arXiv:2601.02937v1 [physics.plasm-ph] 6 Jan 2026

非局域磁化输运的第一性原理闭合

N T Mitchell[1],**D A Chapman**[2],**G Kagan**[1]
[1] 布莱克特实验室，伦敦帝国理工学院，英国伦敦 SW7 2AZ[2] First Light Fusion Ltd.，牛津先锋园 9/10 单元，Mead Road，亚恩顿，基德灵顿，英国 OX5 1QU

电子邮件： n.mitchell22@imperial.ac.uk

摘要。 本文从第一性原理出发，推导了一种用于描述磁化等离子体中非局域输运的约化动力学方法（RKM），并在一维三速度几何中对其进行研究。与标准非局域闭合关系不同，该 RKM 使用福克-普朗克碰撞算子，因此在克努森数较小时能够自然地再现局域输运结果。研究发现，传导热流的峰值受到抑制，且会出现预热现象，这与物理推理和以往的动力学研究所预期的一致。研究还展示了其他输运通量的非局域行为，包括里吉-勒杜克、珀尔帖、埃廷斯豪森、能斯特、热力、摩擦力、交叉摩擦力、黏性应力和回旋黏性应力项。忽略福克-普朗克碰撞算子的非线性分量是合理的 *a posteriori*。本文还介绍了一个计算效率尤其高、且解析上更简单的 RKM 版本。

关键词：非局域磁化输运、约化动力学方法

1. 引言

热和动量的碰撞输运是理解和模拟等离子体集体行为不可或缺的物理过程，因此对约束聚变方案具有重要的实际意义 [1, 2]。如果等离子体的碰撞足够频繁，那么基于 Chapman-Enskog 展开推导的流体方程和输运通量的局域闭合关系 [3, 4] 便是合理的。这里，“足够频繁”意味着，与热和动量输运相关的粒子平均自由程（MFP）短于典型的长度尺度 L ；在这些尺度上，密度和温度等流体量会发生变化，即 $\lambda_{\mathrm{th}}/L \ll 1$，其中 λ_{th} 为热平均自由程。此外，碰撞时间必须短于特征流体力学时间尺度。

如果等离子体的碰撞性不足，解析的局域输运结果便不再有效。由于理想等离子体中单个粒子的平均自由程（MFP）与粒子速度 $\lambda \propto v^4$之间存在很强的标度关系，速度分布函数尾部中对热和动量输运有显著贡献的超热粒子，其碰撞频率远低于主体粒子。因此，这些尾部粒子可能在发生碰撞前穿越温度梯度，将能量和动量沉积到远处。这种非局域输运会显著影响传导热流，抑制热流峰值并使较冷区域预热；这两种效应都会直接影响流体动力学演化，进而影响聚变产额。非局域效应在低密度、高温和陡峭梯度条件下尤为常见，而这些条件在约束聚变等离子体中经常出现。因此，为了准确模拟、设计和优化约束聚变方案，在流体动力学模拟中理解并恰当建模非局域热输运是一项重要考量。

标准流体框架无法考虑非局域热流等动力学效应。Vlasov-Fokker-Planck（VFP）和粒子网格（PIC）模拟等完整动力学方法能够自然地纳入这些动力学效应。然而，对于惯性约束聚变（ICF）内爆等与聚变相关情形的大规模综合模拟，完整的动力学代码往往在计算上难以实现，因此流体模拟通常仍是首选方案。一种中间方法是采用流体模拟并结合非局域输运闭合关系，根据给定的流体动力学剖面，向流体模型提供考虑非局域效应的输运通量。这种混合方法既纳入了非局域输运效应，又保持了计算上的可行性。要开发准确的非局域闭合关系，必须全面研究非局域情形下的输运。

以往关于非局域输运的研究和闭合关系非常丰富，但几乎都完全聚焦于电子传导热流 [5–14], ，忽略了可能受到非局域行为影响的其他一系列输运通量。这些闭合关系几乎总是依赖简化的模型碰撞算子和扩散近似，因此无法在短平均自由程极限下自然地再现局域输运结果，也很可能遗漏了部分非局域物理机制和行为。这些方法还忽略了电流驱动输运，而这种输运会自然地出现在局域解析闭合关系中。电流会产生磁场，因此，纳入电流驱动输运的闭合关系必须考虑磁场效应。

