A, QM) \xrightarrow{\sim} (A, M)$。给定一个 ***dg LR*** 对 (A, M)，其 *BV* 解之间的态射是一个交换图

$$\begin{array}{ccc} (A, Q_1 M) & \rightsquigarrow & (Q_1 A, Q_1' M) \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle f_0} & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle f_1} \\ (A, Q_2 N) & \rightsquigarrow & (Q_2 A, Q_2' M), \end{array}$$

带有 f_0 一个线性 *SH* 态射，使得 $\pi_{Q_2} \circ f_0 = \pi_{Q_1}$.

命题27。 给定一个微分分次李-莱因哈特对 (A, M)，其 *BV* 解的范畴具有单连通的神经。

证明。 首先，我们证明该神经非空。记 $\pi_u : Q_u M \twoheadrightarrow M$ 为 M在 Nuiten 的 dg LR 代数半模型结构下到一个胞腔复形的余纤维替换。给定将 A 替换为半自由交换微分分次代数 $r_A : QA \twoheadrightarrow A$的一个余纤维替换，记 $f_u : (A, Q_u M) \to (QA, Q_u' M)$ 为引理 24 给出的一个 SH LR 对的严格态射。显然，f_u 是一个 BV 解。

为了证明该神经连通，给定 (A, M) 的任意另一个 BV 解 $f_Q : (A, QM) \rightsquigarrow (QA, Q'M)$，我们构造一条由 BV 解之间的态射组成的之字形链

$$f_Q \xleftarrow{g} f_{\overline{Q}} \xrightarrow{h} f_u.$$

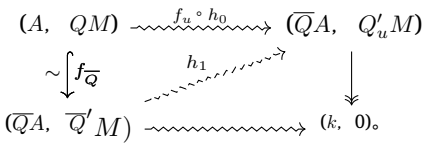
记 $f_Q : (A, -QM) \to (QA, \overline{Q}'M)$ 为由引理 24 给出的 SH LR 对的严格态射。 $g_1 : (QA, Q'M) \to (QA, \overline{Q}'M)$ 是提升

$$\begin{array}{ccc} (A, QM) & \overset{f_Q}{\rightsquigarrow} & (QA, Q'M) \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle f_{\overline{Q}}} & \overset{g_1}{\nearrow} & \downarrow \\ (\overline{Q}A, \overline{Q}'M) & \rightsquigarrow & (k, 0). \end{array}$$

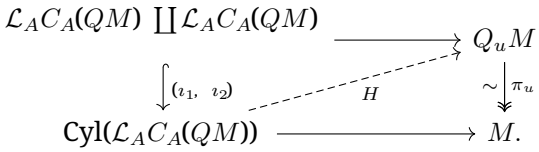
由此，我们构造出了态射 $g = (\mathrm{id}\ g_1) : f_Q \to f_Q$。接下来还需构造 $h : f_Q \to f_u$。根据提升性质，给出了 SH LR A-代数的线性 SH 态射 $h_0 : QM \to Q_u M$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Q_u M \\ \downarrow & \overset{h_0}{\nearrow} & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle \pi_u} \\ QM & \xrightarrow[\pi_{\overline{Q}}]{} & M, \end{array}$$

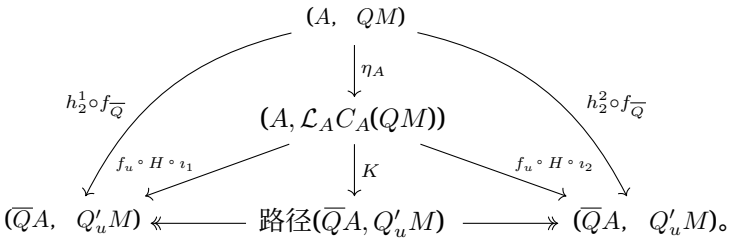
且 SH LR 态射 $h_1 : (QA, Q'M) \xrightarrow{-} (\overline{Q}A, Q_u' M)$ 由提升性质给出



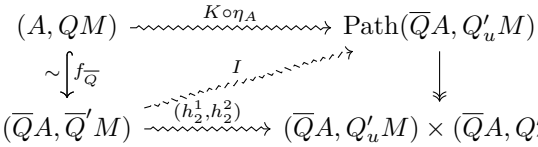
最后，我们证明神经没有非平凡的圈。首先，我们证明任意两个如上所述的态射 h 在 BV 解的同伦范畴中相等。设 h^1 和 h^2 是这样的映射。由于 Q_uM 是定义在 A 上的微分分次李-莱因哈特代数，态射 h_0^1 和 h_0^2 可分解为经过一个映射 $\mathcal{L}_AC_A(QM) \coprod \mathcal{L}_AC_A(QM) \to Q_uM$。用 Cyl 表示 Nuiten 的半模型结构中、定义在 A 上的 dg LR 代数范畴里的圆柱。我们得到如下提升图



