特征　　截断编排的准多项式　　ts

YingCao[1] 和 Houshan Fu[2,*]

[1,2]广州大学数学与信息科学学院，中国广东省广州 510006

[1]香港科技大学数学系，中国香港清水湾

*通信地址：fuhoushan@gzhu.edu.cn 电子邮箱：[1] ycaobf@connect.ust.hk

arXiv:2601.02912v1 [math.CO] 6 Jan 2026

摘要

给定 $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^n$ 中的一个（仿射）整排列，将 $\mathcal{A}$ 对任意正整数 q 取模，自然得到排列 $\mathcal{A}_q$ in $\mathbb{Z}_q^n$。我们的主要目标是研究限制 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 到 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解空间后的组合方面，以及其模 q 的约化 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$。本研究推广了 Kamiya、Takemura 和 Terao，以及 Chen 和 Wang 先前的结果。

本文的目的有以下三个方面。首先，我们推导出补集 $M\big(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\big)$ of $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$ 的基数的显式计数公式；并证明对于所有正整数 $q>q_0$，该基数都与 q 中周期为 ρ_C 的准多项式 $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},\ q\big)$ 相一致。其次，我们将 Chen 和 Wang 原有的假设 $a\mid b$ 弱化为严格更一般的条件 gcd(a, ρ_C) | gcd(b, ρ_C)，并引入正整数的组合等价概念。在此框架下，我们建立了三种统一的比较关系： $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},\ a\big)$ 与 $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},\ b\big)$ 的无符号系数之间的比较； $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},\ q\big)$ 的不同构成多项式的无符号系数之间的比较；以及 $M\big(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\big)$ 与 $M\big(\mathcal{A}_{pq}^{(B,\boldsymbol{b})}\big)$ 的基数之间的比较。第三，我们运用本文的方法，重新考察了 Forge、Zaslavsky 和 Kochol 早期研究中的群着色和处处非零非齐次形式流的计数方面。

关键词： 特征拟多项式、超平面排列、截断排列、初等因子、群着色、处处非零流

数学主题分类： 52C35,05A15

1 引言

一个**子空间排列** 是域 $\mathbb{F}$上的向量空间 V 中有限个仿射子空间 $\mathcal{A}=\{H_1,H_2,\ldots,H_m\}$ 构成的集合。如果每个 H_i 都是V的超平面（余维一子空间），则称 $\mathcal{A}$ 为**超平面排列**。 $\mathcal{A}$ 的**补集** $M(\mathcal{A})$定义为

$$M(\mathcal{A}):=V-\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H.$$

与 $M(\mathcal{A})$ 密切相关的一个概念是 $\mathcal{A}$ 的**特征多项式**，定义如下：

$$\chi(\mathcal{A},t):=\sum_{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A},\bigcap_{H\in\mathcal{B}}H\neq\emptyset}(-1)^{|\mathcal{B}|}t^{\dim(\bigcap_{H\in\mathcal{B}}H)}.$$

粗略地说， $\chi(\mathcal{A},\ t)$ 衡量了 $M(\mathcal{A})$ 的“大小”（参见 [9]）。关于子空间配置和特征多项式的详细信息可参见 [1, 4, 24]。

我们研究的核心对象是整数配置。设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 是一个具有整数项的 $m \times n$矩阵，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^m$ 是一个整数向量。矩阵 $[A, \boldsymbol{a}]$ 定义了一个超平面排列 $\mathcal{A} := \mathcal{A}(A,\ \boldsymbol{a})$，由 m 个超平面 H_i 构成，位于 $\mathbb{R}^n$ 中，称为**整排列**。具体而言， H_i 中的每个超平面 $\mathcal{A}$ 定义为

$$H_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = a_i; \quad a_{ij}, a_i \in \mathbb{Z},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

我们称增广矩阵 $[A, \boldsymbol{a}]$ 为 $\mathcal{A}$ 的**定义矩阵**。

设 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$，并用 $\mathbb{Z}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 表示模 q 整数构成的加法阿贝尔群。对于任意 $a \in \mathbb{Z}$，a 的 q-**约化** 记作 $[a]_q := a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$。同样，对于整数矩阵或向量 A'，用 $[A']_q$ 表示其逐项进行 q-约化后的结果 A'。随后， A 和 $\boldsymbol{a}$ 的 q-约化自然给出一个排列

$$\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_q(A, \boldsymbol{a}) := \{H_{i,q} \mid i = 1, 2 \ldots, m\},$$

的 m “超平面” $H_{i,\ q}$ 在 $\mathbb{Z}_q^n$中，其中

$$H_{i,q} := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_q^n \mid [\boldsymbol{\alpha}_i^T]_q \boldsymbol{x} = [a_i]_q\right\} \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\alpha}_i^T = (a_{i1}, \ldots, a_{in}).$$

虽然 $H_{i,\ q}$ 不一定是超平面，但我们遵循一种常见的术语惯例，将 $H_{i,\ q}$ 称为超平面。

源自 Crapo 和 Rota 的工作 [8], ，Athanasiadis 在 [1] 中系统地发展了一种有限域方法，用于计算整排列的特征多项式。该方法将特征多项式的计算简化为在有限域上的向量空间中的一个简单计数问题，Bj¨orner 和 Ekedahl [4]也独立发现了这一方法。自然地，我们会考虑更一般的阿贝尔群$\mathbb{Z}_q$上的此类问题，其中 q 不一定是素数的幂。后来，Athanasiadis 在 [2, 定理 2。1]中推广了此前的工作：通过枚举 $\mathcal{A}$ 的补集中的点，可以计算 $\mathcal{A}_q$ 的特征多项式，其中整数 q 足够大，且与一个仅取决于 $\mathcal{A}$的常数互素。关于截断排列的推广将在 推论 2.6中介绍。

最近，Kamiya、Takemura 和 Terao [16, 18] 将 Athanasiadis 的想法推广到了所有正 q整数 ρ_A 和 q_0，二者都 $[A, \boldsymbol{a}]$仅依赖于 $\mathcal{A}_q$ 的补集的基数是一个准多项式$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A},\ q)$，其变量为 q ，周期为 ρ_A ，对所有整数 $q > q_0$均成立。这个准多项式在**特征拟多项式**，而这个周期在 [16], 称为**最小公倍数周期**。然而，最小公倍数周期不一定是最小周期。Higashitani、Tran 和 Yoshinaga [13]对这一相关课题进行了深入研究。

事实上，特征准多项式所编码的信息远多于特征多项式。例如，特征准多项式$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A},\ q)$的每个构成多项式都有与该环面排列相关的不同组合解释，如 [22, 27]所示。特别是，第一个构成多项式恰好对应于 [16, 18]中的特征多项式 $\chi(\mathcal{A},\ t)$。Chen 和 Wang 在 [7], 中研究了 $\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A},\ q)$的算术性质，尤其关注其系数以及各构成多项式的系数。为更好地探讨这一主题，他们主要关注中心情形下所谓的截断整排列。

设 $B \in \mathcal{M}_{l\times n}(\mathbb{Z})$且 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^k$。记 $V(B,\ \boldsymbol{b})$为线性方程组$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解空间，即

$$V(B,\boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(A,\ \boldsymbol{a})$ 对 $V(B,\ \boldsymbol{b})$ 的限制产生了一个子空间排列 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$，它位于 $V(B,\ \boldsymbol{b})$ 中，由下式给出

$$\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})} := \{H_1^{(B,\boldsymbol{b})}, H_2^{(B,\boldsymbol{b})}, \ldots, H_m^{(B,\boldsymbol{b})}\},$$

其中，每个仿射子空间 $H_i^{(B,\boldsymbol{b})}$ 都是 H_i 与 $V(B,\ \boldsymbol{b})$ 的交集。子空间排列 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 $[B,\boldsymbol{b}]$ 的**截断排列**或**截断**。令

$$V_q(B,\boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_q^n \mid [B]_q\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{b}]_q\}.$$

截断 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 自动诱导出一个位于 $V_q(B,\ \boldsymbol{b})$ 中的排列 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$，定义为 y

$$\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})} := \left\{H_{1,q}^{(B,\boldsymbol{b})}, H_{2,q}^{(B,\boldsymbol{b})}, \ldots, H_{m,q}^{(B,\boldsymbol{b})}\right\},$$

其中，$H_{i,\ q}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 表示交集 $H_{i,\ q} \cap V_q(B,\ \boldsymbol{b})$，并且与 $H_i^{(B,\boldsymbol{b})}$ 的 q-约化一致。我们需要特别注意，$V_q(B,\ \boldsymbol{b})$ 不一定非空。若 $l = 0$，则 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})} = \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})} = \mathcal{A}_q$。

Chen 和 Wang [7] 研究了中心情形下 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$ 补集的计数函数，其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均为零向量。在这种情况下，他们在 [7,定理 1.1、定理 2.3] 中证明，补集 $M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{0})}\right)$ 的基数是一个准多项式$\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})},\ q\right)$，对于所有正整数 q 均成立；该准多项式满足最大公约数性质，并推广了 [16] 中的主要结果。在 [7, 定理 1.2], 中，他们进一步证明，若正整数 a 整除 b，则准多项式 $\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}、\ a\right)$ 与 $\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}、\ b\right)$ 的无符号系数之间存在统一的比较关系。

受前人工作的启发，我们的主要目标是将他们的结果推广到**非中心情形**，其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是任意整数向量。接下来，我们将简要介绍主要结果。相关的精确定义和详细符号将在后续章节中说明。

利用容斥原理，我们首先给出 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$的补集基数的显式表达式，如下:

$$\#M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right) = \sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{\#J}\tilde{d}_J(q)q^{n-r(J)}.$$

然后，利用初等因子法，我们推导出存在两个非负整数 ρ_C和 q_0，它们仅取决于 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$，使得对于所有整数 $q > q_0$，$M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right)$ 的基数都是关于 q 的准多项式，其周期为 ρ_C，表达式为

$$\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},q\right) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J}\tilde{d}_J(q)q^{n-r(J)},$$

其中，$\tilde{d}_J$ 是一个周期函数。我们称其为**特征拟多项式**。类似地，$\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},q\right)$ 的每个构成多项式 $f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},t\right)$ $(a = 1,\ldots,\rho_C)$ 都是如下形式的多项式

$$f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},t\right) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J}\tilde{d}_J(a)t^{n-r(J)}.$$

与 [7, 16, 18], 一样，我们注意到 $f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right) = f_b\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right)$ 在 $\gcd(a, \rho_C) = \gcd(b, \rho_C)$ 时，并且第一个构成多项式与 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$的特征多项式一致。

本文的另一个核心关注点是特征准多项式的无符号系数与其构成多项式的无符号系数之间的相互关系。假设秩$(B) = r$ 且秩 $\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = s$。根据 $\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\right)$ 和 $f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right)$的表达式，我们可以分别将它们写成

$$\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\right) = \sum_{j=r}^{s} (-1)^{j-r} \beta_j(q) q^{n-j}$$

and

$$f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right) = \sum_{j=r}^{s} (-1)^{j-r} \gamma_j(a) t^{n-j}.$$

为了推导出我们期望的结果，我们将原假设 $a \mid b$ in [7]弱化为一个严格更一般的条件：最大公约数$(a, \rho_C) \mid$最大公约数(b, ρ_C)，并进一步引入正整数的组合等价这一概念。在此框架下，我们建立了以下三个一致比较：

- 对于任意整数 $a, b > q_0$，若最大公约数$(a, \rho_C) \mid$最大公约数(b, ρ_C)，且 a 与 b 关于 $\mathcal{A}_{(B,\boldsymbol{b})}$组合等价，则
$$0 \le \beta_j(a) \le \beta_j(b), \quad \forall\, r \le j \le s.$$
- 对于任意整数 $1 \le a, b \le \rho_C$，如果 $\gcd(a, \rho_C) \mid \gcd(b, \rho_C)$，且 $\gcd(a, \rho_C)$ 关于 $\mathcal{A}_{(B,\boldsymbol{b})}$ 与 $\gcd(b, \rho_C)$ 组合等价，那么
$$0 \le \gamma_j(a) \le \gamma_j(b), \quad \forall\, r \le j \le s.$$
- 对于任意 $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$，如果 $\gcd(p, d_i)\gcd(q, d_i) \mid d_i$ 对于 B 的每个不变因子 d_i，并且方程组 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \pmod{pq}$ 有解，那么
$$\#M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right) \le \#M\left(\mathcal{A}_{pq}^{(B,\boldsymbol{b})}\right).$$

此外，当 $H_1^{(B,\boldsymbol{b})}, \ldots, H_m^{(B,\boldsymbol{b})}$ 是 $V(B, \boldsymbol{b})$ 或 $l = 0$ 的余维一子空间时，如果 $\gcd(a, \rho_C)$ 关于 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 与 1 组合等价，那么 $f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right)$ 的系数非零且符号交替。该结果和第一项比较强化了 Chen 和 Wang 的主要结果，并将其推广到非中心情形。据我们所知，最后两项比较是首次确立的。

