arXiv:2601.02935v1 [math.PR] 6 Jan 2026

凝聚零程过程的缩放极限：维数递减扩散过程

JOHEL BELTR´AN、KYUHYEON CHOI、CLAUDIO LANDIM

Abstract. 本文证明，在扩散时间尺度下，凝聚零程过程收敛到单纯形上的维数递减扩散过程

$$\Sigma = \{(x_1, \dots, x_S) : x_i \geq 0, \sum_{i \in S} x_i = 1\},$$

其中 S 是一个有限集。该极限扩散过程的显著特征是会在单纯形的边界处被吸收。更准确地说，一旦过程到达某个面

$$\Sigma_A = \{(x_1, \dots, x_S) : x_i \geq 0, \sum_{i \in A} x_i = 1\}, \qquad A \subset S,$$

它便会被限制在该集合内，并按照一种新的扩散过程在相应的低维单纯形上演化，其参数取决于子集 A。这一机制会不断重复，使维数逐步降低，直到经过无限长时间后到达单纯形的某个顶点。此时，过程便会永久滞留于此。

证明依赖于一种扩展相关鞅问题定义域的方法；这种方法或许本身就有独立的研究价值，也可用于其他情境。

1. Introduction

亚稳态是一级相变中普遍存在的一种物理现象。至少可以追溯到 Maxwell [30]，人们早期便开始尝试对其进行精确描述。继 Cassandro、Galves、Olivieri 和 Vares 的开创性工作 [12], ，并在 Lebowitz 和 Penrose 的奠基性贡献 [25], 基础上，已经发展出众多严谨的数学理论来描述亚稳态现象 [6, 31, 24, 9]。关于近期的专著，请参阅 [32, 10, 22] 。

这些理论已应用于并进一步发展于广泛的领域，包括统计力学 [26, 20],、神经网络 [11, 28], 、分子动力学 [27], 、金融 [29],、种群动力学 [35], 以及动力系统 [13],，这里只举几例。

其中许多理论源于对随机动力学具体实例的研究，旨在将这类系统中观察到的亚稳态行为形式化。例如，模型约化方法 [6, 8, 24],最初源于对凝聚零程过程的分析。

这种随机动力学由 Evans [14], 提出，用于描述粒子在有限集 S 上的演化，并且是守恒的，即粒子总数保持不变。其平稳态——每个固定粒子数对应一个平稳态——呈现出一种奇特的结构，在物理学文献中称为凝聚。从数学上说，这意味着在平稳分布下，当密度高于某个临界密度时，宏观数量的粒子会聚集在单个格点 [14, 19]上。这一现象已在多种情境中得到观察和研究，包括受振颗粒系统、增长网络与重连网络、交通流，以及宏观经济学中的财富凝聚。关于全面综述，请参阅 [15] 。

某一类零程动力学中的凝聚现象，最早于 [17] 通过证明热力学极限下的系综等价性而得到严格确立。随后， [3, 4, 2]对这一结果作了进一步完善，并证明即使格点总数固定而粒子数趋于无穷大，该结果仍然成立 [7]。

在确定平稳态中存在凝聚体之后，自然会进一步研究其时间演化 [16]。 [7] 研究了超临界可逆动力学这一问题，作者证明，在适当的时间尺度下，凝聚体的位置会像随机游走一样演化，其跳跃率与底层随机

游走的容量成正比。此后，这一结果在 [21]，中被推广到有限离散环面上的超临界全非对称动力学，在 [34]，中被推广到一般超临界情形，并在 [23, 24] 中被推广到临界对称情形。

为描述本文研究的问题，固定一个有限集 S 和跳跃率 $r\colon\ S\times S\to\mathbb{R}_+$。假设与跳跃率 $r(i,j)$ 相关联的连续时间 S 值马尔可夫链是不可约的。记 $(m_i\colon\ i\in S)$ 为其唯一的平稳态。固定跳跃率 $g\colon\ \mathbb{N}\to[0,\infty)$，其定义为 $g(0)=0$, $g(n)=1+(b/n)$，$n\geq 1$，其中 $b>0$ 是一个固定参数。与这一对 (r,g) 相关联的零程动力学，是一个 $\mathbb{N}^S$ 值马尔可夫链，其中格点 i 上的粒子以速率 $g(p)\,r(i,j)$ 跳至 j，前提是格点 i 上有 p 个粒子。

本文探讨凝聚体形成的机制。在这个模型中，会出现两个相关的成核时间尺度。从每个格点上粒子密度均为正的初始构型出发，过程按照一个常微分方程的解在一个线性时间尺度上演化，并收敛到这样一种状态：所有粒子都集中在不变测度 m 达到最大值的格点上 [1]。

我们在此考虑下一个时间尺度。当 $b>1$ 时，称动力学为超临界；当 $b=1$ 时，称其为临界，因为在前一种情形下，凝聚体在时间尺度 N^{1+b} [7, 21, 34] 上演化，而在后一种情形下，它在时间尺度 $N^2\ln N$ [23, 24] 上演化。若 $b<1$，则不会发生凝聚。

为简便起见，假设底层 S 值马尔可夫链的平稳态为均匀测度，且该过程从一个每个格点上的粒子密度均为正的初始构型出发。

在 [5], 中，作者证明了，在超临界情形下，经过扩散时间尺度后，粒子密度的演化——粒子密度定义为每个格点上的粒子数除以粒子总数——收敛于单纯形 $\Sigma=\{(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_S)\in\mathbb{R}^S\colon\ x_i\geq 0,\quad \sum_{i\in S}x_i=1\}$ 上的吸收扩散过程。这一扩散过程的生成元 $\mathfrak{L}$ 为

$$(\mathfrak{L}F)(x)\,=\,\sum_{i\in S}(\nabla_{\boldsymbol{b}_i}F)(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j\in S}m_i\,r(i,j)\,[\,(\partial_{x_j}-\partial_{x_i})^2F]\,(x)\,,\quad x\in\Sigma\,,$$

其中

$$(\nabla_{\boldsymbol{b}_i}F)(x)\,=\,b\,\mathbf{1}\{x_i>0\}\left(\frac{m_i}{x_i}\right)\sum_{j\in S}r(i,j)\,[(\partial_{x_j}-\partial_{x_i})F]\,(x)\,,\quad x\in\Sigma\,.$$

请注意，随着扩散接近边界，漂移会发散，而参数 b 仅作为漂移的乘法常数出现。

如摘要所述，这种极限扩散具有一个显著特征：它会在单纯形的边界处被吸收。更准确地说，一旦过程到达面 $\Sigma_A=\{(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_S)\colon x_i\geq 0,\quad \sum_{i\in A}x_i=1\}$, $A\subset S$，它便会一直局限于该集合，并根据一种新的扩散在相应的低维单纯形中演化，其参数取决于子集A。这一机制会不断重复，使维数逐次降低，直到过程在有限时间内到达单纯形的某个极端点。此时，该过程便永久陷入其中。我们将这种过程称为维数衰减扩散过程。

人们或许会倾向于将边界处的吸收归因于漂移的发散。然而，这种解释并不正确，因为对于 $b<1$，过程预期会在边界处发生反射。因此，乘法参数 b 乍看之下或许无关紧要，却在决定扩散的定性行为方面起着根本作用。

尽管自 Wentzell 的开创性工作以来，人们已对带边界的多维扩散过程进行了广泛研究 [36]（另见 [33] 和 [18, 第 V 节6]），但据我们所知，文献中尚无呈现这种行为的实例，也没有能够充分解释其成因的理论框架。本文所考虑过程的一个显著特征是漂移在边界处发散，这意味着即使对于光滑函数 u，$\mathfrak{L}u$ 也无法连续延伸至边界；而在带边界扩散过程的研究中，通常都会要求满足这一正则性条件。

[5] 中给出的证明分为两个主要步骤。首先，作者证明了该过程的任意极限分布都是相应鞅问题的解。其次，他们证明

该鞅问题存在唯一解。第二步的论证相当一般，也适用于临界情形；而第一步则依赖于构造一个属于生成元定义域的超调和函数。这部分论证专属于超临界情形，而且实际上存在一个漏洞，本文对此进行了修正。

本文提出了一种扩展生成元定义域的方法，该方法对于研究维数衰减扩散尤其有用。这种延拓允许将单纯形边界处不连续的函数纳入生成元的定义域。更准确地说，对于满足 $x_i^{(n)} > 0$、$\lim_n x^{(n)} = x, x_i = 0$ 的序列 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots\ldots, x_S^{(n)})$，函数的 $\lim_n F(x^{(n)})$ 可能不同于 $F(x)$。这种延拓大大简化了在生成元定义域中构造具有指定性质的函数，尤其是超调和函数。因此，本文的价值既在于关于临界凝聚零程过程成核的具体结果，也在于提出了用于处理此类问题的一般方法。

最后，在结束本引言时，我们强调，对于 $b < 1$，不会发生凝聚；人们预期边界处会有反射，且边界局部时为正。证明零程动力学收敛到相应扩散过程，是一个有趣的开放问题。

2. Model and Main Results

本节将介绍本文的主要结果，并引入全文使用的记号。设 $S = \{1, \ldots, \mathrm{p}\}$ 为一个至少含有两个元素的有限集，$|S| = \mathrm{p} \geq 2$。S 中的元素用字母 i、j、k 表示。记 $\mathcal{L}_S$ 为一个以 S 为值域的连续时间马尔可夫链的生成元

$$(\mathcal{L}_S f)(i) := \sum_{j \in S} r(i,j)\,\big[f(j) - f(i)\big], \quad f\colon S \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

假设该马尔可夫链是不可约的，且 $r(i,\ i) = 0$，对所有 $i \in S$。记 λ_i 停留率为：$\lambda_i := \sum_{j \neq i} r(i,\ j)$，并以 $(m_i)_{i \in S}$ 表示唯一的平稳态。

令 $(\boldsymbol{e}_i)_{i \in S}$ 表示 $\mathbb{R}^S$ 中的标准基向量，并定义

$$\boldsymbol{v}_i := \sum_{j \in S} r(i,j)\,(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i), \quad i \in S. \tag{2.2}$$

Thr在本文中，我们约定向量用粗体表示，而标量 rs
是 t 采用标准字体排版。由于 $m(\cdot)$是平稳态，

$$\sum_{i \in S} m_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

凝聚零程过程。记 $\eta = (\eta_i)_{i \in S}$ 为 $\mathbb{N}^S$的元素，称为构型；记 $\mathcal{H}_N \subset \mathbb{N}^S$, $N \in \mathbb{N}$为含有 N 个粒子的构型集合：

$$\mathcal{H}_N := \{\eta = (\eta_i)_{i \in S} \in \mathbb{N}^S : \sum_{i \in S} \eta_i = N\}.$$

对于每个 $i \in S$，令 $g_i\colon \mathbb{N} \to [0, \infty)$为格点 i上粒子的跳跃率，因此 $g_i(0) = 0$,$g_i(n) > 0$ 对于 $n > 0$。假设

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{g_i(n)}{m_i} - 1 \right) = b, \quad \text{for some } b \geq 1. \tag{2.4}$$

零程过程 $\{\eta_N(t)\colon\ t \geq 0\}$ 是由生成元 L_N 诱导的 $\mathcal{H}_N$值连续时间马尔可夫链，生成元给出为

$$(L_N f)(\eta) := \sum_{i,j \in S} g_i(\eta_i)\, r(i,j)\, (f(\eta^{i,j}) - f(\eta)), \quad \eta \in \mathcal{H}_N, \quad f\colon \mathcal{H}_N \to \mathbb{R}.$$

在此公式中，$\eta^{i,\,j} \in \mathcal{H}_N$ 是通过将粒子从格点 i 移动到格点 j而从 η 得到的构型。更准确地说，如果 $\eta_i = 0$，则 $\eta^{i,\,j} = \eta$；如果 $\eta_i \geq 1$，

$$(\eta^{i,j})_k := \begin{cases} \eta_k - 1 & \text{if } k = i \\ \eta_k + 1 & \text{if } k = j \\ \eta_k & \text{if } k \in S \setminus \{i, j\}\,. \end{cases}$$

令 $\Sigma \subset \mathbb{R}^S$ 为坐标非负且总和为 $\mathbf{1}$ 的集合：

$$\Sigma := \Big\{ (x_i)_{i\in S} \in \mathbb{R}^S : x_i \geq 0 \text{ for all } i \in S \text{ and } \sum_{i\in S} x_i = 1 \Big\}.$$

由于 $\mathcal{H}_N$ 由总和为 N 的向量组成，我们可以将 $\mathcal{H}_N$ 嵌入 Σ。令 $\iota_N\colon\ \mathcal{H}_N \to \Sigma$ 为如下给出的投影

$$\iota_N(\eta)_i := \frac{\eta_i}{N}\,, \quad i \in S\,.$$

令 Σ_N 为 $\mathcal{H}_N$ 在 ι_N 下的像，即

$$\Sigma_N := \iota_N(\mathcal{H}_N)\,.$$

Con因此，Σ_N 成为 Σ 的一个子集，由坐标为有理数的向量组成 al
num分母为 N。

令 X_t^N 表示将加速过程 $\eta_N(t)$ 通过映射 ι_N 投影后得到的 Σ_N 值马尔可夫链：

$$X_t^N := \iota_N(\eta_N(tN^2)),\ t \geq 0\,.$$

这定义了 Σ_N 上的重标度零程过程，它是一个取值于 Σ_N 的连续时间马尔可夫链 $\{X_t^N\colon\ t \geq 0\}$，其生成元为

$$(\mathcal{L}_N f)(x) := N^2 \sum_{\substack{i,j\in S,\\ x_i>0}} g_i(Nx_i)\, r(i,j) \Big[f\Big(x + \frac{\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i}{N}\Big) - f(x) \Big]\,,\ x \in \Sigma_N.$$

记 $D(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ 为 Σ 值右连续且具有左极限的轨道空间，并赋予斯科罗霍德拓扑。对每个 $x \in \Sigma_N$，令 $\mathbb{P}_x^N$ 为由从 x 出发的马尔可夫链 X_t^N 所诱导的 $D(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ 上的概率测度。

考虑一个序列 $(x_N\colon\ N \geq 1)$，当 $N \to \infty$ 时收敛到某个 $x \in \Sigma$。本文的主要结果表明，测度序列 $\mathbb{P}_{x_N}^N$ 依分布收敛到测度 $\mathbb{P}_x$；该测度由 Σ 上的维数衰减扩散所诱导，并且可刻画为相应鞅问题的唯一解。

鞅问题。为了引入鞅问题，我们首先定义其定义域。令$\mathbf{1}^\circ$为所有坐标均等于 $\mathbf{1}$ 的向量：$\mathbf{1} = \sum_{i\in S} \boldsymbol{e}_i$，并令 Σ 为集合 Σ的内部，定义如下

$$\mathring{\Sigma} := \{x \in \Sigma : x_i > 0\ \forall i \in S\}\,.$$

由于 Σ 是超平面

$$\{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i\in S} x_i = 1\},$$

一个向量 $\boldsymbol{V} = (V_i)_{i\in S} \in \mathbb{R}^S$ 若与$\mathbf{1}$正交，则称其为 $\mathring{\Sigma}$ 的切向量。记为T_Σ 这些向量所张成的线性空间：

$$T_\Sigma := \big\{ \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^S : \boldsymbol{V} \cdot \mathbf{1} = \sum_{i\in S} V_i = 0 \big\}\,, \tag{2.5}$$

其中，$\cdot$ 表示 $\mathbb{R}^S$中的标准内积。注意，式（2.2）中引入的每个向量 $\boldsymbol{v}_i$ 都属于 T_Σ。

记 $C(\Sigma)$ 为连续函数 $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$的空间，并记 $C(\Sigma)$ 为$\mathring{\mathcal{C}}(\Sigma$中可连续延拓至 Σ的元素。若函数 $f \in C(\Sigma$在 $x \in \mathring{\Sigma}$ 处可微，则存在一个属于 T_Σ的向量，记作 $\nabla^\Sigma f(x)$，使得

$$\lim_{\boldsymbol{V}\in T_\Sigma, |\boldsymbol{V}|\to 0} \frac{f(x+\boldsymbol{V}) - f(x) - \boldsymbol{V}\cdot\nabla^\Sigma f(x)}{|\boldsymbol{V}|} = 0\,. \tag{2.6}$$

为方便起见，我们常将 $\boldsymbol{V}\cdot\nabla^\Sigma f$简写为 $\nabla_{\boldsymbol{V}} f$。记 $C^1(\mathring{\Sigma})$为函数空间 $f \in C(\Sigma)$，其中的函数在每个 $x \in \Sigma$ 处均可微，且映射 $x \mapsto \nabla_{\boldsymbol{V}} f(x)$ 属于$\mathring{\mathcal{C}}(\Sigma)$，对任意 $\boldsymbol{V} \in T_\Sigma$均成立。

最后，令 $C^2(\mathring{\Sigma})$ 为函数空间 $f \in C^1(\mathring{\Sigma})$，其中的函数满足 $\nabla_{\boldsymbol{V}} f \in C^1(\mathring{\Sigma})$，对任意 $\boldsymbol{V} \in T_\Sigma$ 均成立。记 $C^1(\Sigma)$、$C^2(\Sigma$分别为 $C^1(\mathring{\Sigma})$、$C^2(\mathring{\Sigma}$中可连续延拓至 Σ的元素：

$$C^1(\Sigma) := \big\{ f \in C(\Sigma)\cap C^1(\mathring{\Sigma}) : \nabla_{\boldsymbol{V}} f \text{ continuously extends to } \Sigma \text{ for all } \boldsymbol{V}\in T_\Sigma \big\},$$
$$C^2(\Sigma) := \big\{ f \in C^1(\Sigma)\cap C^2(\mathring{\Sigma}) : \nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}} f) \text{ 对所有 } \mathring{\Sigma} \text{ 均连续延拓至 } \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W}\in T_\Sigma \big\}.$$

我们用同一符号 $\nabla_{\boldsymbol{V}} f, \nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}} f)$ 表示这些函数到 Σ 的连续延拓。

根据惠特尼定理 [37], , 对于 $C^1(\Sigma)$ 中的任意函数 F，存在一个延拓 $\hat{}F\colon \mathbb{H}_1 :=\{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i\in S} x_i = 1\} \to \mathbb{R}$，其属于 $C^1(\mathbb{H}_1)$ 类，并满足 $(\nabla_{\boldsymbol{V}}\hat{}F)(x) = (\nabla_{\boldsymbol{V}} F)(x)$，对所有 $x \in \mathring{\Sigma}$ 均成立。我们还可以将 $\hat{}F$ 延拓到 $\mathbb{R}^S$，具体做法是将该延拓记为 $\tilde{F}$，并令其沿相对于 Σ: $\tilde{F}(x + k\mathbf{1}) = \hat{}F(x)$ 的正交方向保持常数，对所有 $x \in \mathbb{H}_1, k \in \mathbb{R}$ 均成立；回顾一下，$\mathbf{1}$ 是一个所有坐标均等于 1 的向量。该过程得到一个 $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ 的 $C^1(\mathbb{R}^S)$ 类函数，使得

$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla^\Sigma F(x) = \boldsymbol{V}\cdot(\nabla\tilde{F})(x) = \sum_{i\in S} V_i\,\partial_{x_i}\tilde{F}(x) \text{ for all } x\in\mathring{\Sigma},\ \boldsymbol{V}\in T_\Sigma\,,$$

$\tilde{}$其中 $\boldsymbol{V} = \sum_{i\in S} V_i\,\boldsymbol{e}_i$，且 ∇F是关于 $\mathbb{R}^S$中的标准内积的 F的梯度。

类似地，$C^2(\Sigma)$中的任意函数 F 都可以扩展为 $C^2(\mathbb{R}^S)$中的函数：存在一个 $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ 的 $C^2(\mathbb{R}^S)$类函数，使得

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}} F)(x) = \nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}}\tilde{F})(x) \text{ for all } x\in\mathring{\Sigma},\ \boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\in T_\Sigma\,.$$

定义 2.1。对于 $i \in S$，定义向量场 $\boldsymbol{b}_i\colon \Sigma \to T_\Sigma$ 如下

$$\boldsymbol{b}_i(x) := b\,1\{x_i > 0\}\left(\frac{m_i}{x_i}\right)\boldsymbol{v}_i \quad x\in\Sigma\,,.$$

其中 $1\{A\}$ 表示集合 A的指示函数。相关的微分算子记为 $\nabla_{\boldsymbol{b}_i}$，作用于 $F \in C^1(\Sigma)$ 时为

$$(\nabla_{\boldsymbol{b}_i} F)(x) := b\,1\{x_i > 0\}\left(\frac{m_i}{x_i}\right)(\nabla_{\boldsymbol{v}_i} F)(x)\,,\quad x\in\Sigma\,.$$

此外，令

$$\mathcal{D}_i := \big\{ F\in C^2(\Sigma) \,:\, \nabla_{\boldsymbol{b}_i} F \text{ is continuous on } \Sigma \big\} \quad \text{and} \quad \mathcal{D}_A := \bigcap_{i\in A}\mathcal{D}_i$$

对于 S的任意非空子集 A。

记 $(a_{ij}:\ i,j\in S)$ 为其元素如下给出的矩阵：

$$a_{ij} := -m_i\,r(i,j) = -m_i\,\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{e}_j,\ \ i\neq j\in S\,,\quad a_{ii} := m_i\,\lambda_i\,,\quad i\in S\,. \tag{2.7}$$

定义 2.2。记 $\mathfrak{L}\colon \mathcal{D}_S \to C(\Sigma)$ 为定义如下的微分算子

$$(\mathfrak{L}F)(x) := (\nabla_{\boldsymbol{b}} F)(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i\,r(i,j)\,[\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j}(\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j} F)](x),\quad x\in\Sigma\,, \tag{2.8}$$

其中 $\boldsymbol{b}\colon \Sigma \to \mathbb{R}^S$ 是向量场，而 $\nabla_{\boldsymbol{b}} F$ 是定义如下的导数

$$\boldsymbol{b}(x) := \sum_{i\in S} \boldsymbol{b}_i(x)\,, \quad (\nabla_{\boldsymbol{b}} F)(x) := \sum_{i\in S} (\nabla_{\boldsymbol{b}_i} F)(x)\,, \quad x\in\Sigma\,,$$

分别。

显然，对于任意 C^2-延拓 $\tilde F\colon \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ 的 $F\in C^2(\Sigma)$,

$$(\mathfrak{L}F)(x) \;=\; (\nabla_{\tilde{\boldsymbol{b}}}\tilde F)(x) \;+\; (D_{\tilde{\boldsymbol{a}}}\tilde F)(x) \quad \forall\, x\in\Sigma\,,$$

其中

$$\begin{aligned}(\nabla_{\tilde{\boldsymbol{b}}} F)(x) \;&=\; -\,b\sum_{i\in S} 1\{x_i>0\}\,\frac{1}{x_i}\sum_{k\in S} a_{ik}\,[\,(\partial_{x_k}-\partial_{x_i})\tilde F\,]\,(x)\\ &\text{and}\quad (D_{\tilde{\boldsymbol{a}}}\tilde F)(x) = \sum_{i,j\in S} a_{ij}\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\tilde F(x)\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

记 $C(\mathbb{R}_+,\Sigma)$ 为连续轨道 $\omega\colon \mathbb{R}_+\to\Sigma$ 所构成的空间，并赋予其在有界区间上一致收敛的拓扑，其对应的博雷尔 σ-域为 $\mathcal{F}$。记 $X_t\colon C(\mathbb{R}_+,\Sigma)\to\Sigma$, $t\ge 0$ 为坐标映射过程，并记由其生成的滤过为 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s\le t)$, $t\ge 0$。概率测度 $\mathbb{P}$ 在 $C(\mathbb{R}_+,\Sigma)$ 上被称为从 $x\in\Sigma$ 开始，当且仅当 $\mathbb{P}[X_0=x]=1$。

Defi义 2.3。 概率测度 $\mathbb{P}$ 在 $C(\mathbb{R}_+,\Sigma)$ 上是$(\mathfrak{L},\mathcal{D}_S)$-鞅的一个解 *le*
*prob*引理：若对于任意 $H\in\mathcal{D}_S$,

$$H(X_t) - \int_0^t (\mathfrak{L}H)(X_s)\,ds\,, \quad t\ge 0 \tag{2.10}$$

是关于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ 的 $\mathbb{P}$-鞅。

现在可以陈述主定理了。

定理 2.4。 对于每个 $x\in\Sigma$，在 $C(\mathbb{R}_+,\Sigma)$ 上存在唯一的概率测度，记为 $\mathbb{P}_x$；该测度从 x 出发，并且是 $(\mathfrak{L},\mathcal{D}_S)$-鞅问题的一个解。此外，设 $\mathbb{P}^N_{x_N}$ 是由从 $x_N\in\Sigma_N$ 出发的马尔可夫链 X^N_t 在 $D(\mathbb{R}_+,\Sigma)$ 上诱导的概率测度。若 x_N 收敛于 $x\in\Sigma$，则 $\mathbb{P}^N_{x_N}$ 在斯科罗霍德拓扑下收敛于 $\mathbb{P}_x$ 。