对于 $(B,\ N) \in \mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$，将从 [25] 出发的路径对象记为 Path$(B,\ N)$。给定一个带有$L$ A-模的胞腔复形的 dg LR 对 $(A,\ L)$，左同伦映射 $(A,\ L) \to (B,\ N)$ 也是右同伦的： [11] 中命题 1.2.5(v) 的证明可逐字照搬。因此，我们得到一个右同伦



根据提升性质，我们得出映射 h_1^1 和 h_1^2 也是同伦的



与命题 1.2.5(v) 的证明中一样，定义 BV 解之间的态射 α 和 β_i，使得 $\beta^1 \circ \alpha = h^1$，且 $\beta^2 \circ \alpha = h^2$:

$$\begin{array}{ccc}
(A, QM) & \overset{f_{\overline{Q}}}{\rightsquigarrow} & (\overline{Q}A, \overline{Q}'M) \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_1 \circ \eta_A} & & \downarrow{\scriptstyle I} \\
\mathrm{Cyl}(A, \mathcal{L}_A C_A QM) & \overset{J}{\rightsquigarrow} & \mathrm{Path}(\overline{Q}A, Q'_u M) \\
\downarrow{\scriptstyle H} & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\
(A, Q_u M) & \overset{f_u}{\rightsquigarrow} & (\overline{Q}A, Q'_u M).
\end{array}$$

可交换。将 BV 解之间的态射记为 β

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cyl}(A, \mathcal{L}_A C_A QM) & \overset{f_u \circ H}{\rightsquigarrow} & (\overline{Q}A, Q'_u M) \\
\| & & \downarrow \\
\mathrm{Cyl}(A, \mathcal{L}_A C_A QM) & \overset{J}{\rightsquigarrow} & \mathrm{Path}(\overline{Q}A, Q'_u M).
\end{array}$$

显然，$\beta^1 \circ \beta = \beta^2 \circ \beta$。因此 $\beta^1 = \beta^2$，最后 $h^1 = h^2$。

任意两个不同的 BV 分解 f_{Q_1}, f_{Q_2} 都由路径 $(g^2) \circ (h^2)^{-1} \circ (h^1) \circ (g^1)^{-1}$. 连接。要证明神经是单连通的，只需证明任意 BV 分解的态射 $\phi : f_{Q^1} \to f_{Q^2}$ 与该路径同伦。我们通过构造一个态射 ϕ: $f_{\overline{Q}^1} \to f_{\overline{Q}^2}$ 来实现，使得图表

(6.1)
$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_u & & \\
 & \overset{h^1}{\nearrow} & & \overset{h^2}{\nwarrow} & \\
f_{\overline{Q}^1} & & \overset{\overline{\phi}}{\dashrightarrow} & & f_{\overline{Q}^2} \\
\downarrow{\scriptstyle g^1} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^2} \\
f_{Q^1} & & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & & f_{Q^2}
\end{array}$$

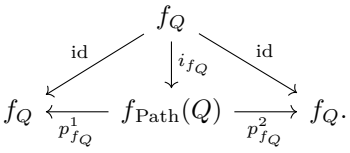
在 BV 分解的同伦范畴中交换。根据定义，$\phi_0 = \phi_0$，而 ϕ_1 由提升性质给出

$$\begin{array}{ccc}
(A, Q^1 M) & \xrightarrow{f_{\overline{Q}^2} \circ \overline{\phi}_0} & (\overline{Q}A, \overline{Q}^2 M). \\
\downarrow{\scriptstyle f_{\overline{Q}^1}} & \overset{\overline{\phi}_1}{\nearrow} & \\
(\overline{Q}A, \overline{Q}^1 M) & &
\end{array}$$

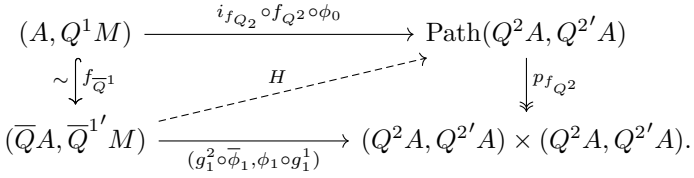
还需证明图表 (6.1) 交换。由唯一性，$h^1 = h^2 \circ \phi$。记

$$(QA, QM) \overset{i_Q}{\to} \mathrm{Path}(QA, QM) \overset{p_Q^1 \times p_Q^2}{\twoheadrightarrow} (QA, QM) \times (QA, QM)$$

$\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$ 中的路径分解。给定一个 BV 解 $f_Q : (A,\ QM) \rightsquigarrow (QA,\ Q'M)$，记 $f_{\mathrm{Path}}(Q)$ 为 BV 解 $i_{Q'} \circ f_Q : (A,\ QM) \rightsquigarrow$ 路径 $(QA,\ Q'M)$。由此得到 BV 解的典范交换图



因此，态射 $p^1_{f_Q}$ 和 $p^2_{f_Q}$ 在 BV 解的同伦范畴中相等。提升图中的映射 H



给出一个 BV 分解的态射 $(\phi_0,\ H)$：$f_{Q^1} \to f_{\mathrm{Path}}(Q^2)$，使得 $p^1_{f_{Q^2}} \circ H = g^2 \circ \phi$，且 $p^2_{f_{Q^2}} \circ H = \phi \circ g^1$。因此，在同伦范畴中，$g^2 \circ \phi = \phi \circ g^1$. □

