arXiv:2601.02923v1 [math.LO] 6 Jan 2026

方括号分割关系的一致性

SAHARON SHELAH

Abstract. 典型的早期结果形式为 CON($2^{\aleph_0} \to [\lambda]^2_{n,\ 2}$)，其中 $2^{\aleph_0}$ 涉及一个超大基数；在最好的情况下，是第一个弱 Mahlo 基数。

典型的新结果为 CON($(2^{\aleph_0} = \aleph_m)^+ \aleph_\ell \to [\aleph_k]^2_{n,\ 2}$)，其中 $k < \ell < m$适当。因此，我们在三个方面有所改进：连续统可以很小（例如，不是弱 Mahlo 基数），我们不使用任何大基数，而且强迫之后涉及的基数$\lambda < 2^{\aleph_0}$。

§ 0. Introduction

在他们那份开创性的问题清单中， [Erd¨os 和哈伊纳尔提出了问题（15(a)）：是否有$2^{\aleph_0} \not\to [\aleph_1]^2_3$? 最近，Komj´ath [Kom25] 就这一主题提供了全面的更新。

我们在此继续研究从上述问题开始的工作：[She88, §2], [She92], [She89], [She95] [She96], [She00] 以及与 Rabus 合作的工作 [RS00], , 但我们努力做到自包含。

我们的结果最简单的情形是（回顾下面的 0.3）：

定理 0.1。 为简明起见，假设广义连续统假设。那么，对于宇宙 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 中某个基数为 $\aleph_6$ 的可数链条件强迫概念，我们有 $2^{\aleph_0} = \aleph_6$ ，并且对于任意 $n \geq 3$, $\aleph_5 \to [\aleph_2]^2_{n,\ 2}$。

证明。 取 $(\mu, \theta, \partial, \lambda)$ 为 $(\aleph_6, \aleph_5, \aleph_2, \aleph_0)$，并应用定理 0.2 和事实 1.12，其中 $\partial_0 = \aleph_1$。 $\square_{0.1}$

对于假设 1.1，主要情形是：

定理 0.2。 假设 $\lambda = \lambda^{<\lambda} < \partial < \theta < \mu = \mu^\theta$, $\partial = \partial^\lambda$ 且 $2^{\partial^{+\ell}} = \partial^{+\ell+1}$ 对于$\ell = 0$, 1,2 以及 $\partial^{+4} \leq \theta$。那么，存在某个 λ^+-*cc* 、 $(< \lambda)$- 完备强迫概念 $\mathbb{P}$，其基数为 μ （因此该强迫不会压缩任何基数，并保持 $[\lambda, \mu$ 之外的基数算术）），在宇宙 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 中我们有： $2^\lambda = \mu$ 并且对于每个 $\sigma < \lambda$, $\theta \to [\partial]^2_{\sigma,2}$

证明。 本文的全部内容都是为了证明这个定理。严格来说，取$\partial = \kappa^+$，注意到假设 1.1成立（根据事实 1.12），因此我们可以应用结论 1.11。 $\square_{1.11}$

版本：2026年1月6日。请参见 https://shelah.logic.at/papers/1258/ 以获取可能的更新
Date：2025年12月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E2，03E35。
Key words and phrases. 集合论、分划演算、方括号箭头。首次撰写：2024年1月7日。作者谨感谢以色列科学基金会通过项目2320/23对本研究提供部分资助。作者谨感谢 Craig Falls 慷慨资助打字服务，并感谢打字员认真而出色的工作。2025年2月提交给 Yair Hayut，收录于献给 Menachem Magidor 的 IJM 专卷。类似于 [Sh:950、Th0.2=Ly5] 这样的引用表示，Th0.2 的内部标签在 Sh:950 中为 y5。读者应注意，我个人网站上的版本通常比 arXiv 上的版本更新。这是 Saharon Shelah 列表中的第1258号出版物。

我们可以将 $\mu = \mu^\theta$ 弱化为 $\mu = \mu^\partial$，并将 $\partial = \kappa$ 替换为一个合适的极限基数 ∂。

回顾,

定义 0.3. 对于可能是有限的基数 θ, ∂, σ 和 κ，令 $\theta \to [\partial]^2_{\sigma,\kappa}$ 表示:

- 若 $\mathbf{c}$ 是一个从 $[\theta]^2 := \{u \subseteq \theta: |u| = 2\}$ 到 σ 的函数，则存在 θ 的某个子集 $\mathscr{U}$，其基数为 ∂，使得 $\{\mathbf{c}(u): u \in [\mathscr{U}]^2\}$ 至多有 κ 个元素。

我们感谢 Yair Hayut 和审稿人提出的许多有益意见。

§0(A). 预备知识。

记号 0.4。

1) $\mathrm{cof}(\delta)$ 是共尾性为 $\mathrm{cf}(\delta)$ 的序数类。

2) 对于集合 x，令 $\mathrm{trcl}(x)$ 表示 x 的传递闭包，也就是满足 $x \in Y$ 且 $(\forall y)(y \in Y \Rightarrow y \subseteq Y)$ 的最小集合Y。

3) 设 $\mathscr{H}(\lambda) := \{x: |\mathrm{trcl}(x)| < \lambda\}$。

4) 令 $\mathrm{trcl}_{\rm Ord}(x)$ 的定义与 $\mathrm{trcl}(x)$ 类似，只是将序数视为原子（= 元素）；等价地，它是满足 $x \in Y$ 且.....的最小集合 Y

$$(\forall y)[y \in Y \wedge (\text{if } y \text{ is not an ordinal, then } y \subseteq Y)].$$

5) Let $\mathscr{H}_{<\kappa}(x) = \{x: \mathrm{trcl}_{\rm Ord}(x) \subseteq \mathscr{H}(x) \text{ but has cardinality } < \kappa\}$.

记号 0.5。

(1) $\mathbb{P}$、$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是强迫概念。(2) p、q、r 是强迫概念中的成员，称为条件。(3) $\mathbf{q}$ 如定义 1.3 所述，是某种带有额外信息的 $(< \lambda)$-支撑迭代强迫。

记号0.6。例如，为了方便表示下标（或上标），我们可以写作 $N[\mathbf{q}\ \beta,\ u]$，而不写作 $N_{\mathbf{q},\ \beta,\ u}$。

定义 0.7。设 θ、∂、κ 和 λ 为无限基数。我们称 $\theta \to_{\rm sq} (\partial)^{\lambda\ 2}_{\kappa}$，当 $\theta > \partial \geq \kappa \geq \lambda$ 成立且:

⊞ 若 (a) 成立，则 (b) 成立，其中：(a) $\mathscr{B}$ 是 $(\mathscr{H}(\chi), \in, <_*)$ 的一个扩张，其中 $<_*$ 是$\mathscr{H}(\chi)$ 的一个良序，$\chi > \theta$，且其词汇 $\tau_{\mathscr{B}}$ 的基数为 $\leq \lambda$。(b) 存在一个元组$\mathbf{s} = (\mathscr{U},\ N,\ \bar{\pi})$，它求解$\mathbf{p} = (\mu,\ \theta,\ \partial,\ \kappa,\ \lambda,\ \mathscr{B})$，这意味着：$⊞_{\mathbf{p},\ \mathbf{s}}$ 对于 $u,\ v \in [\mathscr{U}]^{\leq 2}$,

- $\bullet_1$ $\bar{N} = \langle N_u: u \in [\mathscr{U}]^{\leq 2}\rangle$,
- $\bullet_2$ $\mathscr{U} \subseteq \theta$ 满足 $\mathrm{otp}(\mathscr{U}) = \partial$,
- $\bullet_3$ $N_u \prec \mathscr{B}$，$[N_u]^{<\lambda} \subseteq N_u$,
- $\bullet_4$ $\varepsilon[\mathbf{s}] :=$ 最小值$(\mathscr{U})$,
- $\bullet_5$ $N_u \cap \mathscr{U} = u$,
- $\bullet_6$ $\|N_u\| = \kappa$ 和 $\kappa + 1 \subseteq N_u$,
- $\bullet_7$ $N_u \cap N_v \prec N_{u \cap v}$,
- $\bullet_8$ $\bar{\pi} = \langle \pi_{u,\ v}:\ u,\ v \in [\mathscr{U}]^{\leq 2}$ 并且 $|u| = |v|\rangle$ 满足：如果 $|u| = |v|$，那么$\pi_{u,\ v}$ 是从 N_v 到 N_u 的同构，将 v映射到 u,
- $\bullet_9$ 如果 $u_1 \subseteq u_2$ 和 $v_1 \subseteq v_2$ 都来自 $[\mathscr{U}]^{\leq 2}$ 和 $|u_2| = |v_2|$，$\pi''_{u_2,\ v_2}(v_1) = u_1$ 那么$\pi_{u_1,\ v_1}$、$\pi_{u_2,\ v_2}$ 是相容的函数[1],

---

[1]因此，例如可以推出：若 $\zeta_1,\ \zeta_2 \in \mathscr{U}$ 则 $\pi_{\{\zeta_1\},\ \{\zeta_2\}} \restriction (N_\emptyset \cap N_{\{\zeta_2\}})$ 是恒等映射。

$\bullet_{10}$ for $\ell = 1, 2$, the sets $N_u \cap \partial$ for $u \in [\mathscr{U}]^\ell$ are pairwise equal [2] and included in $N_\emptyset$.