一个密切相关的主题是处处非零非齐次形式流和群着色，它们由 Jaeger、Linial、Payan 和 Tarsi 引入 [15], ，推广了图论中经典的处处非零流和正常顶点着色。我们运用这一方法，重新探讨早期研究 [10–12, 19, 33, 34] 中相关的计数方面。

本文余下部分安排如下：第 2 节主要回顾准多项式和初等因子的定义及基本性质，并研究非中心情形下 $M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right)$ 相对于 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$的补集的基数及其相关性质。第 3 节着重比较以下三方面： $\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, a\right)$ 和$\chi^{\text{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}\right.$的无符号系数； $b)$不同构成多项式 $f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}\right.$的 $t)$ 无符号系数；以及 $M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right)$ 与 $M\left(\mathcal{A}_{pq}^{(B,\boldsymbol{b})}\right)$的基数。第 4 节讨论特征准多项式在图着色和流问题中的应用。

2 特征准多项式

本节首先回顾准多项式和初等因子的定义及基本性质，随后重点研究非中心情形下 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$ 的补集基数及其相关性质。

2.1 预备知识

为方便读者，我们先回顾稍后将用到的准多项式和初等因子的相关定义及标准结论。

我们来回顾准多项式的定义。若存在 $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和多项式 $f_1(t)\ f_2(t)\ldots, f_\rho(t) \in \mathbb{Q}[t]$，使得对任意 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$，函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 都称为**准多项式**。

$$f(q) = f_j(q) \quad \text{if} \quad q \equiv j \pmod{\rho}.$$

整数 ρ（不唯一）称为 f 的**准周期**，多项式$f_j(t)$称为准多项式 f 的 j-**构成多项式**。等价地，f 具有如下形式

$$f(q) = d_n(q)q^n + d_{n-1}(q)q^{n-1} + \cdots + d_0(q),$$

其中，每个 $d_j: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 都是整数周期为 τ_j 的周期函数，也就是说，对于 $\tau_j \in \mathbb{Z}_{>0}$，$d_j(q) = d_j(q+\tau_j)$。在这种情况下，上述周期 ρ 可取为 $\rho = \mathrm{lcm}(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$。最小的此类 ρ 称为准多项式 f 的**最小周期**。此外，周期为 ρ 的准多项式 f 称为关于 ρ 具有**最大公约数性质**，如果每个 j-构成多项式 $f_j(t)$ $(1 \le j \le \rho)$ 对 j 的依赖仅通过 $\gcd(j, \rho)$，也就是说，

$$f_a(t) = f_b(t) \quad \text{if} \quad \gcd(a, \rho) = \gcd(b, \rho).$$

有关准多项式的更多细节，请参见 [25]。

接下来，我们整理一下初等因子理论的一些基础知识。设 $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$为秩为 r的整数矩阵。根据初等因子定理，M 可通过初等行列变换化为史密斯标准形。具体而言，M 的**史密斯标准形**是唯一的矩阵 $D = D(M)$，其前 r 个对角元素是非零整数 $d_1(M)\ d_2(M)\ldots, d_r(M)$，其余元素均为零，并且存在幺模矩阵 $P \in GL_m(\mathbb{Z})$ 和 $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ 满足

$$PMQ = D \quad \text{and} \quad 0 < d_1(M) \mid d_2(M) \mid \cdots \mid d_{r-1}(M) \mid d_r(M).$$

每个 $d_j(M)$称为 M的第 j**个不变因子**。特别地，$d(M) := d_r(M)$称为**最大不变因子**。此外，每个第 j个不变因子都可以通过以下公式计算：

$$\prod_{i=1}^{j} d_i(M) = \gcd\big\{\det(M') \mid M' \text{ is a } j \times j \text{ submatrix of } M\big\}.$$

有关该主题的更多信息，请参见 [21]。

最近，Kamiya、Takemura 和 Terao 研究了 [18] 中环$\mathbb{Z}_q$ $(q \in \mathbb{Z}_{>0})$ 的相关理论。他们在 [18,命题 2.1] 中证明，任意矩阵 $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z}_q)$ 都等价于一个对角矩阵

$$\mathrm{diag}\big([d_1]_q, \ldots, [d_s]_q, 0, \ldots, 0\big),$$

其中的某些整数 $0 < d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s \mid q$ 满足 $d_s < q$，且每个 d_i 都由 M 唯一确定。更确切地说，设 $M' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 满足 $[M']_q = M$。则

$$s = \max\{i : q \text{ does not divide } d_i(M')\} \quad \text{and} \quad d_i = \gcd\big(q, d_i(M')\big). \tag{2.1}$$

因此，$[d_i]_q \doteq [d_i(M')]_q$，其中 $\doteq$ 表示在 $\mathbb{Z}_q$ 中相差一个单位乘法意义下的相等。同样，我们称 $[d_j]_q$ 为 M 的第 j **个不变因子**。

设 $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 和 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^m$。将 $\mathrm{Col}_q(M)$ 定义为由 $[M]_q$ 在 $\mathbb{Z}_q$ 上的列所生成的列空间。显然，$\mathrm{Col}_q(M)$ 是 $\mathbb{Z}_q$-模 $\mathbb{Z}_q^m$ 的子模。Kamiya、Takemura 和 Terao [18] 根据 $[M, \boldsymbol{c}]_q$ 和 $[M, \boldsymbol{0}]_q$ 的不变因子，对相关方程组 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ (模 q) 的可解性给出了一种刻画。

引理 2.1 ([18], 引理 2.3)。设 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$，$M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 和 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^m$。则 $[\boldsymbol{c}]_q \in \mathrm{Col}_q(M)$ 当且仅当 $[M, \boldsymbol{c}]_q$ 的不变因子与 $[M, \boldsymbol{0}]_q$ 的相同。

为得到我们的结果，还需要用到 Tompson 的以下定理 [26]，该定理称为交错整除定理。

定理 2.2 ([26], 交错整除定理)。设 $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 是一个秩为 r 且 $N = \begin{bmatrix} M \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^n$ 的整数矩阵。那么

$$d_1(N) \mid d_1(M) \mid d_2(N) \mid d_2(M) \mid \cdots \mid d_r(N) \mid d_r(M) \mid d_{r+1}(N),$$

其中 $d_{r+1}(N) = 0$ 若 秩$(N) = r$。特别地，最大不变因子 $d(M)$ 和 $d(N)$ 满足以下关系：

$$\begin{aligned} d(M) \mid d(N) \quad & \text{if} \quad \mathrm{rank}(N) = \mathrm{rank}(M) + 1, \\ d(N) \mid d(M) \quad & \text{if} \quad \mathrm{rank}(N) = \mathrm{rank}(M). \end{aligned}$$

2.2 截断构型的特征准多项式

在本小节中，我们首先通过容斥原理推导 $\#\big(V_q(B, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{j=1}^m H_j^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$ 的计数公式。随后，根据初等因子理论，我们证明计数函数对于定理 2.4中的所有整数 $q > q_0$，都可以一致地表示为准多项式。最后，我们在定理 2.5中给出该多项式的构成多项式的显式表达式，并进一步探讨它们之间的相互关系。

首先，我们来分析方程组 $[M]_q\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{c}]_q$ 在 $\mathbb{Z}_q^n$ 中的解的数量。

引理 2.3. 设 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$、$\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^m$ 和 $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 是一个秩为 r 的整数矩阵。那么，方程组 $[M]_q\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{c}]_q$ 在 $\mathbb{Z}_q^n$ 中的解的数量为

$$\#V_q(M, \boldsymbol{c}) = \begin{cases} q^{n-r}\prod_{j=1}^r \gcd\big(q, d_j(M)\big), & \text{if } [\boldsymbol{c}]_q \in \mathrm{Col}_q(M); \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。如果 $[\boldsymbol{c}]_q \notin$ 属于 M 的列空间 $_q$，那么方程组 $[M]_q\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{c}]_q$ 在 $\mathbb{Z}_q^n$ 中无解。因此，在这种情况下，$\#V_q(M, \boldsymbol{c}) = 0$。如果 $[\boldsymbol{c}]_q \in$ 属于 M 的列空间 $_q$，那么方程组 $[M]_q\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{c}]_q$ 在 $\mathbb{Z}_q^n$ 中有解。因此，对于满足 $[M]_q\boldsymbol{x}_0 = [\boldsymbol{c}]_q$ 的某个 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{Z}_q^m$，我们有

$$V_q(M, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{x}_0 + \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_q^m : [M]_q\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{0}]_q\} = \boldsymbol{x}_0 + V_q(M, \boldsymbol{0}).$$

这意味着 $\#V_q(M,\ \boldsymbol{c}) = \#V_q(M,\ \mathbf{0})$。另一方面，根据初等因子理论，存在幺模矩阵 $P \in GL_m(\mathbb{Z})$ 和 $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$，使得

$$PMQ = D = \operatorname{diag}\big(d_1(M), \dots, d_r(M), 0, \dots, 0\big).$$

由此可得 $V_q(M,\ \mathbf{0}) = V_q(PM,\ \mathbf{0})$。由于 Q 是一个可逆矩阵，群同态

$$V_q(M, \mathbf{0}) = V_q(PM, \mathbf{0}) \to V_q(PMQ, \mathbf{0}), \quad \boldsymbol{x} \mapsto Q^{-1}\boldsymbol{x}$$

是一个同构。这表明 $\#V_q(M,\ \mathbf{0}) = \#V_q(D,\ \mathbf{0})$。方程组 $D\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 在 $\mathbb{Z}_q^n$中由方程 $d_j(M)x_j = 0$ 组成，其中 $j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ r$。根据初等数论，每个方程 $d_j(M)x_j = 0$ 在 $\mathbb{Z}_q$中恰有 $\gcd\big(q,\ d_j(M)\big)$ 个解。因此，我们有

$$\#V_q(M, \boldsymbol{c}) = \#V_q(D, \mathbf{0}) = q^{n-r} \prod_{j=1}^{r} \gcd\big(q, d_j(M)\big).$$

证明完毕。 □

为了更方便地陈述我们的结果，我们引入一些必要的记号。从现在起，除非另有说明，我们总是假设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$、 $B \in \mathcal{M}_{l\times n}(\mathbb{Z})$、 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^m$和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^l$。对于任意 $J \subseteq [m]$，定义

$$C_J := \begin{bmatrix} B \\ A_J \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(l+\#J)\times n}(\mathbb{Z}),\ \boldsymbol{c}_J := \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}_J \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{l+\#J} \text{ and } \bar{C}_J := [C_J\ \boldsymbol{c}_J] \in \mathcal{M}_{(l+\#J)\times(n+1)}(\mathbb{Z}),$$

其中， $A_J \in \mathcal{M}_{\#J\times n}(\mathbb{Z})$ 是由索引为 J 的行构成的 A 子矩阵，而 $\boldsymbol{a}_J \in \mathbb{Z}^{\#J}$ 是由索引为 J 的条目构成的 $\boldsymbol{a}$ 子向量。为简便起见，我们记 $C := C_{[m]}$ 和 $\bar{C} := \bar{C}_{[m]}$。设

$$r(J) := \operatorname{rank}(C_J) \quad \text{and} \quad \bar{r}(J) := \operatorname{rank}(\bar{C}_J).$$

设 $0 < d_{J,1} \mid d_{J,2} \mid \cdots \mid d_{J,r(J)}$ 是 C_J 的不变因子，并设 $0 < d_{J,1} \mid d_{J,2} \mid \cdots \mid d_{J,\bar{r}(J)}$ 是 C_J 的不变因子。进一步设

$$\rho_C := \operatorname{lcm}\big(d_{J,r(J)} : J \subseteq [m],\ \bar{r}(J) = r(J)\big)$$

and

$$q_0 = q_0(\bar{C}) := \max\big\{\bar{d}_{J,\bar{r}(J)} : J \subseteq [m],\ \bar{r}(J) = r(J) + 1\big\}.$$

当 $\big\{J \subseteq [m]\colon\ \bar{r}(J) = r(J) + 1\big\} = \emptyset$ 时，我们将 $q_0 = 0$ 理解为.....。定义 $d_J(q) := \prod_{j=1}^{r(J)}$ 最大公约数$(d_{J,j}, q)$，并且

$$\tilde{d}_J(q) := \begin{cases} d_J(q), & \text{if } \gcd(q, d_{J,j}) = \gcd(q, \bar{d}_{J,j}) \text{ for all } j = 1, \dots, \bar{r}(J); \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

约定 $d_{J,\bar{r}(J)} = 0$若 $\bar{r}(J) = r(J) + 1$。

现在，我们已经掌握了足够的工具来证明第一个主要结果，该结果将在第 4 节中用于图着色和流问题。

Th定理 2.4。 使用上述记号， $M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right)$ 的计数公式 *is*

$$\#M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right) = \sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{\#J}\tilde{d}_J(q)q^{n-r(J)}. \tag{2.2}$$

此外，存在一个准多项式 $\chi^{quasi}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},q\right)$ ，其周期为 ρ_C ，使得# $M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right) = \chi^{quasi}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},q\right)$ 对所有整数 $q > q_0$均成立。更具体地说， $\chi^{quasi}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},q\right)$ 具有如下形式

$$\chi^{quasi}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},q\right) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J}\tilde{d}_J(q)q^{n-r(J)}. \tag{2.3}$$

