arXiv:2601.02921v1 [math.NT] 6 Jan 2026

Ramaswami型平移公式与多对数函数

Pawan Singh Mehta 和 BISWAJYOTI SAHA

ABSTRACT. 1934年，Ramaswami 证明了黎曼ζ函数所满足的一些奇特的平移公式。这类平移公式进而给出了黎曼ζ函数的亚纯延拓。1954年，Apostol 将这些恒等式推广，建立了一族类似的平移公式。在本文中，我们为定义多对数函数的狄利克雷级数建立了许多此类 Ramaswami 和 Apostol 型平移公式。这一扩展框架具有许多有趣的应用；例如，它还使我们能够发现伯努利数之间的一些（似乎是新的）递推关系，并利用这些关系推导出正切数的一些同余性质。

1. INTRODUCTION

对于满足 $\Re(s) > 1$ 的复数 s，黎曼ζ函数 $\zeta(s)$ 定义为

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

它在复半平面 $\Re(s) > 1$ 中定义了一个全纯函数，并可解析延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，在 $s = 1$ 处有一个留数为 1 的一阶极点。V. Ramaswami[8] 得到了若干涉及黎曼ζ函数的有趣平移公式，可递归地用于建立 $\zeta(s)$ 的解析延拓。对于每个 $n \geq 0$，令$P_n(s)$ 定义为

$$P_0(s) = 1, P_n(s) = \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}.$$

于是，对于满足 $\Re(s) > 1$ 的复数 s，他 [8] 证明了以下恒等式:

$$\zeta(s)\left(1 - 2^{1-s}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{P_n(s)\zeta(s+n)}{2^{s+n}}, \tag{1}$$

$$\zeta(s)\left(1 - 3^{1-s}\right) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{P_{2n}(s)\zeta(s+2n)}{3^{s+2n}}, \tag{2}$$

$$\zeta(s)\left(1 - 2^{1-s} - 3^{1-s} - 6^{1-s}\right) = 1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{P_{2n}(s)\zeta(s+2n)}{6^{s+2n}}. \tag{3}$$

2020 数学学科分类。 11M06, 11M35, 11B68.关键词与短语。 多对数函数、平移公式、伯努利数。

随后，他利用最后两个公式证明了在区域 $\zeta(s)$ 中 $1/2 \leq \Re(s) \leq 1$和 $|s| \leq 8$不为零。然而，这些看起来相似的公式似乎没有共同的自然推广。T. Apostol [1] 证明了两个不同的公式，一个推广了（1），另一个推广了（2）和（3）。对于任意给定的整数 $k \geq 2$ 和满足 s 的复数 $\Re(s) > 1$，他证明了：

$$\zeta(s)\left(1-k^{1-s}\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{P_n(s)\zeta(s+n)}{k^{s+n}}\frac{B_{n+1}(k)-B_{n+1}}{n+1}, \tag{4}$$

其中，对于 n， $k \geq 0$, $B_n(k)$ 是由生成函数定义的伯努利多项式 $B_n(x)$ 的值

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n\geq 0}B_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{5}$$

且 $B_n := B_n(0)$ 是第 n 个伯努利数。注意，当 $k = 2$ 时，(4) 与 (1) 相同（使用下文的 (10)。此外，对于所有整数 $k > 2$，阿波斯托尔 [1] 证明了

$$\zeta(s)\sum_{d|k}\mu(d)d^{-s}=\phi(-s,k)+2\sum_{n\geq 0}\frac{P_{2n}(s)\zeta(s+2n)}{k^{s+2n}}\phi(2n,k), \tag{6}$$

其中 $\mu(n)$ 是莫比乌斯函数，且 $\phi(s,k) := \sum_{1\leq h\leq \frac{k}{2}} h^s$。在 (6 中取 $k = 3$， 6，可得$_{(h,k)=1}$分别回到 (2)、(3)。

本文考虑多重对数函数 $\mathrm{Li}_z(s)$，其中 z 是单位根。对于满足 $\Re(s) > 1$ 的复数 s，它定义为狄利克雷级数：

$$\mathrm{Li}_z(s) := \sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^s}. \tag{7}$$

上述级数在复半平面$\Re(s) > 1$的每个紧子集上一致收敛。因此，它在复半平面 $\Re(s) > 1$内定义了一个全纯函数。若 $z = 1$，则 $\mathrm{Li}_z(s) = \zeta(s)$。因此，它在 $s = 1$ 处有一个一阶极点，留数为 1；对于 z 的其他取值，$\mathrm{Li}_z(s)$ 可以延拓为整函数。本文旨在推导涉及 $\mathrm{Li}_z(s)$ 的 Ramaswami 和 Apostol 型公式。文献 [10] 中还给出了 $\mathrm{Li}_z(s)$ 满足的另一个变换公式，该公式也可用于求得 $\mathrm{Li}_z(s)$ 的解析延拓。