注 2.5。 在第 *8* 节中，我们引入了另一种鞅问题，并在定理 *8.3* 中证明，$(\mathfrak{L},\mathcal{D}_S)$-鞅问题的任意解也是该替代问题的解。定理 *2.4* 中的唯一性部分通过该替代鞅问题得以证明。

该定理的表述与 [5,定理 2.2] 和 [5, 定理 2.6], 完全相同，因此我们采用类似的策略。首先，我们证明鞅问题的解具有边界维数衰减性质，或者等价地说，在边界处吸收（定理 2.6）。利用这一性质，我们接着按照 [5, 第 6] 节中的论证证明唯一性。最后，我们调整 [5, 第 7] 节中的方法，证明序列 $\mathbb{P}^N_{x_N}$ 是紧的，并收敛到鞅问题的唯一解。

虽然证明的整体结构遵循 [5], 情形，但 $b=1$ 在证明鞅问题的解具有吸收性质时带来了困难。具体而言，这一步需要构造一个属于生成元定义域的超调和函数；而当 $b=1$时，这一构造会变得棘手。

为了构造这样的函数，我们引入一种方法，并在第 4 节中加以介绍，称为定义域扩张。这种方法的核心思想是定理 4.10，其证明见第 6 节。该结果指出，任何 $(\mathfrak{L},\mathcal{D}_S)$-鞅问题的解，同时也是 $(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}},\mathcal{E}_S)$-鞅问题的解，其中定义域 $\mathcal{E}_S$ 包含 $\mathcal{D}_S$ 和 $\mathfrak{L}F=\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}F$，对所有 $F\in\mathcal{D}_S$ 均成立。因此，该结果扩张了生成元 $\mathfrak{L}$. 的定义域，并使我们能够构造不属于 $\mathcal{D}_S$、而仅属于 $\mathcal{E}_S$ 的超调和函数。

以下两个小节总结了可以获得的其他结果。

一种边界维数衰减扩散。对于每个 $x \in \Sigma$，记

$$\mathcal{A}(x) := \{j \in S : x_j = 0\}, \quad \mathcal{B}(x) := S \setminus \mathcal{A}(x).$$

For 对所有非空子集 $B \subset S$，定义 h_B： $C(\mathbb{R}_+, \Sigma) \to \mathbb{R}_+$ 为其中一个坐标首次 es in B 消失的时间

$$h_B(x) := \inf\{t \geq 0 : \prod_{j \in B} X_t(j) = 0\}.$$

令$(\theta_t)_{t\geq 0}$ 为 $C(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ 上的时间平移半群。定义停时与集合对的序列 $(\sigma_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ 如下。令 $\sigma_0 = 0$ 且 $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(X_0)$。对于 $n \geq 1$，定义

$$\sigma_n := \sigma_{n-1} + h_{\mathcal{B}_{n-1}} \circ \theta_{\sigma_{n-1}}, \quad \mathcal{B}_n := \{j \in S : X_{\sigma_n}(j) > 0\}$$

在 $\{\sigma_{n-1} < \infty\}$ 上以及在 $\sigma_n = \infty$ 上的 $\{\sigma_{n-1} = \infty\}$。

如果概率测度 $\mathbb{P}$ 在 $C(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ 上满足以下条件，则称其为吸收的：

$$\mathbb{P}\{\mathcal{B}_n \supseteq B(X_t) \text{ for all } t \geq \sigma_n\} = 1, \text{ for every } n \geq 0.$$

如果 $\mathbb{P}$ 是吸收的，那么几乎必然 $\mathbb{P}-$，$(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ 是递减的，并且

$$\exists\, 1 \leq n_0 \leq |\mathcal{B}_0| \text{ such that } \sigma_{n_0} = \infty \text{ and } \mathcal{B}_{n-1} \supsetneq \mathcal{B}_n \text{ for all } 1 \leq n < n_0.$$

作为证明鞅问题解唯一性过程中的一个中间步骤，我们证明以下定理，它给出了该过程本身的一个有趣性质。

定理 2.6。对每个 $x \in \Sigma$，概率测度 $\mathbb{P}_x$ 都是吸收的。

注 2.7。在第 *8* 节中，我们将介绍该过程的更多性质。命题 *8.5* 和 *8.6* 表明，该过程具有 *Feller* 性质。命题 *8.7* 表明，到达边界所需的时间具有有限期望。特别地，到达单纯形 Σ 的极端点集合所需的时间具有有限期望。

吸收后的行为。与 [5, 第 2 节。5], 类似，我们预期过程 X_t 具有递归吸收结构，也就是说，吸收后，该过程再次遵循相同的动力学，只需将 $\boldsymbol{r}$ 替换为迹过程的跳跃率。

对于每个满足 $|B| \geq 2$ 的 $B \subset S$，考虑单纯形 Σ_B 及其内部 $\mathring{\Sigma}_B$:

$$\Sigma_B := \{x \in \Sigma : \sum_{j \in B} x_j = 1\}, \quad \mathring{\Sigma}_B := \{x \in \Sigma_B : x_j > 0, \forall j \in B\}.$$

注意，Σ_B、$\mathring{\Sigma}_B$ 是 $\mathbb{R}^S$ 的子集，而不是 $\mathbb{R}^B$。

由于 $\mathring{\Sigma}_B$ 是仿射子空间的开子集

$$\{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{j \in B} x_j = 1, x_i = 0 \text{ for all } i \in S \setminus B\}$$

$\mathbb{R}^S$ 的，对于 $\mathbb{R}^S$ 中的向量 $\boldsymbol{V}$，若满足以下条件，则称其为切向于 $\mathring{\Sigma}_B$：

$$\sum_{j \in B} V_j = 0, \text{ and } V_i = 0 \text{ for all } i \in S \setminus B.$$

°我们用 T_{Σ_B} 表示所有切向于 Σ_B 的向量构成的线性空间。

°我们扩展了（2.6）中引入的可微性概念。记 $C(\Sigma_B)$为° °连续函数 f: $\Sigma_B \to \mathbb{R}$所构成的空间，并记 $C(\Sigma_B)$ 为 $C(\Sigma_B)$ 中能够连续 ° °延拓到 Σ_B的元素。若函数 $f \in C(\Sigma_B)$ 在 $x \in \Sigma_B$ 处可微，则意味着存在一个 T_{Σ_B}中的向量，记为 $\nabla^{\Sigma_B} f(x)$，使得

$$\lim_{\boldsymbol{V} \in T_{\Sigma_B}, |\boldsymbol{V}| \to 0} \frac{f(x+\boldsymbol{V}) - f(x) - \boldsymbol{V} \cdot \nabla^{\Sigma_B} f(x)}{|\boldsymbol{V}|} = 0.$$

为方便起见，我们通常将 $\boldsymbol{V} \cdot \nabla^{\Sigma_B} f$简写为 $\nabla_{\boldsymbol{V}} f$。记 $C^1(\mathring{\Sigma}_B)$为函数空间 ° °$f \in C(\Sigma_B$，其中的函数在每个 $x \in \Sigma_B$ 处均可微，且映射 $x \mapsto \nabla_{\boldsymbol{V}} f(x$属于° $C(\Sigma_B$，对任意$\boldsymbol{V} \in T_{\Sigma_B}$均成立。

最后，令 $C^2(\mathring{\Sigma}_B)$ 为函数空间 $f \in C^1(\mathring{\Sigma}_B$，其满足 $\nabla_{\boldsymbol{V}} f \in C^1(\mathring{\Sigma}_B$，对任意$\boldsymbol{V} \in T_{\Sigma_B}$均成立。记 $C^1(\Sigma_B)$、 $C^2(\Sigma_B$为 $C^1(\mathring{\Sigma}_B)$ 中的元素， $C^2(\mathring{\Sigma}_B)$可分别连续延拓至 Σ_B:

$$
\begin{aligned}
C^1(\Sigma_B) &:= \big\{ f \in C(\Sigma_B) \cap C^1(\mathring{\Sigma}_B) : \nabla_{\boldsymbol{V}} f \text{连续延拓至 } \Sigma_B \text{对所有 } \boldsymbol{V} \in T_{\Sigma_B} \big\}, \\
C^2(\Sigma_B) &:= \big\{ f \in C^1(\Sigma_B) \cap C^2(\mathring{\Sigma}_B) : \nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}} f) \text{ 连续延拓至 } \Sigma_B \text{对所有 } \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W} \in T_{\Sigma_B} \big\}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

我们用相同的符号 $\nabla_{\boldsymbol{V}} f$、 $\nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}} f)$ 表示这些函数在 Σ_B 上的连续延拓。

记作

$$
\boldsymbol{r}^B := \{r^B(x,y) : x, y \in B\}
$$

由 $\mathcal{L}_S$生成的马尔可夫过程在 B 上的迹的跳跃率。关于该过程的详细说明见第3节。令 $\{\boldsymbol{v}_j^B : j \in B\}$ 为 T_{Σ_B} 中定义的向量:

$$
\boldsymbol{v}_j^B := \sum_{k \in B} r^B(j,k)(\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_j)\,. \tag{2.12}
$$

其中 $\{\boldsymbol{e}_j : j \in B\}$ 表示由 B索引的 $\mathbb{R}^S$ 标准基子集，并令$\boldsymbol{b}^B : \Sigma_B \to \mathbb{R}^S$ 为如下定义的向量场:

$$
\boldsymbol{b}^B(x) := b \sum_{j \in B} \frac{m_j}{x_j}\, \boldsymbol{v}_j^B\, 1\{x_j > 0\}, \quad x \in \Sigma_B\,.
$$

与定义 2.1中的 $\mathcal{D}_S$ 类似，对于 $j \in B$，令 $\mathcal{D}_j^B$为 $C^2(\Sigma_B)$中满足映射 $x \mapsto 1\{x_j > 0\}(m_j/x_j)(\nabla_{\boldsymbol{v}_j^B} H)(x)$ 在 Σ_B 上连续的函数 H 所构成的函数空间，并令

$$
\mathcal{D}_A^B := \bigcap_{j \in A} \mathcal{D}_j^B\,, \quad \text{for } \varnothing \subsetneq A \subset B\,. \tag{2.13}
$$

令 $\mathfrak{L}^B$: $\mathcal{D}_B^B \to C(\Sigma_B)$ 为作用于 $\mathcal{D}_B^B$中函数上的二阶微分算子，其定义如下:

$$
(\mathfrak{L}^B F)(x) := (\nabla_{\boldsymbol{b}^B} F)(x) + \frac{1}{2} \sum_{j,k \in B} m_j\, r^B(j,k)\, [\nabla_{\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k}(\nabla_{\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k} F)](x), \tag{2.14}
$$

其中

$$
(\nabla_{\boldsymbol{b}^B} F)(x) := b \sum_{j \in B} \frac{m_j}{x_j}\, 1\{x_j > 0\}\, (\nabla_{\boldsymbol{v}_j^B} F)(x)
$$

对于 $x \in \Sigma_B$ 和 $F \in \mathcal{D}_B^B$。

固定 x 属于 Σ，并假设 $\mathcal{A}(x) = \{j \in S : x_j = 0\} \neq \varnothing$。令 $B = \mathcal{A}(x)^c$。取测度$\mathbb{P}_x$，它是以 x 为起点的 $(\mathfrak{L}, \mathcal{D}_S)$-鞅问题的一个解。根据定理 2.6， $\mathbb{P}_x$集中于属于 $C(\mathbb{R}_+, \Sigma_B)$ 的轨道上。令 $\mathbb{P}_x^B$ 为 $\mathbb{P}_x$ 在$C(\mathbb{R}_+, \Sigma_B)$上的限制:

$$
\mathbb{P}_x^B(\Xi) := \mathbb{P}_x(\Xi)\,, \quad \Xi \subset C(\mathbb{R}_+, \Sigma_B)\,.
$$

它是 $C(\mathbb{R}_+, \Sigma_B)$ 上的一个概率测度。因此，下述命题与 [5, 命题 2.4]类似。

命题 2.8。 固定 x 属于 Σ。假设 $\mathcal{A}(x) = \{j \in S : x_j = 0\} \neq \varnothing$，并令 $B = \mathcal{A}(x)^c$。令$\mathbb{P}_x$ 为以 x 为起点的 $(\mathfrak{L}, \mathcal{D}_S)$-鞅问题的唯一解。记 $\mathbb{P}_x^B$为 $\mathbb{P}_x$ 在 $C(\mathbb{R}_+, \Sigma_B)$上的限制。那么，测度 $\mathbb{P}_x^B$是 $(\mathfrak{L}^B, \mathcal{D}_B^B)$-鞅问题的解。

注 2.9。 我们可能希望将微分算子 $\nabla_{\boldsymbol{b}^B}$、$(\nabla_{\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j})^2 (i,j \in B)$ 应用于不属于 $C^2(\Sigma_B)$ 但局部光滑的函数。因此，对每个 $x \in \Sigma$，当 $F \in C^2(U)$ 在 x 的某个开邻域 U（位于 Σ_B 中）上成立时，我们定义局部量 $(\nabla_{\boldsymbol{b}} F)(x)$、 $[\nabla_{\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j}(\nabla_{\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j} F)](x)$。特别地，我们可以对方程 (2.8) 作局部解释。这一观点对于扩张生成元的定义域至关重要 $\mathfrak{L}$（见定义 *4.5*），并在证明鞅问题唯一性时发挥根本作用。为避免歧义，我们特此说明， $\mathfrak{L}$指的是局部二阶微分算子。

组织结构： 本文结构安排如下。下一节中，我们将介绍由生成元 $\mathcal{L}_S$ 诱导的 S 值马尔可夫链在 $\varnothing \subsetneq B \subsetneq S$ 上的迹。该过程给出了扩散在 Σ_B 上演化时的扩散系数和漂移。在第 4 节中，我们引入鞅问题的一个宽松版本，并扩张生成元的定义域。本节的主要结果——定理 4.10——指出，原鞅问题的解也是扩展鞅问题的解。该结果的证明见第 6 节，其中用到了第 5 节引入的映射 J_A: $\mathbb{R}_+^A \to \mathbb{R}_+$, $A \subset S$；这些映射模拟了Σ_A 上的范数，但适用于生成元的定义域。在第 6 节中，我们证明鞅问题的解是吸收的。证明基于在鞅问题的定义域内构造超调和函数。论证中需要扩张定义域的正是这一部分。最后，在第 8 节中，我们证明凝聚零程过程收敛到边界维数衰减扩散过程。在最后一节中，我们还介绍该过程的其他性质。例如，我们证明它会在有限期望时间内到达单纯形的某个顶点。

3. The trace process

本节介绍由生成元 $\mathcal{L}_S$ 在 S 的非空真子集 B 上诱导的 S 值马尔可夫链的迹。我们还定义一个投影映射

$$\gamma_B \colon \mathbb{R}^S \to \{x \in \mathbb{R}^S : x_i = 0 \; \forall \, i \in S \setminus B\}$$

它在鞅问题的延拓中发挥重要作用。

回顾 [6, 第 6] 节中迹过程的定义，并根据 (2.1)， $\mathcal{L}_S$ 表示由跳跃率 r 在 S 上诱导的 S 值连续时间不可约马尔可夫链的生成元。记 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, S)$ 为取值于 S、具有左极限的右连续轨道空间 $x\colon \mathbb{R}_+ \to S$，其配备斯科罗霍德拓扑及其相应的博雷尔 σ-代数。记 $\mathbb{P}_j$ 为由生成元为 $\mathcal{L}_S$、从状态 $j \in S$ 出发的马尔可夫过程在 $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, S)$ 上诱导的概率测度。对于 S 的非空真子集 B，令 T_B、T_B^+ 分别表示 B 的命中时间和返回 B 的时间:

$$T_B := \inf\{t \geq 0 : x_t \in B\}, \quad T_B^+ := \inf\{t \geq \tau_1 : x_t \in B\},$$

其中， τ_1 表示首次跳跃的时间:

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : x_t \neq x_0\}.$$

假设 $|B| \geq 2$，令$(x_t^B)_{t\geq 0}$ 表示过程$(x_t)_{t\geq 0}$ 在 B 上的迹（详情见 [6]）。该迹过程是一个不可约的、取值于 B的马尔可夫链，其跳跃率 $r^B = r^B(j, k)$由下式给出

$$r^B(j,k) = \lambda_j \, \mathbb{P}_j[T_k = T_B^+], \quad j \neq k \in B, \quad r^B(j,j) = 0, \tag{3.1}$$

其中，回顾一下， λ_j、 $j \in S$表示由生成元$\mathcal{L}_S$诱导的马尔可夫链的停留率。记 $\mathcal{L}_S^B$为跳跃率为 $r^B(\cdot, \cdot)$的 B值马尔可夫链的生成元，并用$\lambda^B(j)$表示停留时间： $\lambda^B(j) := \sum_{k\in B\setminus\{j\}} r^B(j, k)$。

取 B 为 S 的一个至少包含两个元素的子集。对每个 $i \in B$，令 $u_i^B\colon S \to [0,1]$ 为$\mathcal{L}_S$-调和延拓到 S 的函数，该函数是 i 在 B上的指示函数。换言之， u_i^B是下式的唯一解:

$$\begin{cases} u_i^B(j) = \delta_{i,j} & \text{for } j \in B \\ (\mathcal{L}_S u_i^B)(j) = 0 & \text{for } j \in S \setminus B. \end{cases} \tag{3.2}$$

众所周知，解 $u_k^B(\cdot)$ 有如下随机表示:

$$u_k^B(j) = \mathbb{P}_j[T_k = T_B], \quad j \in S. \tag{3.3}$$

现在来看跳跃率 $r^B(j, k)$ 的公式 (3.1)。在首次跳跃时对恒等式 (3.3) 应用强马尔可夫性质，可得对所有 $i \notin B$, $k \in B$ 均成立。

$$\lambda_i \, u_k^B(i) = \lambda_i \, \mathbb{P}_i[T_k = T_B] = \sum_{j\in S} r(i,j) \, \mathbb{P}_j[T_k = T_B] = \sum_{j\in S} r(i,j) \, u_k^B(j). \tag{3.4}$$

固定 j, $k \in B$, $k \neq j$。在首次跳跃时对恒等式 (3.1) 应用强马尔可夫性质,

$$r^B(j,k) = r(j,k) + \sum_{l \in B^c} r(j,l)\, \mathbb{P}_l[T_k = T_B] = \sum_{l \in S} r(j,l)\, u_k^B(l), \quad \text{for } k \neq j \in B. \tag{3.5}$$

由于 $u_k^B(j) = 0$, 我们可以从 $u_k^B(l)$ 中减去 $u_k^B(j)$, 从而得到

$$r^B(j,k) = (\mathcal{L}_S\, u_k^B)(j)\,. \tag{3.6}$$

类似地, 对于 $k \in B$,

$$\lambda_k\, \mathbb{P}_k[T_k^+ = T_B^+] \,=\, \sum_{\ell \in B^c} r(k,\ell)\, \mathbb{P}_\ell[T_k = T_B] \,=\, \sum_{\ell \in B^c} r(k,\ell)\, u_k^B(\ell)\,.$$

另一方面, 由 (3.1) 以及 $\lambda^B(k)$ 的定义,

$$\lambda_k\, \mathbb{P}_k[T_k^+ = T_B^+] \,=\, \lambda_k \big\{ 1 \,-\, \sum_{j \in B \setminus \{k\}} \mathbb{P}_k[T_j^+ = T_B^+] \big\} \,=\, \lambda_k \,-\, \sum_{j \in B \setminus \{k\}} r^B(k,j) \,=\, \lambda_k \,-\, \lambda^B(k)\,.$$

因此, 由前两个恒等式可得

$$\sum_{\ell \in B^c} r(k,\ell)\, u_k^B(\ell) \,=\, \lambda_k \,-\, \lambda^B(k)\,. \tag{3.7}$$

此外, 由于对所有 $l \in S$ 都有 $\sum_{k \in B} u_k^B(l) = 1$, 对 $k \in B \setminus \{j\}$ 求和 (3.5) 可得

$$\lambda^B(j) = \sum_{k \in B \setminus \{j\}} r^B(j,k) = \sum_{l \in S} r(j,l) \sum_{k \in B \setminus \{j\}} u_k^B(l) = \sum_{l \in S} r(j,l)\, [1 - u_j^B(l)]\,.$$

由于 $u_j^B(j) = 1$, 我们得出

$$\lambda^B(j) \,=\, -\,(\mathcal{L}_S u_j^B)(j)\,. \tag{3.8}$$

3.1. **投影映射**。令 $A = S \setminus B$。定义线性投影映射 $\gamma_B \colon \mathbb{R}^S \to \{x \in \mathbb{R}^S \colon x_i = 0\ \forall i \in A\}$ 为

$$[\gamma_B(x)]_j = u_j^B \cdot x = x_j + \sum_{k \in A} u_j^B(k) x_k, \quad j \in B, \quad \text{and} \quad [\gamma_B(x)]_i = 0, \quad i \in A. \tag{3.9}$$

注意, γ_B 到 Σ 上的限制映射到 Σ_B, 因此我们可以写作 $\gamma_B \colon \Sigma \to \Sigma_B$。根据 γ_B的定义、 $\boldsymbol{v}_j$、(3.6) 和 (3.8),

$$\begin{aligned} [\gamma_B(\boldsymbol{v}_j)]_k &= u_k^B \cdot \boldsymbol{v}_j = \mathcal{L}_S u_k^B(j) = r^B(j,k), \quad j\,, k \in B\,, \quad k \neq j. \\ [\gamma_B(\boldsymbol{v}_j)]_j &= u_j^B \cdot \boldsymbol{v}_j = (\mathcal{L}_S u_j^B)(j) \,=\, -\,\lambda^B(j), \quad j \in B\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

因此, 向量 $\gamma_B(\boldsymbol{v}_j)$、 $j \in B$ 与生成元 $\mathcal{L}_S^B$ 的关系, 与向量 $\boldsymbol{v}_i$、$i \in S$ 与生成元 $\mathcal{L}_S$ 的关系相同。

另一方面, 由于 u_k^B、 $k \in B$ 在 A 上是 $\mathcal{L}_S$-调和的,

$$[\gamma_B(\boldsymbol{v}_i)]_k \,=\, u_k^B \cdot \boldsymbol{v}_i = \mathcal{L}_S u_k^B(i) = 0 \quad \text{for all } i \in A = S \setminus B\,.$$

综上,

$$\gamma_B(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j^B, \quad j \in B \quad \text{and} \quad \gamma_B(\boldsymbol{v}_i) = 0\,, \quad i \in A = S \setminus B\,. \tag{3.11}$$

引理 3.1. 以下性质成立:

(1) 对于 $\varnothing \neq B \subsetneq S$, $\{\boldsymbol{v}_i, i \in B\}$, 它们是线性无关的。(2) 对于所有 $x \in \mathbb{R}^S$, $\gamma_B(x) - x$ 都是 $\boldsymbol{v}_k$ 的线性组合, 其中 $k \in A = S \setminus B$。

证明。对于第一部分, 固定一个向量 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^S$。根据 $\boldsymbol{v}_i$的定义, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{f} = 0$ 当且仅当 $(\mathcal{L}_S \boldsymbol{f})_i = 0$。由于该链不可约, 对于所有 $i \in S$, $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{f} = 0$ 意味着 $\boldsymbol{f}$ 是常数。因此, $\dim(\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_k \colon k \in S\}) = |S| - 1$。所以, 再结合以下事实:

$$\sum_{k \in S} m_k\, \boldsymbol{v}_k = 0\,,$$

对于任意 $i \in S$, 向量 $\{\boldsymbol{v}_j,\, j \in S \setminus \{i\}\}$ 线性无关。这证明了第一部分。

现在来证明引理的第二个断言。回忆一下，

$$[\gamma_B(x)]_i = x_i + \sum_{j\in A} u_i^B(j)x_j,\ \ i \in B.$$

因此，$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$，从而

$$\gamma_B(\gamma_B(x) - x) = \gamma_B(x) - \gamma_B(x) = 0.$$

因此，要证明该断言，我们需要分析 γ_B 的核。

我们断言 $\ker(\gamma_B) = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_k :\ k \in A\}$。一方面，由 (3.11)，$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_k :\ k \in A\} \subset \ker(\gamma_B)$; 根据引理的第一部分，$\dim(\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_k :\ k \in A\}) = |A|$。另一方面，由于 γ_B 保持 $\mathbb{R}^B \times \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^S$，$\dim(\operatorname{Im}(\gamma_B)) \geq |B|$。因此，$\dim(\ker(\gamma_B)) \leq |S| - |B| = |A|$，从而

