arXiv:2601.02929v1 [math.PR] 6 Jan 2026

# 内接三角形包含给定点的概率是多少?

Abdulamin Ismailov[1]

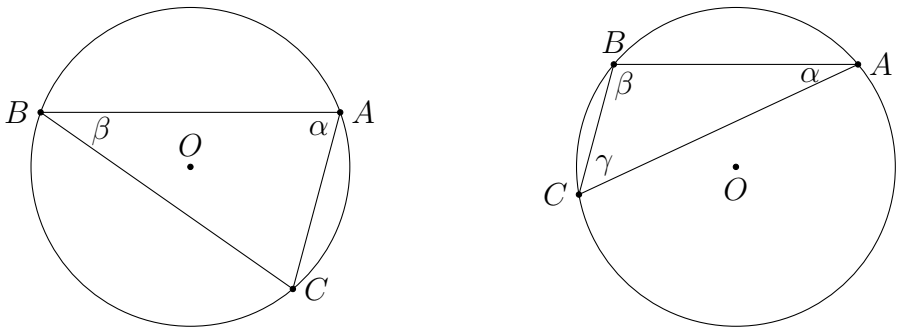
**摘要**

在单位圆上均匀选取三个点，它们构成的三角形以概率$P(r) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi^2}\mathrm{Li}_2(r^2)$包含一个点 $X$，该点到圆心的距离为 $r \in [0;\ 1]$，其中 $\mathrm{Li}_2$是二重对数函数（Jeremy Tan Jie Rui，2018）。本文给出这一结论的另一种证明，并讨论另外几个涉及二重对数函数的几何概率问题。

## 1 引言

三角形 = 积分

在圆上均匀选取三个点，它们构成的三角形包含圆心的概率是多少? 我们将在下文看到，符合条件的三角形是非钝角三角形。




(a) 锐角三角形　　(b) 钝角三角形

图 1

[1]高等经济学院，arismailov@edu.hse.ru

于是，这个问题可以归结为一个方程组

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi \\ \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \beta \le \frac{\pi}{2} \\ \gamma \le \frac{\pi}{2} \end{cases}, \tag{1}$$

可以将其可视化如下：由此我们得出答案是$\frac{1}{4}$。但是，如果 –

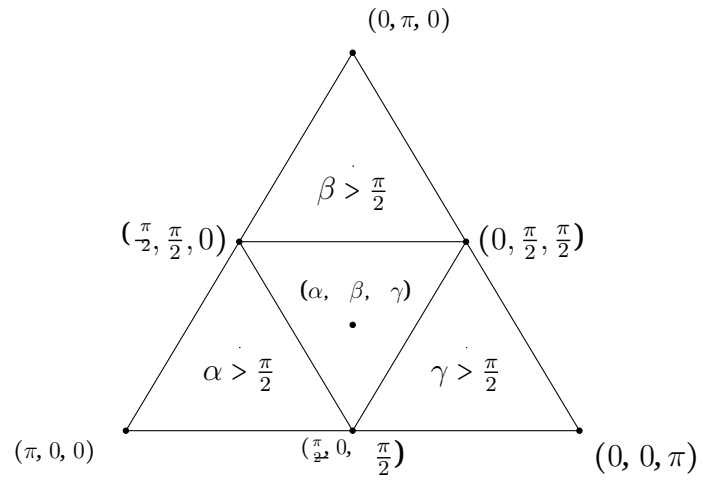



图2：将（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$）看作重心坐标

如果我们不选圆心 $O$，而是在圆内任意选取一点 $X$，会怎样？显然，答案只取决于比值 $r = \frac{OX}{R}$，其中 $R$ 是圆的半径。用 $P(r)$ 表示所求的概率。目前我们知道

$$P(0) = \frac{1}{4}, \quad P(1) = 0, \tag{2}$$

第二个等式对应于一个位于圆上的点。

Jeremy Tan Jie Rui 已证明[2]