我们还展示了这类恒等式的一些应用。例如，我们得到了若干（看似新颖的）伯努利数递推公式。我们证明（见下文（45）），对于每个整数 $n \geq 1$，偶数指标伯努利数 B_{2n} 满足递推关系

$$(1-2^{2n})(1-3^{2n-1})\frac{B_{2n}}{2n}=\frac{2^{2n-1}-1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n-1}{2i-1}\frac{B_{2i}}{2i}\,3^{2i-1}(1-2^{2i})(2^{2n-2i}-1).$$

这进而对正切数有有趣的应用，正切数定义为： $n \geq 1$

$$T_n := (-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})\frac{B_{2n}}{2n}.$$

注意， n 阶正切数 T_n 是正切函数在 $x=0$ 附近的泰勒展开中 $x^{2n-1}/(2n-1)!$ 的系数，即

$$\tan x = \sum_{n\geq 1} T_n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

正切数的性质一直是经典研究课题（参见 [5]）。众所周知， T_n均为整数 [5] （另见 [2, 注记 1。18]）。由 [4], 的研究还可知，当 $n \geq 2$ 时，它们均为偶整数（另见 [11]）。

本文将公式作为应用，证明对于 $n \geq 2$， T_n 的末位数字取决于 n 是偶数还是奇数，可能为 2 或 6。我们还证明正切数永远不能被 3 整除，并给出了模 3 的显式同余关系。

We a还得到了一些涉及奇数 ζ 值的级数表达式，例如，

$$-\frac{3}{16} = \sum_{m\geq 1} \frac{m}{3^{2m+1}}\zeta(2m+1)(2^{2m-1}-1)(2^{-2m}-1). \tag{8}$$

这引出了实数的 ζ-级数表示 这一概念（关于类似的概念，参见 [3] ）。我们称实数 x具有 ζ-级数表示，如果存在一个有理数序列 $(p_n/q_n)_{n\geq 2}$，使得 x 可以写成如下形式的收敛无穷级数:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{p_n}{q_n}\zeta(n).$$

利用（8），我们由此得到每个有理数都有 ζ-级数表示。此外，我们还得到每个有理数都有 ζ-级数表示，其中只包含奇数 ζ 值。这也可以由 [8,公式（2）]得出。

2. Translation Formulae for $\mathrm{Li}_z(s)$

本节给出 $\mathrm{Li}_z(s)$ 的 Ramaswami 和 Apostol 型平移公式，其中 z 是一个本原 q次单位根， $q \geq 1$。定义 δ_q 为 $1/q$的整数部分。我们证明如下结论:

定理 1。 设 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(s) > 1$，且 z 是一个本原 q 次单位根，满足 $q \geq 1$。设$k \geq 2$ 为某个正整数 b下形如 $bq+1$ 的整数。则有，

$$\mathrm{Li}_z(s)(1-k^{\delta_q - s}) = \sum_{m\geq 1} \frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}} \sum_{h=1}^{k-1} z^{-h}h^m. \tag{9}$$

对于 $z=1$，式（9）利用公式（参见 [2, 第 58]页）化为式（4）

$$\sum_{h=1}^{k-1} h^m = \frac{B_{m+1}(k) - B_{m+1}}{m+1}, \tag{10}$$

这对任意正整数都成立 k，$m \geq 1$。因此，（9）可视为 Apostol 平移公式（4）的推广。我们还得到了和式 $\sum_{h=1}^{k-1} z^h h^m$，类似于（10），当 $z \neq 1$ 是本原单位根时成立。事实证明，该和式与附录 A [7, 中定义的广义欧拉多项式的取值有关]。利用该公式，当 $z \neq 1$ 为单位根时，我们得到 $\mathrm{Li}_z(s)$ 的变换公式（9）的另一种形式（见下文的（12））。

我们首先回顾广义欧拉多项式的定义。对于给定的整数 $q \geq 2$，n 阶广义欧拉多项式 $E_{q,\,n}(x)$ 由以下生成级数定义：

$$\frac{qe^{xt}}{1+e^t+\cdots+e^{(q-1)t}} = \sum_{n\geq 0} E_{q,n}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{11}$$

推论 1。 设 $q \geq 2$ 为整数，其他记号同定理 *1*。则有：

$$\mathrm{Li}_z(s)(1-k^{-s}) = \frac{1}{q}\sum_{m\geq 1}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{z^j-1}{z^j(z-1)}\left(E_{q,m}(j) - E_{q,m}(k+j-1)\right). \tag{12}$$

注记1。 采用定理 1中的记号，我们有以下变换公式（9）的交错形式：

$$\mathrm{Li}_z(s)(1-k^{\delta_q-s}) = \sum_{h=1}^{k-1} z^h h^{-s} + \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^m P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{h=1}^{k-1} z^h h^m. \tag{13}$$

恒等式（9）和（13）通过相加和相减导出以下两个恒等式 n:

$$2\,\mathrm{Li}_z(s)(1-k^{\delta_q-s}) = \sum_{h=1}^{k-1} z^h h^{-s} + \sum_{m\geq 1}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{h=1}^{k-1}\left(z^h(-1)^m + z^{-h}\right)h^m, \tag{14}$$

$$0 = \sum_{h=1}^{k-1} z^h h^{-s} + \sum_{m\geq 1}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{h=1}^{k-1}\left(z^h(-1)^m - z^{-h}\right)h^m. \tag{15}$$