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_k : k \in A\} = \ker(\gamma_B)\,,$$

这就完成了引理的证明。 □

下一个结果是引理 3.1 的直接推论。

引理 3.2. 固定 $\varnothing \neq B \subsetneq S$。令 $A = S \setminus B$。对于 $x \in \mathbb{R}^S$，令 x_A 为x 到 $\mathbb{R}^A$ 的典范投影，其定义为 $[x_A]_i = x_i$ 对于 $i \in A$。那么，存在一个线性映射 $L_A : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^A$ 使得

$$\gamma_B(x) - x = \sum_{i\in A}[L_A(x_A)]_i\boldsymbol{v}_i. \tag{3.12}$$

证明. 由引理 3.1(2)，存在一个线性映射 $L\colon \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^A$ 使得

$$\gamma_B(x) - x = \sum_{i\in A}[L(x)]_i\,\boldsymbol{v}_i\,.$$

记 $\pi_A : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^A$ 为由 $\pi_A(x) = x_A$定义的典范投影，我们需要证明存在一个分解映射 $L_A :$ $\mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^A$ 使得 $L = L_A \circ \pi_A$。这等价于

$$\ker\pi_A \subset \ker L\,.$$

显然，$\ker\pi_A = \mathbb{R}^B \times \{\mathbf{0}\}$。根据定义，$\gamma_B$ 保持 $\mathbb{R}^B \times \{\mathbf{0}\}$，这意味着$\mathbb{R}^B \times \{\mathbf{0}\} \subset \ker L$，因为由引理 3.1.(1)可知，向量 $\{\boldsymbol{v}_i, i \in A\}$ 线性无关。□

映射 γ_B 的一个重要性质是，函数将 Σ 的某个子单纯形的内部映射到 Σ_B 的内部。具体如下:

°**引理 3.3.** 设 $B, C \subset S$。对于每个 $i \in B$，要么对所有 $x \in \Sigma_C$，$[\gamma_B(x)]_i = 0$；要么对所有 $x \in \Sigma_C$，$[\gamma_B(x)]_i \neq 0$°。因此，存在 $D \subset B$ 使得 $\gamma_B(\Sigma_C) \subset \Sigma_D$。

°证明。设 $A = S \setminus B$。由 (3.9)，对每个 $i \in B$, $x \in \Sigma_C$,

$$[\gamma_B(x)]_i = x_i + \sum_{k\in A} u_i^B(k)\,x_k = x_i + \sum_{k\in A\cap C} u_i^B(k)\,x_k\,. \tag{3.13}$$

由于对所有 $j \in C$，$x_j > 0$，且对所有 $\ell \in B$，$u_\ell^B(k) \geq 0$，所以 $k \in S$, $[\gamma_B(x)]_i = 0$ 当且仅当 $x_i = 0$（即 $i \notin C$）且对所有 $k \in A \cap C$，$u_i^B(k) = 0$。这一条件不依赖于点 $x \in \mathring{\Sigma}_C$，而只依赖于指标 i 和 u_i^B（k）。因此，它要么对 $\mathring{\Sigma}_C$ 中的所有点成立，要么对所有点都不成立。这就是引理的第一个断言。

Let

$$G = \{i \in B : u_i^B(k) = 0 \text{ for all } k \in A \cap C\}\,,$$
$$D = B \setminus \big\{\,[B \setminus C] \cap G\,\big\} = [B \cap C] \cup [B \setminus G]\,,$$

因此，$D \subset B$。

°我们声称，$\gamma_B(\Sigma_C) \subset \Sigma_D$。固定 $x \in \Sigma_C$。为证明该结论，我们需要证明：若 $i \in D$，则$[\gamma_B(x)]_i > 0$；否则，$[\gamma_B(x)]_i = 0$。

°先考虑情形 $i \in D$。若 $i \in B \cap C$，则 $x_i > 0$，因为 $x \in \Sigma_C$。因此，由 (3.13) 可得，$[\gamma_B(x)]_i > 0$。若 $i \in B \setminus G$，则 $u_i^B(k) > 0$，其中某个 $k \in A \cap C$。由于 $x \in \mathring{\Sigma}_C$，$x_k > 0$。因此，由 (3.13) 可得，$[\gamma_B(x)]_i \geq u_i^B(k)\,x_k > 0$。综上，对所有 $i \in D$，均有 $[\gamma_B(x)]_i > 0$。

固定 $i \notin D$。若 $i \notin B$，由 (3.9) 可得，$[\gamma_B(x)]_i = 0$。设 $i \in B \setminus D$，则 $i \in (B \cap G) \setminus C$。由于$i \notin C$且 $x \in \mathring{\Sigma}_C$，$x_i = 0$。因为 $i \in G$，对所有 $k \in A \cap C$，均有 $u_i^B(k) = 0$。因此，由 (3.13) 可得，$[\gamma_B(x)]_i = 0$，如所述。这就完成了引理的证明。□

我们通过给出一个与不同单形相关联的投影映射复合公式，来结束本节。该恒等式在建立过程的吸收结构方面发挥着核心作用，正如命题 2.8 所述。

引理 3.4. 固定 $\varnothing \neq B \subset C \subset S$。那么，$\gamma_B \circ \gamma_C = \gamma_B$。

证明。固定 $x \in \Sigma$，并回忆 $A = S \setminus B$。由 (3.9)，对于 $j \in B$，

$$
\begin{aligned}
[\gamma_B(\gamma_C(x))]_j &= [\gamma_C(x)]_j + \sum_{k \in A \cap C} u_j^B(k)\, [\gamma_C(x)]_k \\
&= x_j + \sum_{i \in S \setminus C} u_j^C(i)\, x_i + \sum_{k \in A \cap C} u_j^B(k) \Big(x_k + \sum_{i \in S \setminus C} u_k^C(i)\, x_i \Big) .
\end{aligned}
$$

我们将第一行中的第二个求和限制在 $k \in A \cap C$，因为对于 $k \notin C$，有 $[\gamma_C(x)]_k = 0$。另一方面，

$$
[\gamma_B(x)]_j = x_j + \sum_{k \in A} u_j^B(k)\, x_k .
$$

因此，删去相同项后，要完成证明，尚需证明

$$
\sum_{i \in S \setminus C} u_j^C(i)\, x_i + \sum_{k \in A \cap C} u_j^B(k) \sum_{i \in S \setminus C} u_k^C(i)\, x_i = \sum_{k \in A \setminus C} u_j^B(k)\, x_k .
$$

由于 $B \subset C$，在最后一个求和中，我们可以将 $A \setminus C$ 改写为 $S \setminus C$。比较x_i，$i \in S \setminus C$的系数，该方程等价于

$$
u_j^C(i) + \sum_{k \in A \cap C} u_j^B(k)\, u_k^C(i) = u_j^B(i) .
$$

由 (3.3)，该恒等式可改写为

$$
\mathbb{P}_i[T_B = T_j] = \mathbb{P}_i[T_C = T_j] + \sum_{k \in A \cap C} \mathbb{P}_i[T_C = T_k]\, \mathbb{P}_k[T_B = T_j] .
$$

通过概率论方法可以直接验证这一点。

我们刚刚证明了，对于所有 $x \in \Sigma$, $j \in B$，$[\gamma_B(\gamma_C(x))]_j = [\gamma_B(x)]_j$。由 (3.9)，该恒等式对 $j \notin B$显然成立。引理的证明至此完成。□

4. Extension of the martingale problem

本节将介绍鞅问题的一个宽松版本。作此修改是为了构造一个适当的超调和函数，这对于确立吸收性质，进而证明鞅问题解的唯一性至关重要。

不同于 [5]，第7节中超调和函数的构造无法仅使用鞅问题原定义域 $\mathcal{D}_S$ 中的函数来完成。因此，有必要扩充定义域，以纳入正则性较弱的函数。本节旨在建立这一延拓框架。

为说明这一延拓的动机，我们首先从不同角度考察算子 $\mathfrak{L}$。回顾（2.13）和（2.14）中关于定义域 $\mathcal{D}_A^B$、$\varnothing \subsetneq A \subset B \subset S$、$|B| \geq 2$ 以及算子 $\mathfrak{L}^B$的定义。下面的结果给出了 $\mathfrak{L}F$ 在集合 Σ_B 上的取值的另一种表达式，该表达式通过生成元 $\mathfrak{L}^B$表示。

命题 4.1。固定 $F \in \mathcal{D}_S$。那么，对于每个子集 B S，只要其至少包含两个元素，F在 Σ_B上的限制（记为 $F|_{\Sigma_B}$）属于定义域 $\mathcal{D}_B^B$。此外，$(\mathfrak{L}F)|_{\Sigma_B} = \mathfrak{L}^B(F|_{\Sigma_B})$。

为了证明这个二阶恒等式，我们先建立几个辅助引理，以控制 F 的二阶导数。

引理 4.2。对于任意 $k \in S \setminus B$, $F \in \mathcal{D}_k$, $\boldsymbol{w} \in \Sigma_B$,

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{w}} \nabla_{\boldsymbol{v}_k} F = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma_B \,.$$

证明。固定 $k \in S \setminus B$、$F \in \mathcal{D}_k$。由于 $F \in \mathcal{D}_k$, $\nabla_{\boldsymbol{b}_k} F$是连续函数。因此，$(\nabla_{\boldsymbol{v}_k} F)(x) = (x_k/m_k)\, H(x)$，其中某个连续函数 $H \in C(\Sigma)$ 在 $x_k = 0$时为零。由于 $k \notin B$, $H|_{\Sigma_B} = 0$。

对于 $x \in \Sigma_B$，由于 $(\nabla_{\boldsymbol{v}_k} F)(x) = 0$,

$$(\nabla_{\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{w}} \nabla_{\boldsymbol{v}_k} F)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{(\nabla_{\boldsymbol{v}_k} F)(x + t(\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{w}))}{t} \,.$$

由于 $\boldsymbol{w} \in \Sigma_B$, $[\boldsymbol{w}]_k = 0$ 从而 $[\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{w}]_k = 1$。因此，根据 H的定义，由于 H 是连续的且$x_k = 0$, 该表达式等于

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{m_k} H(x + t(\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{w})) = \frac{1}{m_k} H(x) = 0 \,,$$

如所声称。 □

下面的引理描述了迹过程与投影映射如何通过海森项相关联。

引理 4.3. 对于 $F \in C^2(\mathbb{R}^S)$,

$$\sum_{i,j \in S} a_{ij} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{e}_j)} F = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in B} m_i \, r^B(i,j) \, (\partial_{x_i} - \partial_{x_j})^2 F \,. \tag{4.1}$$

证明. 根据 $\gamma_B(\boldsymbol{e}_j)$ 的定义 (3.9),

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in S} a_{ij} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{e}_j)} F &= \sum_{i,j \in S} \sum_{k \in B} a_{ij} \, \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_k} F \Big\{ \delta_{j,k} + \sum_{\ell \in A} u_k^B(\ell) \, \delta_{j,\ell} \Big\} \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{k \in B} a_{ik} \, \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_k} F + \sum_{i \in S} \sum_{k \in B} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_k} F \sum_{\ell \in A} a_{i\ell} \, u_k^B(\ell) \,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $A = S \setminus B$,

若 $i \in A$，根据 $a_{i\ell}$ 的定义 (2.7) 以及 (3.4),

$$\sum_{\ell \in A} a_{i\ell} \, u_k^B(\ell) = - a_{ik} \,.$$

因此，(4.2) 的右端等于

$$\sum_{i,k \in B} a_{ik} \, \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_k} F + \sum_{i,k \in B} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_k} F \sum_{\ell \in A} a_{i\ell} \, u_k^B(\ell) \,.$$

另一方面，根据 (3.5) 中的第一个恒等式以及 (3.7)，若 $i \in B$, $i \neq k$,

$$\sum_{\ell \in A} a_{i\ell} \, u_k^B(\ell) = - a_{ik} - m_i \, r^B(i,k) \quad \text{and} \quad \sum_{\ell \in A} a_{k\ell} \, u_k^B(\ell) = - m_k \, [\, \lambda_k - \lambda^B(k) \,] \,.$$

（4.2）右侧可进一步简化为

$$\sum_{k \in B} m_k \, \lambda^B(k) \, \nabla^2_{\boldsymbol{e}_k} F - \sum_{i \in B} \sum_{k \in B \setminus \{i\}} m_i \, r^B(i,k) \, \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \nabla_{\boldsymbol{e}_k} F \,.$$

引理的证明至此完成。 □

直接应用引理4.2和引理4.3，无法完全控制 $D_{\tilde{a}}$，因为（4.1）左侧关于 i 和 j并不对称。实际上，我们需要交换指标，这可以通过引入伴随生成元 $\mathcal{L}_S^\dagger$ 和（$\mathcal{L}_S^B$）†来实现。

令 $r^\dagger$ 为关于平稳测度 m 的 r 的伴随，具体定义如下:

$$r^\dagger(i,j) := m_j \, r(j,i)/m_i \,, \quad i \neq j \in S \,.$$

记 $\mathcal{L}_S^\dagger$ 为与跳跃率 $r^\dagger(i,j)$ 相关联的马尔可夫链的生成元，并令

$$\boldsymbol{v}_i^\dagger := \sum_{k\in S} r^\dagger(i,k)\,(\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_i)\,, \quad a_{ij}^\dagger := -\,m_i\,\boldsymbol{v}_i^\dagger\cdot\boldsymbol{e}_j,\ \ i,j\in S\,,$$

因此

$$a_{ij}^\dagger = -\,m_i\,r^\dagger(i,j) \ \text{ for } \ i\neq j\in S\,, \ \text{ and } \ a_{ii}^\dagger = m_i\,\lambda^\dagger(i)\,, \ \text{ where } \ \lambda^\dagger(i) := \sum_{j\neq i} r^\dagger(i,j)\,.$$

对于 S 的一个至少包含两个元素的子集 B，记 $\{r^{B,\dagger}(j,\ k)$ 为：$j,\ k\in B\}$ 生成元为 $\mathcal{L}_S^\dagger$ 的马尔可夫链在 B 上的迹的跳跃率。与 (3.2)、(3.9) 中一样，引入平衡势 $u^{B,\,\dagger}_{\cdot,\ i}$：$S\to[0,1]$ 以及投影映射 $\gamma_B^\dagger$：$\Sigma\to\Sigma_B$，它们将生成元 $\mathcal{L}_S$ 替换为其伴随 $\mathcal{L}_S^\dagger$。

推论 4.4. 对于任意 $F\in C^2(\mathbb{R}^S)$,

$$\sum_{i,j\in S} a_{ij}\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\nabla_{\gamma_B^\dagger(\boldsymbol{e}_i)}F \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j\in B} m_i\,r^{B,\dagger}(i,j)(\partial_{x_i}-\partial_{x_j})^2F.$$

证明. 由于 $a_{ij}^\dagger = a_{ji}$,

$$\sum_{i,j\in S} a_{ij}\nabla_{\boldsymbol{e}_j}\nabla_{\gamma_B^\dagger(\boldsymbol{e}_i)}F = \sum_{i,j\in S} a_{ij}^\dagger\nabla_{\boldsymbol{e}_i}\nabla_{\gamma_B^\dagger(\boldsymbol{e}_j)}F\,.$$

B根据前一个引理，将伴随跳跃率代入跳跃率后，该表达式等于 o

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j\in B} m_i\,r^{B,\dagger}(i,j)\,(\partial_{x_i}-\partial_{x_j})^2F\,,$$

正如所述。 □

由于 $m_i\,r^{B,\,\dagger}(i,\ j) = m_j\,r(j,\ i)$，引理 4.3 和推论 4.4 右端相同。这是因为迹过程的伴随等于伴随过程的迹。

命题 *4.1* 的证明。我们首先断言 $F|_{\Sigma_B}\in\mathcal{D}_B^B$。回顾 $A=S\setminus B$。取定满足 $(x^n)_i\to 0$ 的 $i\in B$ 和 $x^n\in\Sigma_B$。只需证明

$$\frac{\nabla_{\boldsymbol{v}_i^B}F(x^n)}{(x^n)_i}\to 0\,.$$

由 (3.11) 以及 F 属于 $\mathcal{D}_S$,

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_i^B}F(x^n) = \nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{v}_i)}F(x^n) = \nabla_{\boldsymbol{v}_i}F(x^n) - \nabla_{\boldsymbol{v}_i-\gamma_B(\boldsymbol{v}_i)}F(x^n)\,.$$

根据 $\mathcal{D}_S$ 的定义，$(\nabla_{\boldsymbol{v}_j}F)(y)=0$，其中 $y\in\Sigma_B$、$j\in A$。因此，由引理 3.1,

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_i-\gamma_B(\boldsymbol{v}_i)}F(x^n)=0\,,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nabla_{\boldsymbol{v}_i^B}F(x^n)}{(x^n)_i} = \lim_{n\to\infty}\frac{\nabla_{\boldsymbol{v}_i}F(x^n)}{(x^n)_i} = 0$$

因为 $F\in\mathcal{D}_S$。这就完成了命题第一部分的证明。

还需证明 $\mathfrak{L}^B(F|_{\Sigma_B})=0$ 与 $\mathfrak{L}F|_{\Sigma_B}$。固定 $x\in\Sigma_B$。令 ~ $B=\tilde{S}\setminus A$。根据定义，$A\subset A$ 和 $B\subset B$。

我们从 $\mathfrak{L}$的定义开始:

$$\mathfrak{L}F(x) = \nabla_{\boldsymbol{b}}F(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i\,r(i,j)\,[\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j}(\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j}F)](x).$$

根据算子 $\nabla_{\boldsymbol{b}}$ 的定义，第一项等于

$$\nabla_{\boldsymbol{b}}F(x) = \sum_{j\in\tilde{B}}\nabla_{\boldsymbol{b}_j}F(x) \;=\; b\sum_{j\in\tilde{B}} m_j\,\frac{\nabla_{\boldsymbol{v}_j}F(x)}{x_j} \;=\; b\sum_{j\in\tilde{B}} m_j\,\frac{\nabla_{\boldsymbol{v}_j-\gamma_B(\boldsymbol{v}_j)}F(x)}{x_j} + b\sum_{j\in\tilde{B}} m_j\,\frac{\nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{v}_j)}F(x)}{x_j}\,.$$

与证明的第一部分一样，根据 $\mathcal{D}_S$ 的定义， $\nabla_{\boldsymbol{v}_i} F(y) = 0$ 对于 $i \in A, y \in \Sigma_B$。因此，由于$x \in \Sigma_B$，根据引理 3.1，右侧的第一项消失，从而

$$\nabla_{\boldsymbol{b}} F(x) = b \sum_{j \in \tilde{B}} m_j \frac{\nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{v}_j)} F(x)}{x_j} = \nabla_{\boldsymbol{b}^B} F(x) . \tag{4.3}$$

现在来看第二项。令 $\tilde{F} \in C^2(\mathbb{R}^S)$ 为 F 的一个延拓。根据 (2.9) 和推论 4.4，第二项等于

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \in S} a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \tilde{F}(x) &= \sum_{i,j \in S} a_{ij} \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \nabla_{\boldsymbol{e}_i} \tilde{F}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in B} m_i \, r^{B,\dagger}(i,j) \, (\partial_{x_i} - \partial_{x_j})^2 \tilde{F}(x) + \sum_{i,j \in S} a_{ij} \nabla_{\boldsymbol{e}_j} \nabla_{\boldsymbol{e}_i - \gamma_B^\dagger(\boldsymbol{e}_i)} \tilde{F}(x) . \end{aligned}$$

由于对于 $i \in B$， $\sum_j a_{ij} \boldsymbol{e}_j = -m_i \, \boldsymbol{v}_i$ 和 $\gamma_B^\dagger(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ ，第二项等于

$$- \sum_{i \in S} m_i \, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} \, \nabla_{\boldsymbol{e}_i - \gamma_B^\dagger(\boldsymbol{e}_i)} \, \tilde{F}(x) = - \sum_{i \in A} m_i \, \nabla_{\boldsymbol{v}_i} \, \nabla_{\boldsymbol{e}_i - \gamma_B^\dagger(\boldsymbol{e}_i)} \, \tilde{F}(x)$$

由于 $x \in \Sigma_B$，根据引理 4.2，这个表达式为零。

因此，

$$\sum_{i,j \in S} a_{ij} \, \partial_{x_i} \, \partial_{x_j} \tilde{F}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in B} m_i \, r^{B,\dagger}(i,j) \, (\partial_{x_i} - \partial_{x_j})^2 \tilde{F}(x) . \tag{4.4}$$

由于 $m_i \, r^{B,\,\dagger}(i,\ j) = m_j \, r^B(j,\ i)$，结合 (4.3) 和 (4.4) 可得

$$\mathfrak{L} F(x) = \mathfrak{L}^B F(x) , \tag{4.5}$$

至此，命题的证明完成。 □

根据命题 4.1，我们重新定义算子 $\mathfrak{L}$ 在定义域 $\mathcal{D}_S$上，然后进一步扩展该算子的定义域。为此，我们需要函数空间 $C_{\mathrm{pc}}(\Sigma)$ (pc 表示分片)，其元素为函数 $F\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}$ 满足：对于 B 的每个 S 至少含有两个元素的子集，函数$F|_{\mathring{\Sigma}_B}\colon\ \Sigma_B \to \mathbb{R}$ 是连续的。为将这个新算子（定义域已扩展）与由 $\mathfrak{L}$表示的原算子区分开来，我们将其记为 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}$。

定义 4.5。 对于满足 $F|_{\mathring{\Sigma}_C} \in C^2(\mathring{\Sigma}_C)$ 的 $F \in C(\Sigma)$，对所有非空的 ,, 定义算子 如下：对于 ，令 ：$x_i \neq 0\}$。则 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F \in C_{\mathrm{pc}}(\Sigma)$ 定义为

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F(x) = \begin{cases} [\mathfrak{L}^B(F|_{\mathring{\Sigma}_B})](x), & \text{if } B = \{i \in S : x_i \neq 0\},\ |B| \geq 2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.6}$$

这里， $\mathfrak{L}^B$ 是式 (2.14) 中定义的算子，将其视为作用于 Σ_B上的局部二阶微分算子°，如注 *2.9* 所述。

注意，根据命题 4.1， $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}$ 在定义域 $\mathcal{D}_S$ 上等于 $\mathfrak{L}$ 。定义 4.5 中引入的函数在定义域的边界附近可能表现异常，因为当 x 趋近于 Σ_B的边界时，$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F$ 的值可能发散，从而导致鞅问题定义不明确。因此，有必要引入进一步的条件。

条件 $\mathfrak{E}_1$： 对于每个 $i \in S$，若映射满足条件 $\mathfrak{E}_1(i)$，则 $F \in C^1(\Sigma)$ 满足条件

$$x \mapsto \frac{1}{x_i} \nabla_{\boldsymbol{v}_i} F(x), \tag{4.7}$$

在 $\{x \in \Sigma$ 上有界： $x_i > 0\}$。如果 F 对所有 $i \in S$ 都满足条件 $\mathfrak{E}_1(i)$，那么我们就说 F满足条件 $\mathfrak{E}_1$。

与 (2.11) 中的定义类似，对于带有 $|A| \geq 2$ 的 $A \subset S$ ，令

$$C_b^2(\mathring{\Sigma}_A) := \left\{ f \in C^2(\mathring{\Sigma}_A) : f \text{ has bounded second derivatives} \right\} .$$

“f 的二阶导数有界”这一表达式表示，对于 T_{Σ_A} 中的所有切向量 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{W}^{\circ}$，二阶导数 $\nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}} f)$ 在 Σ_A 上有界。换言之，存在一个有限常数 $C_0 > 0$，使得

$$\big|\,[\nabla_{\boldsymbol{V}}(\nabla_{\boldsymbol{W}} f)](x)\,\big| \;\le\; C_0\,\|\boldsymbol{V}\|\,\|\boldsymbol{W}\| \tag{4.8}$$

$^{\circ}$对所有 $\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W} \in T_{\Sigma_A}$ 和 $x \in \Sigma_A$。

条件 $\mathfrak{E}_2$： 我们称 $F \in C^1(\Sigma)$ 满足条件 $\mathfrak{E}_2(A)$，$A \subset S$ 其中 $|A| \ge 2$，若 $F|_{\mathring{\Sigma}_A} \in C_b^2(\mathring{\Sigma}_A)$。若对于所有满足 $|A| \ge 2$ 的 $A \subset S$，F 都满足条件 $\mathfrak{E}_2(A)$，则称 F 满足条件 $\mathfrak{E}_2$。