观察 0.8. </style}若： $u \in [\mathscr{U}]^{\leq 2}\rangle$ 满足 *0.7(b)*$\bullet_1 + \bullet_7$，则：

$(*)$ 对于每个 $x \in \cup\{N_u : u \in [\mathscr{U}]^{\leq 2}\}$，集合 $\{u \in [\mathscr{U}]^{\leq 2} : x \in N_u\}$ 具有以下形式之一：

(a) $\{u\}$ 对于某个 $u \in [\mathscr{U}]^2$，*(b)* $\{\zeta\}$ 对于某个 $\zeta \in \mathscr{U}$，*(c)* $\{\{\zeta\}\} \cup \{\{\varepsilon, \zeta\} : \varepsilon \in \mathscr{U} \cap \zeta\}$ 对于某个 $\zeta \in \mathscr{U}$，*(d)* $\{\{\zeta\}\} \cup \{\{\zeta, \xi\} : \xi \in \mathscr{U} \setminus (\zeta + 1)\}$ 对于某个 $\zeta \in \mathscr{U}$，*(e)* $\{\emptyset\}$，*(f)* $\{\emptyset\} \cup \{\{\zeta\} : \zeta \in \mathscr{U}\}$，*(g)* $\{\emptyset\} \cup \{\{\zeta\} : \zeta \in \mathscr{U}\} \cup \{\{\varepsilon, \zeta\} : \varepsilon < \zeta$来自 $\mathscr{U}\}$。

§1. The forcing

我们的目标是证明以下构型的一致性：

$$2 < \sigma < \lambda = \lambda^{<\lambda} < \partial = \partial^{<\lambda} < \theta < \mu = \mu^\theta = 2^\lambda,$$

并且有 $\theta \to [\partial]^2_{\sigma,\,2}$。

续篇正在准备中 [S$^+$]，旨在进一步发展本文所探讨的方向，尤其是上标 $\mathbf{n} > 2$ 的情形，如 [She92] 中所处理的那样。我们还将在那里证明，可以减弱对基数的要求，并得到更多的对。

假设 1.1。参数 $\mathbf{p} = (\mu,\ \theta,\ \partial,\ \lambda,\ \lambda,\ \mathscr{B})$ 由以下部分组成：

(a) $\lambda = \lambda^{<\lambda} < \partial < \theta < \mu = \mu^\theta$，(b) $\theta \to_{\rm sq} (\partial)^{\lambda\ 2}_{\lambda}$．（见定义 0.7，这是 [She89, 2.1] 的一个变体）；在我们的情形中，使用λ 两次是有意的。(c) σ 将在 $(2,\ \lambda)$ 中的基数上变化，并且“良好”的 μ-s 满足 $\gamma < \mu \Rightarrow |\gamma|^\theta < \mu$。(d)

- χ 例如为 $\beth_2(\mu)^+$，
- 令 $\mathscr{B}$ 为 $(\mathscr{H}(\chi), \in, <^*_\chi)$ 的一个扩张，其词汇的基数为λ，并且对于任意有限集合 $u \subseteq \mathscr{H}(\chi)$，$u\ N_u :=Sk(u,\ \mathfrak{C}_*)$ 的 Skolem 包的基数为 λ 且满足 $|N_u|^{<\lambda} \subseteq N$。

我们打算使用一种相当特殊的 $(<\lambda)$-支撑迭代强迫，但首先，我们定义迭代因子。

定义 1.2。

(1) 令 $\mathbf{A}$为由以下内容组成的对象 $\mathbf{a}$ 的集合：

(a)
- $\gamma < \mu$ 和 $\sigma \in (2,\ \lambda)$，
- $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，满足：$p \in \mathbb{P} \Rightarrow$ dom$(p) \in [\gamma]^{<\lambda} \wedge (\forall \alpha \in$ dom$(p))(p(\alpha) \in [\lambda \cup \gamma]^{<\lambda})$，
- $\mathbb{P}$ 是 λ^+-cc 且 $(<\lambda)$-完备的，
- 序 $\leq_{\mathbb{P}}$ 为：$p \leq_{\mathbb{P}} q$ 当且仅当：dom$(p) \subseteq$ dom$(q) \wedge (\forall \alpha \in$ dom$(p))[p(\alpha) \subseteq q(\alpha)]$,(b)
- $\mathrm{c}_{\sim}$ 是一个从 $[\theta]^2$ 到 σ 的函数的 $\mathbb{P}$- 名（我们可以将 $\mathrm{c}_{\sim}(\alpha, \beta)$ 写作 $\mathrm{c}_{\sim}(\{\alpha, \beta\})$，对于 $\alpha \neq \beta < \theta$）。(c) 我们有 $(\mathscr{U}, N, \bar{\pi})$ 求解 $\mathbf{p} = (\mu, \theta, \partial, \lambda, \lambda, \mathscr{B})$，（其中 $\mathscr{B}$如定义 0.7田(b) 和 1.1 中所述），使得 $\mathbb{P}, \mathrm{c}_{\sim} \in N_u$ 对每个 $u \in [\mathscr{U}]^{\leq 2}$ 都成立。

[2]注意，∂ 有两种不同的作用：表示 $\mathscr{U}$ 的大小，以及对 $N_u \cap \partial$的限制。我们可以将二者分开。

¯(1A) 在定义 1.2(1) 的语境中，$\mathbf{a} = (\gamma,\ \mathbb{P},\ \mathbf{c}_{\sim},\ \mathscr{U},\ N,\ \bar{\pi}) = (\gamma_{\mathbf{a}},\ .....)$，例如$N_{\mathbf{a},\ u} = N_{u\circ}$

(2) 我们称有序对（$p,\ \bar{\iota}$）是解，并记作（$\mathbf{a}\ p,\ \bar{\iota}$）$\in \mathbf{A}^{+}$，其中：

———

(a) $\bar{\iota} = (\iota_1,\ \iota_2) \in \sigma \times \sigma$，(b) $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\ \{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$，回忆 ε（$\mathbf{a}$）$= \min$（$\mathscr{U}$），

(c) 如果 $p \le q \in \mathbb{P}_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\ \{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$ 和 $\zeta_1 < \zeta_2$ 来自 $\mathscr{U}$，那么存在 $q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2$，使得对于 $\ell = 1,\ 2$，有：

——

- $\bullet_0$ $q \le_{\mathbb{P}_{\mathbf{a}}} q_\ell$，
- $\bullet_1$ $q_\ell \in \mathbb{P}_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a}\ \{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$ 以及 $q_1 \restriction (N_{\mathbf{a}\ \emptyset} \cap \gamma_{\mathbf{a}}) = q_2 \restriction (N_{\mathbf{a}\ \emptyset} \cap \gamma_{\mathbf{a}})$，
- $\bullet_2$ $r_\ell \in \mathbb{P}_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a}\ \{\zeta_1,\zeta_2\}}$，
- $\bullet_3$ $r_\ell \Vdash$“$\mathbf{c}_{\sim}(\zeta_1,\ \zeta_2) = \iota_{\mathbf{a}}\ \ell$”，
- $\bullet_4$ $r_\ell \restriction N_{\mathbf{a}\ \{\zeta_1\}}$ 在 $\le_{\mathbb{P}_{\mathbf{a}}}$-下方于 $\pi_{\mathbf{a}\{\zeta_1\},\ \{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}(q_\ell)$，
- $\bullet_5$ $r_\ell \restriction N_{\mathbf{a}\ \{\zeta_2\}}$ 在 $\le_{\mathbb{P}_{\mathbf{a}}}$-下方于 $\pi_{\mathbf{a}\{\zeta_2\},\ \{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}(q_{3-\ell})$。

(3) 若$\mathbf{b} = (\mathbf{a}\ p,\ \bar{\iota}) \in \mathbf{A}^{+}$，则令 $\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}$ 为以下强迫概念的 $\mathbb{P}$-名称：

(∗) 对于$\mathbf{G} \subseteq \mathbb{P}$ 在$\mathbf{V}$上的泛型，(a) $\mathbb{Q}_{\mathbf{b}} = \mathbb{Q}_{\mathbf{b}}[\mathbf{G}]$ 的元素集合为：

$\Big\{u \in [\mathscr{U}]^{<\lambda}$：if $\zeta_1 < \zeta_2$ in $\mathscr{U}$, then $\mathbf{c}\{\zeta_1,\zeta_2\}[\mathbf{G}] \in \{\iota_1,\iota_2\}$, moreover 对于某些 $q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2$，如定义 1.2(1)(c)($\bullet_1$)-($\bullet_5$)所述，我们有 $r_1 \in \mathbf{G}$ 或 $r_2 \in \mathbf{G}\Big\}$，

(b) the order of $\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}[\mathbf{G}]$ is inclusion,

(c) the generic is $\mathcal{Y}_{\mathbf{b}} = \bigcup \mathbf{G}_{\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}}$.

定义 1.3。

(1) 令 $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}_{\mathbf{p}}$ 为由以下 $\mathbf{q}$ 组成的类（下文中，$\alpha \le \mathrm{lg}(\mathbf{q})$ 和$\beta < \mathrm{lg}(\mathbf{q})$ 以及例如 $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}_{\mathbf{q},\alpha}$）：

(a) $\mathrm{lg}(\mathbf{q})$ 是一个序数 $\le \mu$；(b) $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\beta :\ \alpha \le \mathrm{lg}(\mathbf{q})\ \beta < \mathrm{lg}(\mathbf{q})\rangle$ 是一个 $(<\lambda)$-支撑迭代；(c) $\mathbb{P}_\beta$ 满足 λ^{+}-cc；(d) $\mathbb{Q}_\beta$ 是 $\mathbb{Q}_{\mathbf{b}^\beta}$，其中：

- $\bullet_1$ $\mathbf{b}^\beta := (\mathbf{a}^\beta, p^*_\beta, \bar{\iota}^*_\beta) \in \mathbf{A}^{+}$，
- $\bullet_2$ $\mathbf{a}^\beta = (\gamma_\beta, \mathbb{P}^\bullet_\beta, \mathbf{c}_{\sim^\beta}, \mathscr{U}_\beta, N_\beta, \bar{\pi}_\beta) \in \mathbf{A}$，
- $\bullet_3$ $\mathbb{P}^\bullet_\beta$ 等于 $\mathbb{P}'_{\xi(\beta)}$ 对某个 $\xi(\beta) = \xi_{\mathbf{q}}(\beta) \le \beta$ 而言（关于 $\mathbb{P}'_\beta$，见下文），
- $\bullet_4$ 序列 $\langle(\mathbb{P}_\gamma,\ \mathbb{P}'_\gamma,\ \mathbf{a}^\gamma,\ \mathbf{b}^\gamma,\ \xi(\gamma)) :\ \gamma < \beta\rangle$ 属于 $N_{\beta,\ u}$ 对于每个$u \in [\mathscr{U}_\beta]^{\le 2}$。

- $\bullet_5$ 令 $\mathscr{W}_\beta = \bigcup\{N_{\beta,u} \cap \beta :\ u \in [\mathscr{U}_\beta]^{\le 2}\}$，
- $\bullet_6$ 我们 [3] 有：对于每个 $\gamma \in \mathscr{W}_\beta$，集合 $\mathscr{W}_\beta \cap \mathscr{W}_\gamma$ 的基数为 $\le \lambda$，
- $\bullet_7$ 对于每个 $\gamma \in \mathscr{W}_\beta$，存在 $u = u_{\beta,\ \gamma} \in [\mathscr{U}_\beta]^{\le 2}$ 使得 $\mathscr{W}_\beta \cap \mathscr{W}_\gamma \subseteq N_{\beta,\ u}$并且不失一般性，$u$ 在满足此性质的对象中是最小的。

(e) $\mathbb{P}'_\alpha$ 是 $\mathbb{P}_\alpha$的稠密子集，其中，

- $\mathbb{P}'_\alpha$ 是将 $\mathbb{P}_\alpha$ 限制在满足以下条件的集合 $p \in \mathbb{P}_\alpha$ 上：
  如果 $\beta \in \mathrm{dom}(p)$，那么 $p(\beta)$ 是 $\mathbf{V}$ 的成员（而不只是一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称）且如果 $\zeta_1 < \zeta_2$ 属于 $p(\beta) \subseteq \mathscr{U}_\beta$，那么就有 $q_1,\ q_2, r_1, r_2$ 如定义 1.2(2)(c)($\bullet_1$)-($\bullet_5$)，其中 $\mathbf{a}^\beta,\ \mathbf{b}^\beta$ 分别表示这里的 $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$ and
  $$\bigvee_{\ell=1}^{2} (\forall \gamma \in \mathrm{dom}(r_\ell))[\gamma \in \mathrm{dom}(p) \wedge r_\ell(\gamma) \subseteq p(\gamma)].$$

[3]为什么？根据 0.7(b)$\bullet_{10}$.