本文介绍了一种基于先前工作 [15]扩展而来的约化动力学方法（RKM），用于闭合存在流动时的非局域磁化输运。先前工作研究的是无磁场条件下具有单一优选方向（一维）的平面几何。该系统在速度空间具有柱对称性，因此速度空间为二维（2V）。加入垂直于唯一空间方向的磁场分量会打破这种柱对称性，因为粒子将受到沿$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 方向的净洛伦兹力，而该方向通常不平行于唯一的空间方向。因此，加入磁场需要三个速度维度，这使得先前工作所研究的一维二维（1D2V）几何不再适用。将 RKM 扩展至一维三维（1D3V）需要用带复值 $m \neq 0$ 模态的球谐函数展开分布函数（DF）；与之相反，先前的一维二维（1D2V）实现采用勒让德多项式展开，并使用实值 $m = 0$ 模态。RKM 描述电子和离子的所有经典输运量，包括传导热流、里吉-勒杜克热流、珀尔帖热流、埃廷斯豪森热流、热力、能斯特力、摩擦力、交叉摩擦力、黏性应力以及回旋黏性应力项。由短长度尺度引起的标准非局域效应在整套

输运通量中均有所体现，同时还发现了快速流动在埃廷斯豪森热流上导致的新型非局域行为 [16]。RKM 基于第一性原理并采用福克-普朗克碰撞算子推导而来，因此能够在整个电离度和磁化度范围内，以很高的精度自然再现局域输运结果。输运量采用自洽方式求解，尤其是电子-离子动量交换。

本文其余部分安排如下。第2 节概述简单等离子体中电子和离子的局域解析输运结果。第3节从 VFP方程出发，介绍并推导电子的 RKM，并说明其数值实现。第4节应用 RKM，研究非磁化、中度磁化和强磁化情形下温度梯度驱动和电流驱动输运项的非局域行为。第5 节介绍磁化和非局域性影响下分布函数（DF）及热流积分被积函数的内在行为。随后对非局域状态下线性化 Fokker–Planck 算子的有效性进行事后检验；这是 RKM 的一个关键假设。本文还介绍了一个更易处理的 RKM 版本，该版本允许省略场-粒子算子。第6节介绍单一离子组分的 RKM，并展示非磁化和磁化情形下离子黏性应力张量的非局域行为。第7节讨论这些结果。

2. 局域输运结果总结

等离子体中的碰撞输运局域闭合关系已在先前文献中得到深入研究[17–22]。本文将结果与 Ji 和 Held [23–25] 给出的输运系数进行比较，后者表现出良好的收敛性。

2.1. 电子输运

假设等离子体具有足够高的碰撞频率，电子热流 $\boldsymbol{q}_e^{\mathrm{local}} = \boldsymbol{q}_e^T + \boldsymbol{q}_e^u$ 以及电子与离子之间的动量交换 $\boldsymbol{R}_e^{\mathrm{local}} = \boldsymbol{R}_e^T + \boldsymbol{R}_e^u$ 可表示为

$$\boldsymbol{q}_e^T = -\kappa_c^e\Big(\underbrace{(\hat{\kappa}_\parallel^e \boldsymbol{bb} + \hat{\kappa}_\perp^e(\mathbb{I}-\boldsymbol{bb}))\cdot\boldsymbol{\nabla}T_e}_{\text{Heat conduction}} + \underbrace{\hat{\kappa}_\times^e \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\nabla}T_e}_{\text{Righi-Leduc}}\Big),$$

$$\boldsymbol{q}_e^u = n_e T_e\Big(\underbrace{(\hat{\beta}_\parallel \boldsymbol{bb} + \hat{\beta}_\perp(\mathbb{I}-\boldsymbol{bb}))\cdot\Delta\boldsymbol{u}}_{\text{Peltier}} + \underbrace{\hat{\beta}_\times \boldsymbol{b}\times\Delta\boldsymbol{u}}_{\text{Ettingshausen}}\Big),$$