一个值得探讨的问题是，BV 分解在态射作用下的表现如何？也就是说，一个 dg LR 对的态射 $(f_0,\ f)$：$(A,\ M) \to (B,\ N)$ 是否会诱导出一个在同伦意义下唯一的 BV 解态射？然而，态射 $(f_0,\ f)$ 只有在 $A \otimes_B N$ 具有正确的同伦型时才是同伦相干的。因此，这个问题应限定为以下两种情形之一：

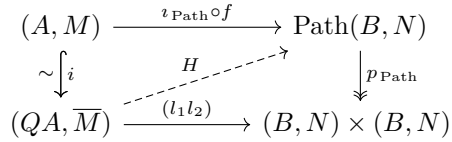
(1) 固定交换微分分次代数 $A = B$ 上的 SH LR 代数态射；或 (2) SH LR 对 $(A,\ M)$ 的态射，其中 M 是一个余纤维 A-模范畴。

第一个问题已在 [17, 定理 2.4]中解决。第二个问题也有类似的答案：

命题28。 设 (A, M) 和 (B, N) 是具有半自由 B 和胞腔复形 $M \in \mathtt{Mod}(A), N \in \mathtt{Mod}(B)$ 的 *SH LR* 对。设 $f\colon (A, M) \to (B, N)$ 是任意 *SH* 态射，并设 $i\colon (A, M) \to (QA, M)$ 是平凡余纤维化。

(1) 存在一个 *SH* 态射（称为提升）$l\colon (QA, M) \to (B, \overline{N})$，使得 $l \circ i = f$。(2) 提升 l 在同伦意义下唯一。

证明。 第 1 部分是引理 25 的特殊情形。对于第 2 部分，设 l_1 和 l_2 是两个这样的提升。将引理 25 应用于交换图



我们得到了所需的同伦。 □

推论 29。 在 *1*-范畴 *Gabriel-Zisman* 局部化下，范畴 $\mathtt{SHLR}^{\mathrm{cof}}(k)$等价于由任意 $A \in \mathtt{cdga}(k)$ 和胞腔复形 $M \in \mathtt{Mod}(A)$构成的 ***SH LR*** 对范畴(A, M)。

7. 微分分次 Lie-Rinehart 代数的笛卡尔纤维化

在最后一节中，我们将注意力限制在有限型交换微分分次代数上的微分分次 LR 代数，即限制在满足以下条件的微分分次 LR 对 $(A,\ M)$: A 是有限胞腔复形——即由有限多个生成元生成的半自由交换微分分次代数。满足这一有限性条件的微分分次 LR 对所成的范畴记为 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft}}(k)$。其余纤维对象构成的全子范畴——即满足 A a 是有限胞腔复形且 M a 是 A 上微分分次 LR 代数的 Nuiten 半模型结构中的胞腔复形的对 (A, M)——记为 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft},\ \mathrm{cof}}(k)$。其 Nuiten 纤维化-余纤维对象构成的全子范畴记为 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft},\ \mathrm{fib},\ \mathrm{cof}}(k)$。

主要问题在于，微分分次 LR 代数的拉回性质不太理想：一方面，将其用于任意微分分次 LR 代数时，它不保持弱等价；另一方面，Nuiten 半模型结构中的纤维化-余纤维微分分次 LR 代数的拉回虽然保持弱等价，但拉回本身却不是纤维化-余纤维微分分次 LR 代数。良好的 LR 代数的定义方式保证了它们的拉回保持拟同构，而且拉回本身仍是良好的 LR 代数。

定义 30。微分分次 *Lie-Rinehart* 对 (A, M) 称为良好，如果

- $A \in \mathtt{cdga}(k)$ 是有限胞腔复形；
- 锚 $\Gamma_M : M \to \mathrm{Der}(A)$ 是满射；
- M 作为分次 A 模是射影的；并且
- 张量积 $- \otimes_A M$ 保持拟同构。

$\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft}}(k)$ 中由良好的 ***LR*** 对组成的全子范畴记作 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k$ $)$.

如前所述:

引理 31。 良好 *LR* 对的拉回仍是良好 *LR* 对。

证明。 给定有限型交换微分分次代数 $f\colon A \to B$ 的态射，以及一个良好 LR 对（$B,\ M$），其拉回（$A,\ f^!M$）是（同伦）拉回

$$\begin{array}{ccc} f^!M & \longrightarrow & M \otimes_A B \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{f^!M}} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_M \otimes_A B} \\ \mathrm{Der}(B) & \longrightarrow \mathrm{Der}(A, B) = & \mathrm{Der}(A) \otimes_A B. \end{array}$$

显然，锚是满射。作为分次 B-模， $M \otimes_A B$ and Der$(A) \otimes_A B$ 均为射影。因此，分次 B-模

$$f^!M \cong \mathrm{Der}(B) \oplus \mathrm{Ker}(\Gamma_M) \otimes_A B \tag{7.1}$$