现在，将 $z=1$和 $k=2$ 代入（14）和（15），即可得到 [8, 式（1）和（2）]。Ramaswami 利用这些恒等式给出了 ζ级数表示式，包括 1、log2、欧拉常数γ以及 $\zeta(3)/\zeta(2)$（见 [8, §3、§5]）。我们进一步推导出以下涉及 M¨obius 函数 $\mu(n)$ 的公式。

定理 2. 采用定理*1*中的记号，可得：

$$\sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{d^s}\mathrm{Li}_{z^d}(s) = \sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} z^h h^{-s} + \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}} z^h h^m, \tag{16}$$

and

$$\sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{d^s}\mathrm{Li}_{z^d}(s)=\sum_{m\geq 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}}z^{-h}h^m. \tag{17}$$

将（17）从（16）中相减，得到以下变换公式：

$$0=\sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}}z^h h^{-s}+\sum_{m\geq 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{\substack{1\leq h\leq k\\(h,k)=1}}\left(z^h(-1)^m-z^{-h}\right)h^m. \tag{18}$$

注意，若将 $z=1$ 和 $k=3$ 代入（17），可得

$$\zeta(s)(1-3^{1-s})=\sum_{m\geq 1}\frac{P_m(s)\zeta(s+m)}{3^{s+m}}(1+2^m),$$

其可见于 [6, (2.16)]。按照定理 2中的步骤，我们还证明了下述定理，它给出了 Apostol 恒等式（6）关于 $\mathrm{Li}_z(s)$ 的推广。

定理 3。 设 $k>2$ 为整数，其他符号定义同定理 *1*。则有：

$$\sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{d^s}\mathrm{Li}_{z^d}(s)=\sum_{\substack{1\leq h\leq k/2\\(h,k)=1}}z^h h^{-s}+\sum_{m\geq 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{\substack{1\leq h\leq k/2\\(h,k)=1}}\left(z^h(-1)^m+z^{-h}\right)h^m. \tag{19}$$

注意，若在（ $z=1$ 中取19），即可得到（6），而后者又包含（2）和（3）。

3. Proof of Translation Formulae for $\mathrm{Li}_z(s)$

受 [1], 启发，我们从 Lerch ζ 函数 $\phi(s,\ a,\ z)$ 开始。对于 $s\in\mathbb{C}$ 满足 $\Re(s)>1$且实数 $a>0$, $\phi(s,\ a,\ z)$ 由下列绝对收敛级数定义：

$$\phi(s,a,z):=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{(n+a)^s}. \tag{20}$$

容易看出 $z\ \phi(s,\ 1,\ z)\ =\ \mathrm{Li}_z(s)$。注意，容易看出 Lerch ζ 函数 $\phi(s,\ a,\ z)$ 满足以下恒等式,

$$\phi(s,a,z)-z\phi(s,a+1,z)=a^{-s}, \tag{21}$$

and

$$\phi(s,ka,z)=k^{-s}\sum_{i=0}^{k-1}z^i\phi(s,i/k+a,z^k), \tag{22}$$

其中 $k\geq 1$ 是一个整数。恒等式 (22) 可如下得出：

$$\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{(n+ka)^s}=k^{-s}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{(n/k+a)^s}=k^{-s}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{n\geq 0}z^i\frac{z^{kn}}{(n+i/k+a)^s}=k^{-s}\sum_{i=0}^{k-1}z^i\phi(s,i/k+a,z^k).$$

现在，对于一个固定的复数 s，其中 $\Re(s) > 1$，以及一个整数 $m \geq 0$，Lerch ζ 函数 $\phi(s, a+1, z)$ 关于 a 的 m 阶导数为，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m \phi(s, a+1, z)}{\partial a^m} &= (-s)(-s-1)\cdots(-s-m+1)\phi(s+m, a+1, z) \\ &= (-1)^m m! P_m(s)\phi(s+m, a+1, z).\end{aligned}$$

因此，$\phi(s, a+1, z)$ 在 $a = 0$ 处的泰勒级数由下列级数给出 ，

$$\sum_{m\geq 0}(-a)^m P_m(s)\phi(s+m, 1, z) = \frac{1}{z}\sum_{m\geq 0}(-a)^m P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m). \tag{23}$$

我们证明以下引理。

引理 1. 对于固定的复数 s，z 满足 $\Re(s) > 1$ 且 $|z| = 1$，泰勒级数 (23)的收敛半径为 1。此外，泰勒级数 (23)一致收敛于 *Lerch* ζ 函数 $\phi(s, a+1, z)$ 当 $a \in (-1, 1)$时。

证明。 注意，对于固定的复数 s，若 $\Re(s) > 1$，则 $\lim_{m\to\infty}\mathrm{Li}_z(s+m) = z$。此外，

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{P_{m+1}(s)}{P_m(s)}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{s+m}{m+1}\right| = 1.$$