$$\boldsymbol{R}_e^T = -n_e\Big(\underbrace{(\hat{\beta}_\parallel \boldsymbol{bb} + \hat{\beta}_\perp(\mathbb{I}-\boldsymbol{bb}))\cdot\boldsymbol{\nabla}T_e}_{\text{Thermal force}} + \underbrace{\hat{\beta}_\times \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\nabla}T_e}_{\text{Nernst}}\Big),$$

$$\boldsymbol{R}_e^u = -\frac{n_e m_e}{\tau_{ee}}\Big(\underbrace{(\hat{\alpha}_\parallel \boldsymbol{bb} + \hat{\alpha}_\perp(\mathbb{I}-\boldsymbol{bb}))\cdot\Delta\boldsymbol{u}}_{\text{Friction}} - \underbrace{\hat{\alpha}_\times \boldsymbol{b}\times\Delta\boldsymbol{u}}_{\text{Cross friction}}\Big), \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$ 是平行于磁场的单位矢量，而 $\hat{\alpha}_{(\parallel,\perp,\times)}$、$\beta_{(\parallel,\perp,\times)}$ 和 $\hat{\kappa}^e_{(\parallel,\perp,\times)}$ 是仅取决于有效电离度 Z 的无量纲系数；对于垂直 $\perp$项和交叉 $\times$项，它们还取决于霍尔参数 $\chi_e = \omega_{c,e}\tau_{ee}$。碰撞时间和基本热导率分别定义为 $\tau_{\alpha\beta} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{\hat{\nu}_{\alpha\beta}} = \frac{6\sqrt{2}\pi^{3/2}\varepsilon_0^2 m_\alpha^{1/2} T_\alpha^{3/2}}{n_\beta q_\alpha^2 q_\beta^2 \Lambda_{\alpha\beta}}$ 以及 $\kappa_c^\alpha = n_\alpha T_\alpha \tau_{\alpha\alpha}/m_\alpha$。电子和离子的流动速度分别为 $\boldsymbol{u}_e$ 和 $\boldsymbol{u}_i$，电子相对于离子的相对运动为 $\Delta\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_i = -\boldsymbol{j}/en_e$。

2.2. 离子输运

与电子输运相比，离子输运更加复杂，因为等离子体通常包含多种离子种类。本文聚焦于单一离子组分的输运，但该方法也已扩展到离子混合物。当离子霍尔参数 $\chi_i = \omega_{c,i}\tau_{ii} \gtrsim 1$时，离子输运会受到磁化。由于离子的质量远大于电子，因此需要强得多的磁场才能使离子输运磁化。局域离子热流与电子传导热流具有相似的形式，但包含新的无量纲系数。

黏性应力张量是流体动力学框架内需要闭合关系的另一种输运量。在理想等离子体中，离子黏度几乎总是超过电子黏度；因此，本文在离子背景下对其进行研究。对于马赫数为 1 量级的情况，Braginskii关于离子黏性应力张量的闭合可表示为以下形式

$$\Pi_i^{\mathrm{local}} = -\eta_c^i\Big(\underbrace{\hat{\eta}_0^i \mathrm{W}_0^i + \hat{\eta}_1^i \mathrm{W}_1^i + \hat{\eta}_2^i \mathrm{W}_2^i}_{\text{Ordinary viscous stress}} \underbrace{-\hat{\eta}_3^i \mathrm{W}_3^i - \hat{\eta}_4^i \mathrm{W}_4^i}_{\text{Gyroviscous stress}}\Big) \tag{2}$$