注 4.6. 根据引理 *A.3*，满足 $F|_{\mathring{\Sigma}} \in C_b^2(\mathring{\Sigma})$ 的函数 $F \in C(\Sigma)$ 属于 $C^1(\Sigma)$，并且对于任意满足 $|B| \ge 2$ 的 $B \subset S$，$F|_{\Sigma_B}$ 属于 $C^1(\Sigma_B)$。

定义 4.7. 对于每个 $i \in S$，记 $\mathcal{E}_i$ 为满足以下条件的函数 $F \in C^1(\Sigma)$ 的条件 $\mathfrak{E}_1(i)$和条件 $\mathfrak{E}_2$。此外，设

$$\mathcal{E}_A := \bigcap_{i \in A} \mathcal{E}_i \quad \textit{for each nonempty } A \subseteq S.$$

下一个结果是命题 4.1 的推论。

命题 4.8。 有 $\mathcal{D}_S \subset \mathcal{E}_S$。此外，对所有 $F \in \mathcal{D}_S$，$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F = \mathfrak{L} F$。

证明。 固定 $F \in \mathcal{D}_S$。根据定义 2.1，$F \in C^1(\Sigma)$，且 F 满足条件 $\mathfrak{E}_1$。取 S 的一个子集 A，其中至少有两个元素。根据同一定义，$F|_{\mathring{\Sigma}_A} \in C_b^2(\mathring{\Sigma}_A)$。这证明了 F 属于 $\mathcal{E}_S$。另一方面，由 (4.6) 和命题 4.1，$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F = \mathfrak{L} F$，从而完成了该命题的证明。。□

最后，我们定义扩展鞅问题。令 $C^b_{\mathrm{pc}}(\Sigma)$ 为 $C_{\mathrm{pc}}(\Sigma)$ 中有界函数构成的空间。显然，算子 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}$ 将 $\mathcal{E}_S$ 映射到 $C^b_{\mathrm{pc}}(\Sigma)$。由于 $C^b_{\mathrm{pc}}(\Sigma)$ 是有界博雷尔函数的子集，我们可以考虑以下鞅问题。

定义 4.9。 测度 $\mathbb{P}$ 在 $C(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ 上是$(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}_S)$-鞅问题的一个解，若对任意 $H \in \mathcal{E}_S$,

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H(X_t) - \int_0^t (\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H)(X_s)\, ds\,, \quad t \ge 0$$

是相对于滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$的 $\mathbb{P}$-鞅，与定义 *2.10* 中相同。

在下一节中，我们证明以下定理。

定理 4.10。 对每个 $x \in \Sigma$，记 $\mathbb{P}_x$ 为 $D(\mathbb{R}_+, \Sigma)$ 上的一个概率测度，该测度始于x，并且是$(\mathfrak{L}, \mathcal{D}_S)$-鞅问题的一个解。那么 $\mathbb{P}_x$ 也满足$(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}_S)$-鞅问题。

4.1. 延拓映射。 由于我们的扩展定义域是通过整合来自子单形的信息而定义的，因此我们可能希望将定义在子单形上的函数延拓到整个单纯形 Σ 上，使得延拓后的函数属于生成元 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}$的定义域。这种方法在第 6 节和第 7 节中发挥着关键作用。

给定函数 $f\colon \Sigma_B \to \mathbb{R}$，定义函数 $\gamma_B^* f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 如下：

$$(\gamma_B^* f)(x) \;:=\; f(\gamma_B(x))\,, \quad x \in \Sigma\,. \tag{4.9}$$

引理 4.11。 假设 F 满足条件 $\mathfrak{E}_2$。固定 $\varnothing \ne B \subsetneq S$，并令 F_B 为 F在 Σ_B: $F_B = F|_{\Sigma_B}$上的限制。那么，$\gamma_B^* F_B$属于 $\mathcal{E}_A$，其中 $A = S \setminus B$。

证明。 我们需要验证条件 $\mathfrak{E}_1(A)$ 和条件 $\mathfrak{E}_2$。首先，注意到 $F \in C^1(\Sigma)$。根据注 4.6，$F_B = F|_{\Sigma_B} \in C^1(\Sigma_B)$。

(1) $\gamma_B^* F_B$ 满足条件 $\mathfrak{E}_1(A)$。

固定 $i \in A$。由引理 A.2，当 $F_B \in C^1(\Sigma_B)$ 时，

$$\frac{1}{x_i}\,[\nabla_{\boldsymbol{v}_i}(\gamma_B^* F_B)](x) \;=\; \frac{1}{x_i}\,(\nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{v}_i)} F_B)(\gamma_B(x)) \quad \text{on the set } \{x \in \Sigma : x_i > 0\}\,.$$

由 (3.11)，当 $i \in A, \gamma_B(\boldsymbol{v}_i) = 0$ 时，右侧因此趋于零。特别地，它满足所需的有界性。

(2) $\gamma_B^* F_B$ 满足条件 $\mathfrak{E}_2$。
我们需要检验所有集合 $C \subset S$、$|C| \geq 2$ 的条件 $\mathfrak{E}_2(C)$。由于 F 属于 $\mathcal{E}_A$，它满足条件 $\mathfrak{E}_2(B)$。因此，$F|_{\mathring{\Sigma}_B} \in C_b^2(\mathring{\Sigma}_B)$，从而 $F_B|_{\mathring{\Sigma}_B} \in C_b^2(\mathring{\Sigma}_B)$。
另一方面，根据引理 3.3，$\gamma_B(\Sigma_C) \subset \Sigma_D$，其中某个 $D \subset B$。因此，$(\gamma_B^* F_B)|_{\mathring{\Sigma}_C}$ 属于 $C_b^2(\mathring{\Sigma}_C)$，如所述。□

下一个引理指出，延拓映射的某些特定方向导数为零。

引理 4.12。 固定 $\varnothing \neq B \subset C \subset S$ 和 $G \in C^1(\Sigma_B)$。则，$[\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C}(\gamma_B^* G)](x) = 0$ 对所有 $i \in C \setminus B$、$x \in \Sigma$ 均成立。

证明。固定 $i \in C$。由引理 A.2，且由于根据 (3.11)，$\boldsymbol{v}_i^C = \gamma_C(\boldsymbol{v}_i)$，

$$[\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C}(\gamma_B^* G)](x) = (\nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{v}_i^C)} G)(\gamma_B(x)) = (\nabla_{\gamma_B \circ \gamma_C(\boldsymbol{v}_i)} G)(\gamma_B(x))$$

对所有 $x \in \Sigma$ 均成立。根据引理 3.4，这个表达式等于 $(\nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{v}_i)} G)(\gamma_B(x))$。由于 $i \notin B$，根据 (3.9)，$\gamma_B(\boldsymbol{v}_i) = 0$，由此完成引理的证明。□

5. A norm map and related Lemmas

本节致力于构造映射 $J_A\colon \mathbb{R}_+^A \to \mathbb{R}_+$，$A$ S 的一个非空子集，这些映射模拟 $\mathbb{R}^A$ 的范数，并且其在单纯形 Σ 边界处的方向导数表现良好（见引理 5.2、5.3）。这些函数在第 6 节中发挥着关键作用：用于通过 $\mathcal{D}_S$ 中的函数逼近 $\mathcal{E}_S$ 中的函数（引理 6.6），并用于在定义域 $\mathcal{E}_S$ 中构造超调和函数，见引理 7.2。

对于每个非空 $A \subseteq S$，赋予 $\mathbb{R}^A$ 范数 $\|x\|_A := \sum_{i \in A} |x_i|$ 并考虑锥$\mathbb{R}_+^A := \{x \in \mathbb{R}^A : x_i \geq 0, \forall i \in A\}$ 其顶点为 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^A$。

引理 5.1。对于每个非空子集 A *of* S，存在一个函数 $J_A\colon \mathbb{R}_+^A \to [0, \infty)$ 使得*a)* $J_A(\alpha x) = \alpha J_A(x)$，对所有 $\alpha \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}_+^A$ 均成立。*b)* 存在常数 $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$，使得

$$c_1 \|x\|_A \leq J_A(x) \leq c_2 \|x\|_A, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^A.$$

c) J_A 在包含 $\mathbb{R}_+^A \setminus \{\mathbf{0}\}$ 的 $\mathbb{R}^A$ 开子集上存在一个延拓。*d)* 假设 $|A| \geq 2$。
对于所有 $x \in \mathbb{R}_+^A \setminus \{\mathbf{0}\}$ 和 $i \in A$,

$$x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_{\boldsymbol{w}_i} J_A \text{ vanishes on a neighborhood of } x,$$

其中，每个 $\boldsymbol{w}_i$ 都是 $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^S$ 在 $\mathbb{R}^A$ 上的典范投影（限制），即，

$$[\boldsymbol{w}_i]_j = [\boldsymbol{v}_i]_j, \quad j \in A$$

证明。对于 $A \neq S$，这可由 [5, 第 8] 节中引理 4.1 的证明得出。对于 $A = S$，显然，$J_S(x) = \sum_{i \in S} x_i$, $x \in \mathbb{R}_+^S$ 满足所有陈述的性质。□

我们将把每个函数 J_A 用作满足上述性质的 $\|\cdot\|_A$ 的适当扰动。当 A 是单元素集合时，性质 *a)* 和 *b)* 表明，对于某个 $\lambda > 0$，$J_A(x) = \lambda x$。

现在我们补充一些由引理 5.1 得出的性质。固定一个非空集合 $A \subseteq S$。由性质 *a)* 可知，对于每个 $\alpha > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}_+^A \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$(\nabla J_A)(\alpha x) = (\nabla J_A)(x) \quad \text{and} \quad (\operatorname{Hess} J_A)(\alpha x) = \alpha^{-1} (\operatorname{Hess} J_A)(x). \tag{5.1}$$

由于 ∇J_A 和 $\operatorname{Hess} J_A$ 在 $\mathbb{R}_+^A \setminus \{0\}$ 上连续，因此，根据 (5.1),

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^A \setminus \{\mathbf{0}\}} \|\nabla J_A(x)\|_A < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}_+^A \setminus \{\mathbf{0}\}} \|x\|_A \|\operatorname{Hess} J_A(x)\|_A < \infty. \tag{5.2}$$

最后，假设 $|A| \geq 2$，固定任意一个 $i \in A$，并回忆性质 d）中的向量 $\boldsymbol{w}_i$。根据这一性质，

$$1\{x_i > 0\} \frac{\nabla_{\boldsymbol{w}_i} J_A(x)}{x_i}, \quad x \in \mathbb{R}_+^A \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \text{is continuous.} \tag{5.3}$$

于是，由 (5.1) 得，

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^A \setminus \{\mathbf{0}\},\, x_i > 0} \|x\|_A \, \frac{|\nabla_{\boldsymbol{w}_i} J_A(x)|}{x_i} < \infty. \tag{5.4}$$

令 $\mathfrak{J}_A \colon \mathbb{R}_+^S \to \mathbb{R}_+$ 定义为

$$\mathfrak{J}_A(x) := J_A(x_A). \tag{5.5}$$

为使记号简洁，我们定义 $\|x\|_A = \|x_A\|_A$，其中 x_A 表示 x 在 $\mathbb{R}^A$ 上的典范投影，A 是 S 和 $x \in \Sigma$ 的非空子集。下一个结果是用这一新记号 $\mathfrak{J}_A$ 表述的估计式 (5.4)。

引理 5.2. 对于所有非空的 $A \subseteq S$ 和 $i \in A$，我们有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^S : \|x\|_A > 0,\, x_i > 0} \|x\|_A \, \frac{|\nabla_{\boldsymbol{v}_i} \mathfrak{J}_A(x)|}{x_i} < \infty.$$

下一个结果是引理 5.2 的推论。

引理 5.3. 固定 $x \in \Sigma$ 并令 $C = \{i \in S \colon x_i \neq 0\}$。假设 $B \subsetneq C$。对于 $A = S \setminus B$, $\mathfrak{J}_A(x) > 0$以及

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_k} \mathfrak{J}_A(x) = 0, \quad \forall k \notin C.$$

证明。我们首先证明 $\|x\|_A > 0$。反设不然。那么，$\|x\|_A = 0$ 意味着对所有 $i \in A$都有 $x_i = 0$。这意味着 $A \subset C^c$，因此 $A^c = B \supset C$。这与假设 $B \subsetneq C$矛盾。

固定 $k \notin C$，并令 $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ 为满足以下条件的序列

$$x^n \to x \quad \text{and} \quad (x^n)_k > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

由引理 5.2,

$$|\nabla_{\boldsymbol{v}_k} \mathfrak{J}_A(x^n)| \to 0,$$

这就推出了该引理的结论。 □

利用辅助函数 $\mathfrak{J}_A$，我们推导出 $\mathcal{E}_A$ 中函数的估计。对于 $U \subset \Sigma$，令

$$BC(\Sigma, U) := \{f \colon \Sigma \to \mathbb{R} \text{博雷尔可测、有界且 } f|_U \text{连续}\}.$$

引理 5.4。 固定 $\varnothing \neq B \subsetneq S$，并令 $A = S \setminus B$。对于满足 $G|_{\Sigma_B} = 0$ 的任意 $G \in \mathcal{E}_A$，

(1) $G = H\mathfrak{J}_A^2$ 对某个 $H \in BC(\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma_B)$成立。(2) 对于所有 $i, j \in S$,

$(\partial_{x_i} - \partial_{x_j})G = K\mathfrak{J}_A$ 对某个 $K \in BC(\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma_B)$成立。

证明 关于 *(1)*。根据条件 $\mathfrak{E}_1(i)$, $i \in A$, G 属于 $C^1(\Sigma)$，并且存在一个有界的博雷尔函数 $h_i \colon \Sigma \to \mathbb{R}$，使得

$$\frac{\nabla_{\boldsymbol{v}_i} G(x)}{x_i} = h_i(x) \quad \text{for } \{x_i > 0\}.$$

Let $C > 0$ 是函数 $|h_i|$ 的上界，即 $\max_{i \in A} \sup_{x \in \Sigma} |h_i(x)| \leq C$，使得

$$|\nabla_{\boldsymbol{v}_i} G(x)| \leq C x_i \quad \text{for all } x \in \Sigma. \tag{5.6}$$

我们声称存在一个有限常数 C_0，使得对所有 $x \in \Sigma$, $|G(x)| \leq C_0 \mathfrak{J}_A^2(x)$。由于两个函数在集合 Σ_B 上都为零，这个不等式在该集合上显然成立。固定 $x \in \Sigma \setminus \Sigma_B$。由于 G 属于 $C^1(\Sigma)$ 类，$G|_{\Sigma_B} = 0$ 且 $\gamma_B(x) \in \Sigma_B$，由引理 3.2 和引理 A.1,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^1 \nabla_{x - \gamma_B(x)} G(\gamma_B(x) + t(x - \gamma_B(x)))\, dt \\ &= -\sum_{i \in A} \int_0^1 [L_A(x_A)]_i \nabla_{\boldsymbol{v}_i} G(\gamma_B(x) + t(x - \gamma_B(x)))\, dt. \end{aligned}$$

根据常数 C 的定义，前一个表达式的绝对值有界于

$$C\sum_{i\in A}\big|\,[L_A(x_A)]_i\,\big|\int_0^1\big|\,[\gamma_B(x)+t(x-\gamma_B(x))]_i\,\big|\,dt$$
$$\le\ C\sum_{i\in A}\big|\,[L_A(x_A)]_i\,\big|\Big\{\,|\,[\gamma_B(x)]_i\,|\,+\,|\,x_i\,|\,\Big\}\ \le\ C'\,\|x_A\|^2$$

其中 C' 是某个新的有限常数。因此，对于某个有限常数 $C_0>0$，$|G(x)|\le C_0\mathfrak{I}_A^2(x)$，正如所声称的那样。

为完成断言 (1) 的证明，仍需将 $H(x)$ 定义为：当 $x\in\Sigma\setminus\Sigma_B$ 时，$G(x)/\mathfrak{I}_A^2(x)$；当 $y\in\Sigma_B$ 时，$H(y)=0$。显然，$G=H\mathfrak{I}_A^2$, H 有界且可测，并且 H 在 $\Sigma\setminus\Sigma_B$ 上的限制是连续的，因为 $G(\cdot)$ 和 $\mathfrak{I}_A(\cdot)$ 在该集合上都是连续的。

（2）的证明。固定 $i\neq j\in S$。我们断言，存在一个有限常数 C，使得

$$|\,(\partial_{x_i}-\partial_{x_j})G(x)\,|\le C\,\mathfrak{I}_A(x)\tag{5.7}$$

对所有 $x\in\Sigma$，。

将 $(\partial_{x_i}-\partial_{x_j})G$ 重写为 $\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j}G$，于是

$$|\,(\partial_{x_i}-\partial_{x_j})G(x)\,|\ \le\ |\,\nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)}G(x)\,|\ +\ |\,\nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)-(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)}G(x)\,|\tag{5.8}$$

By 由引理 3.1.(2)、(5.6) 以及 $\mathfrak{I}_A$ 的定义 (5.5)，第二项小于或等于

$$C\sum_{k\in A}|\,\nabla_{\boldsymbol{v}_k}G(x)\,|\ \le\ C\,\mathfrak{I}_A(x)$$

对于某个有限常数 C，该常数可能在不同的行中发生变化。

我们转向 (5.8) 右侧的第一项。由于 $x\in\Sigma$，x 与 $\gamma_B(x)$ 之间线段的内部包含于 Σ。

为方便起见，令 $\boldsymbol{w}=\gamma_B(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)$。由 (3.9)，对于 $k\in A$，有 $\boldsymbol{w}_k=0$。因此，由于 G 在 Σ_B 上为零，且 $\gamma_B(x)\in\Sigma_B$，$\nabla_{\boldsymbol{w}}G(\gamma_B(x))=0$。根据条件 $\mathfrak{E}_2(S)$,

$$|\nabla_{\boldsymbol{w}}G(x)|=|\nabla_{\boldsymbol{w}}G(x)-\nabla_{\boldsymbol{w}}G(\gamma_B(x))|=\Big|\int_0^1\nabla_{x-\gamma_B(x)}\nabla_{\boldsymbol{w}}G(\gamma_B(x)+t(x-\gamma_B(x)))\,dt\Big|.$$

由于 G 满足条件 $\mathfrak{E}_2(S)$，$\boldsymbol{w}$、$x-\gamma_B(x)$ 属于 T_Σ，且 $\gamma_B(x)+t(x-\gamma_B(x))$ 属于 Σ。由 (4.8)，存在一个有限常数 $C>0$，使得

$$\big|\,\nabla_{x-\gamma_B(x)}\nabla_{\boldsymbol{w}}G(\gamma_B(x)+t(x-\gamma_B(x)))\,\big|\ \le\ C\,\|\,x-\gamma_B(x)\|\,\|\boldsymbol{w}\|\,.$$

根据引理 3.2，此表达式等于

$$C\,\|\boldsymbol{w}\|\,\Big\|\sum_{i\in A}[L_A(x_A)]_i\,\boldsymbol{v}_i\,\Big\|\ \le C'\,\|x_A\|\,.$$

这就证明了断言 (5.7)。

我们可以将估计 (5.7) 推广到 $x\in\Sigma$。考虑一个序列 $x^n\to x$，使得 $x^n\in\Sigma$。由于对于所有 $n\ge1$，$|(\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j}G)(x^n)|\le C\,\mathfrak{I}_A(x^n)$；又因当 $G\in C^1$ 时 Σ，且 $\mathfrak{I}_A$ 在 Σ 上连续，令 $n\to\infty$，可得 (5.7) 对 $x\in\Sigma$ 成立。

为完成断言 (2) 的证明，还需将 $K(x)$ 定义为：对于$x\in\Sigma\setminus\Sigma_B$，$\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j}G(x)/\mathfrak{I}_A(x)$；对于 $y\in\Sigma_B$，$K(y)=0$。显然，K 有界且可测，而 K 在$\Sigma\setminus\Sigma_B$ 上的限制是连续的，因为 $\nabla_{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j}G(\cdot)$ 和 $\mathfrak{I}_A(\cdot)$ 在此集合上也连续。□

我们通过构造一组属于生成元的定义域的截断函数 Φ_A 来结束本节：当 $\min_{i\in A}x_i\ge\epsilon$ 时它们等于 1，而当 $\min_{i\in A}x_i\le\delta$ 时它们等于 0，其中某个 $0<\delta<\epsilon$。下一条结果即为这一结论的具体内容，它改编自 [1, 引理 3.5]。

引理 5.5. 设 A 是 S 和 $B=S\backslash A$的一个非空子集。给定 $\epsilon>0$，存在 $\Phi:\Sigma\to[0,1]$和 $\delta\in(0,\ \epsilon)$ 使得 $\Phi\in\mathcal{D}_S$,

$i)$ $\min\limits_{i\in A}x_i\ge\epsilon\quad\Longrightarrow\quad\Phi(x)=1,\quad and$

$ii)$ $\min\limits_{i\in A}x_i\le\delta\quad\Longrightarrow\quad\Phi(x)=0.$

证明. 固定一个非空子集 A，它属于 S。设 $\phi\colon \mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个光滑函数，使得

$$\phi(x)=0,\ \text{for } x\le 2/3 \quad\text{and}\quad \phi(x)=1,\ \text{for } x\ge 1.$$

设（J_D）$\varnothing\subsetneq D\subseteq S$ 为满足引理 5.1 中所有性质的函数。由于每个 J_D 都可以重新缩放，不失一般性，我们可以假设引理 5.1 中的性质 b）对 $1=c_1\le c_2=C$成立。对于每个非空的 $D\subseteq S$，我们定义

$$\varepsilon_D := \epsilon\,(3C)^{|D|-1-|W|}$$

并将 $\varphi_D\in C^\infty(\Sigma)$ 定义为

$$\varphi_D(x) := \phi\left(\frac{J_D(x_D)}{\varepsilon_D}\right),\quad x\in\Sigma,$$

其中，x_D 是 x 在 $\mathbb{R}^D$上的典范投影。为简化记号，我们对 $x\in\Sigma$设 $\|x\|_D=\|x_D\|_D$。显然，φ_D 可以平滑地延拓到一个包含 Σ的开集上。由（5.3），$\varphi_D\in\mathcal{D}_D$，并根据 ϕ的定义，

$$\varphi_D(x)=\begin{cases}0, & \text{if } \|x\|_D\le 2\varepsilon_D(3C)^{-1},\\ 1, & \text{if } \|x\|_D\ge\varepsilon_D.\end{cases}\tag{5.9}$$

对每个 $k\in A$定义，

$$\Phi_k := \prod_{W\subseteq B}\varphi_{W\cup\{k\}}\,,\tag{5.10}$$

因此，若 W 为空，则 $\Phi_k=\varphi_{\{k\}}$。最后我们来验证

$$\Phi := \prod_{k\in A}\Phi_k$$

满足该引理的条件。对于每个 $k\in A$ 和 $W\subseteq B$，由 (5.9) 得

$$x_k\ge\epsilon \quad\Longrightarrow\quad \|x\|_{W\cup\{k\}}\ge\epsilon\ge\varepsilon_{W\cup\{k\}} \quad\Longrightarrow\quad \varphi_{W\cup\{k\}}(x)=1\,.$$

因此，由 (5.10)，$\Phi_k(x)=1$。于是，i) 成立。

由 (5.9)，对于每个 $k\in A$，我们有

$$x_k\le\frac{2\varepsilon_{\{k\}}}{3C} \quad\Longrightarrow\quad \varphi_{\{k\}}(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad \Phi(x)=0.$$

因此，取.....可得 ii) 成立

$$\delta := \frac{2\epsilon}{(3C)^{|W|+1}}<\epsilon.$$

由 ii) 可知，$\Phi\in\mathcal{D}_A$ 显然成立。剩下需要证明的是，若 B 非空，则 $\Phi\in\mathcal{D}_B$。若能证明以下结论，该性质便成立：

$$\Phi_k\in\mathcal{D}_j,\quad \text{for all } k\in A \text{ and } j\in B.$$

固定 $k\in A$ 和 $j\in B$，并记

$$\Phi_k=\prod_{E\subseteq B\setminus\{j\}}\left(\varphi_{E\cup\{k\}}\,\varphi_{E\cup\{j,k\}}\right).$$

因此，只需验证

$$\varphi_{E\cup\{k\}}\,\varphi_{E\cup\{j,k\}}\in\mathcal{D}_j,\quad \text{for each } E\subseteq B\setminus\{j\}.$$

由 (5.3)，$\varphi_{E\cup\{j,k\}}\in\mathcal{D}_{E\cup\{j,k\}}\subset\mathcal{D}_j$，只需证明

$$x\ \mapsto\ 1\{x_j>0\}\left(\frac{1}{x_j}\right)\varphi_{E\cup\{j,k\}}(x)\,\nabla_{\boldsymbol{v}_j}\varphi_{E\cup\{k\}}(x)\quad\text{is continuous on }\Sigma\,.\tag{5.11}$$