也具有射影性。接下来需要证明张量积 $- \otimes_B f^!M$ 保拟同构。给定一个 B-模 N，张量积 $f^!M \otimes_B N$是拉回

$$\begin{array}{ccc} f^!M \otimes_B N & \longrightarrow & M \otimes_A B \otimes_B N \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{f^!M} \otimes_B N} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_M \otimes_A B \otimes_B N} \\ \mathrm{Der}(B) \otimes_B N & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A,B) \otimes_B N. \end{array}$$

拟同构 $N \to N'$ 在余跨度图之间诱导出一个弱等价

$$M \otimes_A B \otimes_B N \twoheadrightarrow \mathrm{Der}(A,B) \otimes_B N \leftarrow \mathrm{Der}(B) \otimes_B N$$

and

$$M \otimes_A B \otimes_B N' \twoheadrightarrow \mathrm{Der}(A,B) \otimes_B N' \leftarrow \mathrm{Der}(B) \otimes_B N'.$$

映射 $f^!M \otimes_B N \to f^!M \otimes_B N'$是它们的（同伦）拉回之间诱导的拟同构。 □

应用于良好的微分分次李-莱因哈特对时，拉回是同伦相干的:

命题 32。该函子

$$\pi : \mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k) \to \mathtt{gdca}^{\mathrm{ft}}(k)^{\mathrm{op}}, \quad (A,M) \mapsto A$$

是一个笛卡尔纤维化。

证明。给定 $(A,M) \in \mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k)$，以及 $\mathtt{gdca}^{\mathrm{ft}}(k)$ 中的一个态射 $f\colon A \to B$，泛映射 $(f,p) : (B, f^!M) \to (A,M)$ 是局部笛卡尔的（命题 4）。要证明 π 是一个（1-范畴的）格罗滕迪克纤维化，还需证明：给定映射 $f : A \to B$, $g\colon B \to C$，以及一个位于 A 上的良好的微分分次李-莱因哈特代数 M，则 $g^!(f^!M) = (g \circ f)^!M$。然而，这直接由同构 7.1 得出。

用 N 表示脉络函子，用 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k)$ 中的弱等价表示 V，用 $\mathtt{gdca}^{\mathrm{ft}}(k)^{\mathrm{op}}$ 中的弱等价表示 W。根据 [10, Proposition 2.1.4.], , 要证明 π 是笛卡尔纤维化，只需证明标记单纯集合函子

$$\pi : (N(\mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k)), N(V)) \to (N(\mathtt{gdca}^{\mathrm{ft}}(k)^{\mathrm{op}}), N(W))$$

按照 [10, Definition 2.1.1.] 的定义，这是一个标记笛卡尔纤维化。性质 (1) 成立，因为 π 是格罗滕迪克纤维化；性质 (2) 和 (3) 显然成立。对于性质 (4)，注意到 $\mathtt{gdca}^{\mathrm{ft}}(k)$ 中的对象都是纤维且余纤维的，因此对于每个拟同构 $f\colon A \to B$，都存在另一个拟同构 $g\colon B \to A$。泛映射 $(g \circ f)^!M \to M$ 和 $(f \circ g)^!M \to M$ 分别是良好 dg LR 代数之间的自然弱等价，且分别位于 A 和 B 之上。因此，根据 [2, Definition 3.3, Proposition 7.5], , 函子 $g^!$ 和 $f^!$ 在 A 与 B 之上的良好 dg LR 代数之间构成无穷范畴的等价，证毕。□

我们终于可以证明本节的主要结果了:

定理 33。函子

$$\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft,cof}}(k) \to \mathtt{cdga}^{\mathrm{ft}}(k)^{\mathrm{op}}, \quad (A,M) \mapsto A$$

分解为无穷范畴之间的一个等价 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft},\ \mathrm{cof}}(k) \cong \mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k)$，随后是命题 *32* 所给出的笛卡尔纤维化。

证明。记 $R(A,\ 0)$ 为对 SH LR 代数 $(A,\ 0)$ 应用函子 $\mathcal{L}_A C_A$ 所得到的微分分次 LR 对（定义见公式 4.6）。显然，$R(A,\ 0)$ 是 Nuiten 纤维-余纤维的，而微分分次 LR 对之间的映射 $(\mathrm{id}_A,\ 0) : (A,\ 0) \to R(A,\ 0)$ 是 4.7 中的单位与 4.5 中的单位的复合，因此是一个弱等价。因此，给定半模型范畴中 over A 的微分分次 LR 代数的一个胞腔复形 M，余乘法

$$(A, M) \hookrightarrow (A, M) \coprod_{(A,0)} R(A, 0)$$

是一个由胞腔复形给出的余纤维-纤维替换。重要的是，与半模型结构所保证的余纤维-纤维替换不同，它关于 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft},\ \mathrm{cof}}(k)$是函子性的，也就是说，定义在可变底之上。因此，它是 ∞-范畴之间的等价

$$\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft,cof}}(k) \cong \mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft,fib,cof}}(k).$$