因此，级数 (23) 的收敛半径为 1，且该级数在 $a \in (-1, 1)$ 上一致收敛。接下来，我们要证明，对于每个 $a \in (-1, 1)$，式 (23) 中的泰勒级数收敛到函数 $\phi(s, a+1, z)$。为此，对于每个 $n \geq 0$，我们考虑余项 $R_n(a)$，其定义为

$$R_n(a) = \phi(s, a+1, z) - \frac{1}{z}\sum_{m=0}^{n-1}(-a)^m P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m).$$

因此，只需证明对于每个 a 满足 $|a| < 1$，$\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$。现在，根据泰勒定理的一个版本（见 [9, 推论 31.6]），对于每个 $a \in (-1, 1)$，都存在一个介于 0 和 x之间的实数 a，使得

$$\begin{aligned}R_n(a) &= (-1)^n n! P_n(s)\phi(s+n, x+1, z)\frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!}a \\ &= (-1)^n n P_n(s)\phi(s+n, x+1, z)(a-x)^{n-1}a.\end{aligned} \tag{24}$$

注意，

$$|\phi(s+n, x+1, z)| \leq \frac{1}{(x+1)^{\Re(s)+n}} + \frac{1}{(2+x)^n}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(m+x+1)^{\Re(s)}}.$$

由于 $\Re(s) > 1$ 且 x 介于 0 和 a 之间，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2+x)^n}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{(m+x+1)^{\Re(s)}} = 0.$$

若 $0 < x < a < 1$，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(x+1)^{\Re(s)+n}} = 0$。由于级数 (23) 在 $a \in (-1,1)$ 上一致收敛，其形式导数也一致收敛。因此，$\lim_{n\to\infty} nP_n(s)a^n = 0$，从而 $\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$，因为 $(a-x)^{n-1}a \le a^n$。

接下来令 $-1 < a < x < 0$. 注意，只需证明

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n nP_n(s)\frac{(a-x)^{n-1}a}{(x+1)^{\Re(s)+n}} = 0.$$

为此，首先注意到 $|\frac{a-x}{x+1}| \le |a|$ 对于 $-1 < a < x < 0$。因此，

$$\left| nP_n(s)\frac{(a-x)^{n-1}}{(x+1)^{n-1}}\frac{a}{(x+1)^{\Re(s)+1}} \right| \le \frac{n|P_n(s)||a|^n}{(x+1)^{\Re(s)+1}}.$$

因此，仿照前一种情况的论证，我们有 $\lim_{n\to\infty} R_n(a) = 0$ 当$-1 < a < 0$ 这就完成了引理 1 的证明。□

定理 *1*的证明。 注意，根据引理1，我们有:

$$z\phi(s,a+1,z) = \sum_{m\ge 0}(-a)^m P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m). \tag{25}$$

将上述等式两边乘以z^{-h}，再对 $0 \le h \le k-1$ 求和，并取 $a = -\frac{h}{k}$，可得:

$$\begin{aligned} z\sum_{h=0}^{k-1} z^{-h}\phi\left(s,(k-h)/k,z\right) &= \sum_{m\ge 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{h=0}^{k-1} z^{-h}h^m \\ &= \mathrm{Li}_z(s)\sum_{h=0}^{k-1} z^{-h} + \sum_{m\ge 1}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{h=1}^{k-1} z^{-h}h^m. \end{aligned} \tag{26}$$

由于 $k = bq+1$, 我们有 $\sum_{h=0}^{k-1} z^{-h} = k^{\delta_q}$。因此，上述方程的右端 is

$$k^{\delta_q}\mathrm{Li}_z(s) + \sum_{m\ge 1}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{h=1}^{k-1} z^{-h}h^m.$$

为了计算（26）的左端，我们先将 $a = 1/k$ 代入（22）。由于 $k = bq+1$对于某个正整数 b，于是（22）变为

$$k^s\phi(s,1,z) = \sum_{i=0}^{k-1} z^i\phi(s,(i+1)/k,z) = \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i-1}\phi(s,(k-i)/k,z) = \sum_{i=0}^{k-1} z^{-i}\phi(s,(k-i)/k,z).$$

由于 $z\phi(s,\ 1,\ z) = \mathrm{Li}_z(s)$，利用上述方程，我们可以将（26）写成

$$\mathrm{Li}_z(s)(1-k^{\delta_q-s}) = \sum_{m\ge 1}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{h=1}^{k-1} z^{-h}h^m.$$

证明至此完成。 □

推论的证明 *1*。 为证明推论 1，我们推导出 $\sum_{h=0}^{k-1} z^h h^m$ 的闭式公式，其中z 是一个本原 q 次单位根。随后利用以下引理完成证明。 □

引理2. 设 $q \geq 2$ 为整数， z 为一个本原的 q 次单位根。那么对于任意正整数 k、 m，有

$$\sum_{h=1}^{k-1} z^h h^m = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{z(z^j-1)}{z-1} \left(E_{q,m}(j) - z^{k-1} E_{q,m}(k+j-1) \right). \tag{27}$$