固定某个 $x\in\Sigma$，使得 $x_j=0$。另一方面，由 (5.9) 可得，

$$\|x\|_{E\cup\{k\}}>\varepsilon_{E\cup\{k\}} \quad\Longrightarrow\quad \varphi_{E\cup\{k\}}\equiv 1\ \text{ on a neighborhood of } x.$$

另一方面，由 (5.9) 可得，

$$\|x\|_{E\cup\{j,k\}} = \|x\|_{E\cup\{k\}} < 2\varepsilon_{E\cup\{k\}} = \frac{2\varepsilon_{E\cup\{j,k\}}}{3C} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{E\cup\{j,k\}} \equiv 0 \text{ on a neighborhood of } x.$$

因此，$\varphi_{E\cup\{j,k\}}(x)$ $\nabla_{v_j}\varphi_{E\cup\{k\}}(x)$ 在 $\{x_j = 0\}$ 的某个邻域上为零，正如 (5.11) 中所声称的那样。这就完成了引理的证明。□

6. Proof of Theorem 4.10

定理 4.10 的证明分为几个步骤。首先，对于每个有限符号测度 μ 在Σ上，我们在空间 $\mathcal{E}_S$ 上引入一种拓扑，称为 μ-拓扑。这种拓扑是专为鞅问题设计的。更确切地说，固定 $H \in \mathcal{E}_S$。假设对于每个有限符号测度μ 在 Σ上，都存在一个函数序列 $(H_n)_{n\geq 1}$ 在 $\mathcal{E}_S$ 中收敛于 H 在 μ-拓扑下，并且对于每个 $n \geq 1$,

$$H_n(X_t) - H_n(X_0) - \int_0^t (\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_n)(X_s)\, ds$$

是典范空间 $(C([0,T],\Sigma)$ $\mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 中的一个鞅。那么，将 H 替换为 H_n 后得到的前述表达式也是一个鞅。

本节的主要结果——命题 6.1——指出，空间 $\mathcal{D}_S$ 在此拓扑下于 $\mathcal{E}_S$ 中稠密，也就是说，对于每个 $H \in \mathcal{E}_S$ 以及 Σ上的有限符号测度 μ，都存在一个函数序列 $(H_n)_{n\geq 1}$，属于 $\mathcal{D}_S$，并在 μ-拓扑下收敛于 H。定理 4.10 是这一结果的直接推论。这是第 6.1 小节的内容。

在第 6.2 小节中，我们分三步证明命题 6.1。首先，我们定义函数空间 $\mathcal{K}^{\mathcal{G}}$、$\mathcal{G} \subset 2^S$，使得 $\mathcal{E}_S \subset \mathcal{K}^{\varnothing}$，并且当 $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ 时有 $\mathcal{K}^{\mathcal{G}} \supset \mathcal{K}^{\mathcal{G}'}$。引理 6.4 断言 $\mathcal{K}^{2^S} \subset \mathcal{D}_S$，而命题 6.5 断言，对于 Σ 上的任意有限符号测度 μ，$\mathcal{K}^{\mathcal{G}\cup\{B\}}$ 在 $\mathcal{K}^{\mathcal{G}}$ 中关于 μ 稠密。命题 6.1 由上述结果得出。

6.1. 在 μ-拓扑下的 $\mathcal{E}_S$。

令 $\mathcal{M}(\Sigma)$ 为 Σ 上有限符号博雷尔测度构成的空间。固定$\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$。对于 $H \in \mathcal{E}_S$，我们将范数 $\|H\|_\mu$ 定义为

$$\|H\|_\mu := \|H\|_\infty + \Big| \int_\Sigma \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H \, d\mu \Big|.$$

该范数在 $\mathcal{E}_S$上诱导出一个度量和拓扑。此拓扑称为 μ-拓扑。显然，它是第一可数的。因此，对于任意集合 $C \subset \mathcal{E}_S$，$x \in C$ 当且仅当存在一个收敛到 x的序列 $x_n \in C$。对于任意 $C \subset D \subset \mathcal{E}_S$，若 $D \subset C$ 在μ-拓扑下成立，我们称 C 在 D 中是 μ-稠密的。我们将在下一节证明以下命题。

命题 6.1. 对于每个 $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$ 和 $f \in \mathcal{E}_S$，都存在一个收敛到f 的序列 $f_n \in \mathcal{D}_S$，其收敛性是在 μ-拓扑下理解的。

假设命题 6.1 成立，我们来证明定理 4.10

定理 *4.10* 的证明。假设 $\mathbb{P}$ 是 $(\mathfrak{L}, \mathcal{D}_S)$-鞅问题的解。固定 $H \in \mathcal{E}_S$。只需证明，对于任意 $n \geq 1$、连续函数 $G\colon \Sigma^n \to \mathbb{R}$，以及 $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t_1 < t_2$,

$$\mathbb{E}\left[G(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \left\{ H(X_{t_2}) - H(X_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H)(X_s) ds \right\} \right] = 0\,, \tag{6.1}$$

其中 $\mathbb{E}$ 表示关于 $\mathbb{P}$的期望。

对于 $\phi \in C(\Sigma)$，注意到

$$\phi \mapsto \mathbb{E}\left[G(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \int_{t_1}^{t_2} \phi(X_s) ds \right]$$

是 $C(\Sigma)$ 上的有界线性泛函。因此，存在 $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$ 使得

$$\mathbb{E}\left[G(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \int_{t_1}^{t_2} \phi(X_s) ds \right] = \int_\Sigma \phi(x)\, d\mu(x)\,. \tag{6.2}$$

因此，(6.1) 等价于

$$\mathbb{E}\left[G(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})\left\{H(X_{t_2})-H(X_{t_1})\right\}\right]=\int_{\Sigma}(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}H)(x)d\mu(x)\,.$$

根据命题 6.1，我们可以取一个序列 $H_n^\mu\in\mathcal{D}_S$，使其在 μ-拓扑下收敛至 H。由于$H_n^\mu\in\mathcal{D}_S$，且 $\mathbb{P}$ 满足 $(\mathfrak{L},\ \mathcal{D}_S)$-鞅问题，根据命题 4.8，

$$\mathbb{E}\big[\,G(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})\left\{H_n^\mu(X_{t_2})-H_n^\mu(X_{t_1})\right\}\big]=\int_{\Sigma}(\mathfrak{L}H_n^\mu)(x)\,d\mu(x)=\int_{\Sigma}(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}H_n^\mu)(x)\,d\mu(x)\,.$$

取 $n\to\infty$ 即可完成证明。

□

6.2. **命题 6.1 的证明**。本节将证明，对于所有 $\mu\in\mathcal{M}(\Sigma)$，$\mathcal{D}_S$ 在 $\mathcal{E}_S$ 中关于 μ是稠密的。

定义 6.2。设 $\mathcal{F}$ 是 S的一个子集族，即 $\mathcal{F}\subset 2^S$。若对于任意 $A\in\mathcal{F},\ B\subset A$ 都蕴含 $B\in\mathcal{F}$，则称 $\mathcal{F}$ 为一个堆。对于任意堆 $\mathcal{F}$，我们定义定义域 $\mathcal{K}^{\mathcal{F}}$ 如下：

$\mathcal{K}^{\mathcal{F}}:=\big\{F\in\mathcal{E}_S:\ \forall B\in\mathcal{F},\ \exists\epsilon_B>0$满足 $\nabla_{\boldsymbol{v}_j}F(x)=0\ \forall j\in S\setminus B,\ x$且 $\|x\|_{S\setminus B}<\epsilon_B\big\}$，其中我们将 $\|\cdot\|_{\varnothing}=0$视为。

根据定义，$\mathcal{K}^{\varnothing}=\mathcal{E}_S$。直观地说，$\mathcal{K}^{\mathcal{F}}$ 是这样一类函数：对于每个 $B\in\mathcal{F}$，相对于投影 γ_B，它们在边界 Σ_B 附近是纤维方向常数的：$\Sigma\to\Sigma_B$。回顾第 4.1 节中对函数 γ_B^*F的定义：对于函数 F，有 $\Sigma\to\mathbb{R}$：$\Sigma_B\to\mathbb{R}$。

引理 6.3. 设 $\mathcal{F}$ 是一个堆，并固定 $F\in\mathcal{K}^{\mathcal{F}}$。对于 $\varnothing\neq B\in\mathcal{F}$，令 $A=B^c$。那么，

$$F(x)=F(\gamma_B(x))=[\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})](x)\ \textit{for all}\ x\in\Sigma\ \textit{such that}\ \|x\|_A<\epsilon_B.$$

证明。固定满足 $\|x\|_A<\epsilon_B$的 $x\in\Sigma$。由 $\|\cdot\|_A$ 的凸性可知，x 与 $\gamma_B\,(x)$ 之间的线段包含在集合 $\{y\in\Sigma:\ \|y\|_A<\epsilon_B\}$中。

记作

$$F(x)-F(\gamma_B(x))=\int_0^1\nabla_{x-\gamma_B(x)}F(\,\gamma_B(x)+t\,(x-\gamma_B(x))\,)\,dt\,.$$

由于对于所有 $0\le t\le 1,\ \|\gamma_B\,(x)+t\,(x-\gamma_B\,(x))\,\|_A<\epsilon_B$，且因为 F属于 $\mathcal{K}^{\mathcal{F}}$，所以对于 $j\in A$ 和 $0\le t\le 1,\ \nabla_{\boldsymbol{v}_j}F\,(\gamma_B\,(x)+t\,(x-\gamma_B\,(x))\,)=0$。因此，由引理 3.1 可知，$\gamma_B\,(x)-x$ 是 $k\in A$ 对应的 $\boldsymbol{v}_k$ 的线性组合，故前一个积分为零。这就证明了该引理。□

令 2^S 为 S的所有子集构成的集合。下一个结果断言：$\mathcal{K}^{2^S}\subset\mathcal{D}_S$

引理 6.4. 有 $\mathcal{K}^{2^S}\subset\mathcal{D}_S$。

证明。固定 $F\in\mathcal{K}^{2^S}$。

断言 1： $F\in C^2(\Sigma)$。

°对于任意 $\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W}\in T_\Sigma$，我们需要找到一个函数 G属于 $C(\Sigma)$，使得 $\nabla_{\boldsymbol{V}}\nabla_{\boldsymbol{W}}F=G$ 在 Σ上成立 .

固定 $\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{W}\in T_\Sigma$。令 $\epsilon=\min_{\varnothing\neq B\subset S}\epsilon_B$。对于 $B\subset S$，定义

$$U_B=\{x\in\Sigma:\forall i\in B,x_i>0,\|x\|_{S\setminus B}<\epsilon/3\}\,,$$
$$V_B=\{x\in\Sigma:\forall i\in B,x_i>0,\|x\|_{S\setminus B}<\epsilon\}\,,$$

使得 $U_B\subset V_B$。根据引理 6.3，$F=(\gamma_B^*F)|_{\Sigma_B}$ 在 V_B上成立。注意到 $\|x\|_{\varnothing}=0$，我们很容易看出集合 U_B、$B\subset S$构成 Σ的一个开覆盖。令 G_B：$U_B\to\mathbb{R}$ 定义为

$$G_B(x):=(\nabla_{\boldsymbol{\gamma}_B(\boldsymbol{V})}\nabla_{\boldsymbol{\gamma}_B(\boldsymbol{W})}F|_{\Sigma_B})(\gamma_B(x))\,.$$

该值定义良好，因为对于所有 $i\in B$ 和 $F|_{\mathring{\Sigma}_B}\in C^2(\mathring{\Sigma}_B)$，$\gamma_B(x)_i\ge x_i>0$。注意，根据定义，。$G_S=\nabla_{\boldsymbol{V}}\nabla_{\boldsymbol{W}}F$ 在 Σ 上。函数 G_B 是连续的，因为 F 属于 $\mathcal{E}_S$。由于 $U_B,\ B\subset S$ 构成了 Σ的一个开覆盖。要完成证明，还需证明

$$G_B=G_C\ \text{ on }\ U_B\cap U_C,\ B,C\subset S.$$

固定 $x \in U_B \cap U_C$。根据定义，

$$x_i > 0 \text{ for all } i \in B \cup C, \quad \text{and} \quad \|x\|_{S\setminus B} < \epsilon/3, \ \ \|x\|_{S\setminus C} < \epsilon/3.$$

由 (3.3) 和 (3.9)， $\|x\|_{S\setminus B} < \epsilon/3$ 可得

$$\|x - \gamma_B(x)\|_S = \sum_{j\in B}\sum_{k\in S\setminus B} u_j^B(k)x_k + \sum_{j\in S\setminus B} x_j = 2\sum_{k\in S\setminus B} x_k < 2\epsilon/3.$$

因此，

$$\|\gamma_B(x)\|_{S\setminus C} \le \|x - \gamma_B(x)\|_{S\setminus C} + \|x\|_{S\setminus C} < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon\,.$$

由于 $[\gamma_B(x)]_i = 0$ 对于 $i \notin B$， $\|\gamma_B(x)\|_{S\setminus(B\cap C)} = \|\gamma_B(x)\|_{(S\setminus B)\cup(S\setminus C)} = \|\gamma_B(x)\|_{S\setminus C}$。因此，根据前面的估计， $\|\gamma_B(x)\|_{S\setminus(B\cap C)} < \epsilon$，从而 $\gamma_B(x) \in V_{B\cap C}$。

由引理 6.3， $F = \gamma^*_{B\cap C}F|_{\Sigma_{B\cap C}}$ 在 $V_{B\cap C}$ 上，因此 $F|_{\Sigma_B} = (\gamma^*_{B\cap C}F|_{\Sigma_{B\cap C}})|_{\Sigma_B}$ 在 $V_{B\cap C}\cap$上 Σ_B。当 $F \in \mathcal{K}^{2^S} \subset \mathcal{E}_S$ 时， $F|_{\mathring{\Sigma}_{B\cap C}} \in C^2(\mathring{\Sigma}_{B\cap C})$。因此，根据链式法则，对于任意 $y \in V_{B\cap C}\cap\mathring{\Sigma}_B$ 和 $\boldsymbol{X}$， $\boldsymbol{Y} \in T_{\Sigma_B}$，

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}F|_{\Sigma_B}(y) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}(\gamma^*_{B\cap C}F|_{\Sigma_{B\cap C}})(y) = \nabla_{\boldsymbol{\gamma}_{B\cap C}(\boldsymbol{X})}\nabla_{\boldsymbol{\gamma}_{B\cap C}(\boldsymbol{Y})}F|_{\Sigma_{B\cap C}}(\gamma_{B\cap C}(y))\,.$$

由于 $x \in U_B \cap U_C$， $\gamma_B(x) \in \Sigma_B$。另一方面，我们在上文证明了 $\gamma_B(x) \in V_{B\cap C}$，因此 $\gamma_B(x) \in \Sigma_B \cap V_{B\cap C}$。于是，根据关于 $y = \gamma_B(x)$ 的前一个恒等式以及引理 3.4，

$$G_B(x) = \nabla_{\boldsymbol{\gamma}_B(\boldsymbol{V})}\nabla_{\boldsymbol{\gamma}_B(\boldsymbol{W})}F|_{\Sigma_B}(\gamma_B(x)) = \nabla_{\boldsymbol{\gamma}_{B\cap C}(\boldsymbol{V})}\nabla_{\boldsymbol{\gamma}_{B\cap C}(\boldsymbol{W})}F|_{\Sigma_{B\cap C}}(\gamma_{B\cap C}(x))\,.$$

特别地， $G_B(x)$ 在 $U_B \cap U_C$ 上 $= G_C(x)$，这就证明了断言 1。

断言 2： $F \in \mathcal{D}_i$ 对所有 $i \in S$。

只需证明：对于任意满足 $x_i = 0$ 的 $i \in S$、 $x \in \Sigma$，以及满足 $(x_n)_i > 0$ 的序列 $x_n \to x$，对所有 n，

$$\frac{m_i}{(x_n)_i}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}F(x_n) \to 0\,.$$

由于 $F \in \mathcal{K}^{2^S}$，且对于所有满足 $y_i < \epsilon_{S\setminus\{i\}}$ 的 y， $S\setminus\{i\} \in 2^S, \nabla_{\boldsymbol{v}_i}F(y) = 0$。引理的证明至此完成。□

对于两个堆 $\mathcal{F}_1$， $\mathcal{F}_2$，若存在 $B \subset S$ 使得 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \{B\}$，则称 $\mathcal{F}_1 \triangleleft \mathcal{F}_2$。下面的命题是本节的关键结果。

Pro命题 6.5。固定 $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$。对于任意满足 $\mathcal{F}_1 \triangleleft \mathcal{F}_2$ 的一对堆， $\mathcal{K}^{\mathcal{F}_2}$ 在 $\mathcal{K}^{\mathcal{F}}$ 中是 μ-稠密的 [1].

该命题的证明需要显式地用 $\mathcal{K}^{\mathcal{F}_2}$ 中的函数来逼近 $\mathcal{K}^{\mathcal{F}_1}$ 中的函数。为此，我们需要使用光滑截断函数技巧。考虑一个满足以下条件的光滑截断函数 $\chi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$：

$$\chi(x) = 1 \text{ for } x \le 1, \ \ \chi(x) = 0 \text{ for } x \ge 2, \ \ \chi \text{ is decreasing.}$$

对于 $\epsilon > 0$，定义 $\chi_\epsilon : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，其中 $\chi_\epsilon(x) = \chi(x/\epsilon)$。注意截断函数 χ_ϵ 的以下性质：

(χ1) 存在 $C > 0$ 使得 $\sup_{\epsilon>0}\sup_{x\ge 0}\chi_\epsilon(x) \le C$。($\chi$2) 存在 $C > 0$ 使得 $\sup_{\epsilon>0}\sup_{x\ge 0} x\chi'_\epsilon(x) \le C$。($\chi$3) 存在 $C > 0$ 使得 $\sup_{\epsilon>0}\sup_{x\ge 0} x^2\chi''_\epsilon(x) \le C$。

固定两个堆 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$，并假设 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \{B\}$。令 $A = S\setminus B$。固定一个函数 $F \in \mathcal{K}^{\mathcal{F}_1}$。令 F_ϵ: $\Sigma \to \mathbb{R}$ 为定义如下的函数

$$F_\epsilon := [\chi_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A]\,\gamma^*_B(F|_{\Sigma_B}) + [(1 - \chi_\epsilon) \circ \mathfrak{I}_A]\,F.$$

由下一个引理可知， $F_\epsilon \to F$ 在 μ-拓扑中。

引理 6.6. 存在依赖于 F 的 $\delta > 0$，使得对于所有足够小的 $\epsilon > 0$,

$$\operatorname{supp}(F - F_\epsilon) \subset \{x \in \Sigma : \mathfrak{I}_A(x) \le 2\epsilon \text{ and } \min_{j\in B} x_j \ge \delta\}.$$

此外，对于足够小的 $\epsilon > 0$， $F_\epsilon \in \mathcal{K}^{\mathcal{F}_2}$，以及

(1) $(F - F_\epsilon)|_{\Sigma_B} = 0$ 对所有 $\epsilon > 0$ 均成立。

(2) $\{x \in \Sigma\colon \ \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F(x) \neq \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_\epsilon(x)\}$ 随着 $\epsilon \to 0$ 趋近于 $\varnothing$，会缩小为空，即该集合序列的上极限为空集。

(3) 当 $\epsilon \to 0$, $\|\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}(F - F_\epsilon)\|_\infty$ 一致有界。

证明。对于 $\epsilon, \delta > 0$，令

$$\Lambda^B_{\delta,2\epsilon} := \{x \in \Sigma : \mathfrak{I}_A(x) \leq 2\epsilon \text{ and } \min_{j\in B} x_j \geq \delta\}.$$

根据定义，当 $\mathfrak{I}_A(x) \geq 2\epsilon$时，$F = F_\epsilon$。

断言 A：存在仅依赖于 F 的 $\delta > 0$ 和 $\epsilon_0 > 0$，使得 $F = F_\epsilon$ 在定义域中

$$\{x \in \Sigma : \mathfrak{I}_A(x) < 2\epsilon \text{ and } \min_{j\in B} x_j \leq \delta\}.$$

对所有 $0 < \epsilon < \epsilon_0$。

由于 $\mathcal{F}_2$ 是一个堆，且 $B \in \mathcal{F}_2$、$\mathcal{F}_2$ 包含 B 的所有子集。由于 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 仅相差集合 B，因此 $\mathcal{F}_1$ 包含 B 的所有子集。因此，由于 F 属于 $\mathcal{K}^{\mathcal{F}_1}$，根据引理 6.3，存在仅取决于 F 的 $\delta' > 0$，使得对所有 $\varnothing \subsetneq B' \subsetneq B$ 以及满足 $\|x\|_{B'^c} < \delta'$ 的 $x \in \Sigma$，

$$F(x) = [\gamma^*_{B'}(F|_{\Sigma_{B'}})](x)\,. \tag{6.3}$$

我们断言，存在 $\delta'' > 0$，使得对于所有满足 $\|x\|_A < \delta''$ 和 $x_j \leq \delta''$ 的 $j \in B$、$x \in \Sigma$，我们都有以下性质：

（$\delta''1$） $\|x\|_{(B\setminus\{j\})^c} < \delta'$，（

$\delta''2$） $\|\gamma_B(x)\|_{(B\setminus\{j\})^c} < \delta'$。

事实上，固定 $j \in B$、$x \in \Sigma$，使得 $\|x\|_A < \delta''$ 且 $x_j \leq \delta''$。一方面，

$$\|x\|_{(B\setminus\{j\})^c} = \|x\|_{A\cup\{j\}} \leq \|x\|_A + \|x\|_{\{j\}} \leq 2\delta''\,.$$

另一方面，

$$\|\gamma_B(x)\|_{(B\setminus\{j\})^c} = \|\gamma_B(x)\|_{A\cup\{j\}} \leq \|x\|_{A\cup\{j\}} + \|\gamma_B(x) - x\|_{A\cup\{j\}} \leq 2\delta'' + \|\gamma_B(x) - x\|_{A\cup\{j\}}\,.$$

根据引理 3.2，

$$\|\gamma_B(x) - x\|_{A\cup\{j\}} \leq \|\gamma_B(x) - x\| \leq \sum_{i\in A} [L_A(x_A)]_i \|\boldsymbol{v}_i\| \leq c\,\|x\|_A \leq c\,\delta''$$

对于某个与 j 无关的 $c > 0$。为了完成该断言的证明，还需选择 δ''，使得 $(2 + c)\delta'' < \delta'$。不妨设 $\delta'' \leq \delta'$。

下面证明断言 A。固定 $j \in B$ 和 $x \in \Sigma$，使得 $\|x\|_A < \delta''$、$x_j \leq \delta''$，并令 $B' = B \setminus \{j\}$。根据前面的断言，$\|x\|_{B'^c}$，$\|\gamma_B(x)\|_{B'^c} < \delta'$。因此，由 (6.3) 和引理 3.4，

$$F(x) = (\gamma^*_{B'} F|_{\Sigma_{B'}})(x) = F(\gamma_{B'}(x)) = F(\gamma_{B'}(\gamma_B(x))) = (\gamma^*_{B'} F|_{\Sigma_{B'}})(\gamma_B(x))\,.$$

由于 $\|\gamma_B(x)\|_{B'^c}$ 也被 δ' 有界，根据 (6.3)，

$$(\gamma^*_{B'} F|_{\Sigma_{B'}})(\gamma_B(x)) = F(\gamma_B(x)) = (\gamma^*_B F|_{\Sigma_B})(x)\,.$$

这就证明了断言 A，其中 $\delta = \delta''$ 和 ϵ_0 足够小，以确保如果 $\mathfrak{I}_A(x) < \epsilon_0$，则 $\|x\|_A < \delta''$。

由断言 A 和证明中的第一个观察可知，对于足够小的 gh $\epsilon > 0$,

$$\operatorname{supp}(F - F_\epsilon) \subset \Lambda^B_{\delta'',2\epsilon}\,. \tag{6.4}$$

这就证明了引理的第一个陈述。

我们转而证明 F_ϵ 属于 $\mathcal{K}^{\mathcal{F}_2}$，该证明分为几个步骤。根据定义 of F_ϵ a以及引理的第一个断言，

$$F_\epsilon = F \text{ on } \{x \in \Sigma : \mathfrak{I}_A(x) \geq 2\epsilon \text{ or } \min_{j\in B} x_j \leq \delta\}, \tag{6.5}$$

$$F_\epsilon = \gamma^*_B F|_{\Sigma_B} \text{ on } \{\mathfrak{I}_A(x) \leq \epsilon\}\,. \tag{6.6}$$