其中 $\eta_c^i = n_i T_i \tau_{ii}$ 是基本黏度，$\hat{\eta}^i_{(0,\ldots,4)}$ 是一组无量纲黏度系数。$\mathrm{W}^i_{(0,\ldots,4)}$ 是 $\boldsymbol{b}$与离子应变率张量 $\mathrm{W}^i = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_i + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_i)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I}$的各种缩并形式，该张量由 Braginskii 定义为

$$\mathrm{W}^i_{0,ab} = \frac{3}{2}\left(b_a b_b - \frac{1}{3}\delta_{ab}\right)\left(b_c b_d - \frac{1}{3}\delta_{cd}\right)\mathrm{W}^i_{cd},$$

$$\mathrm{W}^i_{1,ab} = \left(\delta^\perp_{ac}\delta^\perp_{bd} + \frac{1}{2}\delta^\perp_{ab} b_c b_d\right)\mathrm{W}^i_{cd},$$

$$\mathrm{W}^i_{2,ab} = \left(\delta^\perp_{ac} b_b b_d + \delta^\perp_{bd} b_a b_c\right)\mathrm{W}^i_{cd},$$

$$\mathrm{W}^i_{3,ab} = \frac{1}{2}\left(\delta^\perp_{ac}\varepsilon_{bed} + \delta^\perp_{bd}\varepsilon_{aec}\right) h_e \mathrm{W}^i_{cd},$$

$$\mathrm{W}^{i}_{4,ab} = \Big(b_a b_c \varepsilon_{bed} + b_b b_d \varepsilon_{aec}\Big) h_e \mathrm{W}^{i}_{cd}. \tag{3}$$

其中采用指标求和约定，$\delta^{\perp}_{ab} \equiv \delta_{ab} - b_a b_b$ 是拒斥并矢，而 ε_{abc} 是列维-奇维塔符号。与矢量输运通量类似，这种局部闭合包含平行项、垂直项和交叉项 [26]。系数 $\hat{}\eta^{i}_{0}$ 与霍尔参数无关，因为它表示不受磁场影响的平行分量。$\hat{}\eta^{i}_{(1,2)}$ 项表示受磁场抑制的黏性应力张量垂直分量。$\hat{}\eta^{i}_{(3,4)}$ 项则是由回旋运动产生的额外交叉分量，类似于里吉-勒杜克项等矢量输运通量中的交叉分量。

3. 约化动力学方法

3.1. 控制方程

VFP 方程为理想弱耦合等离子体提供了动力学描述，并通过基于第一性原理推导的福克-普朗克碰撞算子，考虑了长程库仑碰撞。电子VFP方程为

$$\begin{aligned}\partial_t f_e + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f_e - \frac{e}{m_e}\big(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\big)\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} f_e \\ = C_{ee}\{f_e, f_e\} + C_{ei}\{f_e, f_i\},\end{aligned} \tag{4}$$

其中，$(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 分别是实验室参考系中时间、粒子位置和粒子速度的相空间坐标。 $f_e(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 是电子分布函数，而 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是宏观电场和磁场。$C_{ee}\{f_e, f_e\}$ 和 $C_{ei}\{f_e, f_i\}$ 分别是电子 - 电子碰撞和电子 - 离子碰撞的福克-普朗克碰撞算子。

RKM 的推导与先前的工作 [15] 类似：通过将速度坐标转换为随机速度 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_e$，把电子VFP方程变换到电子质心系。随后，将电子分布函数分解为 $f_e = f_e^M + \delta f_e$，以求得分布函数相对于麦克斯韦分布的偏差（DDF）的动力学方程，其中麦克斯韦分布项用热力学力表示。在此假设下，忽略碰撞算子的非线性 $C_{ee}\{\delta f_e, \delta f_e\}$ 分量，并事后检验这一假设，从而得到关于 δf_e 的线性非齐次方程。最后，将 DDF 按速度空间中的球谐函数展开，并考虑平板几何下的空间结构，由此得到一组关于模态 $\delta f_e^{(l,m)}(z,\ w)$ 的耦合偏微分方程。对于给定的流体动力学剖面，求解这些偏微分方程即可恢复 DDF，进而计算输运通量。

3.2. DDF方程的推导

从电子VFP方程 4 出发，我们将速度坐标变换到随局部流动的共动系，即从 $(t,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})$ 变换为 $(t' = t,\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_e(t,\ \boldsymbol{x}))$。导数变换为

$$\begin{aligned}\partial_t &= \partial_{t'} - (\partial_t \boldsymbol{u}_e)\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}, \\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}'} - (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_e)\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}, \quad \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}.\end{aligned} \tag{5}$$