(f) $\gamma_{\mathbf{q}} := \gamma(\mathbf{q}) :=$ 上确界$\{\gamma_{\mathbf{q},\beta}\colon\ \beta < \mathrm{lg}(\mathbf{q})\}$，因此 $\mathbb{P}'_{\gamma(\mathbf{q})} \subseteq \mathscr{H}_{<\lambda}(\gamma_{\mathbf{q}})$；令 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}} := \mathbb{P}_{\mathrm{lg}(\mathbf{q})}$和 $\mathbb{P}'_{\mathbf{q}} := \mathbb{P}'_{\mathrm{lg}(\mathbf{q})}$。

(1A) 当$\mathbf{q}$ 明确时，我们可以写作$\mathbb{P}_{\mathbf{q},\alpha}$ 或 $\mathbb{P}_\alpha$ ，且$(\iota_{\mathbf{q},\beta,1},\iota_{\mathbf{q},\beta,2})$为$\iota\mathbf{b}_\beta$。

(2) 设 $\leq_{\mathbf{p}}$ 为$\mathbf{Q_p}$上的如下二元关系：

$$\mathbf{q}_1 \leq_{\mathbf{p}} \mathbf{q}_2 \text{ iff } \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 \restriction \mathrm{lg}(\mathbf{q}_1),\ \text{see below}.$$

(3) 对于$\mathbf{q}_2 \in \mathbf{Q_p}$ 和 $\alpha_* \leq \mathrm{lg}(\mathbf{q}_2)$，我们定义$\mathbf{q}_1 =: \mathbf{q}_2 \restriction \alpha_*$ 如下：

(a) $\mathrm{lg}(\mathbf{q}_1) = \alpha_*$，(b) $(\mathbb{P}_{\mathbf{q}_1,\alpha},\mathbb{P}'_{\mathbf{q}_1,\alpha}) = (\mathbb{P}_{\mathbf{q}_2,\alpha},\mathbb{P}'_{\mathbf{q}_2,\alpha})$，其中 $\alpha \leq \alpha_*$，

(c) $(\mathbb{Q}_{\mathbf{q}_1,\beta}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}_1,\beta}, \xi_{\mathbf{q}_1}(\beta)) = (\mathbb{Q}_{\mathbf{q}_2,\beta}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}_2,\beta}, \xi_{\mathbf{q}_2}(\beta))$，其中 $\beta < \alpha_*$。

(4) 当满足以下条件时，我们称两个条件 $p, q \in \mathbb{P}'_\alpha$ 同构*isomorphic*：

(a) $\mathrm{otp}(\mathrm{dom}(p)) = \mathrm{otp}(\mathrm{dom}(q))$，并且

(b) 若 $\beta \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ 则：

- $\bullet_1$ $\mathrm{otp}(p(\beta)) = \mathrm{otp}(q(\beta))$，
- $\bullet_2$ 若 $\varepsilon \in p(\beta) \cap q(\beta)$，则 $\mathrm{otp}(\varepsilon \cap p(\beta)) = \mathrm{otp}(\varepsilon \cap q(\beta))$，
- $\bullet_3$ 若 $\varepsilon \in p(\beta)$ $\zeta \in q(\beta)$ 且 $\mathrm{otp}(\varepsilon \cap p(\beta)) = \mathrm{otp}(\zeta \cap q(\beta))$，则：

$$\pi_{\beta,\{\zeta\},\{\varepsilon\}}(p \restriction N_{\beta,\{\varepsilon\}}) = q \restriction N_{\beta,\{\zeta\}}.$$

- $\bullet_4$ 若 $\varepsilon < \varepsilon_1$ 属于 $p(\beta)$ $\zeta < \zeta_1$ 属于 $q(\beta)$，且 $\mathrm{otp}(\varepsilon \cap p(\beta)) = \mathrm{otp}(\zeta \cap q(\beta))$ 且 $\mathrm{otp}(\varepsilon_1 \cap p(\beta)) = \mathrm{otp}(\zeta_1 \cap q(\beta))$，则：

$$\pi_{\beta,\{\zeta,\zeta_1\},\{\varepsilon,\varepsilon_1\}}(p \restriction N_{\beta,\{\varepsilon,\varepsilon_1\}}) = q \restriction N_{\beta,\{\zeta,\zeta_1\}}.$$

备注 1.4. 如果我们希望定义 1.3 (1) 的子句 (d) ($\bullet_3$) 中满足 $\xi(\beta) = \beta$，即 $\mathbb{P}^\bullet_\beta = \mathbb{P}'_\beta$，则需要添加，例如“$\mu$ 是正则的，并且例如使用一个预备强迫 $(\{\mathbf{q} \in \mathbf{Q_p}\colon \mathrm{lg}(\mathbf{q}) < \mu\}, \lhd)$”。

断言 1.5.

(0) 对于 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q_p}$，我们有：$\mathbb{P}'_{\mathbf{q}} \models$“$p \leq q$”当且仅当 $\{p, q\} \subseteq \mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$，$\mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(q)$，且$\beta \in \mathrm{dom}(p) \Rightarrow p(\beta) \subseteq q(\beta)$。

(1) 对于 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q_p}$，$\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$ 中长度为 $< \lambda$ 的成员的任意递增序列都有一个最小上界。事实上，如果 $\delta < \lambda$，$\bar{p} = \langle p_i\colon\ i < \delta\rangle \in {}^\delta(\mathbb{P}'_{\mathbf{q}})$ 是递增的，那么以下$p \in \mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$ 是 $\bar{p}$的一个最小上界，定义如下：$\mathrm{dom}(p) = \bigcup\{\mathrm{dom}(p_i)\colon\ i < \delta\}$，并且如果 $\beta \in \mathrm{dom}(p)$，那么

$$p(\beta) = \bigcup \{p_i(\beta)\colon i < \delta \text{ and } \beta \in \mathrm{dom}(p_i)\}.$$

我们将此 p 记作 $\lim(\bar{p})$。

(2) 对于 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q_p}$，有：

- $p \in \mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$当且仅当：(a) p 是一个定义域为 $\in [\mathrm{lg}(\mathbf{q})]^{<\lambda}$的函数；(b) 如果 $\beta \in \mathrm{dom}(p)$，那么 $p(\beta)$ 属于 $[\mathscr{U}_\beta]^{<\lambda}$。(c) 如果 $\beta \in \mathrm{dom}(p)$ 且 $(\iota_1, \iota_2) = (\iota_{\mathbf{q},\beta,1},\iota_{\mathbf{q},\beta,2})$，那么对于每个来自 $p(\beta)$ 的 $\zeta_1 < \zeta_2$，$(p \restriction \beta) \restriction N_{\mathbf{q},\beta,\{\zeta_1,\zeta_2\}} \Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{q},\beta}}$“$\mathbf{c}_\sim\{\zeta_1, \zeta_2\} \in \{\iota_1, \iota_2\}$”。此外，存在如定义 1.2(2)(c)($\bullet_1$)-($\bullet_5$) 中所述的 q_1, q_2, r_1, r_2，且 $2\bigvee(\forall\gamma \in \mathrm{dom}(r_\ell))[\gamma \in \mathrm{dom}(p) \cap \beta \wedge r_\ell(\gamma) \subseteq p(\gamma)]_{\ell=1}$

(3) 若$\mathbf{q} \in \mathbf{Q_p}$ 且 $\alpha \leq \mathrm{lg}(\mathbf{q})$，则$\mathbf{q} \restriction \alpha \in \mathbf{Q_p}$。

(4) $\leq_{\mathbf{p}}$ 是$\mathbf{Q_p}$上的偏序。

(5) 若 $\bar{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{q}^j\colon\ j < \delta\rangle$ 是 $\leq_{\mathbf{p}}$-递增的，则它有一个 $\leq_{\mathbf{p}}$-最小上界$\lim(\bar{\mathbf{q}})$，长度为$\cup\{\mathrm{lg}(\mathbf{q}^j)\colon j < \delta\}$。

(6) 若 $\beta < \mathrm{lg}(\mathbf{q})$，$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathbf{q},\beta}$、$u \in [\mathscr{U}_{\mathbf{a},\beta}]^{\leq 2}$ 和 $N_u = N_{\mathbf{a},u}$，则：

$(*)$ 若 $p \in \mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$，则 $q = p \restriction N_{\mathbf{q},\beta,u}$ 满足 $q \in N_u$ 和 $q \leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}} p$，其中 q 定义为：

- $\bullet_1$ $\mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(p) \cap N_u \cap \beta$
- $\bullet_2$ 若 $\gamma \in \mathrm{dom}(q)$ 则 $q(\gamma) = p(\gamma) \cap N_u$。

(7) 若 *(A)*，则 *(B)*，其中：

(A) (a) $i_* < \lambda$，*(b)* 对于 $i < i_*$，$p_i \in \mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$，*(c)* 如果 $i < j < i_*$，则 p_i 和 p_j 本质可比，即：

- 如果 $\beta \in \mathrm{dom}(p_i) \cap \mathrm{dom}(p_j)$ 则 $p_i(\beta) \subseteq p_j(\beta)$ 或 $p_j(\beta) \subseteq p_i(\beta)$。*(d)* $\bar{p} = \langle p_i : i < i_* \rangle$。*(B)* $\bar{p}$ 有一个称为 $\lim(\bar{p})$ 或 $\lim(\{p_i : i < i_*\})$ 的最小上界，由下式定义：

- $\mathrm{dom}(p) = \bigcup\{\mathrm{dom}(p_i) : i < i_*\}$，
- 若 $\beta \in \mathrm{dom}(p)$，则 $p(\beta) = \bigcup\{p_i(\beta) : i < i_*$ 满足 $\beta \in \mathrm{dom}(p_i)\}$.