步骤 1： F_ϵ **满足条件** $\mathfrak{E}_2$。由引理 A.3，$F_\epsilon \in C^1(\Sigma)$。由于 $F \in \mathcal{E}_S$，因此只需证明，对于所有满足 $|C| \geq 2$ 的 $C \subseteq S$，$(F - F_\epsilon)|_{\mathring{\Sigma}_C} \in C^2_b(\mathring{\Sigma}_C)$。根据 F_ϵ 的定义，

$$F - F_\epsilon = (\chi_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)[F - \gamma^*_B(F|_{\Sigma_B})]\,. \tag{6.7}$$

我们考虑两种情况:

(1-a) $A\cap C=\varnothing$。在这种情况下，$C\subseteq B$。因此，$F=F_\epsilon$ 在 Σ_C 上，因为 $\mathfrak{I}_A=0$ 在 Σ_C上。因此，$(F-F_\epsilon)|_{\mathring{\Sigma}_C}\in C_b^2(\mathring{\Sigma}_C)$。

(1-b) $A\cap C\neq\varnothing$。在这种情况下，存在 $i\in A\cap C$，使得 $\mathfrak{I}_A(x)>0$，因为 $x_i\neq 0$ 在 Σ_C上。因此，$\chi_\epsilon\circ\mathfrak{I}_A$在 Σ_C上是光滑的。另一方面，根据引理 4.11，$F-\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})$ 满足条件 $\mathfrak{E}_2$。因此，$(F-F_\epsilon)|_{\mathring{\Sigma}_C}\in C^2(\mathring{\Sigma}_C)$。

还需对$(F-F_\epsilon)|_{\mathring{\Sigma}_C}$的二阶导数进行界定，以证明它属于 $C_b^2(\mathring{\Sigma}_C)$。我们用两个开集覆盖定义域 Σ_C：

$$\mathring{\Sigma}_C=\{x\in\mathring{\Sigma}_C:\mathfrak{I}_A(x)<\epsilon\}\cup\{x\in\mathring{\Sigma}_C:\mathfrak{I}_A(x)>\epsilon/2\}.$$

在定义域 $\{x\in\Sigma_C$ 上：$\mathfrak{I}_A(x)<\epsilon\}$, $F_\epsilon=\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})$ 根据 F_ϵ 的定义。引理 4.11 给出了此情形下 $F-F_\epsilon$ 的二阶导数的一个界。

在定义域 $\{x\in\Sigma_C$ 上：$\mathfrak{I}_A(x)>\epsilon/2\}$，(5.2) 给出了 $\mathfrak{I}_A$ 的二阶导数的一个界。特别地，由 (6.7) 和引理 4.11 可得 $F-F_\epsilon$ 在此集合上的二阶导数的一个界。

步骤 2： F_ϵ **满足条件** $\mathfrak{E}_1$。由 (6.5)，对于 $i\in B$，映射 $x\mapsto(1/x_i)\nabla_{\boldsymbol{v}_i}F_\epsilon$ 有界。我们转向情形 $i\in A$。由于 F 属于 $\mathcal{E}_S$，只需证明映射

$$x\ \mapsto\ \frac{1}{x_i}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}(F-F_\epsilon)\ \text{ is bounded on }\ \mathring{\Sigma}\,. \tag{6.8}$$

由 (6.7),

$$\frac{1}{x_i}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}(F-F_\epsilon)\ =\ \frac{1}{x_i}\left(\nabla_{\boldsymbol{v}_i}(\chi_\epsilon\circ\mathfrak{I}_A)\right)\ [F-\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})]+(\chi_\epsilon\circ\mathfrak{I}_A)\ \ \frac{1}{x_i}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}[F-\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})]\,. \tag{6.9}$$

为界定第一项，写作

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_i}(\chi_\epsilon\circ\mathfrak{I}_A)=(\chi_\epsilon'\circ\mathfrak{I}_A)(\nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A)=(\mathfrak{I}_A\cdot\chi_\epsilon'\circ\mathfrak{I}_A)(\frac{1}{\mathfrak{I}_A}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A)\,.$$

因此，(6.9) 右侧的第一项等于

$$(\mathfrak{I}_A\cdot\chi_\epsilon'\circ\mathfrak{I}_A)(\frac{\mathfrak{I}_A}{x_i}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A)\Big[\ \frac{F-\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})}{\mathfrak{I}_A^2}\ \Big]\,.$$

根据性质 (χ2)、引理 5.2、引理 5.1 的性质 (b) 以及引理 5.4.(1)，此表达式有界。

接下来考察 (6.9) 的第二项。根据 $\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})$ 的定义以及引理 A.2,

$$\frac{1}{x_i}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}[F-\gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})](x)=\frac{1}{x_i}\nabla_{\boldsymbol{v}_i}F(x)-\frac{1}{x_i}\,\nabla_{\boldsymbol{\gamma}_B(\boldsymbol{v}_i)}F_B(\gamma_B(x))\,.$$

根据 (3.11)，当 $i\in A$, $\gamma_B(\boldsymbol{v}_i)=0$ 时。因此，第二项消失。第一项是有界的，因为$F\in\mathcal{E}_S$。

步骤 3： F_ϵ **包含于** $K^{\mathcal{F}_1}$。固定 $C\in\mathcal{F}_1$，并令 $D=S\setminus C$。我们需要证明存在 $\epsilon_C>0$ 使得

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_j}F_\epsilon(x)=0\ \text{ for all }\ j\in D,\ x\in\Sigma\text{ with }\|x\|_D<\epsilon_C\,. \tag{6.10}$$

我们断言 $D\cap B\neq\varnothing$。事实上，反设 $D\cap B=\varnothing$，于是 $B\subset C$。因此，$B\in\mathcal{F}_1$，因为 $C\in\mathcal{F}_1$ 且 $\mathcal{F}_1$ 是一个堆，这与假设$B\notin\mathcal{F}_1$矛盾。

It 只需证明 $F-F_\epsilon$ 时的 (6.10)。根据 (6.5)，我们需要证明存在 $\epsilon_C>0$ suc h that

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_j}(F-F_\epsilon)(x)=0\ \text{ for all }\ j\in D\,,\ x\in\Lambda^B_{\delta,2\epsilon}\text{ with }\|x\|_D<\epsilon_C\,.$$

由于 $D\cap B\neq\varnothing$，取 $\epsilon_C=\delta$ 得到

$$\Lambda^B_{\delta,2\epsilon}\cap\{\|x\|_D<\epsilon_C\}=\varnothing\,.$$

由于该集合为空，因此该条件自然成立。

步骤 4： F_ϵ **包含于** $K^{\mathcal{F}_2}$。回顾引理 5.1-(b) 中对常数 c_2的定义。显然，若 $\|x\|_A \le \epsilon/c_2$，则 $\mathfrak{I}_A(x) \le \epsilon$。令 $\epsilon_B = \epsilon/c_2$。根据 (6.6)、$\epsilon_B$ 的选择以及引理 A.2，在$\{\|x\|_A < \epsilon_B\}$上，

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_j} F_\epsilon(x) \;=\; \nabla_{\boldsymbol{v}_j} \gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})(x) = \nabla_{\boldsymbol{\gamma}_B(\boldsymbol{v}_j)} F_B(\gamma_B(x))$$

对所有 $j \in A$ 均成立。由 (3.11) 可知，$\gamma_B(\boldsymbol{v}_j) = 0$ for $j \in A$，因此该量为零。于是，对所有 $j \in A$ 以及满足 $\|x\|_A < \epsilon_B$ 的 $x \in \Sigma$，均有 $\nabla_{\boldsymbol{v}_j} F_\epsilon(x) = 0$。这证明了 F_ϵ 属于 $K^{\mathcal{F}_2}$。

为完成引理的证明，还需证明断言 (1)–(3)。根据 F_ϵ 的定义，性质 (1) 显然成立。由 (6.4)，且由于 $F_\epsilon = F$ 在 Σ_B 上，

$$\{x \in \Sigma : \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F(x) \neq \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_\epsilon(x)\} \subset \Lambda^B_{\delta,2\epsilon} \setminus \Sigma_B. \tag{6.11}$$

性质 (2) 由此事实可得。

还需证明 (3)。令 $G = F - \gamma_B^* F|_{\Sigma_B}$，于是 $G|_{\Sigma_B} = 0$。由引理 4.11，$G \in \mathcal{E}_A$。根据 (6.11)，我们只需证明定义域 $\Lambda^B_{\delta,\,2\epsilon} \setminus \Sigma_B$ 上的项有界，且其上界与 ϵ 无关。固定 $x \in \Lambda^B_{\delta,\,2\epsilon} \setminus \Sigma_B$。令 $C = \{i \in S : x_i \neq 0\}$，于是 $\mathfrak{I}_A(x) > 0$ 且 $B \subsetneq C$。根据 (6.7) 以及 (4.6) 中给出的 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}$ 的定义，

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}(F - F_\epsilon)(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}}((\chi_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)G)(x) = \mathfrak{L}^{C}((\chi_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)G)(x)\,.$$

根据 (2.14)，该表达式等于

$$\mathfrak{L}^{C}(\chi_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)\cdot G(x) + \mathfrak{L}^{C} G \cdot (\chi_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)(x) + \sum_{i,j\in C} m_i r^C(i,j)(\partial_{x_i} - \partial_{x_j})(\chi_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)(\partial_{x_i} - \partial_{x_j})G(x)\,. \tag{6.12}$$

根据性质 (χ2) 和引理 5.4-(2)，(6.12) 中的第三项在 $\Lambda^B_{\delta,\,2\epsilon}\setminus\Sigma_B$ 中有界，且关于 $\epsilon > 0$ 一致。我们转而考察第二项。注意到

$$(\mathfrak{L}^C G)(x) = b \sum_{i\in A\cap C} \frac{m_i(\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C} G)(x)}{x_i} + b \sum_{j\in B} \frac{m_j(\nabla_{\boldsymbol{v}_j^C} G)(x)}{x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in C} m_i\, r^C(i,j)\,[(\partial_{x_i} - \partial_{x_j})G(x)]^2\,.$$

根据引理 4.12，第一项等于

$$b \sum_{i\in A\cap C} \frac{m_i[\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C}(F - \gamma_B^* F|_{\Sigma_B})](x)}{x_i} = b \sum_{i\in A\cap C} \frac{m_i(\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C} F)(x)}{x_i},$$

由 $F \in \mathcal{E}_S$ 这一事实可知，该项有界。另一方面，由于 $F \in C^1(\Sigma)$，在集合 $\Lambda^B_{\delta,\,2\epsilon}$ 上，存在一个有限常数 C_0，使得

$$b \sum_{j\in B} \frac{m_j(\nabla_{\boldsymbol{v}_j^C} G)(x)}{x_j} \le \frac{C_0}{\delta} \;\text{ on }\; \Lambda^B_{\delta,2\epsilon}. \tag{6.13}$$

The $\mathfrak{L}^C G$ 的分解中的最后一项显然有界。这证明了第二项 m
在 (6 .12) 在 $\Lambda^B_{\delta,2\epsilon}$ 中有界，且关于 $\epsilon > 0$ 一致。

接下来考察 (6.12) 的第一项。它等于

$$(\chi'_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)(x)\,(\mathfrak{L}^C \mathfrak{I}_A)(x)\,G(x) + \frac{1}{2}\,(\chi''_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)(x) \sum_{i,j\in C} m_i\, r^C(i,j)\,[(\partial_{x_i} - \partial_{x_j})\mathfrak{I}_A]^2\,G(x)\,.$$

由于 $G \in \mathcal{E}_A$ 和 $G|_{\Sigma_B} = 0$，根据引理 5.4-(1)，我们可以将此和改写为

$$\begin{aligned}&[\,\mathfrak{I}_A\,(\chi'_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)(x)\,]\,[\,\mathfrak{I}_A(\mathfrak{L}^C \mathfrak{I}_A)(x)\,]\,H(x)\\ &\quad + [(\chi''_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)\,\mathfrak{I}_A^2(x)]\,\frac{1}{2}\sum_{i,j\in C} m_i\, r^C(i,j)\,[(\partial_{x_j} - \partial_{x_i})\mathfrak{I}_A(x)]^2 H(x)\end{aligned}$$

对于某个 $H \in BC(\Sigma, \Sigma\setminus\Sigma_B)$。根据性质 ($\chi$3) 和 (5.2)，第二项在 $\Lambda^B_{\delta,2\epsilon}\setminus\Sigma_B$ 中有界，且关于 $\epsilon > 0$ 一致。

我们先讨论第一个问题。根据性质 (χ2)，$\mathfrak{I}_A(x)$ $(\chi'_\epsilon \circ \mathfrak{I}_A)(x)$ 关于 $\epsilon > 0$ 一致有界。固定$i \in C$。由 (3.11)，$\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C}\mathfrak{I}_A = \nabla_{\gamma_C(\,\boldsymbol{v}_i\,)}\,\mathfrak{I}_A = \nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A + \nabla_{\gamma_C(\,\boldsymbol{v}_i\,)\,-\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A$。由引理 3.1，$\gamma_C(\boldsymbol{v}_i) - \boldsymbol{v}_i$ 是

向量 $\boldsymbol{v}_k$, $k \in C^c$ 的线性组合。由引理 5.3，$(\nabla_{\boldsymbol{v}_k}\mathfrak{I}_A)(x) = 0$ 对所有 $k \notin C$ 均成立。这意味着 $\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C}\mathfrak{I}_A = \nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A$。因此，

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_A(x)\,(\mathfrak{L}^C\mathfrak{I}_A)(x) &= b\sum_{i\in C}\frac{m_i(\nabla_{\boldsymbol{v}_i^C}\mathfrak{I}_A)(x)}{x_i}\,\mathfrak{I}_A(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in C} m_i\, r^C(i,j)\,[(\partial_{x_i}-\partial_{x_j})^2\mathfrak{I}_A(x)]\,\mathfrak{I}_A(x)\\ &= b\sum_{i\in C}\frac{m_i(\nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A)(x)}{x_i}\,\mathfrak{I}_A(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in C} m_i\, r^C(i,j)\,[(\partial_{x_i}-\partial_{x_j})^2\mathfrak{I}_A(x)]\,\mathfrak{I}_A(x)\,.\end{aligned}$$

由 (5.2)，第二项有界。第一项可改写为

$$b\sum_{i\in A\cap C}\frac{m_i(\nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A)(x)}{x_i}\,\mathfrak{I}_A(x) + b\sum_{i\in B}\frac{m_i(\nabla_{\boldsymbol{v}_i}\mathfrak{I}_A)(x)}{x_i}\,\mathfrak{I}_A(x)\,.$$

由引理 5.2，第一项和有界。第二项可使用估计 (5.2)，并沿用估计 (6.13) 时所用的相同论证进行估计。至此，引理的证明完成。□

命题 *6.5* 的证明。我们断言，$F_\epsilon \to F$ 在 μ 拓扑下成立。由引理 6.6，

$$\int_\Sigma \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_\epsilon \, d\mu \to \int_\Sigma \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F \, d\mu.$$

剩下只需证明 $F_\epsilon \to F$ 属于 L^∞。由 (6.7) 和 χ_ϵ 的定义，

$$|F - F_\epsilon|_\infty \le \sup_{\mathfrak{I}_A(x)\le 2\epsilon} |F - \gamma_B^*(F|_{\Sigma_B})|\,.$$

As F 是连续的，当 $\epsilon \to 0$ 时，右端趋于 0。至此，证明完成。 e claim.

由引理 6.6，$F_\epsilon \in \mathcal{K}^{\mathcal{F}_2}$ 对足够小的 $\epsilon > 0$成立。因此，$\mathcal{K}^{\mathcal{F}_2}$ 在$\mathcal{K}^{\mathcal{F}_1}$中是 μ-稠密的。 □

推论6.7。 对于所有 $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$，$\mathcal{K}^{2^S}$ 在 $\mathcal{E}_S$中是 μ-稠密的。

证明。 由于 2^S 是 S的所有子集构成的集合，2^S 是一个堆。根据定义，$\mathcal{K}^{\varnothing} = \mathcal{E}_S$。因此，该断言是命题 6.5 的推论。□

命题 *6.1* 的证明。 由引理 6.4，$\mathcal{K}^{2^S} \subset \mathcal{D}_S$。因此，该结论由前一个推论得出。□

7. Proof of Theorem 2.6

本节将证明，$(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}_S)$ 鞅问题的任意解都会在边界处被吸收。在第一个小节中，我们将介绍证明吸收性质的自然候选函数（根据生成元的形式）。更准确地说，这是一族在边界以外为正的超调和函数。这些自然候选函数不属于定义域$\mathcal{E}_S$，因此需要在边界附近进行正则化。在接下来的两个小节中，我们将利用正则化后的版本，通过考察相应的 Dynkin 鞅来证明吸收性质。

7.1. 一个超调和函数。正如标题所示，本小节分三步构造一个超调和函数，起点是下文（7.1）中引入的函数 $F_A\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$，它不属于定义域 $\mathcal{E}_S$。在每一步中，我们都在保留函数基本性质的同时提高其正则性，直到在引理 7.3 中得到一个属于 $\mathcal{E}_S$ 的函数。由于（7.1）中引入的函数 F_A 属于 $\mathcal{E}_A$，因此它满足条件 $\mathfrak{E}_2$。因此，对于所有满足 $|D| \ge 2$ 的 $D \subset S$，$F_A|_{\mathring{\Sigma}_D}$ 都属于 $C_b^2(\mathring{\Sigma}_D)$。由此，$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_A$ 被良好定义为一个微分算子。

引理 7.1. 取 S 的一个真非空子集 B，并令 $A = B^c$。对于 $\gamma \in (0,\ 1)$，令 $F_A\colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ 由下式给出

$$F_A(x) = \prod_{k\in A} x_k^{1+b}(1 - x_k^\gamma), \quad x \in \Sigma\,. \tag{7.1}$$

于是， F_A 属于 $\mathcal{E}_A$。此外，对于每个非空子集 $D \subset B$ 及 $\epsilon > 0$，存在 $\lambda^{A\cup D,\ A}(\epsilon) > 0$ 使得

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_A(z) \le 0 \quad \textit{for all} \quad z \in \left\{ x \in \Sigma_{A\cup D} : \max_{k\in A} x_k \le \lambda^{A\cup D, A}(\epsilon) \ \textit{and}\ \min_{i\in D} x_i \ge \epsilon \right\}.$$

证明。我们首先验证条件 $\mathfrak{E}_1(A)$ 和 $\mathfrak{E}_2$ 成立。对于 $\mathfrak{E}_1(A)$，令 $i \in A$。根据假设， x_i^2 整除 $F_A(x)$，即存在某个光滑函数 G，使得 $F_A(x) = x_i^2 G(x)$。因此，商 $F_A(x)/x_i^2 = G(x)$ 在 $x_i = 0$ 附近保持有界，所以 (4.7) 中的映射是有界的。

对于 $\mathfrak{E}_2$，根据假设，我们注意到 $F_A \in C^2(\Sigma)$。因此，所有二阶导数都存在且连续，满足 $\mathfrak{E}_2$ 的光滑性要求。

还需证明存在具有给定性质的 $\lambda^{A\cup D,\ A}(\epsilon) > 0$。将 $\Sigma_{A\cup D}$ 分解为

$$\Sigma_{A\cup D} = \bigcup_{\substack{C\subset A\cup D,\\ |C|\ge 2}} \mathring{\Sigma}_C \cup \bigcup_{i\in A\cup D} \Sigma_{\{i\}}\,.$$

由于 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}$ 在 $\Sigma_{\{i\}}$ 上消失，只需证明对于所有满足 $|C| \ge 2$ 的 $C \subset A \cup D$，都存在 $\lambda^{A\cup D,\ C\quad A}(\epsilon) > 0$，使得

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_A(x) \le 0 \quad \text{on} \quad \left\{ x \in \mathring{\Sigma}_C : \max_{k\in A} x_k \le \lambda_C^{A\cup D, A}(\epsilon) \text{ and } \min_{i\in D} x_i \ge \epsilon \right\}, \tag{7.2}$$

然后令 $\lambda^{A\cup D, A}(\epsilon) = \min_{\substack{C\subset A\cup D\\ |C|\ge 2}} \lambda^{A\cup D,\ C\quad A}(\epsilon)$。

若 $A \not\subseteq C$，则显然存在 $\lambda^{A\cup D,\ C\quad A}(\epsilon)$，因为在这种情况下，对 $x \in \mathring{\Sigma}_C$， $F_A(x) = 0$。假设 $A \subseteq C$，并计算 $x \in \mathring{\Sigma}_C$ 时的 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_A(x)$。根据定义，

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_A(x) = \mathfrak{L}^{C} F_A(x) = \sum_{j\in A}\sum_{i\in C} m_i\, \boldsymbol{v}_i^C \cdot \boldsymbol{e}_j \left(b\, \frac{\partial_{x_j} F_A(x)}{x_i} - \partial_{x_i}\partial_{x_j} F_A(x) \right). \tag{7.3}$$

将此表达式改写为 $\sum_{j\in A} I_j(x) + \sum_{j\in A} L_j(x)$，其中

$$I_j(x) = m_j\, \boldsymbol{v}_j^C \cdot \boldsymbol{e}_j \left(b\, \frac{\partial_{x_j} F_A(x)}{x_j} - \partial_{x_j}^2 F_A(x) \right) + b \sum_{i\in C\setminus A} m_i \boldsymbol{v}_i^C \cdot \boldsymbol{e}_j \left(\frac{\partial_{x_j} F_A(x)}{x_i} \right)$$

and

$$L_j(x) = \sum_{i\in A\setminus\{j\}} m_i\, \boldsymbol{v}_i^C \cdot \boldsymbol{e}_j \left(b\, \frac{\partial_{x_j} F_A(x)}{x_i} - \partial_{x_i}\partial_{x_j} F_A(x) \right).$$

由 (7.3)，只需证明存在 $\lambda^{A\cup D,\ C\quad A}(\epsilon) > 0$，使得在 (7.2) 中的定义域上， $I_j(x) \le 0$ 且 $L_j(x) \le 0$。为定义 $\lambda^{A\cup D,\ C\quad A}(\epsilon)$，取一个常数 $M > 0$，使得

$$0 \le -\left(\frac{1+b}{\gamma\,(\gamma+b+1)} \right) \sum_{i\in C\setminus A} \frac{m_i\, \boldsymbol{v}_i^C \cdot \boldsymbol{e}_j}{m_j\, \boldsymbol{v}_j^C \cdot \boldsymbol{e}_j} \le M \quad \text{for all } j \in A\,. \tag{7.4}$$

令 $\lambda^{A\cup D,\ C\quad A}(\epsilon) > 0$ 满足

$$0 \le x \le \lambda_C^{A\cup D, A}(\epsilon) \quad \text{implies} \quad M x^{1-\gamma} \le \epsilon \quad \text{and} \quad (\gamma+1)\, x^{\gamma} \le 1. \tag{7.5}$$

为简便起见，令 $f(x) = x^{1+b}(1-x^{\gamma})$。一方面，

$$I_j(x) = m_j\, \boldsymbol{v}_j^C \cdot \boldsymbol{e}_j \left(\gamma(\gamma+b+1)\, x_j^{\gamma+b-1} \prod_{k\in A\setminus\{j\}} f(x_k) \right) \left(1 + \left(\frac{f'(x_j)\, x_j^{-\gamma-b+1}}{\gamma(\gamma+b+1)} \right) \sum_{i\in C\setminus A} \left(\frac{1}{x_i} \right) \frac{m_i\, \boldsymbol{v}_i^C \cdot \boldsymbol{e}_j}{m_j\, \boldsymbol{v}_j^C \cdot \boldsymbol{e}_j} \right).$$

利用 (7.4) 和 (7.5)，以及在 (7.2 中引入的集合上 $f'(x) \le (1+b)\, x^b$ 这一事实，

$$-\left(\frac{f'(x_j)\, x_j^{-\gamma-b+1}}{\gamma(\gamma+b+1)} \right) \sum_{i\in C\setminus A} \left(\frac{1}{x_i} \right) \frac{\boldsymbol{m}_i \boldsymbol{v}_i^C \cdot \boldsymbol{e}_j}{\boldsymbol{m}_j \boldsymbol{v}_j^C \cdot \boldsymbol{e}_j} \le \frac{M\, x_j^{1-\gamma}}{\epsilon} \le 1.$$

这表明 $I_j(x) \le 0$，因为 $\boldsymbol{v}_j^C \cdot \boldsymbol{e}_j < 0$。另一方面，

$$L_j(x) = \sum_{i \in A\setminus\{j\}} m_i\, \boldsymbol{v}_i^C \cdot \boldsymbol{e}_j\, f'(x_j) \left(b\,\frac{f(x_i)}{x_i} - f'(x_i) \right) \prod_{k \in A\setminus\{i,j\}} f(x_k),$$