证明。 注意，多项式 $E_{q,n}(x)$ 满足以下公式，

$$E_{q,n}(x) + E_{q,n}(x+1) + \cdots + E_{q,n}(x+q-1) = qx^n, \quad \text{for all } n \geq 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

这由以下事实可得:

$$\sum_{n \geq 0} \left(E_{q,n}(x) + E_{q,n}(x+1) + \cdots + E_{q,n}(x+q-1) \right) \frac{t^n}{n!} = qe^{xt}.$$

比较上述等式两边 t^n 的系数，我们得到恒等式（28）。因此，我们有，

$$\begin{aligned} q \sum_{h=1}^{k-1} z^h h^m &= \sum_{h=1}^{k-1} z^h \sum_{i=0}^{q-1} E_{q,m}(h+i) = \sum_{j=1}^{k+q-2} E_{q,m}(j) \sum_{\substack{h+i=j, \\ 1 \leq h \leq k-1, \\ 0 \leq i \leq q-1}} z^h \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} E_{q,m}(j) \sum_{h=1}^{j} z^h + \sum_{j=q}^{k-1} E_{q,m}(j) \sum_{h=j-q+1}^{j} z^h + \sum_{j=k}^{k+q-2} E_{q,m}(j) \sum_{h=j-q+1}^{k-1} z^h. \end{aligned}$$

由于 $1 + z + \cdots + z^{q-1} = 0$，上述等式右边的第二个求和项为零。因此我们可以写成，

$$\begin{aligned} q \sum_{h=1}^{k-1} z^h h^m &= \sum_{j=1}^{q-1} E_{q,m}(j) z \frac{z^j - 1}{z-1} + \sum_{j=0}^{q-2} E_{q,m}(k+j) z^{k-q} \sum_{h=j+1}^{q-1} z^h \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} E_{q,m}(j) z \frac{z^j - 1}{z-1} + \sum_{j=0}^{q-2} E_{q,m}(k+j) z^{k+j+1} \frac{z^{q-j-1} - 1}{z-1} \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} E_{q,m}(j) z \frac{z^j - 1}{z-1} + \sum_{j=1}^{q-1} z^k \frac{1 - z^j}{z-1} E_{q,m}(k+j-1). \end{aligned}$$

至此，引理2的证明完成。 □

注记*1*的证明。将 $a = h/k$ 代入，并将等式两边乘以 z^h ，其中（25），且 $1 \leq h \leq k-1$。现在对 $1 \leq h \leq k-1$ 求和，并使用（21），再使用（22）（其中$a = 1/k$），即可得到所需的变换公式（13）。□

定理2的证明。对于满足（ $1 \le h \le k$ 使得（$h,\ k$）$=1$的整数， $a = h/k$ 代入（25），并将等式两边乘以 z^h。对 $1 \le h \le k$ 求和，其中（$h,\ k$）$=1$，并使用（21）得到

$$\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^h\phi(s,h/k,z) = k^s \sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^h h^{-s} + \sum_{m\ge 0}(-1)^m \frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m} \sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^h h^m. \tag{29}$$

现在，上述方程（29）的左边为

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^h\phi(s,h/k,z) &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{d|h,d|k}\mu(d) z^h\phi(s,h/k,z) = \sum_{d|k}\mu(d)\sum_{m=1}^{k/d} z^{md}\phi(s,md/k,z)\\ &= \sum_{d|k}\mu(d)\sum_{m=1}^{k/d}\sum_{n\ge 0}\frac{z^{n+md}}{(n+md/k)^s} = k^s\sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{d^s}\sum_{m=1}^{k/d}\sum_{n\ge 0}\frac{(z^d)^{\frac{kn}{d}+m}}{(\frac{kn}{d}+m)^s},\end{aligned}$$

当 $k = bq+1$ 时。因此我们得到

$$\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^h\phi(s,h/k,z) = k^s\sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{d^s}\mathrm{Li}_{z^d}(s). \tag{30}$$

因此，在（30）中使用（29），并将两边同除以 k^s，得到公式（16）。

若对满足（h,k）$=1$的整数 $1 \le h \le k$，在（25）中代入 $a = -h/k$，并将两边乘以 z^{-h}，然后对满足（h,k）$=1$的 $1 \le h \le k$ 求和，则得到

$$\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^{1-h}\phi(s,(k-h)/k,z) = \sum_{m\ge 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^{-h}h^m.$$

由于 $k = bq+1$ 对某个正整数 b 成立，我们可以将上述方程的左边写为

$$\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^{k-h}\phi(s,(k-h)/k,z) = \sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^h\phi(s,h/k,z).$$

现在利用（30），我们得到所需的公式（17）。这就完成了证明。 □

定理3的证明。 在此，我们在（ $a = h/k$ 中代入 $1 \le h \le k/2$，将等式两边乘以25，并对 z^h 求和，其中 $1 \le h \le k/2$ 满足（$h,\ k$）$=1$，从而得到

$$z\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^h\phi(s,(k+h)/k,z) = \sum_{m\ge 0}(-1)^m\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^h h^m. \tag{31}$$