证明。第 (2) 部分至关重要，但很容易验证。第 (0)、(1)、(3) 和 (4) 部分也很容易。

(5) 对此，自然地定义 $\mathbf{q}$：= 极限($^{\omega}\mathbf{q}$)，但我们将对此作进一步说明。

$(*)$ (a) $\mathrm{lg}(\mathbf{q}) = \bigcup\{\mathrm{lg}(\mathbf{q}_i) : i < \delta\}$，(b) 若 $i < \delta$ 且 $\alpha \leq \mathrm{lg}(\mathbf{q}_i)$，则 $(\mathbb{P}_{\mathbf{q},\alpha}, \mathbb{P}'_{\mathbf{q},\alpha}) = (\mathbb{P}_{\mathbf{q}_i,\alpha}, \mathbb{P}'_{\mathbf{q}_i,\alpha})$，(c) 若 $i < \delta$ 且 $\beta < \mathrm{lg}(\mathbf{q}_i)$，则 $(\mathbb{Q}_{\mathbf{q},\beta}, \mathrm{a}_{\mathbf{q},\beta}, \mathrm{b}_{\mathbf{q},\beta}) = (\mathbb{Q}_{\mathbf{q}_i,\beta}, \mathrm{a}_{\mathbf{q}_i,\beta}, \mathrm{b}_{\mathbf{q}_i,\beta})$，(d) 当 $\mathrm{cf}(\delta) \geq \lambda$ 时，$(\mathbb{P}_{\mathbf{q},\mathrm{lg}(\mathbf{q})}, \mathbb{P}'_{\mathbf{q},\mathrm{lg}(\mathbf{q})})$ 是 $(\bigcup\{\mathbb{P}_{\mathbf{q}_i} : i < \delta\}, \bigcup\{\mathbb{P}'_{\mathbf{q}_i} : i < \delta\})$，(e) 若 $\mathrm{cf}(\delta) < \lambda$，则 $(\mathbb{P}_{\mathbf{q},\mathrm{lg}(\mathbf{q})}, \mathbb{P}'_{\mathbf{q},\mathrm{lg}(\mathbf{q})})$ 定义为逆极限。于是，

- $\mathbb{P}'_{\mathbf{q}} := \mathbb{P}'_{\mathbf{q},\mathrm{lg}(\mathbf{q})}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 中稠密，因为根据定义 1.2(3)，对每个 $\beta < \mathrm{lg}(\mathbf{q}_j)$，若 $j < \delta$，$\mathbb{Q}_{\mathbf{b}[\beta,\mathbf{q}_j]}$ 在长度为 $< \lambda$ 的递增并下封闭。

回想一下，在定义 1.3(1)(c) 中，我们使用 β 而不是 α。“$\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 满足 λ^+-cc”并非证明 1.5 (5) 所必需；只需要“若 $\beta < \mathrm{lg}(\mathbf{q})$，则 $\mathbb{P}_{\mathbf{q},\beta}$ 满足 λ^+-cc”，这显然成立。注意，尽管形式上这里并不需要，但我们将在命题 1.6 中证明 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 的链条件。

(6) 注意：

(a) 若 $\gamma \in \mathrm{dom}(q)$，则 $\gamma \in N_u$ 和 $q(\gamma) \subseteq N_u$；(b) 由于 $\mathrm{dom}(q)$ 和 $q(\gamma)$，对于 $\gamma \in$，$\mathrm{dom}(q)$ 的基数为 $< \lambda$，且 $[N_u]^{<\lambda} \subseteq N_u$，因此回想条款 (a)，显然 $q \in N_u$。(c) 要证明 q 属于 $\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$，对于 $\gamma \in \mathrm{dom}(q)$ 和来自 $q(\gamma)$ 的 $\zeta_1 < \zeta_2$，我们需要验证 1.5(2)(c) 中的条件。(d) 但由于 $\gamma \in N_u$，所以 $\mathbf{q} \restriction (\gamma + 1)$，且 ζ_1, ζ_2 属于 N_u；$N_{\mathbf{q},\gamma,\{\zeta_1\}}, N_{\mathbf{q},\gamma,\{\zeta_2\}}, N_{\mathbf{q},\gamma,\{\zeta_1,\zeta_2\}}$ 也属于 N_u，因此都包含在其中，我们便可轻松完成。(7) 由定义可得

. $\square_{1.5}$

现在我们来到

关键断言 1.6. 如果 $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}_{\mathbf{p}}$，那么 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 满足 λ^+-链条件。此外，$\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 是 λ^+-*Knaster*。

证明。根据 1.3(1)(e)，只需证明 $\mathbb{P}'_{\mathbf{q}} = \mathbb{P}'_{\mathbf{q},\mathrm{lg}(\mathbf{q})}$ 满足 λ^+-链条件，因此设：

$(*)_1$ (a) 令 $\bar{p} = \langle p_\xi : \xi < \lambda^+ \rangle$，其中 $p_\xi \in \mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$，(b) 只需证明存在某个 $\zeta < \xi < \lambda^+$，使得 p_ζ 和 p_ξ 相容。[为什么？根据定义。] $(*)_2$ 对于某个驻定集 $S \subseteq \mathrm{cof}(\lambda) \cap \lambda^+$，我们有：

- $\bullet_1$ $\langle \mathrm{dom}(p_\xi)\colon\ \xi\in S\rangle$ 是一个以 $w_*\in$ [为核的 Δ-系统，$\mathrm{lg}(\mathbf{q})]^{<\lambda}$，并且
- $\bullet_2$ 若 $\beta\in w_*$ 则 $\langle p_\xi(\beta)\colon\ \xi\in S\rangle$ 是一个 Δ-系统。

[为什么？根据 Δ系统引理，证明中用到了福多尔引理，回忆一下$\lambda=\lambda^{<\lambda}$。]

$(*)_3$ 不失一般性，$\langle p_\xi\colon\ \xi\in S\rangle$ 两两同构（见定义 1.3(4)）。

[为什么？显然，因为对于每个$\mathbf{a}$ u，模型 $N_{\mathbf{a},\,u}$ 的基数为 λ。]

$(*)_4$ 对于来自 w_* 的 $\gamma<\beta$，我们有：

- $\bullet_1$ Let $\mathscr{W}_\beta, u_{\beta,\gamma}$ be as in $1.3(1)(\mathrm{d})\bullet_5$.
- $\bullet_2$ Without loss of generality, $u_{\beta,\gamma}$ is disjoint to $N_{\mathbf{q},\beta,\{\zeta\}}\setminus N_{\mathbf{q},\beta,\emptyset}\cap\mu$ for every $\zeta\in\mathscr{U}_\beta$ and is disjoint to $N_{\mathbf{q},\beta,\{\varepsilon,\zeta\}}\setminus N_{\mathbf{q},\beta,\emptyset}\cap\mu$ for every $\varepsilon<\zeta$ from $\mathscr{U}_\beta$.

[为什么？因为对于任意 $\gamma<\beta$，从 w_* 中至多需要删去两个元素，而 $\mathscr{U}_\beta$ 的基数为 w_*。$<\lambda$

$(*)_5$ 我们固定 $\xi(1)\neq\xi(2)$，取自 S，并将证明 $p_{\xi(1)}$ 和 $p_{\xi(2)}$ 有一个公共上界；这足以证明关键断言 1.6。

$(*)_6$ 对于 $\beta\in w_*$：

(a) 对于 $\ell\in\{1,2\}$，考虑序列 $\langle\alpha^\beta_\xi(\ell)_\varepsilon\colon\ \varepsilon<\varepsilon_\beta\rangle$，它按递增顺序列出集合 $p_{\xi(\ell)}(\beta)$。(b) 为什么是 ε_β，而不是 $\varepsilon_{\beta,\ell}$? 因为这两个序列长度相同，这是因为 $p_{\xi(1)},p_{\xi(2)}$ 同构，见定义 1.3(4) $\bullet_1$。(c) 令 $\mathscr{S}_\beta:=\{\varepsilon<\varepsilon_\beta\colon\ \alpha^\beta_\xi(1)_\varepsilon\neq\alpha^\beta_\xi(2)_\varepsilon\}$。(d) 因此，根据定义 1.3(4) $\bullet_2$，集合 $\{\alpha^\beta_\xi(1)_\varepsilon\colon\ \varepsilon\in\mathscr{S}_\beta\}$、$\{\alpha^\beta_\xi(2)_\varepsilon\colon\ \varepsilon\in\mathscr{S}_\beta\}$彼此不相交，且与 $\{\alpha^\beta_\xi(1)_\varepsilon\colon\ \varepsilon\in\varepsilon_\beta\setminus\mathscr{S}_\beta\}=\{\alpha^\beta_\xi(2)_\varepsilon\colon\ \varepsilon\in\varepsilon_\beta\setminus\mathscr{S}_\beta\}$不相交。

令 $\bar\beta=\langle\beta_i\colon\ i\le i_*\rangle$ 按递增顺序列出 $\{\alpha,\alpha+1\colon\ \alpha\in w_*\}\cup\{0,\mathrm{lg}(\mathbf{q})\}$ 的闭包，因此必有 $i_*<\lambda$，显然只需证明：

$(*)_7$ 通过对 $i\le i_*$ 使用归纳法，选取 $q_i\in\mathbb{P}'_{\mathbf{q},\,\beta_i}$ 使其成为 $\{p_{\xi(1)}{\restriction}\beta_i, p_{\xi(2)}{\restriction}\beta_i\}$ 的公共上界，并且随 $i\le i_*$ 递增，从而满足：(*) 若 $\beta\in w_*\setminus\{\beta_j\colon\ j<i\}$ 和 $\zeta(1)$ $\zeta(2)$ 来自 $\mathscr{S}_\beta$，那么：

- $\bullet_1$ $\mathrm{dom}(q_j)\cap N_{\beta,\,\{\alpha_{\xi(1)\ \zeta(1)}\ \alpha_{\xi(2)\ \zeta(2)}\}}$ 是N_β的子集，$\{\alpha_{\xi(1)\ \zeta(1)}\}\cup N_{\beta,\,\{\alpha_{\xi(2)\ \zeta(2)}\}}\cup N_{\beta,\,\emptyset}$，

- $\bullet_2$ 若 $\ell=1,2$ 且 $\gamma\in\mathrm{dom}(q_j)\cap N_{\beta,\{\alpha_{\xi(\ell)\ \zeta(\ell)}\}}$ 则 $q_i(\gamma)=p_{\xi(\ell)}(\gamma)$ 或 $\gamma\in N_{\beta,\emptyset}$

继续进行归纳法。

情形 1：$i=0$。显然，此情形显然成立，令 $q_0=\emptyset$。

情形 2：i 是一个极限序数。

在此情形下，令 $q_i:=\lim\langle q_j\colon\ j<i\rangle$，则由断言 1.5(1)，$q_i$ 定义良好，且符合序的定义要求，并满足 $(*)_7$。

情形 3：$i=j+1$ 且 $\beta_j\notin w_*$。

在此情形下，$\mathrm{dom}(p_{\xi(1)})\cap\mathrm{dom}(p_{\xi(2)})\cap\beta_i\subseteq\beta_j$，因此该条件

$$q_i:=q_j\cup\big(p_{\xi(1)}{\restriction}[\beta_j,\beta_i])\cup(p_{\xi(2)}{\restriction}[\beta_j,\beta_i])\big)$$

正如所述。

情形 4：$i=j+1$ 以及 $\beta_j\in w_*$。

根据对 $\bar\beta$ 的选择，显然 $\beta_i=\beta_j+1$，并令 $\mathscr{S}=\mathscr{S}_{\beta_j}$。

回顾 1.3(1)(d) 和 0.7(b)($\bullet_8$)，我们有：

$(*)_8$ $\mathbf{a}_{\beta_j}=\mathbf{a}_{\mathbf{q},\beta_j}$ determine:

(a) $\bar\pi_{\beta_j}=\langle\pi_{u,v}\colon u,v\in[\mathscr{U}_{\beta_j}]^{\le2}$ and $|u|=|v|\rangle$,

(b) $\bar N_{\beta_j} = \langle N_u : u \in [\mathscr{U}_{\beta_j}]^{\le 2}\rangle$,
(c) for $\varepsilon(1),\varepsilon(2) \in \mathscr{S}$, let:
- $v[\varepsilon(1),\varepsilon(2)] = \{\alpha_{\xi(1),\varepsilon(1)}, \alpha_{\xi(1),\varepsilon(2)}\}$, and
- $u[\varepsilon(1),\varepsilon(2)] = \{\alpha_{\xi(1),\varepsilon(1)}, \alpha_{\xi(2),\varepsilon(2)}\}$.