证明。 我们应用容斥原理来计算 $M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right)$。对于任意子集$S \subseteq V_q(B,\boldsymbol{b})$，其示性函数定义如下： $1_S(\boldsymbol{x}) = 1$ 当 $\boldsymbol{x}\in S$ 时取值，否则取 0。因此，对于任意 $\boldsymbol{x}\in V_q(B,\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{x}\in M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right) = V_q(B,\boldsymbol{b}) - \bigcup_{j=1}^m H_{j\,q}^{(B,\boldsymbol{b})}$,当且仅当

$$\prod_{j=1}^m \left(1_{V_q(B,\boldsymbol{b})} - 1_{H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})}}\right)(\boldsymbol{x}) = 1.$$

注意到 $1_{V_q(B,\ \boldsymbol{b})}\cdot 1_{H_j^{(B,\boldsymbol{b})},\ q} = 1_{H_{j\,q}^{(B,\boldsymbol{b})}}$，以及 $1_{H_i^{(B,\boldsymbol{b})},\ q}\cdot 1_{H_j^{(B,\boldsymbol{b})},\ q} = 1_{H_i^{(B,\boldsymbol{b})},\ q\ \cap H_{j\,q}^{(B,\boldsymbol{b})},\ q}$。由此可得

$$\begin{aligned}
\#M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right) &= \sum_{\boldsymbol{x}\in V_q(B,\boldsymbol{b})}\prod_{j=1}^m \left(1_{V_q(B,\boldsymbol{b})} - 1_{H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})}}\right)(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{x}\in V_q(B,\boldsymbol{b})}\sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{\#J} 1_{\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})}}(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{\#J} \sum_{\boldsymbol{x}\in V_q(B,\boldsymbol{b})} 1_{\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})}}(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{\#J} \#\Big(\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})}\Big).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

进一步注意到 $\bigcap_{j\in J} H_{j\,q}^{(B,\boldsymbol{b})}$，是 $\mathbb{Z}_q^n$中的方程组 $[C_J]_q\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{c}_J]_q$的解集。根据引理 2.3，我们有

$$\#\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})} = \begin{cases} q^{n-r(J)}\prod_{j=1}^{r(J)}\gcd(q,d_{J,j}), & \text{if } [\boldsymbol{c}_J]_q \in \mathrm{Col}_q\left([C_J]_q\right); \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.5}$$

应用 引理 2.1 于 (2.5)，可推得

$$\#\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})} = q^{n-r(J)}\tilde{d}_J(q). \tag{2.6}$$

I由此可知，方程 (2.4) 和 (2.6) 直接推出定理 2.2）中的结论 定理 2.4 .

接下来，我们证明定理 2.4 的第二部分。假设 $q > q_0$。若 $J\subseteq[m]$ with $\bar{r}(J) = r(J)+1$，则 $d_{J,\bar{r}(J)} = 0$and $0 <$最大公约数$(q,d_{J,\bar{r}(J)}) \le d_J$, $_{\bar{r}(J)} < q$，因为 $q > q_0 \ge d_{J,\bar{r}(J)}$。 ˜因此，最大公约数$(q,d_{J,\bar{r}(J)}) = q >$最大公约数$(q,d_{J,\bar{r}(J)})$。因此，在这种情况下， $d_J(q) = 0$。由此可将 (2.2) 简化为以下形式

$$\#M\left(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\right) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J}\tilde{d}_J(q)q^{n-r(J)}. \tag{2.7}$$

现在考虑 $J \subseteq [m]$ with $\bar{r}(J)$ r J) $d_{Jj} \mid d_{Jr(J)} \mid \rho_C$ $j = 1 \ldots r$ J $\rho_C =$ $r(J)$ $=$ $q + \rho_C$ d_{Jj} $=$ q d_{Jj} $=$ (J) 的情形。由于最小公倍数$(d_J, : J \subseteq [m], \bar{r}(J)$ ( ) and , , for all , , ( ), 我们有最大公约数(, ,) 最大公约数(, ,)。此外, , 根据定理 2.2 有 $d_{J,\bar{r}(J)} \mid d_{J,r(J)} \mid \rho_C$，因此, 像之前一样推理可得，对于所有 $j = 1, \ldots, r(J)$，最大公约数$(q + \rho_C, d_{J,j})$ =最大公约数$(q, d_{J,j})$。由此立即得到

$$\tilde{d}_J(q + \rho_C) = \tilde{d}_J(q), \quad \forall\, J \subseteq [m] \text{ with } \bar{r}(J) = r(J).$$

结合（2.7），我们得出计数函数 $\#M\big(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\big)$ 与准多项式 $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$ 一致，其中 ρ_C 是对所有整数 $q > q_0$而言的一个周期。 □

值得注意的是，定理 2.4 重现并推广了 [7,16,18]中关于整数配置的特征准多项式的早期结果。更具体地说，取 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$和 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$，定理 2.4 就特化为 [7, 定理 11]中给出的中心情形。当我们将情形限制为 $l = 0$时，定理 2.4 就化为 [18, 定理 31]。此外，若 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$，则它恰好成为 [16,定理 24]。

与 [18]，一样，我们将准周期 ρ_C 称为**最小公倍数周期**，并将准多项式 $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$ 称为**特征拟多项式**。在此背景下，我们可以将 $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$ 分解为与 ρ_C 的剩余类相对应的多项式函数。也就是说，对每个 $j = 1, \ldots, \rho_C$，都存在唯一的多项式 $f_j\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ 使得

$$f_j\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) \quad \text{for } q \equiv j \pmod{\rho_C}.$$

在下一个结果中，我们考察多项式 f_1、f_2、……、f_{ρ_C}之间的关系，将 [7, 定理 2.3]推广到非中心情形。

定理 2.5。采用上述记号，有以下结果成立：

(1) 多项式 $f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ *with* $a = 1, \ldots, \rho_C$, 可以写成如下形式

$$f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(a) t^{n-r(J)}.$$

(2) 对于任意整数 $1 \le a, b \le \rho_C$，若 最大公约数(a, ρ_C) =最大公约数(b, ρ_C)，则

$$f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big) = f_b\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big).$$

换言之，特征拟多项式 $\chi^{quasi}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$ 具有最大公约数性质。

(3) 对于任意整数 $q > q_0$和 $1 \le a \le \rho_C$，若 最大公约数$(q, \rho_C) = a$，则

$$\chi^{quasi}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big).$$

证明。（1）对于每个满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 且 $1 \le j \le r(J)$ 的子集 $J \subseteq [m]$，有 $0 < d_{J,j} \mid d_{J,r(J)} \mid \rho_C$。若 $q \equiv a$（模 ρ_C），则对于任意 $1 \le j \le r(J)$，$q \equiv a$（模 $d_{J,j}$）。由带余除法，我们可推出 gcd$(q, d_{J,j})$ =gcd$(a, d_{J,j})$。这意味着，当 $q \equiv a$（模 ρ_C）且 $\bar{r}(J) = r(J)$ 时，$d_J(q) = d_J(a)$。由（2.3），我们有

$$f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(a) q^{n-r(J)}.$$

上述等式对于无穷多个满足 $q' \equiv a$ （模 ρ_C）的 $q' > q_0$ 都成立。根据代数基本定理，若两个多项式在无穷多个值处相等，则它们必定恒等。因此，我们得出 $f_a(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t) = \sum_{J:\ J\subseteq[m],\ \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(a) t^{n-r(J)}$。

(2) 注意到 $\gcd(q, d_{J,j}) = \gcd\big(\gcd(q, \rho_C)\, d_{J,j}\big)$，因为 $d_{J,j} \mid \rho_C$。这意味着，当 $\bar{r}(J) = r(J)$ 时，$\tilde{d}_J(q) = \tilde{d}_J\big(\gcd(q, \rho_C)\big)$。结合 $\gcd(a, \rho_C) = \gcd(b, \rho_C)$，可推出当 $\bar{r}(J) = r(J)$ 时，$\tilde{d}_J(a) = \tilde{d}_J(b)$。结合第 (1) 部分，$f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big) = f_b\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ 成立。

(3) 若 $\gcd(q, \rho_C) = a$，则 $\gcd(q, \rho_C) = \gcd(a, \rho_C) = a$。如第 (2) 部分的证明所示，当 $\bar{r}(J) = r(J)$ 时，我们有 $\tilde{d}_J(q) = \tilde{d}_J(a)$。因此，$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$。 □

回顾第1节，子空间排列 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})} = \big\{H_1^{(B,\boldsymbol{b})}, \ldots, H_m^{(B,\boldsymbol{b})}\big\}$ 定义在解空间 $V(B, \boldsymbol{b}) = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\big\}$中。当 $\operatorname{rank}(B) \neq \operatorname{rank}(B, \boldsymbol{b})$ $V(B, \boldsymbol{b}) = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\big\}$ 为空。因此，特征多项式$\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ 是零多项式。在此背景下，显然

$$\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = f_j\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = 0$$

对所有整数 $q > q_0$和 $j = 1, \ldots, \rho_C$。当 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(B, \boldsymbol{b})$ 时，解空间$V(B, \boldsymbol{b})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空仿射子空间。于是，截断排列 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 的特征多项式可写成如下形式

$$\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J} t^{n-r(J)}.$$

假设 $q > q_0$ 是与 ρ_C 互素的正整数，即 $\gcd(q, \rho_C) = 1$。由于 $d_{J,\,j} \mid \rho_C$，我们得到：对于所有满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 且 $1 \le j \le r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，$\gcd(q, d_{J,j}) = 1$。根据交错 ¯ ˜整除定理（定理 2.2），我们有 $d_{J,\,j} \mid d_{J,\,j} \mid \rho_C$。因此，对于所有满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 且 $1 \le j \le r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，$\gcd(q, d_{J,j}) = 1$。于是，当 $\gcd(q, \rho_C) = 1$ 时，对于所有满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，$d_J(q) = 1$。将其代入（2.3），可得

$$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J} q^{n-r(J)} = \chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big).$$

这意味着，特征多项式 $\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ 可以通过计算 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}$的补集中的点数来求得，其中对所有与常数 $q > q_0$ 互素的整数ρ_C，该常数仅取决于 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$。这将 Athanasiadis 的结果 [2, 定理 2.1] 推广到了截断排列。根据 定理 2.5，我们进一步推得 $\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big) = f_1\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$。本节最后总结上述结果如下。

推论 2.6。 若 最大公约数$(q, \rho_C) = 1$，其中 $q > q_0$ 为整数，则

$$\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \chi^{quasi}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big).$$

此外，我们有

$$\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big) = f_1\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big).$$

3 一致比较

本节建立三种统一的比较：特征拟多项式的无符号系数（见 定理 3.6）；特征拟多项式中不同构成多项式的无符号系数（见 定理 3.7）；以及计数函数（见 定理 3.12）。

3.1 系数的比较

在本小节中，我们重点关注这几种比较中的前两种。本节中，我们始终假设 $r = r(\emptyset) =$ 秩(B) 且 $s = r([m]) =$ 秩 $\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$。由 定理 2.4 中的 (2.3，对于所有整数 $q > q_0$， $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$ 可写成如下形式

$$\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \sum_{j=r}^{s} (-1)^{j-r} \beta_j(q) q^{n-j}, \tag{3.1}$$

其中每个系数 $\beta_j(q)$ 都是一个周期函数，由下式给出

$$\beta_j(q) := (-1)^{j-r} \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)=j} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(q). \tag{3.2}$$

受 Chen 和 Wang 的工作启发， [7]，我们考察系数的算术性质 $\beta_j(q)$，其中 $\chi^{\mathrm{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big)$。为此，需要以下引理。

引理 3.1。设 $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ 是一个幺模矩阵， $A^* = AU$ 且 $B^* = BU$。令 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(A^*, \boldsymbol{a})$ 表示由矩阵 $[A^*, \boldsymbol{a}]$定义的整排列，且 $\mathcal{A}^{*(B^*,\boldsymbol{b})}$ 是由矩阵 $[B^*, \boldsymbol{b}]$对 $\mathcal{A}^*$ 进行截断所得。则对所有 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$，有

$$\#M\big(\mathcal{A}^{*(B^*,\boldsymbol{b})}, q\big) = \#M\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big).$$

证明。与（2.4）一样，我们有

$$\#M\big(\mathcal{A}^{*(B^*,\boldsymbol{b})}, q\big) = \sum_{J\subseteq[m]} (-1)^{\#J} \#\Big(\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B^*,\boldsymbol{b})}\Big).$$

比较此式与（2.4），只需证明

$$\#\Big(\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B^*,\boldsymbol{b})}\Big) = \#\Big(\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})}\Big) \text{ for all } J \subseteq [m].$$