去掉撇号后，可得电子质心参考系中的电子 VFP 方程:

$$\begin{aligned}&\partial_t f_e + (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_e)\cdot\boldsymbol{\nabla} f_e - \Big(\partial_t \boldsymbol{u}_e + (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_e)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_e) \\ &+ \frac{e}{m_e}\big(\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_e)\times\boldsymbol{B}\big)\Big)\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}} f_e \\ &= C_{ee}\{f_e, f_e\} + C_{ei}\{f_e, f_i\}.\end{aligned} \tag{6}$$

电子动量方程由$m_e\boldsymbol{v}$ 电子动力学方程的 4 阶 $m_e\boldsymbol{w}$ 矩得到，即方程6:

$$\begin{aligned}&\partial_t \boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{u}_e\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_e \\ &= \frac{1}{\rho_e}\Big(-\boldsymbol{\nabla} p_e - \boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_e - e n_e\big(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}_e\times\boldsymbol{B}\big) + \boldsymbol{R}_e\Big),\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $p_e = n_e T_e$ 为电子热压，Π_e 为电子黏性应力张量，而 $\boldsymbol{R}_e$ 为电子-离子动量交换，其定义为 $\boldsymbol{R}_e = \int d^3\boldsymbol{v}\ m_e\boldsymbol{v} C_{ei}\{f_e\}$。将电子动量方程 $\partial_t \boldsymbol{u}_e$ 中的7 代入方程6 ，可得

$$\partial_t f_e + \hat{V}_e f_e + \hat{B}_e f_e = C_{ee}\{f_e, f_e\} + C_{ei}\{f_e, f_i\}, \tag{8}$$

质心参考系中的非磁化电子 Vlasov 算子

$$\begin{aligned}\hat{V}_e &= (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_e)\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ &- \Big[\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_e) + \frac{1}{\rho_e}\Big(-\boldsymbol{\nabla} p_e - \boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_e + \boldsymbol{R}_e\Big)\Big]\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}},\end{aligned} \tag{9}$$

以及磁场算子

$$\hat{B}_e = -\frac{e}{m_e}(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}. \tag{10}$$

电子分布函数分解为 $f_e = f_e^M + \delta f_e$，其中电子麦克斯韦分布为 $f_e^M = n_e(\sqrt{\pi} v_{\mathrm{th},\ e})^{-3}\exp(-(w/v_{\mathrm{th},\ e})^2)$，热速度为$v_{\mathrm{th},\ e} = \sqrt{2T_e/m_e}$。与 Chapman-Enskog 展开不同，这种分解不假设分布函数与麦克斯韦分布之间存在微小偏差。由此，碰撞项展开为

$$
\begin{aligned}
C_{ee}\{f_e,f_e\} &\approx \underbrace{C_{ee}\{\delta f_e, f_e^M\}}_{=\hat{C}_{ee}^T\delta f_e} + \underbrace{C_{ee}\{f_e^M,\delta f_e\}}_{=\hat{C}_{ee}^F\delta f_e},\\
C_{ei}\{f_e,f_i\} &\approx \underbrace{C_{ei}\{f_e^M,f_i^M\}}_{=C_{ei}^M} + \underbrace{C_{ei}\{\delta f_e,f_i^M\}}_{=\hat{C}_{ei}\delta f_e},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中 $C_{ee}\{f_e^M,f_e^M\}=0$恒等成立，非线性电子-电子项 $C_{ee}\{\delta f_e,\delta f_e\}$ 即使在分布函数尾部与麦克斯韦分布存在量级为 1 的偏差时也可以忽略。我们在事后 于第5.3节检验这一假设。对于与电子输运相关的速度 $w \sim v_{\mathrm{th},e} \gg v_{\mathrm{th},i}$，电子-离子碰撞算子在质量比的最低阶 $m_e/m_i \ll 1$ 下，化简为与麦克斯韦离子分布发生碰撞时相同的形式，即 $C_{ei}\{f_e,f_i\}\approx C_{ei}\{f_e,f_i^M\}$。即使存在多种离子，或等离子体不满足准中性，单个离子种类对应的电子-离子碰撞算子仍具有这样的形式：总电子-离子碰撞算子可写成与具有有效电离度的单一离子种类电子-离子碰撞算子相同的形式 $Z=\sum_\beta \hat{\nu}_{e\beta}/\hat{\nu}_{ee}=\sum_\beta Z_\beta^2 \frac{n_\beta}{n_e}\frac{\ln\Lambda_{e\beta}}{\ln\Lambda_{ee}}$，其中离子的标签为 β。方程 8 变为

$$
\partial_t f_e^M + \hat{V}_e f_e^M - C_{ei}^M = (\hat{C}_e - \partial_t - \hat{V}_e - \hat{B}_e)\delta f_e, \tag{12}
$$