其中，当 $A \setminus \{i,j\} = \varnothing$ 时，最后一个乘积等于一。最后，由于 $x_j \le 1$，(7.5) 保证

$$f'(x) \ge 0 \quad \text{and} \quad \frac{f(x)}{x} - f'(x) \le 0.$$

这就完成了引理的证明。 □

令 $\pi_D : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ 为如下定义的映射：

$$\pi_D(x) = \prod_{k \in D} x_k, \quad x \in \mathbb{R}^S .$$

注意

$$(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_D)(x) = 0 \quad \text{for all } x \in \Sigma \text{ such that } \pi_D(x) = 0 . \tag{7.6}$$

事实上，固定满足 $\pi_D(x) = 0$ 的 $x \in \Sigma$。因此，对某个 $i \in D$，有 $x_i = 0$。令 $C = \{j \in S : x_j > 0\}$，使得 $i \notin C$。根据生成元 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}}$ 的定义 (4.6)，$(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_D)(x) = [\mathfrak{L}^C(F_D\big|_{\mathring{\Sigma}_C})](x)$。由 (2.14)，变量 x_ℓ、$\ell \notin C$ 对算子 $\mathfrak{L}^C$ 而言是常数。因此，由于 $x_i = 0$，$[\mathfrak{L}^C(F_D\big|_{\mathring{\Sigma}_C})](x) = 0$，如所声称。

注意，下面在 (7.7) 中引入的函数 $F_{A,\,D}$ 并非在 (7.1) 中定义的函数 F_D，因为它们的定义域不同。

引理 7.2。取 S 的一个非空子集 B，并令 $A = B^c$。对于 $\varnothing \subsetneq D \subsetneq B \subset S$ 和 $\gamma \in (0、1)$，令 $F_{A,\,D} : \Sigma_B \to \mathbb{R}$ 为

$$F_{A,D}(x) = \prod_{k \in D} x_k^{1+b}(1 - x_k^{\gamma}), \quad x \in \Sigma_B. \tag{7.7}$$

于是存在一个函数 F：$\Sigma \to \mathbb{R}$，属于 $\mathcal{E}_{A\cup D}$，满足 $F(x) = F_{A,\,D}(x)$ $x \in \Sigma_B$，且对所有满足 $\pi_D(x) = 0$ 的 $x \in \Sigma$，均有 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F(x) = 0$。

证明。这里给出的证明是对 [5]中引理 4.3 的延拓。为保证完整性，我们给出详细的构造。若 $A = \varnothing$，则 F 必等于 $F_{A,\,D}$，因为$\Sigma_B = \Sigma$。此外，$F_{A,\,D} = F_D$，其中 F_D 已在前一个引理中引入。由此结果，F_D 属于 $\mathcal{E}_D$，并且根据 (7.6)，对于所有满足 $\pi_D(x) = 0$ 的 $x \in \Sigma$，都有 $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_D(x) = 0$。这表明，当 $A = \varnothing$ 时，引理的断言成立。

从现在起，假设 A非空。令

$$\beta := \frac{4}{c_1},$$

其中，c_1 是引理 5.1 的性质 b) 中给出的常数。作出这一选择是为了使下列不等式成立：若对某个 $j \in D$有 $x_j < \|x\|_A$，则

$$\frac{\beta \mathfrak{I}_A(x)}{[\gamma_B(x)]_j} \ge \frac{\beta c_1 \|x\|_A}{x_j + \sum_{k\in A} u_j^B(k) x_k} \ge \frac{\beta c_1 \|x\|_A}{x_j + \|x\|_A} > 2 . \tag{7.8}$$

假设在（7.7）中引入的函数 $F_{A,D}$ 定义在 $\mathbb{R}^S$上，而不仅仅定义在 Σ_B上。令 $\mathcal{V}$为由 $\mathcal{V}$ 给出的开子集：$= \{x \in \Sigma :\ \pi_D(\gamma_B(x)) > 0\}$，并令 Ψ：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $C^2(\mathbb{R})$上的一个非增函数，在 $(-\infty, 0]$ 上等于 1，在 $[1, \infty$上等于 0。记 R：$\mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$为下式给出的函数

$$R(x) := \beta\, \frac{\mathfrak{I}_A(x)}{\pi_D(\gamma_B(x))} .$$

由（7.8），

$$R(x) > 2 \quad \text{if } x_j < \|x\|_A \text{ for some } j \in D . \tag{7.9}$$

将下列函数记为 $F : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$

$$F(x) := \begin{cases} F_{A,D}(\gamma_B(x))\, \Psi(R(x) - 1), & x \in \mathcal{V}, \\ 0, & \text{otherwise} , \end{cases}$$

其中 $\gamma_B : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ 已在 (3.9) 中引入， $\mathfrak{I}_A$ 则在 (5.5) 中引入。我们断言，限制在 Σ 上的 F 满足引理的条件。该结论的证明分为一系列断言。断言 A： 对于 $x \in \Sigma$，令 $C = C_x = \{i \in S : x_i > 0\}$。若 $x \notin \mathcal{V}$，则 $\Sigma_C \cap \mathcal{V} = \varnothing$。

固定 $x \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$。显然 $x \in \Sigma_C$。令 $i \in D$。由于 $D \subset B$，根据引理 3.3， $[\gamma_B(y)]_i = 0$ 对所有 $y \in \Sigma_C$ 成立，当且仅当 $[\gamma_B(x)]_i = 0$。因此，$x \notin \mathcal{V}$ 蕴含 $\Sigma_C \subset \mathcal{V}^c$。由于 Σ_C 是Σ_C 的闭包，且 $\mathcal{V}^c$ 是闭集，断言 A 得证。

断言 B： F 属于 $C^1(\Sigma)$。

该断言的证明与 [5, 引理 4.3.A]的证明完全相同。我们先证明，对于$x \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$， F在 x 处可微，且 $\nabla F(x) = 0$。为证明这一点，只需证明存在 $C > 0$ 使得

$$|F(x) - F(y)| \le C \, \|x - y\|^2 \quad \text{for all } x \in \Sigma \setminus \mathcal{V}, y \in \mathbb{R}^S \text{ with } \|x - y\| \le 1 \,. \tag{7.10}$$

回顾 $x \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$。根据 F 的定义，若 $y \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$, $F(y) = F(x) = 0$。假设 $y \in \mathcal{V}$。在这种情况下，

$$|F(x) - F(y)| = |F(y)| = | \, F_{A,D}(\gamma_B(y)) \, \Psi(R(y) - 1) \, | = \pi_D(\gamma_B(y))^2 \Phi(y),$$

对某个连续函数 Φ。由于

$$\pi_D(\gamma_B(y))^2 \;=\; [\, \pi_D(\gamma_B(y)) - \pi_D(\gamma_B(x)) \,]^2 \,,$$

我们很容易得到 (7.10)。

函数 $\Psi(R-1)$ 和 F属于 $C^2(\mathcal{V})$。特别地，为了证明 F属于 $C^1(\Sigma)$，只需考察 F 的导数在 $\mathcal{V}$ 边界附近的行为。

我们断言，存在一个有限常数 $C_1 > 0$ ，使得

$$\|\nabla F(x)\| \le C_1 \, \big\{ \, \|\nabla F_{A,D}(w)\| + \pi_D(w) \, \big\}, \quad x \in \mathcal{V}, \tag{7.11}$$

其中 $w = \gamma_B(x)$.

回忆一下在 (3.2) 中引入的函数 $u_k^B, k \in B$的定义。经过初等计算可得，对于任意光滑函数 G： $\mathbb{R}^B \to \mathbb{R}$, $j \in S$,

$$\partial_{x_j} (G \circ \gamma_B)(x) = \sum_{k \in B} (\partial_{x_k} G)(\gamma_B(x)) \, u_k^B(j) \,, \quad \text{so that} \quad (\nabla G)(x) = u^{B,*} \, \nabla G(\gamma_B(x)) \,, \tag{7.12}$$

其中 $u^{B,\,*}$是由 $u^{B,\,*}(j,\ k) = u_k^B(j)$, $k \in B$, $j \in S$给出的矩阵。

Let

$$\mathcal{W}_0 \;:=\; \{x \in \mathcal{V} : R(x) < 1\} \,, \quad \mathcal{W}_1 \;:=\; \{x \in \mathcal{V} : \|x\|_A > 0\}.$$

根据 $R(\cdot)$ 的定义，若 $\|x\|_A = 0$， 则 $R(x) = 0$ 。因此， $\mathcal{V} = \mathcal{W}_0 \cup \mathcal{W}_1$，只需证明 (7.11) 在每个集合 $\mathcal{W}_0$, $\mathcal{W}_1$ 上成立。

在 $\mathcal{W}_0$ 中， $\Psi(R-1) \equiv 1$。因此，根据 $\Psi(\cdot)$ 的定义，对于 $j \in S$，由 (7.12) 可得 $F(\cdot)$,

$$(\nabla F)(x) = u^{B,*} \, \nabla F_{A,D}(w) \,. \tag{7.13}$$

这就证明了 (7.11) 在 $\mathcal{W}_0$ 上成立。

在 $\mathcal{W}_1$ 上，我们计算 $\nabla \Psi(R-1)$。根据 (7.12)，它等于

$$\nabla \Psi(R-1)(x) = \Psi'(R-1)(x) \left[- R(x) \, \frac{u^{B,*} \nabla \pi_D(w)}{\pi_D(w)} + \beta \nabla \mathfrak{I}_A(x) \frac{1}{\pi_D(w)} \right]. \tag{7.14}$$

Since $\Psi(R-1) \equiv 0$ 在 $R > 2$, $|\Psi'(R-1)(x) R(x)|$ 上一致有界，且与 $x \in \mathcal{V}$无关。因此，由 (5.2),

$$\|\nabla \Psi(R-1)(x)\| \le \frac{C}{\pi_D(w)} \quad \text{on} \quad \mathcal{W}_1 \,. \tag{7.15}$$

因此，根据 $F_{A\text{的定义},\ D}$, $\|F_{A,\ D}(x) \, \nabla \Psi(R-1)(x)\| \le C \pi_D(w)$ 对于 $x \in \mathcal{W}_1$成立。由于 Ψ 有界，(7.11) 在 $\mathcal{W}_1$ 上也成立。

由 (7.11) 及 $F_{A\text{的定义},\ D}$, 当 x 趋近于$\mathcal{V}$的边界时，$(\nabla F)(x)$ 收敛于 0。因此， ∇F 是 Σ上的良定义连续函数。特别地， F 是 $C^1(\Sigma)$。

断言 C： F 属于 $C^2(\mathcal{V})$，且具有有界二阶导数。

我们断言，对于所有 j， $k \in S$ 以及所有 $x \in \mathcal{V}$,

$$\|(\partial^2_{x_j x_k})F(x)\| \le C_0$$

对某个有限常数 $C_0 > 0$。这在集合 $\mathcal{W}_0$ 上显然，因为 $\Psi \equiv 1$ 在 $\mathcal{W}_0$上。对 (7.14) 求二阶导数可得

$$|\partial^2_{x_j,x_k}\Psi(R-1)(x)| \le \frac{C}{\pi_D(w)^2} \quad \text{on } \mathcal{W}_1. \tag{7.16}$$

由 (7.15)、(7.16) 和直接计算即可得到该断言。

断言 *D*: F 满足条件 $\mathfrak{E}_2$。

固定 $C \subset S$，使得 $|C| \ge 2$。根据断言 A,

$$\mathring{\Sigma}_C \subset \mathcal{V} \text{ or } \Sigma_C \cap \mathcal{V} = \varnothing.$$

若 $\Sigma_C \cap \mathcal{V} = \varnothing$，则对所有 $x \in \Sigma_C$， $F(x) = 0$，且条件 $\mathfrak{E}_2(C)$ 成立。若 $\Sigma_C \subset \mathcal{V}$，则条件$\mathfrak{E}_2(C)$由断言 C 得出。由此证明断言 D。

断言 *E*: F 对所有 $j \in D$均满足条件 $\mathfrak{E}_1(j)$。

证明与 [5] 中引理 4.3.D 的证明完全相同。根据定义，对于 $x \in \Sigma \setminus \mathcal{V}$， $\nabla F(x) = 0$。接下来考虑集合 $\mathcal{V}$。固定 $j \in D$。由 (7.9) 以及 $R(\cdot)$ 的定义,

$$F \equiv 0 \text{ on the open subset } \{x \in \Sigma : x_j < \|x\|_A\}.$$

因此，由 (7.11)，存在一个有限常数 C_1，使得

$$|\boldsymbol{v}_j \cdot \nabla F(x)| \;\le\; C_1 \left\{ \|\nabla F_{A,D}(w)\|_B + \pi_D(w) \right\} 1\{\|x\|_A \le x_j\}, \quad x \in \mathcal{V}\,.$$

对于满足 $\|x\|_A \le x_j$的 $x \in \mathcal{V}$,

$$w_j \;:=\; [\gamma(x)]_j \le x_j + \|x\|_A \;\le\; 2\,x_j\,.$$

因此,

$$\frac{|\,\nabla_{\boldsymbol{v}_j} F(x)\,|}{x_j} \;\le\; C_1 \left(\frac{\|\nabla F_{A,D}(w)\|_B}{w_j} + \frac{\pi_D(w)}{w_j} \right) \;\le\; C_1$$

其中某个有限常数 C_1 的值可能随行而变化。这就证明了断言 E。断言 *F*: 函数 F 对所有 $i \in A$ 均满足条件 $\mathfrak{E}_1(i)$。

固定 $k \in A$。由 (7.12),

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_k}(F_{A,D} \circ \gamma_B)(x) \;=\; \boldsymbol{v}_k \cdot \nabla(F_{A,D} \circ \gamma_B)(x) \;=\; \boldsymbol{v}_k \cdot u^{B,*} \nabla F_{A,D}(\gamma_B(x))\,.$$

因此，由 (3.10) 和 (3.11)，当 $k \in A$ 时,

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_k}(F_{A,D} \circ \gamma_B)(x) \;=\; \gamma_B(\boldsymbol{v}_k) \cdot \nabla F_{A,D}(\gamma_B(x)) \;=\; 0\,. \tag{7.17}$$

回顾断言 B 中引入的集合 $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1$ 的定义。在开集 $\mathcal{W}_0$, $F(x) = F_{A,D}(\gamma_B(x))$ 上。因此，由 (7.17)，在此集合上， $\nabla_{\boldsymbol{v}_k} F = 0$。我们转向集合 $\mathcal{W}_1$。由 (7.17)， $\nabla_{\boldsymbol{v}_k}(F_{A,D} \circ \gamma_B)(x) = \nabla_{\boldsymbol{v}_k}(\pi_D \circ \gamma_B)(x) = 0$，因此由 (7.14),

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_k \cdot \nabla F)(x) \;&= F_{A,D}(\gamma_B(x))\, \Psi'(R(x)-1) \left\{ \beta\, \nabla_{\boldsymbol{v}_k} \mathfrak{I}_A(x) \frac{1}{\pi_D(\gamma_B(x))} \right\} \\ &= \frac{\beta^2}{R(x)}\, \Psi'(R(x)-1)\, \frac{F_{A,D}(\gamma_B(x))}{\pi_D(\gamma_B(x))^2}\, (\nabla_{\boldsymbol{v}_k} \mathfrak{I}_A)(x)\, \mathfrak{I}_A(x)\,.\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{(\nabla_{\boldsymbol{v}_k} F)(x)}{x_k} \;=\; \frac{\beta^2}{R(x)}\, \Psi'(R(x)-1)\, \frac{F_{A,D}(\gamma_B(x))}{\pi_D(\gamma_B(x))^2}\, \frac{\nabla_{\boldsymbol{v}_k} \mathfrak{I}_A(x)}{x_k}\, \mathfrak{I}_A(x)\,.$$

根据 $F_{A,D}$, $F_{A,D}(\gamma_B(x))/\pi_D(\gamma_B(x))^2$ 的定义，它在 Σ 中有界。由引理 5.2 和引理 5.1-(b)，($\nabla_{\boldsymbol{v}_k} \mathfrak{I}_A(x)/x_k$) $\mathfrak{I}_A(x)$ 在 $\mathcal{W}_1$ 中有界。最后， $R(x)^{-1}\, \Psi'(R(x) - 1)$ 有界。断言得证。

断言 *G*: $\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F = 0$ 若 $\pi_D(x) = 0$。

°固定 $x \in \Sigma$ 使得 $\pi_D(x) = 0$。令 $C = \{i \in S : x_i \neq 0\}$，从而 $x \in \Sigma_C$。若 $\|x\|_A = 0, C \subset B$，且 $\pi_D(\gamma_B(x)) = \pi_D(x) = 0$。特别地，$x \notin \mathcal{V}$。根据断言 A，$\Sigma_C \subset \Sigma \setminus \mathcal{V}$。因此，根据定义，$F$ 在 Σ_C 上消失。所以，$(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F)(x) = (\mathfrak{L}^{\mathcal{C}} F|_{\mathring{\Sigma}_C})(x) = 0$。

假设 $\|x\|_A \neq 0$。由于 $\pi_D(x) = 0, x_i = 0$ 对某个 $i \in D$成立。因此，$x_i < \|x\|_A$，并且根据°(7.9)，$R(x) > 2$。这意味着，对于 $y \in \Sigma_C, y$，在 x 附近有 $F(y) = 0$，进而得到 $(\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F)(x) = (\mathfrak{L}^{\mathcal{C}} F|_{\mathring{\Sigma}_C})(x) = 0$。引理的证明至此完成。□

下一个引理是对 [5, 引理 4.4] 的修订。

引理 7.3。取 S 的一个非空真子集 A，以及一个函数 F，其中 F 属于 $\mathcal{E}_A$。令 $B = S \setminus A$。对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个函数 $H = H_\epsilon$: $\Sigma \to \mathbb{R}$，属于 $\mathcal{E}_S$，使得

$$F(x) = H(x) \text{ and } \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H(x) \text{ for all } x \in \Sigma \text{ such that } \min_{j \in B} x_j \geq \epsilon\,. \tag{7.18}$$

证明。由引理 5.5，存在函数 G: $\Sigma \to \mathbb{R}$ 和 $0 < \delta < \epsilon$，使得 (1) $G \in \mathcal{D}_S$，(2) $G(x) = 1$，对所有满足 $\min_{j \in B} x_j \geq \epsilon$，的 $x \in \Sigma$，(3) $G(x) = 0$ 对所有满足 $\min_{j \in B} x_j \leq \delta$的 $x \in \Sigma$ 成立。定义 $H(x) = F(x)G(x)$。我们断言，H 就是所需的函数。

断言 A: 函数 H 属于 $\mathcal{E}_S$。

由于 F和 G 满足条件 $\mathfrak{E}_2$，因此 H也满足该条件。下面考察条件 $\mathfrak{E}_1$。对于 $i \in B$，$G(x) = 0$ 对$x_i \leq \delta$成立。因此，条件 $\mathfrak{E}_1(i)$显然成立。对于 $i \in A$，F 和 G 满足条件 $\mathfrak{E}_1(i)$，因此 H也满足该条件。这证明了 H 属于 $\mathcal{E}_S$。

由于对所有满足 $\min_{j \in B} x_j \geq \epsilon$的 $x \in \Sigma$，$G(x) = 1$ 成立，因此 H 满足条件 (7.18)。 □

我们终于可以在定义域 $\mathcal{E}_S$ 中构造超调和函数。固定 S 的一个非空子集A，并令 $B = S \setminus A$。对于 $\epsilon > 0$，令

$$\boldsymbol{a}_0(\epsilon) := \min\{\lambda^{B \cup D, D}(\epsilon) : \varnothing \subsetneq D \subset A\},$$

并令

$$K_\epsilon := \big\{x \in \Sigma : \max_{k \in A} x_k \leq \boldsymbol{a}_0(\epsilon) \text{ and } \min_{i \in B} x_i \geq \epsilon\big\}\,. \tag{7.19}$$

固定 $0 < \gamma < 1$、子集 $\varnothing \subsetneq D \subset A$，并回顾 (7.7) 中函数$F_{A \setminus D, D}$的定义: $\Sigma_{D \cup B} \to \mathbb{R}$。应用引理 7.2，将函数 $F_{A \setminus D, D}$扩展为函数 G_D: $\Sigma \to \mathbb{R}$，该函数属于 $\mathcal{E}_A$，且满足

$$\begin{aligned} &G_D(x) \geq 0\,, \quad G_D(x) = F_{A \setminus D, D}(x), \quad x \in \Sigma_{B \cup D}, \\ &\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} G_D(x) = 0 \text{ if } \pi_D(x) = 0. \end{aligned} \tag{7.20}$$

对函数 $G_D \in \mathcal{E}_A$ 应用引理 7.3，得到函数 H_D^ϵ: $\Sigma \to \mathbb{R}$，它属于 $\mathcal{E}_S$ 且满足

$$H_D^\epsilon(x) = G_D(x) \text{ and } \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} G_D(x), \text{ for all } x \in \Sigma \text{ such that } \min_{j \in B} x_j \geq \epsilon\,. \tag{7.21}$$

我们总结函数 H_D^ϵ 的性质。它属于定义域 $\mathcal{E}_S$，且

$$\begin{aligned} &H_D^\epsilon(z) = 0 \text{ for } z \in \Sigma_B \text{ such that } \min_{j \in B} z_j \geq \epsilon\,, \\ &H_D^\epsilon(x) = F_{A \setminus D, D}(x) \geq 0 \text{ for } x \in \Sigma_{B \cup D} \text{ such that } \min_{j \in B} x_j \geq \epsilon\,. \end{aligned} \tag{7.22}$$

7.2. 首次时间区间。回顾第 2 节中停时序列 $(\sigma_n : n \geq 0)$ 的定义。本小节的主要结果指出，在时间区间 $[0, \sigma_1)$ 内，该过程仍吸收在 Σ 的边界上。

命题 7.4。固定 $z \in \Sigma$，并令 $A = \{i \in S : z_i = 0\}$，$B = S \setminus A$。假设 A 非空。那么，

$$\mathbb{P}_z\big[\, \|X_t\|_A = 0\,,\, 0 \leq t < \sigma_1 \,\big] = 1\,.$$

这一结果的证明分为几个步骤。

引理 7.5。 对于所有 $\epsilon > 0$ ，存在一个常数 $C(\epsilon) > 0$ 使得

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x) \le C(\epsilon)\, 1\big\{\, \pi_D(x) > 0, \|x\|_{A\setminus D} > 0 \,\big\}$$

对所有 $x \in K_\epsilon$ 以及 A 的非空真子集 D 。

证明。 该证明是对 [5, 引理 5.5] 证明的改编。固定 $\epsilon > 0$。由于每个函数$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon$, $\varnothing \subsetneq D \subset A$ 在 K_ϵ 上有界,

$$C(\epsilon) := \sup\{\|\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x)\| : x \in \Sigma, \varnothing \subsetneq D \subset A\} < \infty\,. \tag{7.23}$$

B根据定义，对所有 $x \in K_\epsilon$, $\min_{j\in B} x_j \ge \epsilon$ 。因此，由 (7.20) 中的第三个性质以及 (7.21),

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} G_D(x)\, 1\{\pi_D(x) > 0\} \quad \text{so that} \quad \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x)\, 1\{\pi_D(x) > 0\} \tag{7.24}$$

对所有集合 $\varnothing \subsetneq D \subset A$ 和 $x \in K_\epsilon$。

°另一方面，若 $\pi_D(x) > 0$ 且对于某个 $x \in K_\epsilon$ 有 $\|x\|_{A\setminus D} = 0$ ，则 $x \in \Sigma_{D\cup B}$。因此，°由 (7.21)、(7.20) 中的第二个性质，以及由于 $F_{A\setminus D,\ D} = F_D$ 在 $\Sigma_{D\cup B}$ 上,

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} G_D(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_{A\setminus D,D}(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_D(x) = \mathfrak{L}^{B\cup D} F_D(x)\,.$$

根据式 (7.19) 中对 $\boldsymbol{a}_0(\epsilon)$的定义以及引理 7.1，该量为负。因此，由式 (7.24) 可得,

$$\mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x) \le\ 1\big\{\pi_D(x) > 0, \|x\|_{A\setminus D} > 0\big\}\, \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_D^\epsilon(x)\,, \quad x \in K_\epsilon.$$

结合式 (7.23)，引理的证明即告完成。 □

对每个 $\epsilon > 0$，定义 τ_ϵ 为离开集合 K_ϵ 的离开时间:

$$\tau_\epsilon := \inf\{t \ge 0 : X_t \notin K_\epsilon\}.$$

°**引理 7.6**。 固定 $z \in \Sigma_B$。对于所有满足 $0 < \epsilon <$ 最小值$_{j\in B}\, z_j$ 的 D 以及 A 的非空子集,

$$\mathbb{P}_z\big[\, \pi_D(X_t) = 0\,, 0 \le t \le \tau_\epsilon \,\big] = 1\,.$$