注意到 $\bigcap_{j\in J} H_{j\,q}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 是 $[C_J]_q \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{c}_J]_q$ 的解集。因此，不失一般性，我们只考虑 $J = \emptyset$ 的情形。证明归结为验证

$$\#V_q(B^*, \boldsymbol{b}) = \#V_q(B, \boldsymbol{b}).$$

注意到 $[B, \boldsymbol{b}] \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = [BU, \boldsymbol{b}] = [B^*, \boldsymbol{b}]$，且矩阵 U 和 $\begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ 均为单模矩阵。这意味着矩阵 B 和 B^* 具有相同的不变因子，增广矩阵 $[B, \boldsymbol{b}]$ 和 $[B^*, \boldsymbol{b}]$ 也具有相同的不变因子。根据引理 2.1，我们进一步推出， $[\boldsymbol{b}]_q \in$ 的列空间 $\mathrm{Col}_q(B)$ 当且仅当 $[\boldsymbol{b}]_q \in$ 的列空间 $\mathrm{Col}_q(B^*)$。结合引理 2.3，可得 $\#V_q(B^*, \boldsymbol{b}) = \#V_q(B, \boldsymbol{b})$。证明至此完成。

□

此外，我们继续选取一个幺模矩阵 $U \in GL_n(\mathbb{Z})$，使得

$$\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} B^* \\ A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^\star & \mathbf{0} \\ A^\star & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

其中 $\begin{bmatrix} B^\star \\ A^\star \end{bmatrix}$ 是一个秩为 s 的 $(l+m) \times s$ 整数矩阵。矩阵 $[A^\star, \boldsymbol{a}]$ 决定了 $\mathbb{R}^s$ 中的一个超平面排列 $\mathcal{A}^\star = \mathcal{A}(A^\star, \boldsymbol{a})$。类似地，我们用 $\mathcal{A}^{\star(B^\star,\boldsymbol{b})}$ 表示由矩阵 $[B^\star, \boldsymbol{b}]$ 对 $\mathcal{A}^\star$ 进行的截断。相应地，我们有以下关系：

$$V_q(B^*, \boldsymbol{b}) = V_q(B^\star, \boldsymbol{b}) \times \mathbb{Z}_q^{n-s}, \quad H_{i,q}^* = H_{i,q}^\star \times \mathbb{Z}_q^{n-s}, \quad H_{i,q}^{*(B^*,\boldsymbol{b})} = H_{i,q}^{\star(B^\star,\boldsymbol{b})} \times \mathbb{Z}_q^{n-s}.$$

立即可得

$$V_q(B^*, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{i=1}^{m} H_{i,q}^{*(B^*,\boldsymbol{b})} = \Big(V_q(B^\star, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{i=1}^{m} H_{i,q}^{\star(B^\star,\boldsymbol{b})}\Big) \times \mathbb{Z}_q^{n-s}.$$

由引理 3.1 可知，对于所有整数 $q > q_0$，

$$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{*(B^*,\boldsymbol{b})}, q\big) = \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{\star(B^\star,\boldsymbol{b})}, q\big) q^{n-s}.$$

当 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = s$ 时，我们立即得到

$$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \beta_s(q) q^{n-s} \quad \text{for all } q > q_0,$$

其中

$$\beta_s(q) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)=s} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(q) = \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{\star(B^\star,\boldsymbol{b})}, q\big). \tag{3.3}$$

在特殊情形下，我们得到以下关键引理。

引理 3.2。 设$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = s$。则 $\chi^{quasi}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \beta_s(q) q^{n-s}$ 对所有整数$q > q_0$均成立。此外，若整数 $a, b > q_0$ 满足 $a \mid b$ 且 $[\boldsymbol{b}]_b \in$ 列空间$_b(B)$，则 $0 \le \beta_s(a) \le \beta_s(b)$。

证明。 剩下的工作是验证第二部分。由（3.3），不失一般性，不妨设 $s = n$。因此，只需证明

$$\beta_n(a) = \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, a\big) \le \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, b\big) = \beta_n(b).$$

由于 $a \mid b$，我们将 $b = ac$ 写作一个正整数 c。结合 $[\boldsymbol{b}]_b \in$ 列空间$_b(B)$，由引理 2.1可得$[\boldsymbol{b}]_a \in$ 列空间$_a(B)$。于是存在某个 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{Z}^n$ 使得 $[B]_b[\boldsymbol{x}_0]_b = [\boldsymbol{b}]_b$。显然， $[\boldsymbol{x}_0]_a$ 也是 $[B]_a\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{b}]_a$的一个解。现在考虑由矩阵 $[A, \boldsymbol{a} - A\boldsymbol{x}_0]$ 及其截断 $\mathcal{A}^{0(B,\boldsymbol{b}-B\boldsymbol{x}_0)}$ 所诱导的新排列$\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}(A, \boldsymbol{a} - A\boldsymbol{x}_0)$，其中截断由矩阵 $[B, \boldsymbol{b} - B\boldsymbol{x}_0]$诱导。容易验证，对于 $q = a$, b, 下述映射

$$\varphi_q : V_q(B, \boldsymbol{b}) \to V_q(B, \boldsymbol{b} - B\boldsymbol{x}_0), \quad [\boldsymbol{x}]_q \mapsto \varphi_q\big([\boldsymbol{x}]_q\big) = [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0]_q$$

是一个双射。此外，很容易看出，对于 $q = a$, b,

$$\varphi_q\big(M(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})})\big) = M\big(\mathcal{A}_q^{0(B,\boldsymbol{b}-B\boldsymbol{x}_0)}\big).$$

注意，对于 $[\boldsymbol{b} - B\boldsymbol{x}_0]_q = [\boldsymbol{0}]_q$ $q = a$, b。因此，不失一般性，我们可以假设 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$。因此，证明可进一步归结为证明

$$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}, a\big) \le \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}, b\big).$$

注意到这样一个事实：对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$，若 $B\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{0}$（模 a），则 $B(c\boldsymbol{x}) \equiv \mathbf{0}$（模 b），因为 $b = ac$。自然地，我们考虑以下映射

$$\phi : V_a(B, \mathbf{0}) \to V_b(B, \mathbf{0}), \quad [\boldsymbol{x}]_a \mapsto \phi\big([\boldsymbol{x}]_a\big) = [c\boldsymbol{x}]_b.$$

现在我们通过反证法验证 ϕ 是单射。假设在 $V_a(B,\mathbf{0})$ 中存在两个不同的元素 $[\boldsymbol{x}]_a$ 和 $[\boldsymbol{y}]_a$，使得 $\phi\big([\boldsymbol{x}]_a\big) = \phi\big([\boldsymbol{y}]_a\big)$，即 $[c\boldsymbol{x}]_b = [c\boldsymbol{y}]_b$。那么，$c(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = b\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n$。代入 $b = ac$，可得 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = a\boldsymbol{z}$。因此，$[\boldsymbol{x}]_a = [\boldsymbol{y}]_a$，这与我们关于 $[\boldsymbol{x}]_a \neq [\boldsymbol{y}]_a$的初始假设相矛盾。因此，$\phi$ 是一个单射。

接下来，我们进一步证明，单射映射 ϕ 诱导出一个从 $M\big(\mathcal{A}_a^{(B,\mathbf{0})}\big)$到 $M\big(\mathcal{A}_b^{(B,\mathbf{0})}\big)$的单射。还需证明，只要 $[\boldsymbol{x}]_a \in V_a(B, \mathbf{0}) - \bigcup_{i=1}^m H_{i\,a}^{(B,\mathbf{0})}$，就有 $\phi\big([\boldsymbol{x}]_a\big) \in V_b(B, \mathbf{0}) - \bigcup_{i=1}^m H_{i\,b}^{(B,\mathbf{0})}$。反设存在一个元素 $[\boldsymbol{x}]_a \in V_a(B, \mathbf{0}) - \bigcup_{i=1}^m H_{i\,a}^{(B,\mathbf{0})}$，使得 $\phi\big([\boldsymbol{x}]_a\big) = [c\boldsymbol{x}]_b \in H_{i\,b}^{(B,\mathbf{0})}$，其中某个 $i \in [m]$满足 H_i： $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{x} = a_i$是 $\mathcal{A}$中相应的超平面。我们分两种情况讨论： $a_i \equiv 0$（模 b）和 $a_i \not\equiv 0$（模 b）。对于前一种情况，通过 $[c\boldsymbol{x}]_b \in H_{i\,b}^{(B,\mathbf{0})}$， $\boldsymbol{\alpha}_i^T(c\boldsymbol{x}) = b\boldsymbol{z} = ac\boldsymbol{z}$ 对某个 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}$ 成立，这意味着 $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{z}$。因此，$[\boldsymbol{x}]_a \in H_{i\,a}^{(B,\mathbf{0})}$，矛盾。对于后一种情况， $a_i \not\equiv 0$（模 b）意味着

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ c\boldsymbol{\alpha}_i^T & a_i \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(B) + 1 = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B \\ c\boldsymbol{\alpha}_i^T \end{bmatrix} + 1 = n + 1.$$

这意味着$d_{\{i\},\ n+1} \neq 0$，但$d_{\{i\},\ n+1} = 0$。由于$b > q_0 \geq d_{\{i\},\ n+1}$，这进一步表明$\begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ c\boldsymbol{\alpha}_i^T & a_i \end{bmatrix}_b$ 有 $n+1$个不变因子，而 $\begin{bmatrix} B \\ c\boldsymbol{\alpha}_i^T \end{bmatrix}_b$只有 n个不变因子。由引理 2.1 可知， $\begin{bmatrix} B \\ c\boldsymbol{\alpha}_i^T \end{bmatrix}_b \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ a_i \end{bmatrix}_b$ 无解。这与假设$[c\boldsymbol{x}]_b \in H_{i\,b}^{(B,\mathbf{0})}$，矛盾。总之，$\phi$ 确实诱导出一个从 $M(\mathcal{A}_a^{(B,\mathbf{0})})$到 $M(\mathcal{A}_b^{(B,\mathbf{0})})$的单射。于是，我们得到 $\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\mathbf{0})},\ a\big) \leq \chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\mathbf{0})},\ b\big)$。证明完毕。 □

回顾一下，整排列 $\mathcal{A}$ 由矩阵 $[A, \boldsymbol{a}]$定义。设 H 是 $\mathcal{A}$ 的一个超平面，其定义方程为 $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{x} = a_i$，其中（$\boldsymbol{\alpha}_i^T$， a_i）是 $\mathcal{A}$的定义矩阵 $[A, \boldsymbol{a}]$ 中的一个行向量。令 $[A', \boldsymbol{a}']$ 表示删除 $[A, \boldsymbol{a}]$ 中的行（$\boldsymbol{\alpha}_i^T$， a_i）后得到的矩阵，并令 $[B', \boldsymbol{b}']$ 表示将行（$\boldsymbol{\alpha}_i^T$， a_i）添加到 $[B, \boldsymbol{b}]$底部后得到的矩阵。那么， $[A', \boldsymbol{\alpha}']$ 就是整排列 $\mathcal{A}' := \mathcal{A} - \{H\}$的定义矩阵。排列 $\mathcal{A}'$通过矩阵 $[B, \boldsymbol{b}]$ 和 $[B', \boldsymbol{b}']$ 截断，分别形成截断排列 $\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})}$ 和 $\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')}$。我们注意到特征拟多项式满足以下删除-限制递推关系。

命题 3.3 (删除-限制公式**)**。 对于所有整数 $q > q_0$，使用上述记号，我们有

$$\chi^{quasi}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \chi^{quasi}\big(\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) - \chi^{quasi}\big(\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')}, q\big).$$

证明。在不失一般性的情况下，我们假设 $H = H_1$。我们首先证明， $\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})}$ 的补集可以分解为 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 的补集与 $\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')}$ 的补集的不交并。注意到， $\boldsymbol{x} \in M\big(\mathcal{A}_q'^{(B,\boldsymbol{b})}\big)$ 等价于 $\boldsymbol{x} \in V_q$（B， $\boldsymbol{b}$）以及对所有 i =2，...，m 都有 $\boldsymbol{x} \notin H_{i,\ q}$。这又等价于以下两种情况之一： $\boldsymbol{x} \in V_q$（B， $\boldsymbol{b}$）且对所有 $i = 1$，2 ...，m 都有 $\boldsymbol{x} \notin H_{i,\ q}$；或者 $\boldsymbol{x} \in V_q$（B， $\boldsymbol{b}$）且对所有 $i = 2 \ldots$， m（除 $\boldsymbol{x} \in H_{1,\ q}$ 外）都有 $\boldsymbol{x} \notin H_{i,\ q}$。因此，我们有

$$\#M\big(\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = \#M\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) + \#M\big(\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')}, q\big).$$

由定理 2.4 可知，对于整数 $q > q_0$，$\#M\left(\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')}\, q\right)$ 以及 $\#M\left(\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})},\ q\right)$，它们分别可以由准多项式 $\chi^{\mathrm{quasi}}\left(\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')}q\right)$ 和 $\chi^{\mathrm{quasi}}\left(\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})},\ q\right)$ 统一描述，并且二者具有相同的公周期 ρ_C。这说明该结果成立。 □