[2]在 Mathematics Stack Exchange 的一篇帖子中 https://math.stackexchange.com/questions/2641793/一个顶点位于圆上的随机三角形包含任意一个点的概率

**定理 1.1.** 在圆心为 $O$、半径为$R$ 的圆上均匀选取三个点，所得三角形包含其内部点 $X$ 的概率为

$$P(r) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi^2} Li_2(r^2), \tag{3}$$

其中$r = \frac{OX}{R}$。

提醒读者，对于 $|z| \le 1$，二重对数函数可由幂级数表示

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{4}$$

并可扩展至 $\mathbb{C} \setminus (1;\infty)$，形式如下

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-u)}{u} du, \tag{5}$$

其中积分可沿连接 0 与 $z$ 的射线进行。

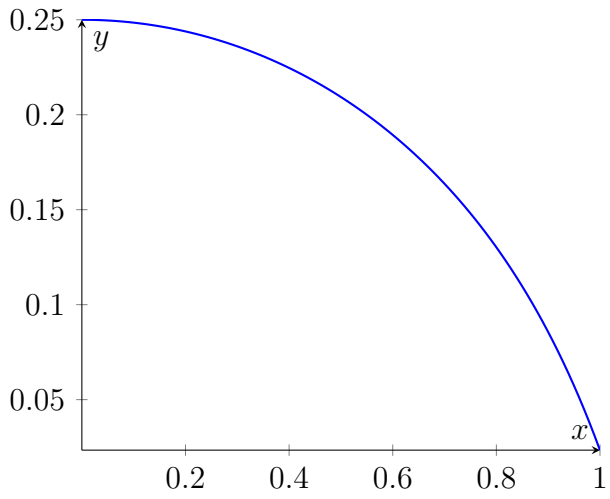



图 3： $P(r)$ 的图像

注意，二重对数函数在 0 和 1 处的取值为

$$\mathrm{Li}_2(0) = 0, \quad \mathrm{Li}_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

由此可见，(3) 与 (2) 一致。

本文给出了定理 1.1 的另一种证明。经过若干推导，我们得到了所讨论概率的公式 (18)

$$P(r) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\int_C \mathrm{dif}(XC)^2 d\mu,$$

其中，dif($XC$) 是直线 $XC$ 将圆分成的两段圆弧之差。我们只需通过围道积分来计算所得的积分表达式。

**几何概率问题中的二重对数**。二重对数函数会作为几何概率问题的答案出现，这很令人好奇。

例如，Karamata [2] 证明，单位圆的两条随机弦的交点到原点的距离小于 $r$ 的概率为

$$\frac{6}{\pi^2}\mathrm{Li}_2(r^2) \tag{6}$$

当 $r \in [0;\ 1]$ 时。[1] 将这一结果推广到了 $r > 1$。式 (3) 与式 (6) 之间是否存在联系?

在 Mathematics Stack Exchange 的一篇帖子中，有人观察到一个神秘的巧合。[3] 取三个半径相等且彼此相切的圆，如图 4 所示。它们的圆心共线且互不相同。

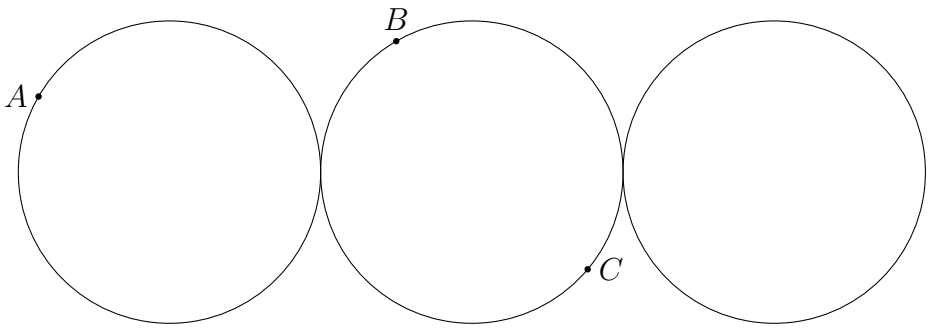



图 4：三个相切圆

在最左侧的圆上选取随机点 $A$。在中间的圆上选取随机点 $B$ 和 $C$。事实证明，直线 $AB$ 和 $BC$ 与最右侧圆相交的

[3] https://math.stackexchange.com/questions/5089940/why-do-these-two-直线-have-the-same-概率-of-intersecting-the-圆