利用（21）对于 $a = h/k$，我们可以将上述方程写成

$$\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^h\phi(s,h/k,z) = k^s\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^h h^{-s} + \sum_{m\ge 0}(-1)^m\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^h h^m. \tag{32}$$

接下来，将 $a=-h/k$ 代入（25）中，并用 $1\le h\le k/2$求和 $1\le h\le k/2$，再乘以 z^{-h}，得到：

$$\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^{1-h}\phi(s,(k-h)/k,z)=\sum_{m\ge 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^{-h}h^m.$$

由于 $k=bq+1$ 对某个正整数 b成立，因此我们可以将上述等式的左侧写成

$$\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^{k-h}\phi(s,(k-h)/k,z)=\sum_{\substack{k/2\le h\le k\\(h,k)=1}} z^{h}\phi(s,h/k,z).$$

因此我们得到，

$$\sum_{\substack{k/2\le h\le k\\(h,k)=1}} z^{h}\phi(s,h/k,z)=\sum_{m\ge 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^{-h}h^m. \tag{33}$$

由于 $k>2$，对于 k 为偶数的情形， $k/2$ 与 k不互素。因此将等式（32）和（33）相加，得到

$$\sum_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}} z^{h}\phi(s,h/k,z)=k^s\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}} z^{h}h^{-s}+\sum_{m\ge 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{\substack{1\le h\le k/2\\(h,k)=1}}\left(z^h(-1)^m+z^{-h}\right)h^m.$$

利用（30）并除以 k^s，即可得到所需公式（19）。证明完毕。 □

注2。 如果在（19）的求和中不考虑最大公因数条件，就得到（19）的以下变体，适用于 $k\ge 2$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Li}_z(s)(1-1/k^s)+\frac{1+(-1)^k}{2k^s}z^{k/2}\phi(s,1/2,z)\\&=\sum_{1\le h\le k/2} z^{h}h^{-s}+\sum_{m\ge 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^{s+m}}\sum_{1\le h\le k/2}\left(z^h(-1)^m+z^{-h}\right)h^m.\end{aligned} \tag{34}$$

证明。按照定理3证明中的步骤进行，但此处仅对$1\le h\le k/2$ 求和，且 $k\ge 2$，我们得到以下两个恒等式：

$$\sum_{1\le h\le k/2} z^{h}\phi(s,h/k,z)=k^s\sum_{1\le h\le k/2} z^{h}h^{-s}+\sum_{m\ge 0}(-1)^m\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{1\le h\le k/2} z^{h}h^{m}, \tag{35}$$

$$\sum_{k/2\le h\le k-1} z^{h}\phi(s,h/k,z)=\sum_{m\ge 0}\frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m}\sum_{1\le h\le k/2} z^{-h}h^m. \tag{36}$$

(35) 和 (36) 的左端相加得

$$\sum_{h=1}^{k-1} z^{h}\phi(s,h/k,z)+\frac{1+(-1)^k}{2}z^{k/2}\phi(s,1/2,z).$$

现在使用 (22)（其中 $a = 1/k$），并将 (35) 和 (36) 相加，得到：

$$(k^s - 1)\mathrm{Li}_z(s) + \frac{1 + (-1)^k}{2} z^{k/2}\phi(s, 1/2, z)$$
$$= k^s \sum_{1\le h\le k/2} z^h h^{-s} + \sum_{m\ge 0} \frac{P_m(s)\mathrm{Li}_z(s+m)}{k^m} \sum_{1\le h\le k/2} \left(z^h(-1)^m + z^{-h}\right) h^m.$$

两边除以 k^s，我们得 到所需公式 (34)。这就完成了注记2的证明。 □

注意，对于 $z = 1$，(34) 可还原 [1, 式 (15)] (参见 [6, 式 (2.15)] 的修正版).

4. Some applications

对于满足 $\Re(s) > 1$的复数 s，狄利克雷级数 $\mathrm{Li}_{-1}(s) = \sum_{n\ge 1}(-1)^n n^s$ 与 $\zeta(s)$的关系为

$$\mathrm{Li}_{-1}(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s).$$

因此，$\mathrm{Li}_{-1}(0) = B_1$，且对每个 $n \ge 1$,

$$\mathrm{Li}_{-1}(-n) = (1 - 2^{n+1})\frac{B_{n+1}}{n+1}. \tag{37}$$

上述 $\zeta(s)$ 与 $\mathrm{Li}_{-1}(s)$ 之间的关系，实际上使我们能够推导出黎曼ζ函数满足的更多平移公式。请注意，§2 中的所有平移公式也适用于整个复平面上的亚纯函数 $\mathrm{Li}_z(s)$。我们将利用平移公式（14）和（15）找出 $\mathrm{Li}_{-1}(s)$ 在负整数处特殊值的其他表达式。然后，我们将应用（37）来得到伯努利数 B_n 所满足的某些递推关系。