为了方便且自然地陈述我们的结果，我们为所有正整数引入组合等价的概念。对于正整数 a 和 b，若它们关于 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$组合等价，记作 $a \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} b$，则称

$$\bigcap_{j\in J} H_{j,a}^{(B,\boldsymbol{b})} \neq \emptyset \iff \bigcap_{j\in J} H_{j,b}^{(B,\boldsymbol{b})} \neq \emptyset, \quad \forall\, J \subseteq [m] \text{ with } \bar{r}(J) = r(J).$$

显然，关系 $\overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}$是正整数上的等价关系。下一个引理指出，只要 $\gcd(a, \rho_C) = \gcd(b, \rho_C)$，正整数 a和 b就组合等价。这为正整数之间的组合等价关系及其与 ρ_C的最大公约数之间的联系搭建了桥梁，如命题 3.5所示。

引理 3.4。 设 $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$。若 $\gcd(a, \rho_C) = \gcd(b, \rho_C)$，则 $a \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} b$。

证明。 注意，对于任意整除 ρ_C 的正整数 d，都有 $\gcd(d, \rho_C) = d$。由 $\gcd(a, \rho_C) = \gcd(b, \rho_C)$，可得

$$\gcd(a, d) = \gcd\big(\gcd(a, \rho_C), d\big) = \gcd\big(\gcd(b, \rho_C), d\big) = \gcd(b, d).$$

因此，对于所有满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 和 $1 \le j \le r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，我们得到

$$\gcd(a, d_{J,j}) = \gcd(b, d_{J,j}) \quad \text{and} \quad \gcd(a, \bar{d}_{J,j}) = \gcd(b, \bar{d}_{J,j}).$$

由此引理 2.1 可知，对于任意这样的 J 和 $q = a,\ b$,

$$\bigcap_{j\in J} H_{j,q}^{(B,\boldsymbol{b})} \neq \emptyset \iff \gcd(q, d_{J,j}) = \gcd(q, \bar{d}_{J,j}) \text{ for all } 1 \le j \le r(J).$$

因此， a 和 b 关于 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$ 组合等价。 □

命题 3.5. 设 $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$。当且仅当 最大公约数$(a, \rho_C) \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}$最大公约数$(b, \rho_C)$。

证明。 由引理 3.4直接可得

$$a \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} \gcd(a, \rho_C) \quad \text{and} \quad b \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} \gcd(b, \rho_C).$$

由于 $\overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}$ 是等价关系，结论立即成立。 □

在汇集必要的概念和引理之后，我们现在陈述主要结果。下面的定理基于整除关系，对特征准多项式的无符号系数进行了统一比较。

定理 3.6. 对于任意整数 a、$b > q_0$，如果 最大公约数(a, ρ_C) | 最大公约数(b, ρ_C) 且 $a \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} b$，那么

$$0 \le \beta_j(a) \le \beta_j(b), \quad \forall\, r \le j \le s. \tag{3.4}$$

此外，当 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$时，对于所有 $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$，若 最大公约数(a, ρ_C) | 最大公约数(b, ρ_C)，则

$$0 \le \beta_j(a) \le \beta_j(b), \quad \forall\, r \le j \le s.$$

证明。 令 $c=$最大公约数(b,ρ_C)/最大公约数$(a,\rho_C)\in\mathbb{Z}_{>0}$, $a'=$最大公约数$(a,\rho_C)+q_0\rho_C$且 $b'=ca'$。于是

$$\gcd(a',\rho_C)=\gcd(a,\rho_C)\quad\text{and}\quad\gcd(b',\rho_C)=\gcd(b,\rho_C).$$

应用命题 3.5 于 $a\overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}b$，我们得到 $a'\overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}b'$。由定理 2.5，对于所有满足 $J\subseteq[m]$的 $\bar{r}(J)=r(J)$，都有

$$\tilde{d}_J(a')=\tilde{d}_J(a)\quad\text{and}\quad\tilde{d}_J(b')=\tilde{d}_J(b).$$

根据 $\beta_j(q)$ 在（3.2）中的定义，我们推得

$$\beta_j(a')=\beta_j(a)\quad\text{and}\quad\beta_j(b')=\beta_j(b)\quad\forall\ r\le j\le s.$$

因此，证明归结为说明：对于所有满足$b'=ca'$ 且满足 $a'\overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}b'$的 $r\le j\le s$， $0\le\beta_j(a')\le\beta_j(b')$。

现在我们对 m进行归纳。若 $m=0$，则 $s=r$。注意 $b'=ca'$。当$[\boldsymbol{b}]_{b'}\in$列空间 $_{b'}(B)$时，引理 3.2 直接推出 $0\le\beta_s(a')\le\beta_s(b')$。若 $[\boldsymbol{b}]_{b'}\notin$列空间$_{b'}(B)$，则根据引理 2.1，$V_{b'}(B,\boldsymbol{b})=\emptyset$。因此，由 $a'\overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}b'$可得 $V_{a'}(B,\boldsymbol{b})=\emptyset$。 consequently，在这种情况下， $\beta_s(a')=\beta_s(b')=0$。

当 $m\ge1$时，只需考虑两种情况： $r=s$ 和 $r<s$。对于前一种情况，结论可直接由引理 3.2得出。对于后一种情况，存在一行 $\boldsymbol{\alpha}_i^T$属于 A，且它与 B的所有行都线性无关。令 $(\boldsymbol{\alpha}_i^T,a_i)$ 为它在 $[A,\boldsymbol{a}]$中的对应行。令 $[A',\boldsymbol{a}']$表示从 $[A,\boldsymbol{a}]$ 中删除行 $(\boldsymbol{\alpha}_i^T,a_i)$ 后得到的矩阵，并令 $[B',\boldsymbol{b}']$ 表示将行 $[\boldsymbol{\alpha}_i^T,a_i]$ 添加到 $[B,\boldsymbol{b}]$底部后得到的矩阵。于是

$$\operatorname{rank}(B')=r+1,\quad\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B\\A'\end{bmatrix}\le s\quad\text{and}\quad\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B'\\A'\end{bmatrix}=s.$$

设 H 是 $\mathcal{A}$ 的一个超平面，其定义方程为 $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{x}=a_i$。那么，整数排列 $\mathcal{A}'=\mathcal{A}-\{H\}$ 的定义矩阵为 $[A',\boldsymbol{a}']$。命题 3.3中的删除-限制公式 意味着

$$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},q\big)=\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})},q\big)-\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')},q\big).$$

显然， $a'\overset{\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim}b'$ 和 $a'\overset{\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')}}{\sim}b'$。由于 $\mathcal{A}'$ 的超平面数少于 $\mathcal{A}$，归纳假设可得

$$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}'^{(B,\boldsymbol{b})},q\big)=\sum_{j=r}^{s}(-1)^{j-r}\beta'_j(q)q^{n-j}\quad\text{and}\quad\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}'^{(B',\boldsymbol{b}')},q\big)=\sum_{j=r+1}^{s}(-1)^{j-r-1}\beta''_j(q)q^{n-j}.$$

满足

$$0\le\beta'_j(a')\le\beta'_j(b')\quad\text{and}\quad0\le\beta''_j(a')\le\beta''_j(b').$$

由此可得

$$0\le\beta_j(a')=\beta'_j(a')+\beta''_j(a')\le\beta'_j(b')+\beta''_j(b')=\beta_j(b')$$

在这种情况下，对所有 $r\le j\le s$ 均成立。

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$时，显然 $q_0=0$ 且 a 关于 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}$ 任意 a， $b\in\mathbb{Z}_{>0}$。于是，结论可由（3.4）直接得出。 □

事实上，定理 3.6 证明中的第一段隐含地说明了以下性质：对于任意整数 a，$b > q_0$，如果最大公约数（a，ρ_C）|最大公约数（b，ρ_C），那么

$$a \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} b \iff [\boldsymbol{c}_J]_b \in \mathrm{Col}_b(C_J) \text{ whenever } [\boldsymbol{c}_J]_a \in \mathrm{Col}_a(C_J) \text{ for } J \subseteq [m]. \tag{3.5}$$

具体而言，令 a' 和 b' 为定理 3.6证明中所定义的对象。由于 $a' \mid b'$，由引理 2.1 可得 $\bigcap_{j\in J} H_j^{(B,\boldsymbol{b})}{}_{,\,a'} \neq \emptyset$ 当且仅当 $\bigcap_{j\in J} H_j^{(B,\boldsymbol{b})}{}_{,\,b'} \neq \emptyset$ 等价于 $[\boldsymbol{c}_J]_{a'} \in$ 列空间 $_{a'}(C_J)$，其中 $[\boldsymbol{c}_J]_{b'} \in$ 列空间 $_{b'}(C_J)$。此外，容易验证，对于任意满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，

$$[\boldsymbol{c}_J]_a \in \mathrm{Col}_a(C_J) \iff [\boldsymbol{c}_J]_{a'} \in \mathrm{Col}_{a'}(C_J) \quad \text{and} \quad [\boldsymbol{c}_J]_b \in \mathrm{Col}_b(C_J) \iff [\boldsymbol{c}_J]_{b'} \in \mathrm{Col}_{b'}(C_J).$$

因此，最大公约数($\emptyset$ $J \subseteq [m]$ $a\ \rho_C \mid b\ \rho_C$ $\bar{r}\ J = r\ J$ $\bigcap_{j\in J} H_{j\ a}^{(B,\boldsymbol{b})} \neq \emptyset$ 2 1 $\bigcap_{j\in J} H_{j\ b}^{(B,\boldsymbol{b})} \neq$,)

最大公约数 (,) 可推出 , 当 , 对于任意满足 ( ) ( ) 的对象，应用 引理 . 再次可得，(3.5) 中的等价关系成立。

此外，$[\boldsymbol{c}_J]_b \in$ 列空间 $_b(C_J)$ 当且仅当 $[\boldsymbol{c}_J]_a \in$ 列空间$_a(C_J)$ 对任意$J \subseteq [m]$满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 的条件是定理 3.6 中的必要条件。例如，设

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Then

$$V_q(B, \boldsymbol{b}) = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{Z}_q^2 : [2]_q x_1 = [0]_q\right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}(A, \boldsymbol{a}) = \{H : 2x_1 + 2x_2 = 3\}.$$

因此 $\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})} = \left\{H_q^{(B,\boldsymbol{b})} = H_q \cap V_q(B,\ \boldsymbol{b})\right\}$。显然，$\rho_C = 2$ 和 $q_0 = 2$。设整数$q > q_0 = 2$。则特征拟多项式 $\chi^{\mathrm{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},\ q\right)$ 为

$$\chi^{\mathrm{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\right) = \begin{cases} 2q, & \text{if } q \text{ is even;} \\ q-1, & \text{if } q \text{ is odd.} \end{cases}$$

现在考虑 $a = 3$ 和 $b = 6$。显然，最大公约数$(a,\ \rho_C)$ |最大公约数$(b,\ \rho_C)$，且 $H_3 \cap V_3(B,\ \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$，但$H_6 \cap V_6(B,\ \boldsymbol{b}) = \emptyset$。通过轮廓分析，我们得到

$$\beta_1(3) = 1 < 2 = \beta_1(6) \quad \text{and} \quad \beta_2(3) = 1 > 0 = \beta_2(6).$$

这意味着，当移除条件 3.4 时，定理 3.6 中的结论可能不再成立：当 $[\boldsymbol{c}_J]_b \in$列空间 $_b(C_J)$ 时，$[\boldsymbol{c}_J]_a \in$列空间 $_a(C_J)$ 对于 $J \subseteq [m]$成立。

回顾定理 2.5 第 (1) 部分可知，特征拟多项式 $f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right)$ $(a = 1, \ldots, \rho_C)$ 的每个构成多项式 $\chi^{\mathrm{quasi}}\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\right)$ 都具有以下形式

$$f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right) = \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(a) t^{n-r(J)}.$$

Let

$$\gamma_j(a) := (-1)^{j-r} \sum_{J:\, J\subseteq[m],\, \bar{r}(J)=r(J)=j} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(a). \tag{3.6}$$

那么多项式 $f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})},\ t\right)$ 还可以进一步写成以下形式

$$f_a\left(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\right) = \sum_{j=r}^{s} (-1)^{j-r} \gamma_j(a) t^{n-j}.$$

根据其第 (3) 部分 定理 2.5，对于任意整数 $q > q_0$，有最大公约数$(q,\ \rho_C)$ =最大公约数$(a,\ \rho_C)$，我们有 e

$$\chi^{\text{quasi}}\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big) = f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, q\big).$$

进一步比较 (3.2) 和 (3.6)，我们很容易观察到

$$\beta_j(q) = \gamma_j(a), \quad \forall\, r \le j \le s. \tag{3.7}$$

因此，基于定理 3.6，我们得出不同构成多项式 $\gamma_j(a)$ 的无符号系数之间的统一比较关系 $f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$.