其中 $\hat{C}_e=\hat{C}_{ee}^T+\hat{C}_{ee}^F+\hat{C}_{ei}$。

在流体力学时间尺度上，输运通量通常是准静态的，即仅通过流体动力学剖面 [27] 隐式依赖于时间。由于输运量是根据 δf_e 计算的，因此本文取 $\partial_t\delta f_e = 0$。在流体模拟中，仍可通过以下写法考虑 DDF 历史的影响：

$$
\partial_t\delta f_e \approx \frac{\delta f_e(t)-\delta f_e(t-\Delta t)}{\Delta t}, \tag{13}
$$

其中，Δt 是当前流体力学时间步长，而$\delta f_e(t-\Delta t)$已由 RKM 在上一个时间步长中确定。随后将 $\delta f_e(t-\Delta t)/\Delta t$ 项移至左侧并并入驱动项，而将 $\delta f_e(t)/\Delta t$ 保留在右侧作为算子。本文中忽略这些项，但在将 RKM 集成到流体模拟时，可以直接将其纳入。

左侧的麦克斯韦分布项可通过时间导数求得

$$
\begin{aligned}
\partial_t f_e^M &= \left(\partial_t \ln n_e + \left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},e}^2}-\frac{3}{2}\right)\partial_t \ln T_e\right) f_e^M\\
&= \left[-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_e\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln n_e + \left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},e}^2}-\frac{3}{2}\right)\right.\\
&\times\left.\left(-\boldsymbol{u}_e\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln T_e - \frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_e + K_e\right)\right] f_e^M,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

和梯度

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f_e^M &= \left[\boldsymbol{\nabla}\ln n_e + \left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},e}^2}-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{\nabla}\ln T_e\right] f_e^M,\\
\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}} f_e^M &= -\frac{2}{v_{\mathrm{th},e}^2} f_e^M \boldsymbol{w}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

密度和温度的时间导数已利用电子密度和温度流体方程进行了改写，这些方程可写成如下形式

$$
\begin{aligned}
\partial_t \ln n_e &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_e\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln n_e,\\
\partial_t \ln T_e &= -\boldsymbol{u}_e\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln T_e - \frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_e + K_e,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中，输运项合并写为

$$
K_e = \frac{2}{3p_e}\left[-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}_e - \Pi_e : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{R}_e\cdot\Delta\boldsymbol{u}\right]. \tag{17}
$$

将这些项与麦克斯韦分布-麦克斯韦分布碰撞项结合

$$
C_{ei}^M = -2\hat{\nu}_{ei} v_{\mathrm{th},e}\frac{\Delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}{w^3} f_e^M, \tag{18}
$$

方程左侧的非齐次驱动项12 变为

$$
\begin{aligned}
D_e = &\left[\left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},e}^2}-\frac{3}{2}\right)K_e + \frac{2}{v_{\mathrm{th},e}^2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_e : \left(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w} - \frac{1}{3}w^2\mathbb{I}\right)\right.\\
&+\left(\left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},e}^2}-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\nabla}\ln T_e + \frac{1}{p_e}\left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_e + \boldsymbol{R}_e\right)\right.\\
&\left.\left.+2\hat{\nu}_{ei}\frac{v_{\mathrm{th},e}}{w^3}\Delta\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{w}\right] f_e^M.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