(d) for $\varepsilon \in \mathscr{S}$, let $v[\varepsilon] = \{\alpha_{\xi(1),\varepsilon}\}$ and $u[\varepsilon] = \{\alpha_{\xi(2),\varepsilon}\}$,
(e) $\bar\iota = \bar\iota^*_{\beta_j}$, see 1.3 (1) (d) $\bullet_1$.
(f) $\gamma_j = \xi_{\mathbf{q}}(\beta_j)$; see 1.3(1)(d) $\bullet_3$.

现在我们将定义 $p_{\varepsilon(1),\varepsilon(2)}$，使得对于 $\varepsilon(1)\ \varepsilon(2) \in \mathscr{S}$：

$(*)_9$ (a) $p_{\varepsilon(1),\ \varepsilon(2)} \in \mathbb{P}_{\gamma_j} \cap N_{u[\varepsilon(1),\varepsilon(2)]}$，因此 $\mathrm{dom}(p_{\varepsilon(1),\varepsilon(2)}) \subseteq \gamma_j \cap N_{u[\varepsilon(1),\varepsilon(2)]}$；(b) 如果 $\varepsilon(1) = \varepsilon(2)$，那么 $p_{\varepsilon(1),\ \varepsilon(2)} \restriction (\gamma_j \cap N_{v[\varepsilon(1)]})$、$p_{\xi(1)} \restriction N_{v[\varepsilon(1)]}$ 本质可比；见 1.5(7)(A)(c)，此外前者位于后者之上 $\le_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}$；(c) 如果 $\varepsilon(1) = \varepsilon(2)$，那么 $p_{\varepsilon(1),\ \varepsilon(2)} \restriction (\gamma_j \cap N_{u[\varepsilon(2)]})$、$p_{\xi(2)} \restriction N_{u[\varepsilon(2)]}$ 本质可比，此外前者位于后者之上 $\le_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}$；(d) $p_{\varepsilon(1),\ \varepsilon(2)}$ 满足 1.3(1)(e)$\bullet$，其中 $(\gamma_j,\ \varepsilon(1)\ \varepsilon(2))$ 表示此处的 $(\beta,\ \zeta_1,\ \zeta_2)$；(e) $\{q_j \restriction N_\emptyset\} \cup \{p_{\varepsilon(1),\varepsilon(2)} \restriction N_\emptyset :\ \varepsilon(1)\ \varepsilon(2)\ \in \mathscr{S}\}$ 两两本质可比；(f) 如果 $\varepsilon(1) \ne \varepsilon(2)$，那么对于 $\ell = 1$，$p_{\varepsilon(1),\ \varepsilon(2)} \restriction N_{\{\alpha_{\varepsilon(\ell)}\}} \le p_{\xi(\ell)} \restriction N_{\{\alpha_{\varepsilon(\ell)}\}}$，2。(g) 如果 $\mathscr{S}_* \subseteq \mathscr{S} \times \mathscr{S}$，那么 $\{q_j[N_{u[\varepsilon(1),\varepsilon(2)]} :\ \varepsilon(1)\ \varepsilon(2)$ 的最小上界 $q_{\mathscr{S}_*}$ 满足 $(*)_7$ 中的条件。

我们需要证明两件事：$\boxplus_1$ 以及 $\boxplus_2$。第一件事说明我们可以选取它们（即 $p_{\varepsilon(1),\varepsilon(2)}$-s），第二件事说明这样就足够了。

$\boxplus_1$ 我们可以按要求在 $(*)_7$ 中选取 $p_{\varepsilon(1),\varepsilon(2)}$，使得 $\varepsilon(1)\ \varepsilon(2)\ \in \mathscr{S}$。

我们考虑两种可能的情形：

情形 4.1：$\varepsilon(1) \ne \varepsilon(2)$。

设 $p_{\varepsilon(1),\varepsilon(2)} = \pi(p_{\xi(1)} \restriction N_{v[\varepsilon(1),\varepsilon(2)]})$，其中 $\pi = \pi_{u[\varepsilon(1),\varepsilon(2)],v[\varepsilon(1),\varepsilon(2)]}$。

为什么 $(*)_9$ 得以保持？大多数子句显而易见，但回想一下我们必须满足 $(*)_7$，$(*)_9(g)$ 仍值得详细说明。

因此令 $\beta \in \mathscr{W}_* \setminus \{\beta_\iota :\ \iota < i\}$，于是对于某个 $j(*) < i_*$，我们有 $\beta = \beta_{j(*)}$，进而有 $\beta_{j(*)} \ge \beta_i$，因此 $\beta_{j(*)} > \beta_j$，并且我们有 $\mathscr{S}_* \subseteq \mathscr{S} \times \mathscr{S}$，处理 $q_{\mathscr{S}_*}$。为此，只需考虑以下情形：

$\oplus_1$ $\mathscr{S}_* = \{\zeta(1),\zeta(2)\}$, where $\zeta(1) = \varepsilon(1)$ and $\zeta(2) = \varepsilon(2)$ hence from $\mathscr{S}$, so $\zeta(1) \ne \zeta(2)$,

$\oplus_2$ $\mathscr{S}_* = \{\zeta(1)\ \zeta(2)\}$，其中 $\zeta(1) \ne \zeta(2)$ 来自 $\mathscr{S}$，但 $(\zeta(1)\ \zeta(2)) \ne (\varepsilon(1)\ \varepsilon(2))$.

容易验证。

情形 4.2：$\varepsilon(1) = \varepsilon(2)$。

在这种情形下，我们通过选择 $p_{\varepsilon,\varepsilon}$，对 $\varepsilon \in \mathscr{S}$ 使用归纳法，选取某个序列 $\langle p_{\varepsilon,\ \varepsilon} :\ \varepsilon \in \mathscr{S}\rangle$。现在，$p_{\varepsilon,\varepsilon} \in \mathbb{P}'_{\beta_j} \cap N_{u[\varepsilon(1),\varepsilon(2)]}$ 满足：

$(*)$ (a) $p_{\varepsilon,\ \varepsilon}$ 在 $\le_{\mathbb{P}'_{\mathbf{q},\ \beta_j}}$ 之上，并且在限制 $p_{\xi(2)} \restriction N_{u[\varepsilon]}$ 之上；(b) $\langle p_{\zeta,\ \zeta} \restriction N_\emptyset :\ \zeta \in (\varepsilon+1) \cap \mathscr{S}\rangle$ 是 $\le_{\mathbb{P}_{\beta[j]}}$-递增的；以及 (c) 存在 q_1，q_2，r_1，r_2 如定义 1.3(2)(c) $(\bullet_1)$-$(\bullet_5)$ 中所述，其中 $\mathbf{b}_{\mathbf{q},\ \beta_j}$ 在此表示其中的 $(\mathbf{a}\ p,\ \bar\iota)$，使得：

$$\bigvee_{\ell=1}^{2} (\forall \gamma \in \mathrm{dom}(r_\ell))\,[\gamma \in \mathrm{dom}(p_{\varepsilon,\varepsilon}) \wedge r_\ell(\gamma) \subseteq p_{\varepsilon,\varepsilon}(\gamma)]\,.$$

根据 $\mathbf{b}^\beta$ 的性质，我们可以选择 $p_{\varepsilon,\ \varepsilon}$

$_{\jmath}$定义了所有 $p_{\varepsilon(1),\ \varepsilon(2)}$-之后，我们可以继续。

$\boxplus_2$ $\mathbb{P}_{\beta_i}$ 的成员构成的以下集合有一个公共上界 q_*：

- $p_{\xi(1)}\ p_{\xi(2)}$，并且

- $p_{\varepsilon(1),\varepsilon(2)}$ for $\varepsilon(1),\varepsilon(2)\in\mathscr{S}$.

[为什么？回想断言 1.5(2) 和 1.2(1)(c)($\bullet_1$)，根据 1.5(7)，其中的条款 (A) 成立，特别是子条款 (A)(c)。关键在于：

(*) $\langle N_{v[\varepsilon(1),\varepsilon(2)]}\cap\gamma_j\setminus(N_{v[\varepsilon(1)]}\cup N_{u[\varepsilon(1)]})$：$\varepsilon(1)$ $\varepsilon(2)$ $\in\mathscr{S}\rangle$ 是一个两两不交集的序列。

为什么？因为“$N_u\cap N_v\subseteq N_{u\cap v}$对于 u，$v\in[\mathscr{U}_{\beta_j}]^{<2}$由 0.7$\bullet_7$ 得出。

因此，q_* 由 $\boxplus_2$ 是 $p_{\xi(1)}$，$p_{\xi(2)}$的一个公共上界，正如所预期的那样。 $\square_{1.6}$

备注 1.7。1）到目前为止还不需要，但我们可以在关键断言 1.6 的证明的 $(*)_4$ 中加入以下条目：(d) 若 $\beta\in w_*$ 且$\langle\alpha_{\zeta,\beta,i}:i<\iota_{\zeta,\beta}\rangle$ 按递增顺序列出 $p_\zeta(\beta)$ 对于 $\zeta\in S$ 的成员，则：

- $\langle\iota_{\zeta,\beta}:\zeta\in S\rangle$ 为常数，称为 i_β，
- 对于 $i<i_\beta$，序列$\langle\alpha_{\zeta,\beta,i}:\zeta\in S\rangle$ 为常数或递增，
- 若 i，$j<i_\beta$，真值序列⟨真值($\alpha_{\zeta,\beta,i}<\alpha_{\xi,\beta,j}$)：$\zeta<\xi$ 取自 S⟩且为常数，并且