仍需证明包含映射 $\mathtt{dgLR}^{\mathrm{ft},\ \mathrm{fib},\ \mathrm{cof}}(k) \to \mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k)$ 也是 ∞-范畴之间的等价。这里，我们遵循 [10, 命题 1.3.4] 的方法。所引用的结果指出，在不存在函子性余纤维替换的模型范畴结构下，将（纤维）余纤维对象包含到（纤维对象）范畴中的映射，仍然是 ∞-范畴之间的等价。事实证明，证明中的所有模型范畴论构造在我们的情形下都成立。实际上，证明可以逐字照搬；所需的只是以下这些显然成立的性质。

引理 34。(1) 给定定义在 A 上的良好的微分分次 ***Lie–Rinehart*** 代数 L、M 和 N，以及一个跨度图 $L \to M \leftarrow N$，其积 $L \times_M N$ 仍是定义在 A 上的良好的微分分次 ***Lie–Rinehart*** 代数。(2) 给定定义在 A 上的良好 ***dg LR*** 代数之间的一个纤维化 $g\colon M \to N$，以及 $\mathtt{cdga}^{\mathrm{ft}}(k)$ 中的一个态射 $g\colon A \to B$，映射 $f^! g\colon f_! M \to f_! N$ 是定义在 B 上的良好 ***dg LR*** 代数之间的一个纤维化。

引理 35。记 $[n]$ 为这样一个范畴，其对象为数字 0、1、.....、n；当 $i \leq j$ 时，存在唯一的态射 $i \to j$。记 $(\mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k))^{[n]}{}_{\mathrm{const}}$ 为函子范畴$(\mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k))^{[n]}$的全子范畴；其态射记为 $p\colon (A, M) \to (A, N)$，在交换微分分次代数分量上逐对象均为恒等态射

$$\begin{array}{ccccc}
(A_0, M_0) & \xrightarrow{(f_0, g_0)} & \cdots & \xrightarrow{(f_{n-1}, g_{n-1})} & (A_n, M_n) \\
\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}_{A_0}, p_0)} & & & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}_{A_n}, p_n)} \\
(A_0, N_0) & \xrightarrow{(f_0, h_0)} & \cdots & \xrightarrow{(f_{n-1}, h_{n-1})} & (A_n, N_n).
\end{array}$$

映射 $p\colon A、M) \to (A、N)$ 在 $(\mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k))^{[n]}$常中称为<***strong***>纤维化</***strong***>，如果对于所有 k，泛态射

$$M_k \to N_k \times_{f_k^! N_{k+1}} f_k^! M_{k+1}$$

是 A_k 上 ***dg LR*** 代数的半模型结构中的纤维化。同时也是逐对象弱等价的纤维化称为平凡纤维化。以下结果在 $(\mathtt{dgLR}^{\mathrm{nice}}(k))^{[n]}$常中成立：

(1) 每个态射都可以分解为一个逐对象余纤维化，后接一个平凡纤维化。(2) 给定一个态射 $f\colon (A, M) \to (A, N)$，其中$(A, M)$是逐对象余纤维的；再给定一个平凡纤维化$g\colon (A, QN) \to (A, N)$，则存在一个态射 $l\colon (A, M) \to (A, QN)$，使得 $f = g \circ l$。

□

附录 A. 微分分次原代数

在附录中，我们回顾来自 [25] 的预备结果。

若偏序集 I 非空，且对任意两个元素 $i,j\in I$，都存在一个元素 $k\in I$ 使得 $k\geq i, k\geq j$，则称其为余滤的。范畴 $\mathcal{C}$ 中的逆系统是指针对某个余滤集 I的函子 $X\colon I\to\mathcal{C}$，通常记作 $(X_i)_{i\in I}$。对于 $i\geq j$，相应的态射 $X_i\to X_j$ 记作 p_{ij}。范畴 $\mathbf{Pro}(\mathcal{C})$ 的对象是$\mathcal{C}$中的逆系统，而态射是

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}(X,Y)=\varprojlim_i\varinjlim_j\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_j,Y_i).$$

等价地，态射是逆系统 ([22 的态射的等价类]):

给定$\mathcal{C}$中的逆系统 $(X_\alpha,p_{\alpha,\alpha'})$ 和 $(Y_\beta,p_{\beta,\beta'})$，逆系统 $(X_\alpha)\to(Y_\beta)$ 的态射由一个函数 $\phi\colon B\to A$ 以及一组态射 $f_\beta\colon X_{\phi(\beta)}\to Y_\beta$, 组成，每个 $\beta\in B$ 对应一个态射，并满足：对所有 $\beta,\beta'\in B$,$\beta>\beta'$，都存在 $\alpha>\phi(\beta)$ $\phi(\beta')$，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} X_{\phi(\beta)} & \xleftarrow{p_{\alpha,\phi(\beta)}} & X_\alpha & \xrightarrow{p_{\alpha,\phi(\beta')}} & X_{\phi(\beta')} \\ \downarrow{\scriptstyle f_\beta} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{\beta'}} \\ Y_\beta & & \xrightarrow{\qquad p_{\beta,\beta'}\qquad} & & Y_{\beta'} \end{array}$$