概率相同。该概率为

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{3}{8}\ln^2 2 + \mathrm{Li}_2(-\sqrt{2}) + 3\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

约为 0.3871287106。

## 1.1 证明概要

第1.2节引入的记号在定理 1.1 的证明中起着关键作用。在第2.1节中，我们利用 (7)、(8)、(9) 之间若干非平凡关系 (10)、(12)、(15)，推导出关于 $P(r)$ 的线性方程 (17)。随后，我们将 $P(r)$ 表示为某个积分 (19)，并在第2.2节中计算该积分。

## 1.2 记号

假设我们的圆的半径为 $R = 1$。令 $A, B$ 和 $C$ 为圆上的点——→并令 $X$ 为圆内的一点。用 $AB$ 表示从 $A$ 指向 $B$ 的直线 $AB$。

$$[X \in ABC] = \begin{cases} 1, & \text{if } X \text{ is inside triangle } ABC \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) = \begin{cases} +1, & \text{if } X \text{ is to the right of } \overrightarrow{AB} \text{ or on } \overrightarrow{AB} \\ -1, & \text{if } X \text{ is to the left of } \overrightarrow{AB}. \end{cases} \tag{8}$$

$$\widehat{ABC} = \begin{cases} +1, & \text{if triangle } ABC \text{ is oriented clockwise} \\ -1, & \text{if triangle } ABC \text{ is oriented counterclockwise.} \end{cases} \tag{9}$$

我们将对三角形集合的积分记为

$$\int_{ABC} f(ABC) = \int_A \int_B \int_C f(ABC)(d\mu)^3,$$

其中，$\mu$是单位圆上的归一化勒贝格测度。我们将对按顺时针方向定向的三角形集合进行的积分记为

$$\int_{\widehat{ABC}=1} f(ABC) = \iiint_{\widehat{ABC}=1} f(ABC)(d\mu)^3.$$

Let

$$\angle(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{KL})$$

$\longrightarrow$ $\longrightarrow$表示向量对 $MN$ 和 $KL$之间的较小夹角。复数 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$ 的辐角记为 arg($z$)，在正实轴上，arg($z$)为零。

# 2 定理 1.1 的证明

## 2.1 条件演算

注意， $[X \in ABC]$ 可以用 R 表示。事实上，设 $ABC$ 为一个顺时针定向的三角形，并考虑求和 $s = \mathrm{R}(X, \overrightarrow{AB}) + \mathrm{R}(X, \overrightarrow{BC}) + \mathrm{R}(X, \overrightarrow{CA})$。在 $ABC$ 内部，它等于 3；在外部，它等于 1。如果将同一个三角形改为逆时针定向，那么内部将得到 $-3$，外部则得到 $-1$。因此我们得到一个关系

$$(2[X \in ABC] + 1)\widehat{ABC} = \mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) + \mathcal{R}(X, \overrightarrow{BC}) + \mathcal{R}(X, \overrightarrow{CA}). \qquad (10)$$