- 若 i，$j<i_\beta$，$\zeta\neq\xi$ 取自 S 且$\alpha_{\zeta,\beta,i}=\alpha_{\xi,\beta,j}$则 $i=j$。2）我们可以将 q_1，q_2，r_1，r_2 选为典范的，也就是说：（A）在1.2(2)中，我们将(**a** p，$\bar{\imath}$)替换为(**a** p，$\bar{i}$，$\mathbb{F}$)，其中：
  - $\bullet_1$ $\mathbb{F}_{\zeta_1,\zeta_2}(q)=(q_1,q_2,r_1,r_2)=\langle\mathbb{F}_{\zeta_1,\zeta_2,\ell}(q):\ell=1,2,3,4\rangle$

$\bullet_2$ 如果 $\zeta_3<\zeta_4$ 也来自 $\mathscr{U}$，那么 $\pi\mathrm{a}_{\zeta_3,\zeta_4,\zeta_1,\zeta_2}{}^{\mathbb{F}}\zeta_{1},\zeta_{2},\ell=\mathbb{F}_{\zeta_3,\zeta_4,\ell}$；其中，如果 $p\leq q\in\mathbb{P}\mathrm{a}\cap N_{\mathrm{a}\{\varepsilon[\mathrm{a}]\}}$ 和 $\zeta_1<\zeta_2$ 来自 $\mathscr{U}$，那么$\langle\mathbb{F}_{\zeta_1,\zeta_1,\ell}(p,q):\ell<\mu\rangle$是四元组 (q_1,q_2,r_1,r_2)，如 1.2(1)(c)($\bullet_1$)-($\bullet_5$) 中所述。(B) 在 1.2(3) 中同理，并在 1.3(1)(d) 中也如此。(C) 在 1.5(1)(d) 中使用 $\mathbb{F}_\beta$。(D) 在 1.6 的证明中，在 $(*)_7$$\boxplus_1$、情形 4.2(*)4.2 中，我们使用 $\mathbb{F}_{\beta_j}$。(E) 相应地更新 1.8 的证明。

命题 1.8。若 *(A)*，则 *(B)*，其中：

(A) (a) $\mathbf{q}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{p}}$，*(b)* $2<\sigma<\lambda$，*(c)* $\mathbf{c}_{\sim}$ 是从 $[\theta]^2$ 到 σ的一个 $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$-名称函数。*(d)* $p_*\in\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$。*(B)* 存在某个 $\mathbf{b}\in\mathbf{A}^+$，使得 $\mathbb{P}_{\mathbf{b}}=\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$ 且 $\mathbf{c}_{\sim\mathbf{b}}=\mathbf{c}_{\sim}$ 以及 $p_*\leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}p_{\mathbf{b}}$。

证明。回顾假设 1.1(b)，一方面，显然可以选择 $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$，使得 $\mathbb{P}_{\mathbf{a}}=\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$ 且 $\mathbf{c}_{\sim\mathbf{a}}=\mathbf{c}_{\sim}$。另一方面，$p_{\mathbf{b}}$ 和 $\bar{\iota}_{\mathbf{b}}$ 的选择与 [She88, 2.1]的证明类似。下面详述。

首先，我们可以找到$\mathbf{a}$，使得：

$(*)^1_{\mathbf{a}}$ (a) $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$，(b) $\mathbb{P}_{\mathbf{a}}=\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}$，(c) $\gamma=\mathrm{lg}(\mathbf{q})$，(d) $\mathbf{c}_{\sim\mathbf{a}}=\mathbf{c}_{\sim}$。

为什么我们能找到？这是因为我们已按照 $(*)^1_{\mathbf{a}}$(b) 选取了 $\mathbb{P}_{\mathbf{a}}$，根据命题 1.6，它是 λ^+-cc；此外，γ，$\mathbf{c}_{\sim\mathbf{a}}$ 符合定义 1.2 的要求。最后，我们可以按要求选取 ($\mathscr{U}_{\mathbf{a}}$，$\bar{N}$)，因为假设 1.1 条款 (b) 和 0.7（尤其是条款 (b)$\bullet_{10}$）保证了 $\theta\to_{\mathrm{sq}}(\partial)^{\lambda^2}_{\lambda}$，成立。

接下来只需选取合适的 $(p,\ \bar{\iota})$，然后令 $\mathbf{b} = (\mathbf{a}\ p,\ \bar{\iota})$。令

$$Y := \{(q_1,q_2)\colon q_1,q_2 \in \mathbb{P}'_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\{\varepsilon[\mathbf{a}]\}} \text{ are above } p_* \text{ and, } q_1 \restriction (N_{\mathbf{a},\emptyset} \cap \lg(\mathbf{q})) = q_2 \restriction (N_{\mathbf{a},\emptyset} \cap \lg(\mathbf{q}))\},$$

并令 $\leq_Y$ 为 Y 上的以下二元关系：

$(*)_2$ $(p_1,p_2) \leq_Y (q_1,q_2)$ 当且仅当：(a) $(p_1,p_2) \in Y$ 且 $(q_1,q_2) \in Y$，(b) $p_1 \leq_{\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}} q_1$ 且 $p_2 \leq_{\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}} q_2$。显然，$(*)_3$ $(Y,\leq_Y)$ 是一个 $(<\lambda)$-完备偏序。[为什么？ 回顾 1.5(1)。]$(*)_4$ 对于 $(p_1,p_2) \in Y$，令 (a) $\mathrm{solv}(p_1,p_2)$ 为由满足以下条件的有序对 (ι_0,ι_1) 构成的集合：对于来自 $\mathscr{U}_{\mathbf{a}}$ 的任意 $\zeta_1 < \zeta_2$，存在 r_1,r_2，使得对于 $\ell = 1$，定义 1.2(2)(c) 的第 2 个子句 $\bullet_2$-$\bullet_5$ 成立。(b) $\mathrm{solv}^+(p_1,p_2) := \bigcap\{\mathrm{solv}(q_1,q_2) : (p_1,p_2) \leq_Y (q_1,q_2) \in Y\}$。$(*)_5$ (a) 若 $(p_1,p_2) \leq_Y (q_1,q_2)$，则：$\mathrm{solv}(p_1,p_2) \supseteq \mathrm{solv}(q_1,q_2) \supseteq \mathrm{solv}^+(q_1,q_2) \supseteq \mathrm{solv}^+(p_1,p_2)$；(b) 若 $(p_1,p_2) \in Y$，则 $\mathrm{solv}(p_1,p_2) \neq \emptyset$。

[为什么？ 条款 (a) 中的第一个包含关系成立，是因为 $\leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}}$ 具有传递性。其他包含关系显然成立，条款 (b) 也很容易证明。]

$(*)_6$ 如果 $(p_1,p_2) \in Y$，那么对于某个 (q_1,q_2) 和 $\bar{\iota}$，我们有：(a) $(p_1,p_2) \leq_Y (q_1,q_2) \in Y$；(b) 如果 $(q_1,q_2) \leq_Y (q'_1,q'_2)$，那么 $\bar{\iota} \in \mathrm{solv}(q'_1,q'_2)$；此外，$\mathrm{solv}(q_1,q_2) = \mathrm{solv}(q'_2,q'_2) = \mathrm{solv}^+(q'_1,q'_2) = \mathrm{solv}^+(q_1,q_2)$。[为什么？ 回顾 $\sigma < \lambda$，因此 $|\sigma \times \sigma| < \lambda$ 且 $(Y,\leq_Y)$ 是 λ-完备的，根据 $(*)_3$。]$(*)_7$ 对于 $p \in \mathbb{P}'_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$，令 $\mathrm{solv}(p)$ 为满足以下条件的 $\bar{\iota} \in \sigma \times \sigma$ 的集合：存在 (q_1,q_2) 使得：

- $\bullet_1$ $p \leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}} q_1, p \leq_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}}} q_2$ 并且
- $\bullet_2$ $(q_1,q_2) \in Y$，
- $\bullet_3$ $\bar{\iota} \in \mathrm{solv}^+(q_1,\ q_2)$，
- $\bullet_4$ $\mathrm{solv}(q_1,q_2) = \mathrm{solv}^+(q_1,q_2)$.

$(*)_8$ (a) 若 $p \in \mathbb{P}'_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$ 则 $\mathrm{solv}(p) \neq \emptyset$，(b) 若 $p \leq_{\mathbb{P}'_{\mathbf{a}}} q$ 来自 $\mathbb{P}'_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$ 则 $\mathrm{solv}(p) \supseteq \mathrm{solv}(q)$，(c) 若 $p \in \mathbb{P}'_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$ 则存在某个 q 和 $\bar{\iota}$，使得对每个 q'，都有 $q \leq_{\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}} q' \wedge q' \in \mathbb{P}'_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\{\varepsilon[\mathbf{a}]\}} \Rightarrow \bar{\iota} \in \mathrm{solv}(q')$。

[为什么？ 条款 (a) 由 $(*)_6$, 推出；条款 (b) 由定义得出，而条款 (c) 成立，因为 $\mathbb{P}'_{\mathbf{a}}$，甚至 $\mathbb{P}'_{\mathbf{a}} \cap N_{\mathbf{a},\ \{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$ 是 λ-完备的，并且 $|\sigma \times \sigma| < \lambda$.]