定理 3.7。对于任意整数 $1 \le a, b \le \rho_C$，若 最大公约数(a, ρ_C) |最大公约数(b, ρ_C) 且 最大公约数(a, ρ_C) $\overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b}}}{\sim}$最大公约数$(b, \rho_C)$，则

$$0 \le \gamma_j(a) \le \gamma_j(b), \quad \forall\, r \le j \le s.$$

此外，当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时，对于任意整数 $1 \le a, b \le \rho_C$，若 最大公约数(a, ρ_C) |最大公约数(b, ρ_C)，则

$$0 \le \gamma_j(a) \le \gamma_j(b), \quad \forall\, r \le j \le s.$$

证明。 设 $c =$最大公约数(b, ρ_C)/最大公约数$(a, \rho_C) \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a' =$最大公约数$(a, \rho_C) + q_0\rho_C > q_0$且 $b' = ca' > q_0$。如定理 3.6 证明的第一段所证，我们有

$$\gcd(a', \rho_C) = \gcd(a, \rho_C) \mid \gcd(b, \rho_C) = \gcd(b', \rho_C) \quad \text{and} \quad a' \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} b'.$$

由（3.7），立即可得

$$\beta_j(a') = \gamma_j(a) \quad \text{and} \quad \beta_j(b') = \gamma_j(b).$$

应用 定理 3.6，我们得出 $0 \le \gamma_j(a) \le \gamma_j(b)$，对所有 $r \le j \le s$均成立。用同样的推理可知，结论在中心情形下也成立。 □

此外，若 $H_1^{(B,\boldsymbol{b})}, \ldots, H_m^{(B,\boldsymbol{b})}$是 $V(B, \boldsymbol{b})$ 的余维一子空间，著名的破圈定理（如 [24,第435]页所述）断言，特征多项式 $\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ 可表示为

$$\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big) = \sum_{j=r}^{s} (-1)^{j-r} w_j\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}\big) t^{n-j}$$

其中，$w_j\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}\big) > 0$ 表示不包含任何破圈的 j子集的数量。

下面的推论首先对特征多项式 $\chi\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ 的系数与多项式 $f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$的系数给出一致比较。这进一步表明，在适当条件下，$f_a\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}, t\big)$ 的所有系数均非零且符号交替。

推论 3.8。 设 $V(B, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$，且 $H_1^{(B,\boldsymbol{b})}$、……、$H_m^{(B,\boldsymbol{b})}$ 是 $V(B, \boldsymbol{b})$ 的余维一子空间。对于任意整数 $q > q_0$ 和 $1 \le a \le \rho_C$，如果 $\gcd(q, \rho_C)$ =$\gcd(a, \rho_C)$，并且对于所有满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，都有 $[\boldsymbol{c}_J]_q \in$列空间 $_q(C_J)$，则

$$0 < w_j\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}\big) = \gamma_j(1) \le \gamma_j(a) = \beta_j(q), \quad \forall\, r \le j \le s.$$

此外，当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$和 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$时，对于任意整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$和 $1 \le a \le \rho_C$，若 $\gcd(q, \rho_C)$ =$\gcd(a, \rho_C)$，则

$$0 < w_j\big(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}\big) = \gamma_j(1) \le \gamma_j(a) = \beta_j(q), \quad \forall\, r \le j \le s.$$

证明。注意到 $w_j(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}) = \gamma_j(1)$ 根据 推论 2.6 以及 $\gamma_j(a) = \beta_j(q)$ 由（3.7）可得。证明归结为证明 $\gamma_j(1) \le \gamma_j(a)$ 。考虑 $b = 1 + q_0\rho_C > q_0$。于是我们有

$$\gcd(b, \rho_C) = \gcd(1, \rho_C) = 1 \mid \gcd(a, \rho_C) = \gcd(q, \rho_C).$$

此外，前面对推论 2.6 的讨论表明，当 $\gcd(b, \rho_C) = 1$ 时，对于所有满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，都有 $[\boldsymbol{c}_J]_b \in$ 列空间 $_b(C_J)$。再结合对每个满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，都有 $[\boldsymbol{c}_J]_q \in$ 列空间 $_q(C_J)$，由引理 3.4 和 (3.5) 可得

$$1 \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} b \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} q \overset{\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}}{\sim} a.$$

应用定理 3.7，可得 $\gamma_j(1) \le \gamma_j(a)$。同样的推理也可得出中心情形下的结论。证明至此完成。

□

当 $l = 0$时，有 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{b})}$。在此情形下，(3.1) 给出了特征拟多项式 $\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}, q)$ 的表达式：

$$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}, q) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \beta_j(q) q^{n-j},$$

其中 s 是 $[A, \boldsymbol{a}]$的秩。作为 (3.7)、定理 3.7 和推论 3.8的直接推论，多项式 $f_a(\mathcal{A}, t)$的系数非零，且当 a 相对于 $\mathcal{A}$ 组合等价于 1 时，其符号交替；并且其无符号系数不小于特征多项式 $\chi(\mathcal{A}, t)$ 的系数。

推论 *3.9.* 对任意整数 $q > q_0$和 $1 \le a, b \le \rho_C$，若 $\gcd(a, \rho_C) \mid \gcd(b, \rho_C) = \gcd(q, \rho_C)$，且 $\gcd(a, \rho_C) \overset{\mathcal{A}}{\sim} \gcd(b, \rho_C)$，并且对于所有满足 $\bar{r}(J) = r(J)$ 的 $J \subseteq [m]$，$[\boldsymbol{a}_J]_q \in Col_q(A_J)$，则

$$0 < w_j(\mathcal{A}) = \gamma_j(1) \le \gamma_j(a) \le \gamma_j(b) = \beta_j(q), \quad \forall\, 0 \le j \le s.$$

此外，当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时，对于任意整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$和 $1 \le a, b \le \rho_C$，若 最大公约数$(a, \rho_C) \mid$最大公约数$(b, \rho_C) =$最大公约数(q, ρ_C)，则

$$0 < w_j(\mathcal{A}) = \gamma_j(1) \le \gamma_j(a) \le \gamma_j(b) = \beta_j(q), \quad \forall\, 0 \le j \le s.$$

如前所述，研究动机源于 Chen 和 Wang 的工作 [7]。在本节末尾，我们将阐明我们的结果与他们的结果之间的联系。值得指出的是，只要正整数 a 整除 b，整除关系 $\gcd(a, \rho_C) \mid \gcd(b, \rho_C)$ 就自动成立。在中心情形下：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，显然 $q_0 = 0$ 和正整数 a 和 b 关于 $\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}$ 是组合等价的。因此，作为一个特例，我们可以通过定理 3.6、推论 3.8 和推论 3.9 得到 Chen 和 Wang 关于中心情形的主要结果。然而，即使在 $a \nmid b$ 的情况下，$\gcd(a, \rho_C) \mid \gcd(b, \rho_C)$ 仍可能成立。因此，我们的工作不仅将 Chen 和 Wang 的结果推广到了非中心情形，还将他们原有的假设弱化为一个严格更一般的假设。

定理 3.10 ([7], 定理 1.2 和推论 1.3)。当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$时，以下结果成立：

(1) 对于所有满足 $a \mid b$ 的 $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$，$0 \le \beta_j(a) \le \beta_j(b)$ 对每个 $r \le j \le s$ 都成立。

(2) 如果 $H_1^{(B,\boldsymbol{0})}, \ldots, H_m^{(B,\boldsymbol{0})}$ 是 $V(B, \boldsymbol{0})$ 的余维一子空间，那么 $0 < w_j(\mathcal{A}^{(B,\boldsymbol{0})}) \le \beta_j(q)$ 对所有整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $r \le j \le s$ 都成立。

(3) 如果 $l = 0$，那么对于所有整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $0 \le j \le$，$0 < w_j(\mathcal{A}) \le \beta_j(q)$ s.

3.2 计数函数的比较

在本小节中，我们将注意力集中于 $M\big(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\big)$ 对于 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的基数之间的相互关系。为此，对于任意 $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们首先考虑由下式定义的映射

$$\pi_q : \mathbb{Z}_{pq}^n \to \mathbb{Z}_q^n, \quad [\boldsymbol{x}]_{pq} \mapsto \pi_q\big([\boldsymbol{x}]_{pq}\big) = [\boldsymbol{x}]_q \quad \text{where} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n.$$

对于任意 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{Z}^n$，若 $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}_2 \pmod{pq}$，则必有 $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}_2 \pmod{q}$。因此，$\pi_q$是良定义的。此外，以下包含关系成立：对于任意 $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ 和 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^m$，$V_{pq}(M, \boldsymbol{c})$ 在限制映射 $\pi_q|_{V_{pq}(M,\boldsymbol{c})}$ 下的像包含于 $V_q(M, \boldsymbol{c})$，即

$$\pi_q\big(V_{pq}(M, \boldsymbol{c})\big) \subseteq V_q(M, \boldsymbol{c}).$$

然而，对于一般的 $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$，限制 $\pi_q|_{V_{pq}(M,\boldsymbol{c})}$ 不一定是满射。随后，我们给出限制 $\pi_q|_{V_{pq}(M,\boldsymbol{c})}$ 为满射的充要条件。

引理 3.11. 设 $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$、$\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^m$ 和 $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $[\boldsymbol{c}]_{pq} \in \mathrm{Col}_{pq}(M)$。将 π_q 限制在 $V_{pq}(M, \boldsymbol{c})$ 上，得到从 $V_{pq}(M, \boldsymbol{c})$ 到 $V_q(M, \boldsymbol{c})$ 的满射，当且仅当对所有 $1 \le i \le r$，$\gcd(p, d_i)\gcd(q, d_i) \mid d_i$，其中 $d_1 \mid \cdots \mid d_r$ 表示 M 的不变因子。

证明。 由于 $[\boldsymbol{c}]_{pq} \in$列空间 $_{pq}(M)$，存在某个 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{Z}^n$使得 $[M]_{pq}[\boldsymbol{x}_0]_{pq} = [\boldsymbol{c}]_{pq}$。因此，$[M]_q[\boldsymbol{x}_0]_q = [\boldsymbol{c}]_q$ 也成立。现在我们引入与 $\boldsymbol{x}_0$ 相关的两个平移映射如下：

$$\varphi_a : \mathbb{Z}_a^n \to \mathbb{Z}_a^n, \quad [\boldsymbol{x}]_a \mapsto \varphi_a\big([\boldsymbol{x}]_a\big) = [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0]_a, \quad \text{for } a = pq, q.$$

显然，映射 φ_{pq} 和 φ_q 均定义良好。此外，以下交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} V_{pq}(M, \boldsymbol{c}) & \xrightarrow{\pi_q} & V_q(M, \boldsymbol{c}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{pq}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_q} \\ V_{pq}(M, \boldsymbol{0}) & \xrightarrow{\pi_q} & V_q(M, \boldsymbol{0}) \end{array}.$$

注意，对每个 $a = pq, q$，φ_a在 $V_a(M, \boldsymbol{c})$ 上的限制在 $V_a(M, \boldsymbol{c})$ 与 $V_a(M, \boldsymbol{0})$ 之间诱导出一个双射。于是，限制 $\pi_q|_{V_{pq}(M,\boldsymbol{c})} : V_{pq}(M, \boldsymbol{c}) \to V_q(M, \boldsymbol{c})$ 是满射，当且仅当限制 $\pi_q|_{V_{pq}(M,\boldsymbol{0})} : V_{pq}(M, \boldsymbol{0}) \to V_q(M, \boldsymbol{0})$ 是满射。因此，不失一般性，我们可以假设 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$。

现在我们转向特殊情形 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 下的证明。根据初等因子理论，存在幺模矩阵 $P \in GL_m(\mathbb{Z})$ 和 $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$，使得

$$PMQ = D = \mathrm{diag}(d_1 \ldots, d_r, 0, \ldots, 0).$$

由此可得，对于 $a = pq, q$，$V_a(M, \boldsymbol{0}) = V_a(PM, \boldsymbol{0})$。由于 Q 是一个可逆矩阵，以下群同态

$$\phi_a : V_a(M, \boldsymbol{0}) = V_a(PM, \boldsymbol{0}) \to V_a(D, \boldsymbol{0}), \quad \boldsymbol{x} \mapsto Q^{-1}\boldsymbol{x}, \quad \text{for } a = pq, q$$

是双射。因此，下面的交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} V_{pq}(M, \boldsymbol{0}) & \xrightarrow{\pi_q} & V_q(M, \boldsymbol{0}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \phi_{pq}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_q} \\ V_{pq}(D, \boldsymbol{0}) & \xrightarrow{\pi_q} & V_q(D, \boldsymbol{0}) \end{array}.$$

这意味着，限制 $\pi_q|_{V_{pq}(M,0)}: V_{pq}(M,0) \to V_q(M,0)$ 是满射，当且仅当限制 $\pi_q|_{V_{pq}(D,0)}: V_{pq}(D,0) \to V_q(D,0)$ 是满射。这进一步等价于以下陈述：对于任意 $[\boldsymbol{v}]_q \in V_q(D,0)$，若 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{Z}^n$，则存在 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{Z}^n$，使得

$$D\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0} \pmod{pq} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{v} \pmod{q}.$$

等价地，对于满足 $q \mid d_i v_i$ 的任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^n$，对于 $i = 1, \ldots\ldots, r$，存在整数 $k_1, \ldots\ldots, k_r$，使得

$$d_i(v_i - k_i q) \equiv 0 \pmod{pq}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