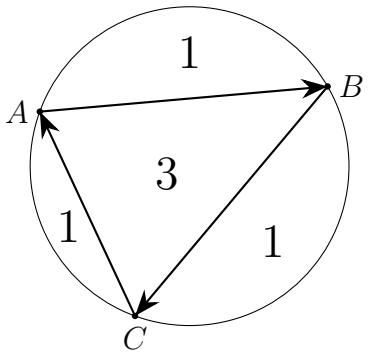



图 5

交换一对顶点的映射 $ABC \to BAC$ 是在顺时针定向三角形与逆时针定向三角形之间的保测双射。因此，我们可以将注意力限制在顺时针定向三角形上

$$\begin{aligned} P(r) &= \int_{ABC} [X \in ABC] = \int_{\widehat{ABC}=1} [X \in ABC] + \int_{\widehat{ABC}=-1} [X \in ABC] \\ &= \int_{\widehat{ABC}=1} [X \in ABC] + \int_{\widehat{BAC}=1} [X \in BAC] = 2 \int_{\widehat{ABC}=1} [X \in ABC] \end{aligned}$$

并应用关系式（10）

$$\int_{\widehat{ABC}=1} 2[X \in ABC] = \int_{\widehat{ABC}=1} [\mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) + \mathcal{R}(X, \overrightarrow{BC}) + \mathcal{R}(X, \overrightarrow{CA}) - 1].$$

根据对称性

$$\int_{\widehat{ABC}=1} \mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) = \int_{\widehat{ABC}=1} \mathcal{R}(X, \overrightarrow{BC}) = \int_{\widehat{ABC}=1} \mathcal{R}(X, \overrightarrow{CA}).$$

综上所述，我们得到

$$P(r) = 3 \int_{\widehat{ABC}=1} [\mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB})] - \frac{1}{2}. \tag{11}$$

注意，当且仅当 $C$ 位于弦 $AB$ 的右侧 $\longrightarrow$ 时，三角形 $ABC$ 的方向为顺时针

$$\widehat{ABC} = \mathcal{R}(C, \overrightarrow{AB}). \tag{12}$$

利用这一关系，我们可以将 (11) 中的积分域扩展到所有三角形的集合

$$\int_{\widehat{ABC}=1} \mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) = \int_{ABC} \mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) \frac{1 + \mathcal{R}(C, \overrightarrow{AB})}{2}. \tag{13}$$

在积分中

$$\int_{ABC} \mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) \tag{14}$$

我们可以交换顶点 $A$ 和 $B$。由于点 $X$ 不在 $AB$ 上

$$\mathcal{R}(X, \overrightarrow{BA}) = -\mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}),$$

积分 (14) 为零。

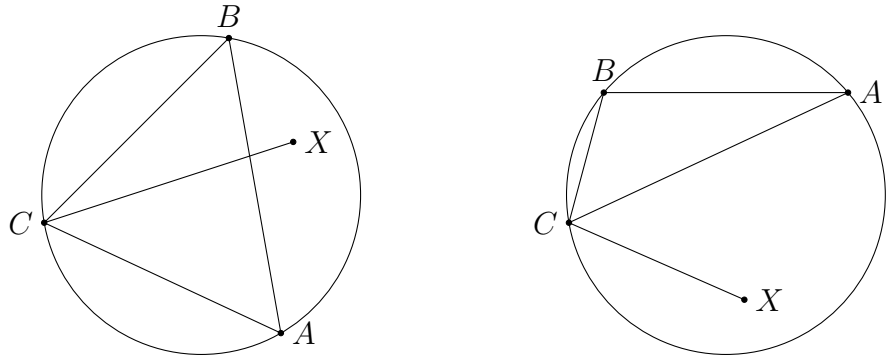
另一个关系有助于我们变换积分

$$\int_{ABC} \mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) \mathcal{R}(C, \overrightarrow{AB}).$$

注意到，乘积 $\mathrm{R}(X, -\overrightarrow{AB})\mathrm{R}(C, -\overrightarrow{AB})$ 和 $\mathrm{R}(A, -\overrightarrow{XC})\mathrm{R}(B, -\overrightarrow{XC})$ 给出了 $[X \in ABC]$ 的一个表达式（假设 $X$ 不在三角形 $ABC$ 上）

$$2[X \in ABC] = \mathcal{R}(X, \overrightarrow{AB}) \mathcal{R}(C, \overrightarrow{AB}) - \mathcal{R}(A, \overrightarrow{XC}) \mathcal{R}(B, \overrightarrow{XC}), \tag{15}$$