现在，应用 $(*)_8$(c) 于 p_*，完成 1.8 的证明。$\square_{1.8}$

断言 1.9. 若 *(A)* 成立，则 *(B)* 成立，其中：*(A)* *(a)* $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}_{\mathbf{p}}$ 且 $\mathbf{q}_0 <_{\mathbf{p}} \mathbf{q}$，*(b)* $\gamma(\mathbf{q}) < \mu$，因此 $\lg(\mathbf{q}) < \mu$，*(c)* $\mathbf{b} \in \mathbf{A}_{\mathbf{p}}$ 且 $\mathbb{P}_{\mathbf{b}} = \mathbb{P}_{\mathbf{q}_0}$。*(B)* 存在某个 $\mathbf{q}_1$，使得：*(a)* $\mathbf{q} \leq_{\mathbf{p}} \mathbf{q}_1$，*(b)* $\lg(\mathbf{q}_1) = \lg(\mathbf{q}) + 1$，*(c)* $\mathbf{b}_{\lg(\mathbf{q})}[\mathbf{q}_1] = \mathbf{b}$。

证明。很简单。 $\square_{1.9}$

最后，在得出主要结论之前，我们还需要证明以下内容。

断言 1.10。

(1) 假设 $\mathbf{q}\in\mathbf{Q}_{\mathbf{p}}$, $\alpha<\lg(\mathbf{q})$ 且 $\mathbf{b}=\mathbf{b}_{\mathbf{q},\alpha}=(\mathbf{a}_\alpha,p_\alpha,\bar{\iota}_\alpha)=(\mathbf{a}\ p,\bar{\iota})$，则：

- $\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}^\frown\alpha+1}}$“$\mathcal{V}_{\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}}\in[\mathscr{U}_{\mathbf{a}_\alpha}]^\partial$ 且对每个 $\alpha\neq\beta\in\mathcal{V}_{\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}}$, $\mathbf{c}_{\mathbf{a}_\alpha}\{\alpha,\beta\}\in\{\iota_1,\iota_2\}$”。

(2) 若 $\mathbf{b}=(\mathbf{a}\ p,\bar{\iota})\in\mathbf{A}^+$, $\mathrm{cf}(\partial)>\lambda$，且在 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}_{\mathbf{a}}}$, $\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}$ 满足 λ^+-*cc*，则对某个 $p\in\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}\cap\mathbb{P}_{\mathbf{a}}\cap N_{\mathbf{a},\{\varepsilon[\mathbf{a}]\}}$ 有[4] $p\Vdash_{\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}}$“$\mathcal{V}_{\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}}\in[\mathscr{U}_{\mathbf{a}}]^\partial$ 且对每个 $\alpha\neq\beta\in\mathcal{V}_{\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}}$, $\mathbf{c}_{\mathbf{a}}\{\alpha,\beta\}\in\{\iota_1,\iota_2\}$”。

证明。 (1) 结论中的第二个短语均由 $\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}$ 的定义得出。

根据“$\mathbb{P}_{\mathbf{q}}$ 满足 λ^+-cc”的证明，我们可以证明，对于 $\varepsilon<\partial$，集合

$$\mathscr{I}_\varepsilon:=\{p\in\mathbb{P}'_{\mathbf{q}}:\ \alpha\in\mathrm{dom}(p),\text{ 并且存在 }\beta\in p(\alpha)\text{ 使得 }\varepsilon<\mathrm{otp}(\mathscr{U}_{\mathbf{a}_\alpha}\cap\beta)\}.$$

(2) 显然，对于每个 $\beta\in\mathscr{U}_{\mathbf{a}}$，我们都可以选择 $p^0_\beta=\{\beta\}$, $q_\beta=\{(p,p^0_\beta)\}$。显然，$q_\beta\in\mathbb{P}_\alpha*\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}$ 对于 $\beta\in\mathscr{U}_{\mathbf{a}}$ 成立。因此，由 λ^+-cc 可知，存在某个 $\beta\in\mathscr{U}_{\mathbf{a}}$, $q_\beta\Vdash$“$\{\varepsilon\in\mathscr{U}_{\mathbf{a}}:\ q_\varepsilon\in\mathbb{Q}_{\mathbf{b}}\}\in[\mathscr{U}_{\mathbf{a}}]^\partial$；假设 $\mathrm{cf}(\partial)>\lambda$。$\square_{1.10}$

结论 1.11。 存在一个强迫概念 $\mathbb{P}$，满足以下条件：

(a) $\mathbb{P}$ 是 λ^+-*cc*，基数为 μ。*(b)* $\mathbb{P}$ 是 $(<\lambda)$-完备的；因此，它不坍缩任何基数，不改变任何余终数，并保留区间 $[\lambda,\mu)$之外的基数算术。*(c)* $\Vdash_{\mathbb{P}}$“$2^\lambda=\mu$”。*(d)* 对每个 $\sigma\in(2,\lambda)$，$\Vdash_{\mathbb{P}}$“$\theta\to[\partial]^2_{\sigma,2}$”。

证明。 选取一个 $\leq_{\mathbf{p}}$-递增的连续序列 $\langle\mathbf{q}_\alpha:\ \alpha<\mu\rangle\in{}^\mu(\mathbf{Q}_{\mathbf{p}})$，使得 $\lg(\mathbf{q}_\alpha)=\alpha$，$\mathbb{P}_{\mathbf{q}_\alpha}$ 的基数为 $\leq(|\alpha|+\lambda)^{<\lambda}$ 并且，

- 若 $\alpha<\mu$ 且 $\Vdash_{\mathbb{P}_{\mathbf{q}^\frown\alpha}}$“$\mathbf{c}_{\tilde{}}:\ [\theta]^2\to\sigma$”，则对于无界多个 $\beta\in[\alpha,\mu)$，$\mathbf{c}_{\tilde{}}{}^\frown\mathbf{q}_{\beta+1,\beta}=\mathbf{c}_{\tilde{}}$。

根据下文的命题 1.8 和断言 1.9，满足要求的、具有 $\mathbf{b}_\beta[\mathbf{q}_{\beta+1}]$ 以及 $\mathbf{c}_{\tilde{}}[\mathbf{b}_\beta[\mathbf{q}_{\beta+1}]]=\mathbf{c}_{\tilde{}}$ 的 $\mathbf{b}_\beta[\mathbf{q}_{\beta+1}]$ 的存在性成立。

显然 $\bigcup\{\mathbb{P}_{\mathbf{q}_\beta}:\ \beta<\mu\}$ 是一个强迫概念，正如所要求的。 $\square_{1.11}$

结论 1.11 是有意义的，因为：

事实 1.12. 假设 $\lambda=\lambda^{<\lambda}<\partial<\theta<\mu=\mu^\theta$，且 $[\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^\lambda<\mu]$，$\theta>\beth_2(\kappa)$ 和 $\partial=\kappa^+$, $\kappa=\kappa^\lambda$。那么假设 1.1 中的要求成立。

注 1.13. 为说明这一假设是合理的，请注意：

(A) 省略 $\kappa=\kappa^\lambda$ 并无帮助。(B) $\theta\to_{\mathrm{sq}}(\partial)^{2\leq\lambda}_\partial$ 蕴含 $\theta\to(\partial)^2_{2^\partial}$，因此必然有 $\theta>2^{2^\partial}$。

对于 θ 的更强下界，参见 [She89]。

关键在于证明 $\theta\to_{\mathrm{sq}}(\partial)^{\leq\lambda\ 2}_\partial$，。为此，请参见 [She89]，$\theta=\beth_m(\partial)$，某个较小的 m就足够了；1.11 中的界取决于此；我们打算在 [S$^+$] 中回到这个问题。无论如何，对我来说，只要有 $\theta<\partial^{+\omega}$ 和 $[\partial,\partial^{+\omega}]$ 中的广义连续统假设就足够了。

证明。 关键是证明 $\theta\to_{\mathrm{sq}}(\partial)^{\lambda\ 2}_\partial$，。设 $\mathscr{B}$ 如 0.7(a) 中所述，$\partial_1=2^\kappa$、$\partial_2=2^{\partial_1}$和 $\theta>\partial_2$。

设 $\chi>2^\mu$，且 $\mathfrak{C}_*$ 是 $(\mathscr{H}(\chi)\in,\ <^*_\chi,\ \mathscr{B})$ 的一个扩张，其词汇的基数为 λ，满足对于任意有限集合 $u\subseteq\mathscr{H}(\chi)$，$u,N_u:=\mathrm{Sk}(u,\ \mathfrak{C}_*)$ 的 Skolem 包的基数为 λ，且 $|N_u|^{<\lambda}\subseteq N_u$。

[4]我们可以省略 p，但这并不重要。

设 $\mathfrak{C}_2 \prec_{\mathbb{L}_{\partial(1)^+,\ \partial(1)^+}} \mathfrak{C}_*$ 的基数为 ∂_2，满足 $\partial_2+1 \subseteq \mathfrak{C}_2$。令 $\beta_1 := \min(\theta \setminus \mathfrak{C}_2)$。类似地，选取基数为 ∂_1 的 $\mathfrak{C}_1 \prec_{\mathbb{L}_{\partial,\ \partial}} \mathfrak{C}_*$，使得 $\partial_1+1 \subseteq \mathfrak{C}_1$且 $\{\mathfrak{C}_2, \beta_0\} \subseteq \mathfrak{C}_1$。

令 $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$，并选取实现 $\mathbb{L}_{\partial,\partial}$-类型的 $\beta_0 \in \beta_1 \cap \mathfrak{C}_2 \subseteq \theta \cap \mathfrak{C}_2$，它在 $\mathfrak{C}_0$ 上实现 β_1。

Now,

$(*)_1$ 通过对 $\varepsilon < \partial$ 作归纳法来选取 $\alpha_\varepsilon \in \mathfrak{C}_0 \cap \theta$，使得：

- α_ε、β_1 在 $\mathfrak{C}_*$ 中关于集合 $\{\beta_2\} \cup (A_\varepsilon \cap \mathfrak{C}_0)$ 实现相同的一阶类型，其中：

$$A_\varepsilon = \mathrm{Sk}_{\mathfrak{C}}(\{\alpha_\zeta : \zeta < \varepsilon\} \cup \{\beta_1, \beta_0\}).$$

$(*)_2$ 令 $N^\bullet_\emptyset = N_{\{\beta_0,\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0$。

注意，

$(*)_3$ 对于 $\varepsilon < \zeta < \partial$，以下各对在 $\mathfrak{C}_*$ 中实现相同的 N^*_0 上的类型：

- $\bullet_1$ $(\alpha_\varepsilon,\ \alpha_\zeta)$,
- $\bullet_2$ $(\alpha_\varepsilon,\ \beta_0)$,
- $\bullet_3$ $(\alpha_\varepsilon,\ \beta_1)$,
- $\bullet_4$ $(\beta_0,\ \beta_1)$。

[为什么？对于 $\bullet_1$ 和 $\bullet_2$ 的等式，请注意 α_ε 的选择。
对于 $\bullet_2$ 和 $\bullet_3$的相等性，注意 β_0的选择。
对于 $\bullet_3$ 和 $\bullet_4$ 的相等性，注意 α_ε 的选择。]

$(*)_4$
- $\bullet_1$ $N^*_{\{\varepsilon,\zeta\}} = N_{\{\alpha_\varepsilon,\alpha_\zeta\}}$, so for $\varepsilon < \zeta < \partial$,
- $\bullet_2$ $N^*_{\{\varepsilon,\zeta\}} \prec \mathfrak{C}_0$,
- $\bullet_3$ $N^\bullet_\emptyset \prec N^*_{\{\varepsilon,\zeta\}}$.