可交换。逆系统的态射记作 $(f_\beta,\ \phi)$。我们称逆系统的态射 $(f_\beta,\ \phi)$ 和 $(g_\beta,\ \psi)$ 等价，若对每个 $\beta\in B$，都存在 $\alpha\in A, \alpha>\phi(\beta)$ $\psi(\beta)$，使得下图

$$\begin{array}{ccccc} X_{\phi(\beta)} & \xleftarrow{p_{\alpha,\phi(\beta)}} & X_\alpha & \xrightarrow{p_{\alpha,\psi(\beta)}} & X_{\psi(\beta)} \\ & {\scriptstyle f_\beta}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle g_\beta} & \\ & & Y_\beta & & \end{array}$$

可交换。

给定一个微分分次交换 k-代数 A，以及一个分次 A-模的态射 $f:M\to N$， f-微分记作 $\mathbf{Diff}_f(M,\ N)$，它是一个 k-线性 1 次映射 $d\colon M\to N$，满足

$$d(am)=d(a)f(m)+(-1)^{|a|}ad(m).$$

f-微分的空间记作 $\mathbf{Diff}_f(M,\ N)$。最后， A上的微分分次原模是范畴中一个分次 A-模的原对象 $(M_i)_{i\in I}$，并配有一个平方为零的微分

$$d\in\varprojlim_i\varinjlim_j\mathrm{Diff}_{p_{ij}}(M_j,N_i).$$

微分分次原模的态射是一个分次原模映射 f，它与微分相容。

类似地，给定一个微分分次分次交换 k-代数的态射 $f\colon A \to B$， f-微分记作 $\mathrm{Diff}f(A, B)$，它是一个 k-线性的 1 次映射 $d\colon M \to N$，满足

$$d(ab) = d(a)f(b) + (-1)^{|a|}f(a)d(b).$$

微分分次原代数是分次交换代数范畴中的一个原对象 (A_i)，并带有一个平方为零的微分

$$d \in \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Diff}_{p_{ij}}(A_j, B_i).$$

dg-原代数之间的态射也以类似方式定义。

根据 Lazard 定理（或者更准确地说，其对分次模的略微推广），给定一个分次交换代数 A，平坦分次 A-模范畴等价于有限自由 A-模的归纳范畴；通过对偶化，它又等价于有限自由 A-模的原范畴的对范畴。也就是说，每个平坦模都是有限自由模的归纳极限，因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathtt{Mod(A)}}(\varinjlim_i \mathtt{M}_i, \varinjlim_j \mathtt{N}_j) = \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathtt{Mod(A)}}(\mathtt{M}_i, \varinjlim_j \mathtt{N}_j) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_{\mathtt{Mod(A)}}(\mathtt{M}_i, \mathtt{N}_j) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_{\mathtt{Mod(A)}}(\mathtt{N}_j^*, \mathtt{M}_i^*).$$

因此，微分分次平坦 A-模范畴等价于微分分次有限生成原 A-模范畴的对范畴。从这个意义上说，我们称所有分次平坦模都是可对偶化的。

给定一个分次平坦 A-模 $M = \varinjlim_i M_i$，分次交换代数

$$\mathrm{Sym}^{\leq k} M_i^* := \mathrm{Sym}_A M_i^* / \mathrm{Sym}^{>k} M_i^*$$

是 A 的有限扩张。 M^* 上的完备对称代数是一个分次交换原代数 $\widehat{\mathrm{Sym}}_A M^* = (\mathrm{Sym}_A^{\leq k} M_i^*)_{(i,k)\in I\times\mathbb{N}}$。一个微分

$$d_{(i,n)(j,m)} \in \mathrm{Diff}_{p_{(i,n)(j,m)}}(\mathrm{Sym}_A^{\leq n} M_i^*, \mathrm{Sym}_A^{\leq m} M_j^*), \text{ for } i \geq j, n \geq m$$

由其在 A 和 M_i^* 上的限制唯一确定，因此具有权分解，其中 $f^k{}_{(i,\ n)\ \ (j,\ m)}(A) \in \mathrm{Sym}^k M_j^*$（若 $k > m$ 则为零），且 $f^k_{(i,n)(j,m)}(M_i^*) \in \mathrm{Sym}^{k+1} M_j^*$（若 $k > m$ 则为零）。这在 $\mathrm{Sym}_A M^*$ 上诱导出给定微分 d_{CE} 的权分解。权 −1 分量为零的微分 d_{CE} 等价于一对 (A, M) 上的 SH LR 结构。其零权分量等价于 A 上的一个微分，以及一个微分分次原A-模 M^* 的结构；对偶地，也等价于 M 上的一个微分分次 dg A-模结构。

类似地，微分分次原代数的态射

$$f : (\widehat{\mathrm{Sym}}_A M^*, d_{\mathrm{CE}}) \to (\widehat{\mathrm{Sym}}_B N^*, d_{\mathrm{CE}})$$