°证明。 固定 $z \in \Sigma_B$, $0 < \epsilon <$ 最小值$_{j\in B}\, z_j$。我们首先证明 $D = A$ 的情形。回顾式 (7.1) 中对函数 $F_A \in \mathcal{E}_A$ 的定义。根据引理 7.3，存在 H_A^ϵ: $\Sigma \to \mathbb{R}$ 属于 $\mathcal{E}_S$ ，使得

$$F_A(x) = H_A^\epsilon(x) \text{ and } \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} F_A(x) = \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_A^\epsilon(x), \text{ for all } x \in \Sigma \text{ such that } \min_{j\in B} x_j \ge \epsilon\,. \tag{7.25}$$

固定 $t > 0$。由于 $H_A^\epsilon \in \mathcal{E}_S$,

$$\mathbb{E}_z[\, H_A^\epsilon(X_{t\wedge\tau_\epsilon})\,] \ =\ H_A^\epsilon(z) \ +\ \mathbb{E}_z\Big[\, \int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_A^\epsilon(X_s) ds \,\Big]\,.$$

根据 τ_ϵ 的定义、(7.25) 式以及引理 7.1，上述等式右侧的期望项为负。因此,

$$\mathbb{E}_z\,[H_A^\epsilon(X_{t\wedge\tau_\epsilon})] \le H_A^\epsilon(z)\,.$$

根据 (7.25) 式，我们可以用 F_A 替换 H_A^ϵ ，从而得到 $\mathbb{E}_z\,[F_A(X_{t\wedge\tau_\epsilon})] \le 0$。这意味着

$$\mathbb{E}_z\,[\pi_A(X_{t\wedge\tau_\epsilon})] = 0\,.$$

通过在 $\mathbb{R}_+$ 中考虑一个可数稠密的时间集合，我们完成了 $D = A$ 情形下的引理证明。

对于 $\varnothing \subsetneq D \subsetneq A$，我们对 $|A| - |D|$ 使用归纳论证。固定 $0 \le n < |A| - 1$，并假设该引理的断言对所有满足 $|C| \ge |A| - n$ 的集合 $C \subset A$ 都成立。考虑一个满足 $|D'| = |A| - n - 1$ 的子集 $D' \subset A$。根据证明的第一部分,

$$\mathbb{P}_z\big[\, \pi_{D'}(X_{s\wedge\tau_\epsilon}) > 0\,, \|X_{s\wedge\tau_\epsilon}\|_{A\setminus D'} > 0\,\big] = 0 \tag{7.26}$$

fo对所有 $s \ge 0$。固定 $t \ge 0$。回顾 (7.21) 中函数 $H_{D'}^\epsilon$ 的定义。由于 $H_{D'}^\epsilon \in \mathcal{E}_S$,

$$\mathbb{E}_z\,[H_{D'}^\epsilon(X_{t\wedge\tau_\epsilon})] = H_{D'}^\epsilon(z) + \mathbb{E}_z\Big[\, \int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} \mathfrak{L}^{\mathcal{E}} H_{D'}^\epsilon(X_s)\, ds \,\Big]\,.$$

因此，由（7.22）中的第一个性质和引理 7.5，当 $\epsilon <$ 最小值$_{j\in B}\, z_j$ 时,

$$\mathbb{E}_z\,[H_{D'}^\epsilon(X_{t\wedge\tau_\epsilon})] \le C(\epsilon)\, \mathbb{E}_z\left[\int_0^{t\wedge\tau_\epsilon} 1\{\pi_{D'}(X_s) > 0, \|X_s\|_{A\setminus D'} > 0\}\, ds\right].$$

根据（7.26），前一个表达式的右端为零。因此，由（7.22）的第二个性质，

$$\mathbb{E}_z\left[1\{\|X_{t\wedge\tau_\epsilon}\|_{A\setminus D'}=0\}F_{A\setminus D',D'}(X_{t\wedge\tau_\epsilon})\right]\le\mathbb{E}_z[F_{A\setminus D',D'}(X_{t\wedge\tau_\epsilon})]=\mathbb{E}_z\left[H^\epsilon_{D'}(X_{t\wedge\tau_\epsilon})\right]\le 0\,.$$

由于 $F_{A\setminus D',\ D'}=F_{D'}$ 在 $\Sigma_{B\cup D'}$ 上，并且 $X_{t\wedge\tau_\epsilon}\in\Sigma_B$ [因为 $\|X_{t\wedge\tau_\epsilon}\|_{A\setminus D'}=0$],

$$\mathbb{P}_z\left[\|X_{t\wedge\tau_\epsilon}\|_{A\setminus D'}=0,\pi_{D'}(X_{t\wedge\tau_\epsilon})>0\right]=0.$$

将这一恒等式与 (7.26) 结合可得

$$\mathbb{P}_z\left[\pi_{D'}(X_{t\wedge\tau_\epsilon}>0)\right]=0.$$

最后，通过考虑 $\mathbb{R}_+$ 中时间的一个可数稠密子集，我们证明了该引理的断言对 D' 成立，从而完成证明。□

命题 *7.4* 的证明。对 $D=\{j\}$, $j\in A$ 应用引理 7.6，可得对于任意 $\epsilon<\min_{j\in B}z_j$,

$$\mathbb{P}_z\left[\|X_t\|_A=0\text{ for all }0\le t\le\tau_\epsilon\right]=1.$$

由于 τ_ϵ 是 $\max_{k\in A}x_k>\boldsymbol{a}_0(\epsilon)$ 或 $\min_{i\in B}x_i<\epsilon$ 中任一个首次出现的时刻,

$$\mathbb{P}_z\left[\|X_t\|_A=0\text{ for all }0\le t\le h_B(\epsilon)\right]=1,$$

其中，$h_B(\epsilon)$ 是定义域 $\min_{i\in B}x_i\ge\epsilon$ 的离开时间:

$$h_B(\epsilon):=\inf\{t\ge0:\min_{i\in B}x_i<\epsilon\}.$$

令 $\epsilon\downarrow0$，即可得到命题 7.4。□

7.3. **边界处的吸收**。回顾第 2 节中对 σ_n 和 $\mathcal{B}_n$, $n\ge0$的定义。按照 [5, 第 5 节2], 中的做法，利用正则概率分布可得以下命题。

命题 7.7。对所有 $x\in\Sigma,\quad n\ge0$,

$$\mathbb{P}_x\big[\,\sigma_n=0\ or\ \mathcal{B}_n=\mathcal{B}(X_t)\ for\ all\ t\in[\sigma_n,\sigma_{n+1})\,\big]=1\,.$$

定理 *2.6* 的证明。这些断言是命题 7.7 的直接推论。□

8. Proof of Theorem 2.4

除了证明该定理外，本节还介绍了由定义 2.3 中引入的鞅问题刻画的边界维数衰减扩散过程的一些性质。

解的存在性。由于定理 2.4 的证明与 [5, 第 6 节中的证明完全相同， 7], 因此我们只给出简要概述。存在性证明分为两个步骤。我们先证明紧性。

命题 8.1。([5, 命题 7。6]) 对于任意序列 $x_N\in\Sigma_N, N\ge1$，概率分布序列$\{\mathbb{P}^N_{x_N}:N\ge1\}$ 是紧的。此外，该序列的每个极限点都集中在连续轨道上。

下一个结果断言，任意极限点都是关于 $(\mathfrak{L},\mathcal{D}_S$ 的鞅问题的一个解).

命题 8.2。([5, 命题 7。7]) 设 $x_N\in\Sigma_N, N\ge1$ 是一个收敛到某个$x\in\Sigma$的序列，并记 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 为序列 $\mathbb{P}^N_{x_N}$的一个极限点。在 $\widetilde{\mathbb{P}}$条件下，对于任意 $H\in\mathcal{D}_S$,

$$H(X_t)-H(X_0)-\int_0^t\mathfrak{L}H(X_s)ds,$$

是一个鞅。

在 [5] 中给出的超临界情形 $b>1$ 下这些结果的证明同样适用于临界情形 $b=1$。特别是，这些结果保证了鞅问题的一个解 $\mathbb{P}_x,\ x\in\Sigma$的存在，其生成元为 $(\mathfrak{L},\ \mathcal{D}_S)$。

唯一性。一个替代的鞅问题。 在证明 $(\mathfrak{L},\ \mathcal{D}_S)$ 鞅问题解的唯一性之前，我们先证明 $(\mathfrak{L},\ \mathcal{D}_S)$-鞅问题的一个解 $\mathbb{P}$ 也满足一个替代的鞅问题。

令 $D_0(\Sigma)$ 为函数 F 的集合： $\Sigma \to \mathbb{R}$ 对于所有 $B \subset S$ 至少含有两个元素的$F|_{\Sigma_B}$， F属于 $C^2(\Sigma_B)$，且其紧支集包含于 $\mathring{\Sigma}_B$ 中。对于 $F \in D_0(\Sigma)$，我们如下定义$\mathcal{L}F\colon \Sigma \to \mathbb{R}$： 对于 $x \in \Sigma$，令 $B = \{i \in S\colon x_i \neq 0\}$。于是

$$\mathcal{L}F(x) = \begin{cases} (\mathfrak{L}^B F)|_{\Sigma_B}(x), & \text{if } |B| \geq 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

R回顾第 2 节中对停时序列 $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ 的定义。考虑 th e jump 过程

$$N_t := \sup\{n \geq 0\ :\ \sigma_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

并定义 $N_t^S := N_t \wedge |S|$， $t \geq 0$。显然，由于 $\mathbb{P}$ 是吸收的，

$$\mathbb{P}[N_t = N_t^S,\ \text{for all } t \geq 0] = 1.$$

定理 8.3。 ([5,定理 2。5]) 设 $\mathbb{P}$ 是鞅问题$(\mathfrak{L}, \mathcal{D}_S)$的一个解。对于每个 $x \in \Sigma$ 以及任意 $F \in D_0(\Sigma)$，

$$F(X_t) - \int_0^t \mathcal{L}F(X_s)ds - \int_0^t F(X_s)dN_s^S, \quad t \geq 0,$$

是一个 $\mathbb{P}$-鞅。

这个新的鞅称为 $\mathcal{L}$-鞅。下面的命题给出了另一种鞅问题的解的唯一性。

命题 8.4. ([5,命题 6.1]) 对于每个 $x \in \Sigma$，从 x出发的 $\mathcal{L}$-鞅问题至多存在一个吸收的解。

定理 2.4 是该结果、定理 2.6、定理 8.3 和命题 8.4 的直接推论。

命题 8.4 也能推出命题 2.8。固定 $x \in \Sigma$，并假设 $\mathcal{A}(x) = \{j \in S\ :x_j = 0\} \neq \varnothing$。令 $B = \mathcal{A}(x)^c$。根据定理 2.6，命题 2.8 中的测度 $\mathbb{P}_x^B$ 是一个定义良好的概率测度，并且是 $\mathfrak{L}$-鞅问题的解。根据定理 8.3，这也是限制在 Σ_B上的$\mathcal{L}$-鞅问题的解。命题 8.4 中确立的唯一性立即给出所需结论。

附加性质。 根据 [5,第7节。3], 鞅问题的解 $\{\mathbb{P}_x\colon\ x \in \Sigma\}$ 满足三项附加性质。此外，对于临界情形 $b = 1$，定理 2.4 中定义的鞅问题 $(\mathfrak{L}, \mathcal{D}_S)$ 的解也满足这些性质，且证明完全相同。

第一个性质指出，该解具有 Feller连续性。

命题 8.5。 [5, 命题 7。10] 设$(x_n)_{n\geq 1}$ 是 Σ 中的一个序列，收敛于某个 $x \in \Sigma$。则 $\mathbb{P}_{x_n} \to \mathbb{P}_x$， 其中收敛是指在 $C(\mathbb{R}_+, \Sigma)$上的测度弱收敛。

第二个性质表明，该解满足强马尔可夫性质。

命题 8.6。 [5, 命题 7。11] 固定 $x \in \Sigma$。设 τ 是一个有限停止时刻，且 $\{\mathbb{P}_\omega^\tau\}$ 是给定 $\mathcal{F}_\tau$时 $\mathbb{P}_x$ 的正则条件概率分布。则存在一个 $\mathbb{P}_x$-零测集 $\mathcal{N} \in \mathcal{F}_\tau$，使得

$$\mathbb{P}_\omega^\tau \circ \theta_{\tau(\omega)}^{-1} = \mathbb{P}_{X_\tau(\omega)},\ \ \omega \in \mathcal{N}^c,$$

其中，我们回顾一下$(\theta_t)^{t\geq 0}$ 是时间平移半群。

命题 8.5 和 8.6 一起表明，该解实际上是一个 Feller过程。最后一个性质为所有初始点 $x \in \Sigma$ 的吸收时间 σ_1 的期望值提供了一个统一上界。

命题 8.7。 [5, 命题 7。12] 令 $z \in \Sigma$ 满足 $z \neq \boldsymbol{e}_j$、 $j \in S$。对于任意 $q > b$,

$$\mathbb{E}_z[\sigma_1] \leq \frac{|B|^{(q-1)\vee 1}}{(q+1)\,(q-b)\,d(B)},$$

其中 $B = \{i \in S\colon \ z_i \neq 0\}$ 和 $d(B) = $最小值$_{j\in B}\frac{1}{2}\sum_{k\neq j}(m_j r(j,k) + m_k r(k,j))$。特别地, $\mathbb{P}_z[\sigma_1 < \infty] = 1$。

根据该命题，我们可以得出，随着时间流逝，该过程依次吸收到递减的子单纯形中，最终到达顶点 Σ_j, $j \in S$，且所需时间的期望有限。请注意，我们并未证明维数在每一步都只减少一维，不过我们认为确实如此。

Appendix A. Properties of C^1 functions on Σ

我们回顾一下第 2 节中关于 Σ, T_Σ, $C^1(\mathring{\Sigma})$ 和 $C^1(\Sigma)$ 的切向量定义。

引理 A.1. 设有一个 $F \in C(\Sigma)$、 $V \in C(\Sigma, T_\Sigma)$。则以下条件等价：*(1)* $F \in C^1(\Sigma)$ 且 $\nabla^\Sigma F = V$。*(2)* 对所有 $x, y \in \Sigma$，都有

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 V(x + t(y-x)) \cdot (y-x)dt,$$

其中，$\cdot$是 $\mathbb{R}^S$中的标准内积。

证明. (1) $\Rightarrow$(2)：由于 $F \in C^1(\Sigma)$，我们有 $F|_{\mathring{\Sigma}} \in C^1(\mathring{\Sigma})$。因此，对 $p, q \in \Sigma$，有

$$F(q) - F(p) = \int_0^1 \nabla F(p + t(q-p)) \cdot (q-p)dt,$$

F $^\circ$对于任意的 $x, y \in \Sigma$，我们取一个序列 $p_n \to x$ 和 $q_n \to y$，使得 $p_n, q_n \in \Sigma$，则方程

$$F(q_n) - F(p_n) = \int_0^1 \nabla F(p_n + t(q_n - p_n)) \cdot (q_n - p_n)dt$$

收敛到方程

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 \nabla F(x + t(y-x)) \cdot (y-x)dt.$$

这里，我们用到了 ∇F 在 Σ上的一致连续性。

(2) $\Rightarrow$ (1)：固定 $x \in \mathring{\Sigma}$。该方程意味着

$$F(y) - F(x) - (y-x)\cdot V(x) = \int_0^1 (V(x + t(x-y)) - V(x)) \cdot (x-y)dt.$$

利用 V 的一致连续性，我们有

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y) - F(x) - (y-x)\cdot V(x)}{|y-x|} = 0.$$

这意味着 F 在 x 处可微，并且 $\nabla F(x) = V(x)$。证明完毕。 □

引理 A.2。 固定 $F \in C^1(\Sigma_B)$。则 $\gamma_B^* F \in C^1(\Sigma)$，且对于任意 $\boldsymbol{V} \in T_\Sigma$，我们有

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}(\gamma_B^* F)(x) = \nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{V})} F(\gamma_B(x)).$$

$^\circ$ $^\circ$证明。 只需证明对于 $x \in \Sigma$，等式成立。固定 $x \in \Sigma$。由 (3.9)，我们还有 $^\circ$ $^\circ$$\gamma_B(x) \in \Sigma_B$。取足够小的 $\epsilon > 0$，使得 $x + \epsilon \boldsymbol{V} \in \Sigma$ 且 $\gamma_B(x) + \epsilon\gamma_B(\boldsymbol{V}) \in \Sigma_B$。左端等于

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\gamma_B^* F(x + \epsilon \boldsymbol{V}) - \gamma_B^* F(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(\gamma_B(x) + \epsilon\gamma_B(\boldsymbol{V})) - F(\gamma_B(x))}{\epsilon} = \nabla_{\gamma_B(\boldsymbol{V})} F(\gamma_B(x)).$$

□

回顾一下 $C_b^2(\mathring{\Sigma})$ 的定义。这里有一个更简单的判据，可用于检验 $F \in C^1(\Sigma)$ 是否成立。

引理 A.3。 设 $F \in C(\Sigma)$ 且 $F|_{\mathring{\Sigma}} \in C^2(\mathring{\Sigma})$。那么， $F \in C^1(\Sigma)$。

证明。 取 $\nabla F : \Sigma \to T_\Sigma$. 对于 $x \in \Sigma$, 以及任意满足 $x_n \in \Sigma$ 的序列 $x_n \to x$ ，只需证明序列 $\nabla F(x_n)$ 是柯西序列。注意到

$$\begin{aligned}\nabla F(x_n) - \nabla F(x_m) &= \int_0^1 \nabla_{x_n - x_m} \nabla F((1-t)x_n + t x_m) dt \\ &= |x_n - x_m| \int_0^1 \nabla_{\frac{x_n - x_m}{|x_n - x_m|}} \nabla F((1-t)x_n + t x_m) dt.\end{aligned}$$

由于 $F \in C_b^2(\mathring{\Sigma})$, 由上式可知，对于某个 $C > 0$，有 $|\nabla F(x_n) - \nabla F(x_m)| \le C|x_n - x_m|$。证明完毕。□

Acknowledgements

C. L. 获得了部分资助，资助来源包括 FAPERJ CNE E-26/201.117/2021，以及 CNPq 的研究生产力奖学金 PQ305779/2022-2。

References

[1] Armend´ariz, I., Beltr´an, J., Cuesta, D., Jara, M.: 凝聚零程过程粗化阶段的流体极限。预印本 arXiv:2302.05497（2023年）[2] I. Armend´ariz, S. Großkinsky, M. Loulakis. 临界状态下的零程凝聚。《随机过程及其应用》123, 346–3496（2013年）。[3] I. Armend´ariz, M. Loulakis: 超临界零程过程不变测度的热力学极限。《概率论及相关领域》145, 175–188（2009年）。[4] I. Armend´ariz, M. Loulakis: 大偏差条件下重尾随机变量和的条件分布, 《随机过程及其应用》121, 1138–1147（2011年）。[5] Beltr´an, J., Jara, M., Landim, C.: 凝聚零程过程的成核阶段及吸收扩散过程鞅问题的唯一性。《概率论及相关领域》169, 1169–1220（2017年）[6] Beltr´an, J., Landim, C.: 连续时间马尔可夫链的隧穿与亚稳态。《统计物理学杂志》140, 1065 1114 2010– ( ) [7] Beltr´an, J., Landim, C.: 有限集上可逆凝聚零程过程的亚稳态。《概率论及相关领域》152, 781–807（2012年）[8] J. Beltr´an, C. Landim: 连续时间马尔可夫链的隧穿与亚稳态 II：非可逆情形。《统计物理学杂志》149, 598–618（2012年）。[9] Berglund N.: 将连续空间马尔可夫链约化为有限集上的马尔可夫链。《亨利·庞加莱研究所年刊，概率与统计》61, 2036–2073（2025年）。[10] A. Bovier, F. den Hollander: *Metastability: a potential-theoretic approach*。《数学科学基础丛书》351，施普林格出版社，柏林, 2015年。[11] Bressloff, P. C., Newby, J. M.: 以速度跳跃马尔可夫过程建模的随机神经网络中的亚稳态。《应用动力系统SIAM杂志》12, 1394–1435（2013年）： [12] Cassandro, M., Galves, A., Olivieri, E. and Vares, M. E.: 随机动力学的亚稳行为：路径方法。《统计物理学杂志》35, 603–634。（1984年）。[13] Dolgopyat, D. and Wright, P.: 具有亚稳态的区间分段扩张映射的扩散系数。《随机与动力学》12, p.1150005，（2012年）。[14] Evans, M.R.: 一维非平衡系统中的相变。《巴西物理学杂志》30, 42–57（2000年）。[15] M. R. Evans, T. Hanney: 零程过程及相关模型的非平衡统计力学。《物理学杂志A》38(19), R195–R240（2005年）[16] C. Godr`eche, J. M. Luck: 零程过程中凝聚体的动力学。《物理学杂志A》38, 7215–7237（2005年）[17] S. Großkinsky, G. M. Sch¨utz, H. Spohn. 零程过程中的凝聚：稳态性质与动力学性质。《统计物理学杂志》113, 389–410（2003年）[18] Ikeda, N. and Watanabe, S.: *Stochastic differential equations and diffusion processes* 第24卷，爱思唯尔出版社，2014年。[19] I. Jeon, P. March, B. Pittel: 零程不变测度下最大团簇的大小。《概率年刊》28, 1162 1194 2000– ( ) [20] Kim S,, Seo I.: 亚稳态的近似方法：在无外场的非可逆二维伊辛模型和波茨模型中的应用。《概率年刊》53, 597-667（2025年）。[21] Landim, C.: 非可逆动力学的亚稳态：全非对称零程过程中凝聚体的演化。《数学物理通讯》330, 1–32（2014年）[22] C. Landim: 亚稳马尔可夫链。《概率调查》16, 143–227（2019年）。[23] Landim , C., Marcondes, D., Seo, I.: 弱混合马尔可夫链的亚稳行为：可逆临界零程过程情形。《概率年刊》51, 157-227（2023年）[24] Landim, C., Marcondes, D., Seo, I.: 亚稳态的预解式方法。《欧洲数学会杂志》27, 1563–1618（2025年）。

[25] J. L. Lebowitz, O. Penrose. 范德瓦耳斯–麦克斯韦理论中亚稳态的严格处理。《统计物理学杂志》**3**, 211–241,（1971年）。 [26] Leli`evre, T., Peutrec, D.L. and Nectoux, B.: 过阻尼朗之万动力学的Eyring-Kramers逃逸率：边界上存在鞍点的情形。arXiv预印本 arXiv:2207.09284（2022年）。 [27] Leli`evre, T., Ramil, M. and Reygner, J.: 朗之万动力学的转移统计量估计与Hill关系。载于《亨利·庞加莱研究所年刊（B辑）：概率与统计》**60**, 1645–1683（2024年）。 [28] L¨ocherbach, E. and Monmarch´e, P.: 相互作用神经元系统的亚稳态。载于《亨利·庞加莱研究所年刊（B辑）：概率与统计》**58**, 343–378（2022年）。 [29] Marcondes, D. and Simonis, A.:《亚稳金融市场》。arXiv预印本 arXiv:2310.13081（2023年）。 [30] J. Maxwell C.: 关于物体分子构成的动力学证据。《自然》**11**, 357–359（1875年）。 [31] Miclo, L., 关于亚稳态。《概率论及相关领域》 **184**,.275–322 （ 2022 年）。 [32] E. Olivieri and M. E. Vares. *Large deviations and metastability*。《数学及其应用百科全书》第100卷。剑桥大学出版社，剑桥，2005年。[33] Sato, K.I. and Ueno, T.: 多维扩散与边界上的马尔可夫过程。《京都大学数学杂志》**4**, 529–605（1965年） [34] Seo, I.: 非可逆零程过程的凝聚。《数学物理通讯》**366**, 781–839（2019年） [35] Vilk, O. and Assaf, M.: 非马尔可夫人口动力学中逃离亚稳态。《物理评论E》**110**, 044132（2024年）。 [36] A . D. Wentzell, 与扩散过程相关的一般边界问题，《数学科学进展》**15**, 202–204（1960年）（俄文）。 [37] H. Whitney: 在区域边界上可微的函数。《数学年刊》**35**, 482–485（1934年）。

PUCP, Av. Universitaria cdra. 18, San Miguel, Ap. 1761, Lima 100, Perú.
e-mail: johel.beltran@pucp.edu.pe

Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics,
77 Massachusetts Avenue Cam-bridge, MA 02139-4307, USA.e-mail: kyuhchoi@mit.edu

IMPA Estrada Dona Castorina 110 J. Botanico 22460 Rio de Janeiro Brazil and Univ. Rouen Nor- , , , , „ , , , mandie CNRS LMRS UMR 6085 F-76000 Rouen France. e-mail: landim@impa.br