电子参考系中的电子VFP方程对于DDF δf_e 为

$$
D_e = (\hat{C}_e - \hat{V}_e - \hat{B}_e)\delta f_e. \tag{20}
$$

其中，线性碰撞算子的具体形式见第3.3节。质心参考系中的DDF 方程采用与Chapman-Enskog解相同的可解性条件求解

$$
\int d^3\boldsymbol{w}\ \{1,\boldsymbol{w},w^2\}\,\delta f_e = 0, \tag{21}
$$

使得该解不会改变输入密度、流动或温度。一旦方程20求解出 DDF δf_e，即可计算输运量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_\alpha &= \int d^3\boldsymbol{w}\ \frac{1}{2}m_\alpha w^2\boldsymbol{w}\delta f_\alpha,\\
\boldsymbol{R}_e &= \boldsymbol{R}_e^0 + \int d^3\boldsymbol{w}\ m_e\boldsymbol{w}\hat{C}_{ei}\delta f_e,\\
\Pi_\alpha &= \int d^3\boldsymbol{w}\ m_\alpha\left(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w} - \frac{1}{3}w^2\mathbb{I}\right)\delta f_\alpha,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

其中 $\boldsymbol{R}_e^0 = -\frac{3}{4\sqrt{\pi}}\rho_e \hat{\nu}_{ei}\Delta\boldsymbol{u}$ 是电子与离子麦克斯韦分布之间的动力摩擦力。忽略 Vlasov项 $V_e\delta f_e$ 时，DDF 方程20 简化为 δf_e的 Chapman-Enskog 方程的领先阶，因此能够自然地再现小 Knudsen 数下的局部解析输运结果。

3.3. 碰撞算子的形式

福克-普朗克碰撞算子可写成 Rosenbluth 形式：

$$C_{\alpha\beta}\{f_\alpha, f_\beta\} = L_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial v_i}\left[-\frac{m_\alpha}{m_\beta}\frac{\partial \mathcal{H}_\beta}{\partial v_i}f_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{G}_\beta}{\partial v_i \partial v_j}\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j}\right], \tag{23}$$

其中 $L_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{q_\alpha q_\beta}{\varepsilon_0 m_\alpha}\right)^2 \ln\Lambda_{\alpha\beta}$，罗森布鲁斯势定义为

$$\mathcal{H}_\beta \equiv \int d^3\boldsymbol{v}'\ \frac{1}{u}f_\beta(\boldsymbol{v}'), \quad \mathcal{G}_\beta \equiv \int d^3\boldsymbol{v}'\ u f_\beta(\boldsymbol{v}') \tag{24}$$

其中 $u = |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|$。试探粒子碰撞算子和场粒子碰撞算子分别定义为 $\hat{C}^T_{\alpha\beta}\delta f_\alpha = C_{\alpha\beta}\{\delta f_\alpha, f^M_\beta\}$ 和 $\hat{C}^F_{\alpha\beta}\delta f_\beta = C_{\alpha\beta}\{f^M_\alpha, \delta f_\beta\}$。

试探粒子碰撞算子同时出现在同类碰撞和异类碰撞中，其形式为

$$\begin{aligned}\hat{C}^T_{\alpha\beta}\delta f_\alpha = &\frac{1}{2}\nu_D^{\alpha\beta}\hat{\mathcal{L}}\delta f_\alpha \\ &+ \frac{1}{w^2}\partial_w\left(\tilde{\nu}_s^{\alpha\beta}w^3\delta f_\alpha + \frac{1}{2}\nu_\parallel^{\alpha\beta}w^4\partial_w\delta f_\alpha\right),\end{aligned} \tag{25}$$

其中三个碰撞频率定义为

$$\begin{aligned}\nu_D^{\alpha\beta} &= \hat{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{erf}(\xi_\beta) - G(\xi_\beta)}{\xi_\alpha^3}, \\ \tilde{\nu}_s^{\alpha\beta} &= \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\nu_s^{\alpha\beta} = 2\hat{\nu}_{\alpha\beta}\frac{G(\xi_\beta)}{\xi_\alpha}, \\ \nu_\parallel^{\alpha\beta} &= 2\hat{\nu}_{\alpha\beta}\frac{G(\xi_\beta)}{\xi_\alpha^3},\end{aligned} \tag{26}$$