具有权分解。SH LR 对的态射定义为与这类映射相反的映射，且其权−1 分量为零。在此情形下，零权分量等价于一个交换微分分次代数 $A \to B$的映射，以及一个微分分次前有限 B-模[4] $B \otimes_A M^* \to N^*$的映射；对偶地，也就是一个微分分次 B-模$N \to B \otimes_A M$的态射。若这两个映射都是拟同构，我们就称 f 为弱等价。注意，只有当 $B \otimes_A M$ 具有恰当的同伦型时，弱等价的概念才是同伦相干的。

[4] $B \otimes_A M^* := (B \otimes_A M_i^*)_i$

取 $A \in \mathsf{cdga}(k)$，以及一个自由分次 A-模 $M = A\langle m_i\rangle_{i\in I}$。记 $\vec{I}$ 为由 I 的有限子集及包含映射构成的小范畴，

$$M = A\langle m_i\rangle_{i\in I} = \varinjlim_{J\in\vec{I}} A\langle m_j\rangle_{j\in J}.$$

其对偶原有限模由满射逆系统 $A\langle m_j^*\rangle_{j\in J} \twoheadrightarrow A\langle m_{j'}^*\rangle^{j'\in J'}$ 表示，其中$J' \subset J$的射影极限是分次 A 模 $\prod_{i\in I} A\langle m_i^*\rangle$，记作 $A\langle\langle m_i^*\rangle\rangle_{i\in I}$。逆系统上的微分会在射影极限上诱导出一个微分。如果在极限中，

$$dm_i^* = \sum_j a_i^j m_j^*, \tag{A.1}$$

那么对于固定的 j，满足$a_j^i \neq 0$的指标 i 至多只有有限多个。反过来，给定一个满足相同有限性条件的族（a_j^i：$i,\ j \in I$），存在唯一的微分定义在 $A\langle\langle m_i^*\rangle\rangle_{i\in I}$ 上，它可提升为分次原模的微分，并满足方程 **(A.1)**。当且仅当其提升的微分平方为零时，极限中的微分平方为零。当且仅当该微分满足 $i \leq j$的递增条件 $a_j^i = 0$ 时，相应的微分分次原A模对偶于由 A模构成的胞腔复形。一个重要的观察是，当 M本身是 A模中的胞腔复形时，其对偶的射影极限连同诱导的微分，等于朴素对偶 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{Mod}(A)}(M,\ A)$。

态射也同样如此。分次原模范畴的态射 $f^*\colon A\langle\langle m_i^*\rangle\rangle_{i\in I} \to A\langle\langle n_j^*\rangle\rangle_{j\in J}$在逆极限中诱导出一个分次 A-模之间的映射。若在逆极限中，

$$f^*(m_i^*) = \sum_j a_i^j n_j^*, \tag{A.2}$$

则对固定的 j，满足 $a_j^i \neq 0$的指标 i至多只有有限多个。反之，给定一个满足相同有限性条件的族 $(a_i^j\colon i \in J, j \in I)$，则存在唯一一个逆极限中的态射，它可提升为分次原模的映射，并满足方程 **(A.1)**。当且仅当该映射的提升保微分时，逆极限中的映射才保微分。

分次交换代数逆系统 $\mathrm{Sym}_A(M^*)$ 的射影极限记为 $A[[m_i^*]]_{i\in I}$。它的元素是形式幂级数

$$y = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ i_1\dots i_n\in I}} a^{i_1\dots i_n} m_{i_1}^* \cdots m_{i_n}^*.$$

一个微分 在 $A[[m_i^*]]_{i\in I}$ 上提升到分次原代数层级的微分由以下内容唯一确定

$$d_{M^*}|_A \in \mathrm{Der}(A, A[[m_i^*]]), \quad d_{M^*} m_i^* = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_{>0}\\ i_1\dots i_n\in I}} a_i^{i_1\dots i_n} m_{i_1}^* \cdots m_{i_n}^*,$$

其中，对于任意 n 元组（$i_1 \dots i_n$）$\in I^{\times n}$，使系数 $a_i^{i_1\dots i_n}$ 非零的 $i \in I$ 至多只有有限多个。当且仅当其提升满足微分平方为零时，微分平方为零。

类似地，态射 $f^*\colon A[[m_i^*]]_{i\in I} \to B[[n_j^*]]_{j\in J}$ 若可提升到分次原代数的层次，则由下式唯一确定：

$$f^*|_A \in \mathrm{Hom}_{Mod(A)}(A, B[[n_j^*]]), \quad f^*(m_i^*) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_{>0}\\ j_1\dots j_n\in J}} b_i^{j_1\dots j_n} n_{j_1}^* \cdots n_{j_n}^*,$$

其中，对于任意 n元组 $(j_1 \dots j_n) \in J^{\times n}$，使系数 $b_i^{j_1\cdots j_n}$非零的 $i \in I$至多只有有限多个。当且仅当其提升满足微分条件时，它才满足微分条件。