根据数论，这类整数 k_i 的存在性等价于以下条件：对于所有 $1 \le i \le r$，$\gcd(d_i q, pq) \mid d_i v_i$。另一种表述是，对于任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{Z}^n$，如果对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, r$，都有 $\frac{q}{\gcd(q, d_i)} \mid v_i$，那么 $\frac{q}{\gcd(p, d_i)\gcd(pq, d_i)} \mid v_i$ 对所有 $1 \le i \le r$ 均成立。再次根据数论，上述陈述成立当且仅当

$$\frac{q\gcd(p, d_i)}{\gcd(pq, d_i)} \Big| \frac{q}{\gcd(q, d_i)} \iff \gcd(p, d_i)\gcd(q, d_i) \mid \gcd(pq, d_i) \quad (i = 1, \ldots, r).$$

由 $\gcd(p, d_i)\gcd(q, d_i) \mid pq$ 可知，上述整除关系进一步等价于：对于所有 $1 \le i \le r$，$\gcd(p, d_i)\gcd(q, d_i) \mid d_i$。证明完毕。 □

在确立了前述引理后，我们现在转而关注所需的结果。值得注意的是，引理 3.11 表明，假设 $\gcd(\cdot,\cdot)\gcd(\cdot,\cdot)$，在 定理 3.12 中可能是保证结论成立的最优条件。

定理 3.12. 设 $0 < d_1 \mid \cdots \mid d_r$ 为 B 的不变因子。对于任意 p、$q \in \mathbb{Z}_{>0}$，如果最大公约数(p, d_i)最大公约数$(q, d_i) \mid d_i$ 对所有 $1 \le i \le r$ 和 $[\boldsymbol{b}]_{pq} \in$ 列空间$_{pq}(B)$均成立，那么

$$\#M\big(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\big) \le \#M\big(\mathcal{A}_{pq}^{(B,\boldsymbol{b})}\big).$$

此外，当 $l = 0$ 时，对于所有 p、$q \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\#M(\mathcal{A}_q) \le \#M(\mathcal{A}_{pq}).$$

证明。注意，在第 3.2 小节开头定义的映射 $\pi_q : \mathbb{Z}_{pq}^n \to \mathbb{Z}_q^n$，限制在 $V_{pq}(B, \boldsymbol{b})$ 上时，根据引理 3.11，是从 $V_{pq}(B, \boldsymbol{b})$ 到 $V_q(B, \boldsymbol{b})$ 的满射。利用简单事实：对每个 $i \in [m]$，$\pi_q\big(H_i^{(B,\boldsymbol{b})}{}_{pq}\big) \subseteq H_{i\,q}^{(B,\boldsymbol{b})}$，我们得出

$$\pi_q^{-1}\Big(V_q(B, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{i=1}^m H_{i,q}^{(B,\boldsymbol{b})}\Big) \subseteq V_{pq}(B, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{i=1}^m H_{i,pq}^{(B,\boldsymbol{b})}.$$

这立即得出

$$\#M\big(\mathcal{A}_q^{(B,\boldsymbol{b})}\big) = \#\Big(V_q(B, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{i=1}^m H_{i,q}^{(B,\boldsymbol{b})}\Big) \le \#\Big(V_{pq}(B, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{i=1}^m H_{i,pq}^{(B,\boldsymbol{b})}\Big) = \#M\big(\mathcal{A}_{pq}^{(B,\boldsymbol{b})}\big).$$

此外，关系 $\#M(\mathcal{A}_q) \le \#M(\mathcal{A}_{pq})$ 是平凡的。证明完毕。 □

4 应用

本节主要探讨特征拟多项式在图着色和流问题中的应用。为此，我们首先介绍一些关于图的必要概念。本节所考虑的图 G 的顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$，它们是有限的，并允许存在重边和环。对于边子集 $S \subseteq E(G)$，$G-S$ 是从 G 中移除边 S 后得到的生成子图。记边集为 S 的生成子图为 $G|S$，即 $G|S = G-(E(G)-S)$。G 的**秩函数**为

$$r(G|S) := |V(G)| - c(G|S), \quad \forall\, S \subseteq E(G),$$

其中，$c(G)$ 表示 G 的（连通）分支数。G 的**零度函数**定义为

$$m(G|S) := |S| - r(G|S) = |S| - |V(G)| + c(G|S), \quad \forall\, S \subseteq E(G).$$

图的**定向**是为每条边指定一个方向。每条边连同一个方向称为**有向边**。关于图的更一般背景和相关内容可参见书籍 [6]。

图着色是图论中的一个重要分支，起源于19世纪中叶著名的四色问题。图 G 的**正常顶点着色**是一个顶点着色 $c: V(G) \to S$，使得当顶点 u 和 v 相邻时，$c(u) \neq c(v)$。1912年，Birkhoff [3] 首次引入色多项式，用于计算平面图的正常（顶点）着色数；随后 Whitney [31, 32] 将其推广到一般图。

图中的处处非零 $\mathbb{Z}_q$-流或模 q-流最早由 Tutte 于 [28,29]定义，作为图着色的对偶概念。相应地，Tutte 还引入了流多项式函数，用于计算处处非零流。关于处处非零流的全面综述可参见 [14, 23]。Tutte 进一步提出了关于处处非零流的几个著名猜想，称为 5-流猜想 [29], 4-流猜想 [30] 和 3-流猜想（见 [5]中的未解决问题48）。这些猜想表明，处处非零流与图的边连通度密切相关。为解决 3-流猜想，Jaeger、Linial、Payan 和 Tarsi [15] 于1992年通过将处处非零流推广为非齐次形式，引入了图的群连通性。对偶地，他们还定义了群着色这一群连通性的对偶概念，将普通的正常顶点着色加以推广。图的群连通性和群着色可参见 [20] 中的精彩综述。

出于另一种研究动机，Zaslavsky [33] 于 1995 年定义并研究了偏图的平衡色多项式、二色多项式和 Whitney 数多项式，将普通图的相应多项式推广了。将结果专门应用于增益图时，他证明增益图的平衡色多项式恰好计数其正常着色（也称群着色）。从几何角度看，图的普通正常着色可以通过与之关联的图形超平面排列来研究。将这一思想推广到增益图后，Zaslavsky 引入了仿图配置，以研究其计数性质，并在 [34], 中证明，增益图的平衡色多项式与其关联仿图配置的特征多项式一致。在 [10], 中，Forge 和 Zaslavsky 探讨了带根整数增益图的整数正常着色数量。作为一项应用，他们给出了计算 $\mathbb{Z}_q$-着色的公式，即使模数较小也适用，而 Athanasiadi 的一般多项式公式在这种情况下并不适用。更多相关主题请参见 [11]。受他们工作的启发，

我们认识到，我们的方法也适用于对 $\mathbb{Z}_q$-着色进行计数研究，并在推论 4.1中得到了另一种计数公式。由于两种处理讨论的是相同对象，因此必然有所重叠，但重叠仅限于部分内容；因此，为使本文自成一体，我们给出所需内容的完整论述。

最近，Kochol 在 [19]中证明了存在一个用于计数处处非零非齐次形式流的多项式函数，称为赋值多项式。随后，Fu、Ren 和 Wang [12] 给出了赋值多项式的显式公式，并研究了它们的系数。事实上，我们的方法同样非常适合研究处处非零非齐次形式流。

从现在起，我们考虑与加法循环群 $\mathbb{Z}_q(q \in \mathbb{Z}_{>0})$ 及其固定定向 D 相关的主题。令 $w: E(G) \to \mathbb{Z}_q$。$\mathbb{Z}_q, w)$- 着色是 G 的顶点着色 $c: V(G) \to \mathbb{Z}_q$，使得对于 G 的每条有向边 uv（从 u 定向到 v），均有 $c(v) - c(u) \neq w(uv)$。自然地，当 $w \equiv 0$时，($\mathbb{Z}_q$,0)-着色退化为通常的适当 q-着色。记 $C(G, w; \mathbb{Z}_q)$ 为所有 $(\mathbb{Z}_q, w)$-着色的集合。

设 $b: V(G) \to \mathbb{Z}_q$。G 的 $(\mathbb{Z}_q, b)$-**流** 是一个边值函数 $f: E(G) \to \mathbb{Z}_q$，满足

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) = b(v), \quad \forall v \in V(G).$$

这里，$E^+(v)$表示以 v 为终点的边的集合，而 $E^-(v)$表示以 v 为起点的边的集合。若对所有 $e \in E(G)$，$f(e) \neq 0$，则称这种流为**处处非零** 。当$b \equiv 0$时，我们就得到经典的处处非零 $\mathbb{Z}_q$-流。令 $F^*(G, b; \mathbb{Z}_q)$ 表示所有处处非零 $(\mathbb{Z}_q, b)$-流的集合。

我们着重研究截断整排列框架下群着色与流的计数问题。为建立这种联系，我们先回顾与图的定向相关联的关联矩阵。G 的**关联矩阵**是$|V(G)| \times |E(G)|$ 整数矩阵 $M_G := (m_{ve})$，其行和列分别由顶点和边索引；对于顶点 v 和边 e，

$$m_{ve} := \begin{cases} 1, & \text{if } e \text{ is a link and } v \text{ is the head of } e; \\ -1, & \text{if } e \text{ is a link and } v \text{ is the tail of } e; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为简单起见，我们假设 $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ 和 $|E(G)| = m$。我们将从 i 到 j 的有向边记为 e_{ij}，其反向定向记为 $-e_{ij}$。现在考虑**仿图配置**

$$\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w})} := \left\{ H_{e_{ij}} : x_j - x_i = w_{ij} \mid e_{ij} \in E(G) \right\},$$

位于 $\mathbb{R}^n$中（见 [10,34]），其定义矩阵为 $[M_G^T, \boldsymbol{w}]$，其中 $\boldsymbol{w} = (w_{ij})_{e_{ij} \in E(G)} \in \mathbb{Z}^m$。当 G 包含环 $e_{ii} \in E(G)$时，我们需要格外小心。若 $w_{ii} = 0$，这样的环 e_{ii} 恰好对应于退化超平面 $H_{e_{ii}}: x_i - x_i = 0$，也就是整个空间$\mathbb{R}^n$。此时，特征多项式 $\chi(\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w})}, t)$是零多项式。自然地，$[\boldsymbol{w}]_q$ 可视为一个函数 $w: E(G) \to \mathbb{Z}_q$，满足对于所有 $e_{ij} \in E(G)$，都有 $w(e_{ij}) = [w_{ij}]_q$。在此语境下，补集

$$M(\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w}),q}) = \mathbb{Z}_q^n - \bigcup_{e_{ij} \in E(G)} H_{e_{ij},q}$$

$\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w}),\ q}$ 的所有 $(\mathbb{Z}_q, w)$-着色恰好构成该集合。也就是说，存在以下关系：

$$C(G, w; \mathbb{Z}_q) = M(\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w}),q}). \tag{4.1}$$

因此，可以通过枚举相关仿图配置的 q-约化之补集中的点，计算 G 的 $(\mathbb{Z}_q,\ w)$-着色数。

值得注意的是，M_G 是完全幺模的：每个方形子矩阵的行列式都属于 $\{-1,0,1\}$。因此，M_G 的所有不变因子都等于 1。于是，对于任意子集$S \subseteq E(G)$，子矩阵 $[M_G]_S$ 同样是幺模的，且其所有不变因子仍为 1。此外，以下关系显然成立：

$$r\big([M_G^T]_S\big) := \operatorname{rank}\big([M_G^T]_S\big) = r(G|S), \quad \forall\, S \subseteq E(G).$$

根据交错整除定理（见定理 2.2），对于每个子集 $S \subseteq E(G)$，$r(G|S)$ 的前$[M_G^T, \boldsymbol{w}]_S$个不变因子都等于 1。与 q_0一样，我们令

$$q_{\boldsymbol{w}} := \max\Big\{ d\big([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S\big) : S \subseteq E(G) \text{ and } r\big([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S\big) \neq r(G|S) \Big\},$$

其中，$d\big([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S$是$[M_G^T, \boldsymbol{w}]_S$的最大不变因子。类似于 $\tilde{d}_J(q)$，对于任意子集 $S \subseteq E(G)$，我们定义

$$\tilde{d}_S(q) := \begin{cases} 1, & \text{if } r\big([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S\big) = r(G|S); \\ 1, & \text{if } r\big([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S\big) \neq r(G|S) \text{ and } d\big([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S\big) \equiv 0 \pmod{q}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据上述准备工作，作为定理 2.4的直接推论，我们可以通过以下公式计算（$\mathbb{Z}_q,\ w$）-着色：

$$\#C(G, w; \mathbb{Z}_q) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} \tilde{d}_S(q) q^{c(G|S)}.$$

此外，存在一个多项式函数 $\chi(G,\ w;\ t)$，使得对于所有整数 $q > q_{\boldsymbol{w}}$，都有 $\#C(G,\ w;\ \mathbb{Z}_q) = \chi(G,\ w; q)$，并且 $\chi(G,\ w; t)$ 可以明确写为

$$\chi(G, w; t) = \sum_{S \subseteq E(G),\, r([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S) = r(G|S)} (-1)^{|S|} t^{c(G|S)}.$$

Zaslavsky 将该多项式称为模色多项式 [10]。根据推论 2.6，$\chi(G, w;\ t)$ 与仿图配置 $\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w})}$ 的特征多项式一致，该配置最早于 [10]被发现。最后，将定理 3.12 应用于 (4.1)，可得比较关系：对于任意 $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\#C(G, w;\ \mathbb{Z}_q) \leq \#C(G, w';\ \mathbb{Z}_{pq})$，其中$w = [\boldsymbol{w}]_q$ 和 $w' = [\boldsymbol{w}]_{pq}$。

我们将迄今为止得到的结果总结如下：

推论 4.1。设 $w:\ E(G) \to \mathbb{Z}_q$ 满足 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^m$ $w = [\boldsymbol{w}]_q$。以下结果成立：

(1) $C(G、\ w;\ \mathbb{Z}_q)$ 的计数公式为

$$\#C(G, w; \mathbb{Z}_q) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} \tilde{d}_S(q) q^{c(G|S)}.$$

此外，存在一个多项式 $\chi(G, w;\ t)$，使得对于所有整数 $q > q_{\boldsymbol{w}}$，$\#C(G, w;\ \mathbb{Z}_q) = \chi(G, w; q)$，而 $\chi(G, w; t)$ 可以写成

$$\chi(G, w; t) = \sum_{S \subseteq E(G),\, r([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S) = r(G|S)} (-1)^{|S|} t^{c(G|S)}.$$

(2) $\chi(G,\ w;\ t) = \chi($
$\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w})},\ t)$。(3)
对于任意 p，如果 $w' = [\boldsymbol{w}]_{pq}$，则 $\#C(G、\ w;\ \mathbb{Z}_q) \leq \#C(G、\ w';\ \mathbb{Z}_{pq})$.