$(*)_5$ 对于 $\varepsilon < \zeta < \partial$，令 $f_{\{\varepsilon,\zeta\}}$ 为从 $N^*_{\{\varepsilon,\zeta\}}$ 到 $N_{\{\beta_0,\beta_1\}}$ 的同构。

[为什么它存在？根据 $(*)_3$。]

$(*)_6$ $f_{\{\varepsilon,\zeta\}}$是 $N^\bullet_\emptyset$上的恒等映射（以及 $N^\bullet_\emptyset \prec N_{\{\varepsilon,\zeta\}}$上的恒等映射）。

[为什么？根据 $(*)_2$。]

$(*)_7$ 若 $\varepsilon(0) < \zeta(0) < \partial$，$\varepsilon(1) < \zeta(1) < \partial$，且 $\{\varepsilon(0)\ \zeta(0)\} \cap \{\varepsilon(1)\ \zeta(1)\} = \emptyset$，则

$$N^*_{\{\varepsilon(0),\zeta(0)\}} \cap N^*_{\{\varepsilon(1),\zeta(1)\}} = N_{\{\beta_0,\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0 = N^\bullet_\emptyset.$$

[为什么？第二个等式由 $(*)_2$ 得出；不失一般性，令 $\zeta(0) < \zeta(1)$。现在，

- $\bullet_1$ $N^*_{\{\varepsilon(0)\ \zeta(0)\}} \cap N^*_{\{\varepsilon(1)\ \zeta(1)\}} = N^*_{\{\varepsilon(0)\ \zeta(0)\}} \cap N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)\ \beta_1}\}}$由 $\zeta(1)$ 的选取可知。
- $\bullet_2$ 若 $\zeta(0) < \varepsilon(1)$，则$N^*_{\{\varepsilon(0)\ \zeta(0)\}} \cap N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)\ \beta_1}\}} = N^*_{\{\varepsilon(0)\ \zeta(0)\}\}} \cap N_{\{\beta_0,\beta_1\}} = N_{\{\varepsilon(0)\ \zeta(0)\}} \cap N^\bullet_\emptyset = N^\bullet_\emptyset$ 因为第一个等式由 $\alpha_{\varepsilon(1)}$ 的选取可得，第二个等式由 $(*)_4\bullet_2$ 和 $(*)_2$ 得出；第三个等式由 $(*)_3$ 得出。
- $\bullet_3$ 若 $\varepsilon(0) < \varepsilon(1) < \zeta(0)$，则：

$$\begin{aligned}
N^*_{\{\varepsilon(0),\zeta(0)\}} \cap N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} &= N_{\{\alpha_{\varepsilon(0)},\beta_0\}} \cap N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \\
&= \left(N^*_{\{\alpha_{\varepsilon(0)},\beta_0\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \cap \left(N_{\{\alpha_{\varepsilon(0)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \\
&= \left(N_{\{\alpha_{\zeta(0)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \cap \left(N_{\{\alpha_{\zeta(0)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \\
&= \left(N_{\{\alpha_{\zeta(0)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \cap \left(N_{\{\beta_0,\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \\
&= \left(N_{\{\alpha_{\varepsilon(0)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \cap N^\bullet_\emptyset = N^\bullet_\emptyset.
\end{aligned}$$

[为什么? 第一个等式由 β_0 的选取可得。第二个等式由 $N_{\{\varepsilon(0),\zeta(0)\}} \subseteq \mathfrak{C}_0$ 和第一个等式可得。第三个等式由β_0. 的选取可得。第四个等式由 $\alpha_{\zeta(0)}$ 的选取可得。第五个等式由 $N^\bullet_\emptyset$ 的选取可得，即 $(*)_2$。最后，第六个等式由 $N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \supseteq N^\bullet_\emptyset$ 以及$\alpha_{\varepsilon(2)}$的选取可得。]

$\bullet_4$ 若 $\varepsilon(1) < \varepsilon(0)$，则:

$$\begin{aligned} N^*_{\{\varepsilon(0),\zeta(0)\}} \cap N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} &= N_{\{\alpha_{\varepsilon(0)},\beta_0\}} \cap N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \\ &= \left(N^*_{\{\alpha_{\varepsilon(0)},\beta_0\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \cap \left(N^*_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \\ &= \left(N_{\{\alpha_{\varepsilon(0)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \cap \left(N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) \\ &= \left(N_{\{\beta_0,\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}\right) \cap \left(N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}\right) \\ &= N^*_\emptyset \cap \left(N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0\right) = N^\bullet_\emptyset. \end{aligned}$$

[为什么? 第一个等式由 β_0 的选择得到。第二个等式成立，因为 $N_{\{\varepsilon(0),\zeta(0)\}} \subseteq \mathfrak{C}_0$ 以及第一个等式。第三个等式由β_0的选择得到。第四个等式由 $\alpha_{\varepsilon(0)}$ 的选择得到。第五个等式由 $N^\bullet_\emptyset$ 的选择得到，也就是由 $(*)_2$ 得到。最后，第六个等式成立，因为 $N_{\{\alpha_{\varepsilon(1)},\beta_1\}} \supseteq N^\bullet_\emptyset$，且由$\alpha_{\varepsilon(0)}$的选择得到。

回顾 $\bullet_1$ 以及 $\bullet_2, \bullet_3$ 和 $\bullet_4$ 中的分类讨论，我们便完成了对 $(*)_6$ 的证明。]

$(*)_7$ if $\varepsilon < \zeta(1) < \zeta(2) < \partial$, then $N_{\{\varepsilon,\zeta(1)\}} \cap N_{\varepsilon,\zeta(2)} = N^\uparrow_{\{\varepsilon\}} := N_{\{\alpha_\varepsilon,\beta_1\}} \restriction \mathfrak{C}_0$.

[为什么? 由 $\alpha_{\zeta(2)}$ 和$\alpha_{\zeta(1)}$的选择可知。]

$(*)_8$ if $\zeta_1 < \zeta_2 < \varepsilon < \partial$, then $N^*_{\{\zeta_1,\varepsilon\}} \cap N^*_{\{\zeta_2,\varepsilon\}} = N^\downarrow_{\{\varepsilon\}}$, where $N^\downarrow_{\{\varepsilon\}} := f^{-1}_{\varepsilon,\varepsilon+1}(N_{\{\beta_0,\beta_1\}})$.

[为什么? 对于 $\zeta < \partial$，根据 β_0 的选择，$N_{\{\alpha_\zeta,\beta_0\}} \cap \mathfrak{C}_0 = N_{\{\alpha_{\zeta_3},\beta_1\}} \cap \mathfrak{C}_0$；而 $\alpha_\varepsilon, \beta_0$ 在 $\{\beta_1\} \cup (A_\varepsilon \cap \mathfrak{C}_0)$ 上实现了相同的 $\mathfrak{C}_*$ 类型。]

$(*)_9$
- Let $N^*_{\{\varepsilon\}}$ be the $\mathrm{Sk}(N^\uparrow_{\{\varepsilon\}} \cup N^\downarrow_{\{\varepsilon\}}, \mathfrak{C}_*)$, and
- let $M^*_\varepsilon = \left(\mathrm{Sk}(\bigcup_{\ell<5} N^*_{\{5\varepsilon+\ell\}} \cup \{N_{\{5\varepsilon+m,\delta\varepsilon+n\}} : m < n < 5\}^*)\right)_{\ell<5}$,
- let M^+_ε be M^*_ε expanded by:
- $c^{M^+_\varepsilon}_\ell = \alpha_{5\varepsilon+\ell}$ for $\ell < 5$,
- $p^{M^+_\varepsilon}_\ell = |N^*_{\{5\varepsilon+\ell\}}|$ for $\ell < 5$,
- $P^{M^+_\varepsilon}_{m,n} = |N^*_{\{5\varepsilon+m,5\varepsilon+n:\ m<n<5\}}|$.

$(*)_{10}$ 存在某个 $\mathscr{U}_1 \in [\partial]^\partial$，使得:
- $\langle M^*_\varepsilon : \varepsilon \in \mathscr{U}\rangle$ 是一个以 $N^*_\emptyset$ 为核的 Δ-系统,
- 这些 M_ε 两两同构。

[为什么? 因为根据 Δ-系统引理，$\partial = \partial_0$ 和 $\partial_0 = (\partial_0)^+$。]

$(*)_{11}$ $\langle N^*_u$: 当 $\mathscr{U}_2 = \{5\varepsilon+2$ 和 $N^*_{\{5\varepsilon+2\}} = M^*_\varepsilon$ 时，$u \in \mathscr{U}_2\rangle$是必需的。严格来说，$\mathscr{U}_3 = \{\alpha_\zeta : \zeta \in \mathscr{U}_2\}$和 $N^*_{\{\alpha_\zeta :\ \zeta\in u\}} = N^*_u$对于 $u \in [\mathscr{U}_3]^{\leq 2}$。$\square_{1.12}$

References

[EH71] 保罗·厄尔德什和安德拉斯·哈伊纳尔， *Unsolved problems in set theory*《公理集合论》（普罗维登斯，罗得岛州），《纯粹数学研讨会论文集》，第十三卷第一部分，美国数学会，1971年，第17–48页。[Kom25] P´ ´ *The Erdős-Hajnal Problem List* **31** 2025 3, 彼得·孔亚特，《符号逻辑公报》（），第–期。[RS00] 马里乌什·拉布斯和Saharon Shelah， *Covering a function on the plane by two continuous functions on an uncountable square—the consistency* **103** 2000 ，《纯粹与应用逻辑年刊》（），第1-3期，229–240页，arXiv: math/9706223。MR 1756147

418 461

[S+] S. Shelah等, *Tba*, 编写中。预备编号：Sh:F2407。[She88] Saharon Shelah, *Was Sierpiński right? I*, 《以色列数学杂志》。**62** （1988），第3期，355–380页。MR 955139[She89] ,
Consistency of positive partition theorems for graphs and models, 《集合论及其应用》（加拿大安大略省多伦多，1987）, 《数学讲义》，第1401卷，施普林格，柏林，1989年，第167–193页。MR 1031773[She92] ,
Strong partition relations below the power set: consistency; was Sierpiński right? II 1991 ´ , 《集合、图与数》（布达佩斯， ），博尔尧伊·亚诺什数学学会专题论文集，第60卷，北荷兰，阿姆斯特丹，1992年，arXiv: math/9201244，第637–668页。MR 1218224[She95] ,
Possibly every real function is continuous on a non-meagre set, 《贝尔格莱德数学研究所出版物》（新系列） **57 71** 1995 47 60, 9511220 1387353 ( )
[96] *Was Sierpiński right? III. Can continuum-c.c. times c.c.c. be continuum-c.c.?* （ ）, – arXiv: math/ 。MR She, , 《纯粹与应用逻辑年刊》 **78** 1996 1 3, 259 269, 9509226 1395402 （ ）, 第-
[00] *Was Sierpiński right? IV* **65** 2000 3, 1031 1054, 期– arXiv: math/ 。MR She, , 《符号逻辑杂志》（ ）, 第–期– arXiv: math/9712282。MR 1791363

Einstein Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, 9190401,Jerusalem, Israel; and, Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway,NJ 08854-8019, USA*URL*: https://shelah.logic.at/