对于 $s \in \mathbb{C}$ 和整数 $k \ge 2$，定义

$$T(s, k) := \sum_{1\le h\le k-1} (-1)^h h^s.$$

对于 $z = -1$ (即 $q = 2$ 且 $k > 2$ 为奇数)，（14）和（15）给出

$$2\ \mathrm{Li}_{-1}(s)(1 - k^{-s}) = T(-s, k) + 2\sum_{m\ge 1} \frac{P_{2m}(s)\mathrm{Li}_{-1}(s+2m)}{k^{s+2m}} T(2m, k), \tag{38}$$

$$T(-s, k) = 2\sum_{m\ge 1} \frac{P_{2m-1}(s)\mathrm{Li}_{-1}(s+2m-1)}{k^{s+2m-1}} T(2m-1, k). \tag{39}$$

注3。注意，对于任意整数 $T(n,\ k) \in \mathbb{Q}$。若在（39）中取 $k = 3$ 和 $s = 2$，并利用 $\mathrm{Li}_{-1}(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ 这一事实，即得（8）。

注意，对于任意整数 $m,\ n \ge 0$,

$$P_m(-n) = \begin{cases} (-1)^m \binom{n}{m} & \text{for } n \ge m, \\ 0 & \text{for } n < m. \end{cases}$$

现在，对于 $n \geq 1$，将 $s = -2n$ 代入式（39），并将 $s = -2n+1$ 代入式（38），得到

$$T(2n,k) + 2\sum_{m=1}^{n} \binom{2n}{2m-1} \frac{\mathrm{Li}_{-1}(-2n+2m-1)}{k^{-2n+2m-1}} T(2m-1,k) = 0, \tag{40}$$

and

$$\begin{aligned} &2\ \mathrm{Li}_{-1}(1-2n)(1-k^{2n-1}) \\ &= T(2n-1,k) + 2\sum_{m=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2m} \frac{\mathrm{Li}_{-1}(1-2n+2m)}{k^{1-2n+2m}} T(2m,k), \end{aligned} \tag{41}$$

分别。利用（37），我们得到以下公式。

定理4. 对于奇数整数 $k \geq 3$，偶数指标伯努利数满足以下关系：

$$T(2n,k) = 2\sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i-1} \frac{B_{2i}}{2i} (2^{2i}-1) k^{2i-1} T(2n-2i+1,k), \tag{42}$$

and

$$\begin{aligned} &(1-2^{2n})(1-k^{2n-1})\frac{B_{2n}}{2n} \\ &= \frac{T(2n-1,k)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2i-1} \frac{B_{2i}}{2i} k^{2i-1}(1-2^{2i}) T(2n-2i,k), \end{aligned} \tag{43}$$

对于所有 $n \geq 1$。

由于 $T(s,3) = 2^s - 1$，取 $k = 3$，我们得到以下推论。

推论2. 对于所有 $n \geq 1$，偶数指标伯努利数满足以下递推关系：

$$B_{2n}(2^{2n}-1)3^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n}{2i-1} \frac{B_{2i}}{2i} (1-2^{2i}) 3^{2i-1}(2^{2n-2i+1}-1), \tag{44}$$

$$(1-2^{2n})(1-3^{2n-1})\frac{B_{2n}}{2n} = \frac{2^{2n-1}-1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2i-1} \frac{B_{2i}}{2i}\ 3^{2i-1}(1-2^{2i})(2^{2n-2i}-1). \tag{45}$$

事实上，通过选取 k的不同取值，我们可以推导出许多这样的偶数指标伯努利数满足的递推关系。上述递推关系（45）对正切数有一个有趣的应用。回顾一下，对于整数 $n \geq 1$，T_n 表示由以下方式定义的 n阶正切数

$$T_n = (-1)^n 2^{2n}(1-2^{2n})\frac{B_{2n}}{2n}.$$

注意到 $T_1 = 1$。此外，这是唯一的奇数正切数。这一点可由以下推论看出；更重要的是，我们给出了一个明确的模3同余关系。

推论 3. 对于所有整数 $n \geq 2$，第 n 个正切数 T_n 是偶数，且不能被 3 整除。此外，对于任意 $n \geq 1$,

$$T_n \bmod 3 \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

证明。设 $t_n = (-1)^n T_n$。将 (45) 的两边同时乘以 2^{2n}，得到

$$(1-3^{2n-1})t_n = 2^{2n-1}(2^{2n-1}-1) + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2i-1} 3^{2i-1} 2^{2n-2i}(2^{2n-2i}-1)t_i. \tag{46}$$

由于 t_i 是整数，注意到对于 $n \geq 2$，上述等式右边的每一项都能被 4 整除。然而，由于 $1-3^{2n-1} \equiv 2 \bmod 4$，可得 2 必须整除 t_n。