值得注意的是，推论 4.1 的第（1）部分指出，对于所有整数 $q > q_{\boldsymbol{w}}$，G 的 $(\mathbb{Z}_q, w)$-着色数量由多项式 $\chi(G, w;\ t)$ 表征。此外，$\chi(G, w; t)$ 的公式表明，只要某个定向 D' 产生与原定向 D 相同的、满足 $r([M_G^T, \boldsymbol{w}]_S) = r(G|S)$ 的边子集 S 族，模色多项式在该定向下保持不变。事实上，这些边子集恰好对应于 Zaslavsky 提出的平衡子集。因此，用 Zaslavsky 的术语来说，当不同定向下的平衡子集完全相同时，它们的模色多项式恰好相同（见 [10]）。此外，推论 4.1 的第（2）和第（3）部分表明，对于所有整数 $q > q_{\boldsymbol{w}}$，我们可以通过 $\chi(\mathcal{A}_{(G,\boldsymbol{w})}, t)$ 计算 $\chi(G, w;\ q)$。这是 Athanasiadis 首创的方法，其中不必像 Athanasiadis 那样限制 q 为素数幂。用增益图的语言表述，同样的现象见于 [10]。

设 $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i\in V(G)} \in \mathbb{Z}^n$。类似地，当函数 $b\colon V(G) \to \mathbb{Z}_q$ 满足 $b(i) = [b_i]_q$ 对所有 $i \in V(G)$ 都成立时，我们将其理解为 $\boldsymbol{b}$ 的 q-约化。在这一视角下，方程组 $M_G\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（模 q）的解空间 $V_q(M_G, \boldsymbol{b})$ 恰好是 G 的所有 $(\mathbb{Z}_q, b)$-流的集合。与 $E(G)$ 相关联的是，令 $\mathcal{A}_{E(G)}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中由下式给出的**坐标超平面配置**

$$\mathcal{A}_{E(G)} := \{H_e : x_e = 0 \mid e \in E(G)\},$$

其定义矩阵为矩阵 $[I, \mathbf{0}]$，其中 I 表示 M_G 的单位矩阵，其行和列由与 M_G 相同的边标签索引。回顾一下，$(\mathbb{Z}_q, b)$-流 f 当且仅当对所有边 e 都有 $f(e) \neq 0$ 时处处非零。自然地，我们考虑由矩阵 $[M_G, \boldsymbol{b}]$ 对 $\mathcal{A}_{E(G)}$ 进行的截断排列 $\mathcal{A}^{(M_G,\boldsymbol{b})}{}_{E(G)}$。那么补集

$$M\big(\mathcal{A}^{(M_G,\boldsymbol{b})}_{E(G),q}\big) = V_q(M_G, \boldsymbol{b}) - \bigcup_{e\in E(G)} H^{(M_G,\boldsymbol{b})}_{e,q}$$

q-约化 $\mathcal{A}^{(M_G,\boldsymbol{b})}{}_{E(G)}$ 恰好对应于所有处处非零的（$\mathbb{Z}_q, b$）-流的集合。因此，将截断排列 $\mathcal{A}^{(M_G,\boldsymbol{b})}{}_{E(G)}$ 模任意正整数 q 取模，可构造出一个适用于计数处处非零（$\mathbb{Z}_q, b$）-流的框架。

令 $M_S = \begin{bmatrix} M_G \\ I_S \end{bmatrix}$ 和 $\bar{M}_S = \begin{bmatrix} M_G & \boldsymbol{b} \\ I_S & \mathbf{0} \end{bmatrix}$，其中 $S \subseteq E(G)$。由于 M_G 是幺模的，很容易验证每个矩阵 M_S 也是幺模的，且其所有不变因子都等于 1。再次使用交错整除定理，对于每个子集 $S \subseteq E(G)$，前 $r(M_S)$ 个不变因子仍然都等于 1。注意这个简单的事实：

$$r(M_S) := \operatorname{rank}(M_S) = m - m(G - S), \quad \forall\, S \subseteq E(G).$$

与前面的 $q_{\boldsymbol{w}}$ 和 $d_S(q)$ 类似，我们定义

$$q_{\boldsymbol{b}} := \max\big\{d(\bar{M}_S) : S \subseteq E(G) \text{ and } r(\bar{M}_S) \neq m - m(G - S)\big\},$$

and

$$\tilde{d}_S(q) := \begin{cases} 1, & \text{if } r(\bar{M}_S) = m - m(G - S); \\ 1, & \text{if } r(\bar{M}_S) \neq m - m(G - S) \text{ and } d(\bar{M}_S) \equiv 0 \pmod q; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

有了上述必要的准备，采用与推论 4.1相似的论证，下一个结果立即可得。

推论 4.2. 设 $b: E(G) \to \mathbb{Z}_q$，其中 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^n$ 满足 $b = [\boldsymbol{b}]_q$。以下结果成立：

(1) $F^*(G, b; \mathbb{Z}_q)$ 的计数公式为

$$\#F^*(G, b; \mathbb{Z}_q) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} \tilde{d}_S(q) q^{m(G-S)}.$$

此外，存在一个多项式 $\tau(G, b; t)$，使得对于所有整数 $q > q_{\boldsymbol{b}}$，$\#F^*(G, b; \mathbb{Z}_q) = \tau(G, b; q)$，且 $\tau(G, b; t)$ 可写为

$$\tau(G, b; t) = \sum_{S \subseteq E(G), r(\bar{M}_S) = m - m(G-S)} (-1)^{|S|} t^{m(G-S)}.$$

(2) $\tau(G, b; t) = \chi(\mathcal{A}_{E\ G}^{(M_G, \boldsymbol{b})}\ t)$。

(3) 对于任意 $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$，若 $b' = [\boldsymbol{b}]_{pq}$ 且 G 存在一个$(\mathbb{Z}_{pq}, b')$-流，则

$$\#F^*(G, b; \mathbb{Z}_q) \le \#F^*(G, b'; \mathbb{Z}_{pq}).$$

计数函数 $\#F^*(G, b; \mathbb{Z}_q)$ 和多项式 $\tau(G, b; t)$ 分别具有与 $\#C(G, w; \mathbb{Z}_q)$ 和 $\chi(G, w; t)$ 类似的性质；因此，我们省略对它们的重复分析及进一步阐述。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（12301424）资助。

参考文献

[1] C.A.Athanasiadis. 子空间排列与有限域的特征多项式. Adv. Math. 122 (1996), 193–233.[2] C. A. Athanasiadis. 根系的扩展 Linial 超平面配置及 Postnikov 和 Stanley 的一个猜想. J. Algebraic Combin. 10 (1999), 207–225.[3] G. D. Birkhoff. 地图着色方式数的行列式公式. Ann. Math. 14 (1912), 42–46.[4] A. Bj¨orner, T. Ekedahl. 有限域上的子空间配置：上同调与计数方面. Adv. Math. 129 (1997), 159–187.[5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. 带应用的图论. 麦克米伦，伦敦，1976.[6] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. 图论. 数学研究生教材，第 244 卷，施普林格，2008.[7] B. Chen, S. Wang. 整数配置特征准多项式系数的比较. J. Combin. Theory Ser. A 119 (2012), 271–281.

[8] H. H. Crapo, G.-C. Rota. 论组合理论基础：组合几何（预备版）. 麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州—伦敦，1970.[9] R. Ehrenborg, M. A. Readdy. 关于赋值、特征多项式与复子空间排列. Adv. Math. 134 (1998), 32–42.[10] D. Forge, T. Zaslavsky. Shi 排列及其他仿射超平面排列的格点计数. J. Comb. Theory, Ser. B 114 (2007), 97–109.[11] D. Forge, T. Zaslavsky. 正交体中的格点与带权增益图的一个巨大多项式 Tutte 不变量. J. Comb. Theory, Ser. B 118 (2016), 186–227.[12] H. Fu, X. Ren, S. Wang. b-相容图的流计数. Adv. in Appl. Math. 168 (2025), Paper No. 102901.[13]A. Higashitani, T. N. Tran, M. Yoshinaga. 超平面排列特征准多项式的周期坍缩. Int. Math. Res. Not. IMRN 10 (2023), 8934–8963.[14] F. Jaeger. 处处非零流问题. 载于：L. W. Beineke, R. J. Wilson（编），《图论专题选讲》第 3 卷，Academic Press，纽约，1988，第 71–95 页.[15] F. Jaeger, N. Linial, C. Payan, M. Tarsi. 图的群连通性——处处非零流性质的非齐次类比. 组合论杂志 B 辑 56 (1992), 165–182.[16] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao. 整数系数超平面排列模正整数的周期性. J. Algebr. Comb. 27 (2008), 317–30.[17] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao. 根系排列与中超平面排列的特征准多项式. 载于：F. El Zein, A. Suciu, M. Tosun, A. M. Uluda˘g, S. Yuzvinsky（编），《排列、局部系统与奇点》，第 177–190 页。Birkh¨auser，巴塞尔，2010.[18] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao. 非中心整排列模正整数的周期性. Ann. Comb. 15 (2011), 449–464.[19] M. Kochol. 计数图中处处非零链的多项式. Electron. J. Combin. 29 (2022), P1.19.[20] H.-J. Lai, X. Li, Y. Shao, M. Zhan. 图的群连通性与群着色——综述. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 27 (2011), 405–434.[21]S. Lang. 代数，修订第三版. 数学研究生教材，第 211 卷，Springer-Verlag，纽约，2002.[22] Y. Liu, T. N. Tran, M. Yoshinaga. G-Tutte多项式与阿贝尔李群排列. Int. Math. Res. Not. IMRN 1 (2021), 150–188.[23]P. D. Seymour. 处处非零流. 第 4 章附录，载于：R.L. Graham, M. Gr¨otschel, L. Lov´asz（编），《组合学手册》第 1 卷，North-Holland（Elsevier），阿姆斯特丹，1995，第 289–299 页.[24] R. P. Stanley. 超平面排列导论. 载于：E. Miller, V. Reiner, B. Sturmfels（编），《几何组合学》，收入 IAS/Park City 数学丛书第 13 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007，第 389–496 页.[25] R. P. Stanley. 计数组合学，第 1 卷. 第二版，剑桥大学出版社，2012.

[26] R. C. Thompson. 不变因子的交错不等式。Linear Algebra Appl. 24 (1979), 1–31.
[27] T. N. Tran, M. Yoshinaga. 某些阿贝尔李群排列与色拟多项式的组合学。J. Co
mbin. Theory Ser. A 165 (2019), 267–286.[28] W. T. Tutte. 关于线性图在曲面上的嵌入。Proc. London Math. Soc. (2) 51 (1949), 474–483.[29] W. T. Tutte. 对色多项式理论的贡献。Canad. J. Math. 6 (1954), 80–91.[30] W. T. Tutte. 关于图着色代数理论。J. Combin. Theory 1 (1966), 15–50.[31] H. Whitney. 数学中的逻辑展开。Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 572–579.[32] H. Whitney. 图的着色。Ann. Math. 33(2) (1932). 688–718.[33] T. Zaslavsky.偏图，III. 色不变量与双色不变量。J. Combin. The- ory Ser. B 64 (1995), 17–88.[34] T. Zaslavsky. 偏图，IV. 几何实现。J. Combin. Theory Ser. B 89 (2003), 231–297.