参考文献

[1] A. Ardizzoni，《幺半范畴上的模范畴：阿贝尔还是非阿贝尔？》，《费拉拉大学年刊》第七辑·数学科学，L卷，167–185页，2004年。[2] C. Barwick，D. M. Kan，《相对范畴：同伦论的另一种模型》，《数学研究》23卷，1–2期，42–68页，2012年。[3] G. Bonavolontà，N. Poncin，《关于 Lie n-代数丛范畴》，《几何与物理学杂志》73卷（2013年），70–90页。[4] D. Calaque，R. Campos，J. Nuiten，《Lie 代数丛是弯曲Lie代数》，预印本 arXiv:2103.10728，2021年。[5] G. Di Brino，D. Pištalo，N. Poncin，《微分算子上的同伦代数语境》，《同伦与相关结构杂志》14(1)，293–347页，2019年。[6] W. Dwyer，D. Kan，《计算单纯局部化》，《纯粹与应用代数杂志》18卷，17–35页（1980年）。[7] A. Govzmann，D. Pištalo，N. Poncin，《同伦极限的不确定性与模型》，《范畴论及其应用》38卷（41），1608–1635页，2022年。[8] M. Henneaux，C. Teitelboim，《规范系统的量子化》，普林斯顿大学出版社，1992年。[9] V. Hinich，《作为形式簇的DG余代数》，《纯粹与应用代数杂志》162卷（2），209–250页，2001年。[10] V. Hinich，《重新审视Dwyer-Kan 局部化》，《同调与同伦应用》18(1)，27–48页，2016年。[11] M. Hovey，《模型范畴》，《数学调查与专著》63，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年。[12] J. Huebschmann，《多导子Maurer-Cartan代数与sh-Lie-Rinehart代数》，《代数杂志》472卷，437–479页，ISSN 0021-8693，2017年。[13] D. C. Isaksen，《计算原范畴中的极限与余极限》，《基本数学》175卷（2），175–194页，2002年。ISSN：0016-2736[14] L. Kjeseth，《同伦Lie-Rinehart分解与经典BRST上同调》，《同调与同伦应用》3卷，165–192页，2001年。[15] Kapranov，M.，《自由Lie拟代数与路径空间》，《精选数学》13卷，第277篇（2007年）。[16] A. Kotov，C. Laurent-Gengoux，V. Salnikov，《 $\mathbb{Z}$-分次 Q-流形的标准形式》，《几何与物理学杂志》191卷，104908，ISSN 0393-0440，2023年。《几何与物理学杂志》[17] C. Laurent-Gengoux，R. Louis，《Lie-Rinehart代数》 ≅ 《无挠Lie ∞-代数丛》，《代数杂志》594卷，1–53页。ff10.1016，2022年。[18] M. Manetti，《变形理论中的李方法》，Springer，2022年。[19] J.-L. Loday，B. Vallette，《代数歌剧》，《数学科学基础丛书》。Springer，第346卷。海德堡，2012年。[20] K. C. H. Mackenzie，《Lie群胚与Lie代数丛通论》，剑桥大学出版社（2005年）[21] Mac Lane S，《工作数学家的范畴论》，《数学研究生教材》第5卷，第二版，Springer-Verlag，纽约，1998年，第xii页+314。[22] S. Mardešić，J. Segal，《形状理论：逆系统方法》，北荷兰数学图书馆，第26卷，北荷兰出版社，1982年。[23] J. Nuiten，《Lie代数丛的同伦代数》，《应用范畴结构》27卷，493–534页，2019年。[24] J. Nuiten，《Lie代数丛的Koszul 对偶》，《《数学进展》》354卷，106750，2019年。[25] D. Pištalo，《原幂零扩张DG交换代数与强同伦 Lie-Rinehart 对》，arXiv:2406.10883，2024年

[26] D. Pištalo，N. Poncin，*Koszul-Tate* 分解与*Sullivan*模型，《数学论文集》531，2018年。[27] J. P. Pridham，统一导出变形理论《数学进展》224 (3)，772–826，2010年。[28] B. Pym，P. Safronov，移位辛李代数锚丛《国际数学研究通知》21，7489–7557，2020年。[29] D. Quillen，有理同伦论，《数学年刊》（第2辑），90卷，第2期（1969年9月），205–295页。[30] A. Y. Vaintrob，*Lie*代数丛与同调向量场，《俄罗斯数学综述》52卷，428页，1997年。[31] van der Laan，P.，歌剧：*Hopf*代数与带色*Koszul*对偶，博士论文，乌得勒支大学知识库，2002年。[32] G. Vezzosi，相对微分分次李代数锚丛上的模型结构。载于《几何、拓扑与代数中的堆栈和范畴》，《当代数学》（AMS），643卷，2015年。[33] L. Vitagliano，同伦李–*Rinehart*代数的表示，《剑桥哲学学会数学会刊》158(1)，155–191页，2015年。

DAMJAN PIŠTALO，电子邮箱：*damjan.pistalo@gmail.com*，MathSciNet作者编号：1292911