注意，除了第一项外，3 整除 (46) 右边的所有项。此外，

$$2^{2n-1}(2^{2n-1}-1) \equiv 2 \bmod 3, \quad 1-3^{2n-1} \equiv 1 \bmod 3.$$

因此 $t_n \equiv 2 \bmod 3$，即 $T_n \equiv (-1)^n 2 \bmod 3$。由此完成推论 3的证明。 □

对于 $n \geq 2$，正切数 T_n 不仅是偶数，而且在模 10 意义下也具有特殊性质。这可作为定理 3 的推论来证明。

推论 4. 对于 $n \geq 2$，正切数 T_n 的末位数字不是 2 就是 6，取决于 n 是偶数还是奇数。更准确地说，对于任意 $n \geq 1$,

$$T_n \bmod 5 \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

取 $z=-1$ 和 $k=5$ 代入（19），我们得到变换公式：

$$\mathrm{Li}_{-1}(s)(1-5^{-s}) = (2^{-s}-1) + 2\sum_{m\geq 1} \frac{P_{2m}(s)\mathrm{Li}_{-1}(s+2m)}{5^{s+2m}}(2^{2m}-1).$$

现在，如果将 $s=-2n+1$ 代替 $n \geq 1$，并使用（37），便得到以下恒等式：

$$(1-5^{2n-1})(1-2^{2n})\frac{B_{2n}}{2n} = (2^{2n-1}-1) + 2\sum_{m=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2m} 5^{2n-2m-1}(1-2^{2n-2m})\frac{B_{2n-2m}}{2n-2m}(2^{2m}-1).$$

由于 $\binom{2n-1}{2m} = \binom{2n-1}{2n-2m-1}$，将 $n-m$ 替换为 i，我们得到以下递推关系：

$$(1-5^{2n-1})(1-2^{2n})\frac{B_{2n}}{2n} = (2^{2n-1}-1) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2i-1} \frac{B_{2i}}{2i} 5^{2i-1}(1-2^{2i})(2^{2n-2i}-1).$$

将上式两边同时乘以 2^{2n}，并令对所有 $n \geq 1$ 都有 $t_n = (-1)^n T_n$，即可得到 t_n 的以下递推关系：

$$(1-5^{2n-1})t_n = 2^{2n}(2^{2n-1}-1) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2i-1} 5^{2i-1} 2^{2n-2i}(2^{2n-2i}-1)t_i. \tag{47}$$

现在我们可以证明推论4。

推论的证明 4。 对于整数 $n \geq 1$，利用（47）可得 $t_n \equiv 2^{2n}(2^{2n-1}-1)$ 模 5。容易计算得

$$2^{2n}(2^{2n-1}-1) \bmod 5 \equiv \begin{cases} 4 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

因此，

$$T_n \equiv (-1)^n 2^{2n}(2^{2n-1}-1) \bmod 5 \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

现在，由推论 3可知，对于 $n \geq 2$， $T_n \equiv 0$ 模 2。因此，根据中国剩余定理可得

$$T_n \bmod 10 \equiv \begin{cases} 6 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

证明至此完成。 □

数据可用性声明。 本文手稿没有相关数据。

References

[1] T. M. Apostol，关于黎曼ζ函数的一些级数，Proc. Amer. Math. Soc. 5（1954年），239–243。[2] T. Arakawa、T. Ibukiyama 和 M. Kaneko，《伯努利数与ζ函数》，Springer 数学专著，Springer，东京，2014年。[3] J. M. Borwein、D. M. Bradley 和 R. E. Crandall，黎曼ζ函数的计算策略，J. Comput. Appl. Math. 121（2000），第 1–2 期，247–296。[4] G-N. Han 和 J-Y. Liu，关于正切数和根诺基数若干性质的组合证明，European J. Combin. 71（2018），99–110。[5] D.E. Knuth 和 T.J. Buckholtz，正切数、欧拉数和伯努利数的计算，Math. Comp. 21（1967），663–688。[6] H. Lee、B. M. Ok、J. Choi，关于黎曼ζ函数若干恒等式的注记，Commun. Korean Math. Soc. 17（2002），第 1 期，第 165–173 页。[7] P. S. Mehta、B. Saha，多重多对数、一个正则化过程及一个可容许的收敛开域（已投稿），https://arxiv.org/pdf/2511.00889。[8] V. Ramaswami，关于黎曼 ζ函数的注记，J. London Math. Soc. 9（1934年），165–169。[9] K. A. Ross，初等分析：微积分理论，第 2 版，Undergrad. Texts Math., Springer，纽约，2013年。[10] B. Saha，初等方法：若干经典狄利克雷级数的亚纯延拓，Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 127（2017），第 2 期，225–233。[11] T. Zhao、Z. Lin 和 Y. Zang，一个联系卡塔兰数与正切数并具有算术应用的恒等式，European J. Combin. 132（2026），B 部分，论文编号 104283。

Pawan Singh Mehta and Biswajyoti Saha,Department of Mathematics,
Indian Institute of Technology Delhi, Hauz Khas, New Delhi110016, 电子邮箱地址:
maz218521@maths.iitd.ac.in, biswajyoti@maths.iitd.ac.in