我们通过考虑两种情况来验证这一点：线段 $AB$ 与 $CX$ 相交，或线段 $AB$ 与 $CX$ 不相交。假设属于第一种情况。点 $C$ 和 $X$ 位于 $AB$的两侧，因此 $X$ 不可能在 $ABC$内部。此外，点 $A$和 $B$位于 $CX$的两侧。换句话说，两个乘积 R($X$, —$\overrightarrow{AB}$)R($C$, —$\overrightarrow{AB}$) 和 R($A$, ——$\overrightarrow{XC}$)R($B$, ——$\overrightarrow{XC}$) 都等于 –1，于是（15）中的等式成立。现在假设属于第二种情况。点 $C$ 和 $X$ 位于 $AB$的同一侧，这意味着 R($X$, —$\overrightarrow{AB}$)R($C$, —$\overrightarrow{AB}$) 等于 1。当且仅当 $X$ 位于角 $\angle BCA$内部时，点 $X$ 才位于三角形 $ABC$内部；也就是说，直线 $CX$ 将 $A$和 $B$分隔开。后者等价于 R($A$, ——$\overrightarrow{XC}$)R($B$, ——$\overrightarrow{XC}$) 等于 –1，因此（15）中的等式再次成立。




(a) 线段 $AB$ 和 $CX$ 相交　　(b) 线段 $AB$ 和 $CX$ 不相交

图 6

应用公式 (15) 可得

$$\begin{aligned}\int_{ABC}\mathcal{R}(X,\overrightarrow{AB})\mathcal{R}(C,\overrightarrow{AB}) &= \int_{ABC}[2[X\in ABC]+\mathcal{R}(A,\overrightarrow{XC})\mathcal{R}(B,\overrightarrow{XC})]\\ &= 2P(r)+\int_{ABC}\mathcal{R}(A,\overrightarrow{XC})\mathcal{R}(B,\overrightarrow{XC})\\ &= 2P(r)+\int_C\left(\int_A\mathcal{R}(A,\overrightarrow{XC})d\mu\right)^2 d\mu, \quad (16)\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立，是因为 R($A$, ——$\overrightarrow{XC}$) 和 R($B$, ——$\overrightarrow{XC}$) 是变量 $A$ 和 $B$ 的两个相互独立的函数。

综合（11）、（13）和（16），我们得到

$$P(r)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\int_C\left(\int_A\mathcal{R}(A,\overrightarrow{XC})d\mu\right)^2 d\mu+3P(r). \quad (17)$$

解这个线性方程，我们得到 $P(r)$ 的公式

$$P(r) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\int_C \left(\int_A \mathcal{R}(A, \overrightarrow{XC}) d\mu\right)^2 d\mu. \tag{18}$$

## 2.2 积分

直线 $XC$ 将我们的圆分成两段圆弧。一段圆弧上，$\mathrm{R}(A, \text{——}\overrightarrow{XC}) = 1$；另一段圆弧上，$\mathrm{R}(A, \text{——}\overrightarrow{XC}) = -1$。两段圆弧之差等于 $2\angle MON$（见图7）。圆心角 $\angle MON$ 是圆周角 $\angle OCX$的两倍。因此

$$\int_A \mathcal{R}(A, \overrightarrow{XC}) d\mu = \pm\frac{1}{2\pi}(4\angle OCX) = \pm\frac{2}{\pi}\angle(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{XC}).$$

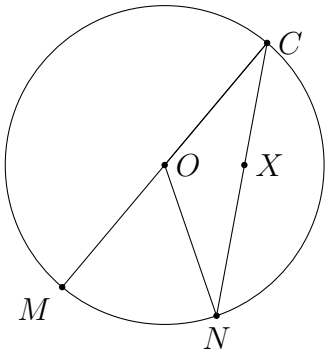



图7

现在我们转而讨论复数。设——$\overrightarrow{OC}$对应复平面单位圆上的一个数 $e^{i\theta}$，而 $OX$ 对应 $r$。采用这种新记号，

$$\begin{aligned}\angle(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{XC}) = \angle(c, c-r) &= \angle(1, 1-r/c) \\ &= \arg(1 - re^{-i\theta}) = -\arg(1 - re^{i\theta}).\end{aligned}$$

在第二个等式中，我们利用旋转 $-\theta$ 保持角度不变这一性质；在最后一个等式中，我们使用共轭

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$

公式 (18) 变为

$$P(r) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi^3}\int_0^{2\pi} \arg(1 - re^{i\theta})^2 d\theta. \tag{19}$$

所讨论的积分

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \arg(1 - re^{i\theta})^2 d\theta$$

我们在 $r \in (0; 1)$ 处求导，以消去平方

$$\frac{d}{dr} I(r) = -2\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} \arg(1 - re^{i\theta}) d\theta. \tag{20}$$

具体来说，注意到 $1 - re^{i\theta}$ 位于右开半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ 中，因此 $\arg(1 - re^{i\theta})$ 是 $\ln(1 - re^{i\theta})$ 的虚部；后者是定义域为 $\mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$ 且 $\ln(1) = 0$ 的复对数函数。这一观察有助于我们计算 $\arg(1 - re^{i\theta})$ 的导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \arg(1 - re^{i\theta}) &= \operatorname{Im}\left(\frac{\partial}{\partial r} \ln(1 - re^{i\theta})\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-e^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{r - e^{i\theta}}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})}\right) = \frac{-\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}.\end{aligned}$$

接下来，我们将 (20) 化为围道积分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} I(r) &= -2\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})(ie^{i\theta})} \arg(1 - re^{i\theta})(ie^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{(1 - re^{i\theta})(e^{i\theta} - r)} \arg(1 - re^{i\theta})(ie^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta} - 1}{(1 - re^{i\theta})(e^{i\theta} - r)e^{i\theta}} \arg(1 - re^{i\theta})(ie^{i\theta} d\theta) \\ &= \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{(1 - rz)(z - r)z} \ln(1 - rz) dz.\end{aligned}$$

复对数函数在右半平面的开区域内解析，因此我们可以使用留数定理。函数

$$\frac{z^2 - 1}{(1 - rz)(z - r)z} \ln(1 - rz)$$

在积分路径内有极点 $z=0$ 和 $z=r$。在 $z=0$ 处，留数为零，因为 $\ln(1)=0$；而在 $z=r$ 处，留数等于

$$\frac{r^2-1}{(1-r^2)r}\ln(1-r^2) = -\frac{\ln(1-r^2)}{r}.$$

因此，我们的围道积分计算结果为

$$\frac{d}{dr}I(r) = -2\pi\frac{\ln(1-r^2)}{r}.$$

为了还原 $I(r)$，我们对上式两边积分

$$\begin{aligned} I(r) = I(0) - 2\pi\int_0^r \frac{\ln(1-r^2)}{r}dr &= -\pi\int_0^r \frac{\ln(1-r^2)}{r^2}(2r\,dr) \\ &= -\pi\int_0^{r^2}\frac{\ln(1-u)}{u}du = \pi\mathrm{Li}_2(r^2). \end{aligned}$$

将其代入 (19)，得到

$$P(r) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi^2}\mathrm{Li}_2(r^2).$$

# 参考文献


[1] B. Cynthia 和 S. Victor，《圆的随机弦的交点》，arXiv 预印本 arXiv:2504.12866，2025。

[2] J. Karamata，《正多边形对角线交点的分布》，《数学分析及相关课题研究》，《纪念 G. Polya 文集》，1962 年，第 170–174 页。