其中$\xi_\alpha = w/v_{\mathrm{th},\alpha}$，$G(\xi)$是Chandrasekhar函数 [22, 28]，，而俯仰角散射算子

$$\hat{\mathcal{L}}f = (\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}})^2 f = \partial_\mu\left((1-\mu^2)\partial_\mu f\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\partial_\varphi^2 f. \tag{27}$$

场粒子碰撞算子的形式为

$$\begin{aligned}\hat{C}^F_{\alpha\beta}\delta f_\beta = &\left(\frac{q_\alpha q_\beta}{\varepsilon_0 m_\alpha}\right)^2 \ln\Lambda_{\alpha\beta}\frac{m_\alpha f^M_\alpha}{T_\alpha}\left[\frac{T_\alpha}{m_\beta}\delta f_\beta - \delta\mathcal{H}_\beta\right. \\ &\left. + \left(\frac{m_\alpha}{m_\beta} - 1\right)w\partial_w\delta\mathcal{H}_\beta + \frac{m_\alpha w^2}{2T_\alpha}\partial_w^2\delta\mathcal{G}_\beta\right],\end{aligned} \tag{28}$$

其中，$\delta\mathcal{H}_\beta$ 和 $\delta\mathcal{G}_\beta$ 是由 δf_β计算得到的罗森布鲁斯势。

电子-离子碰撞算符的形式为

$$\hat{C}_{ei}\delta f_e = \hat{\nu}_{ei}\frac{1}{2\xi_e^3}\hat{\mathcal{L}}\delta f_e, \quad C^M_{ei} = -2\hat{\nu}_{ei}v_{\mathrm{th},e}\frac{\Delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}{w^3}f_e^M, \tag{29}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_i$。对于单一离子组分的RKM，离子-电子碰撞算符 [18] 的形式为

$$\begin{aligned}C_{ie}\{\delta f_i, f_e\} &= \frac{1}{\rho_i}\boldsymbol{R}_e\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\delta f_i + \hat{C}^T_{ie}\delta f_i, \\ C^M_{ie} &= \left[-\frac{1}{p_i}\boldsymbol{R}_e\cdot\boldsymbol{w}\right. \\ &\left. - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\hat{\nu}_{ei}\frac{\rho_e}{\rho_i}\left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)\left(\frac{w^2}{v^2_{\mathrm{th},i}} - \frac{3}{2}\right)\right]f_i^M,\end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_i$ 适用于离子方程。

3.4. 球谐展开

随后将 DDF 在速度空间中展开为球谐函数：

$$\delta f_e = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}\frac{2k+1}{4\pi}\frac{(k-n)!}{(k+n)!}P_k^n(\cos\vartheta)e^{in\varphi}\delta f_e^{(k,n)}, \tag{31}$$

其中，P_k^n 为连带勒让德函数，[29]，和 ϑ，φ 分别为极角和速度方位角坐标。球面速度坐标的方向选取方式使得极点（$\vartheta = 0$）通过 $\mu = \cos\vartheta = \boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}/w$与 z 轴对齐，而 $\varphi = 0$ 则通过 $\cos\varphi = \boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}/w\sin\vartheta$位于 xz 平面内。通过对 DDF 在速度角度空间内取适当的矩，可以求得球谐展开的各分量

$$\delta f_e^{(l,m)} = \int d^2\Omega\ e^{-im\varphi}P_l^m(\mu)\delta f_e = \langle l, m|\delta f_e\rangle, \tag{32}$$

对于 l，$m\in\mathbb{Z}$，其中 $l\geq 0$ 和 $|m|\leq l$，$d^2\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = -d\mu d\varphi$ 为速度角度微元，为简洁起见引入狄拉克记号。对 DDF 方程取相同的矩 $\int d^2\Omega\ e^{-in\varphi}P_k^n(\mu)(\ldots)$，即可将其投影到球谐基上，从而得到一组描述 DDF 各模态的偏微分方程，其形式为

$$\mathcal{D}_e^{(l,m)} = \mathcal{C}_e^{(l,m)} - \mathcal{V}_e^{(l,m)} - \mathcal{B}_e^{(l,m)}, \tag{33}$$

其中，花体字符表示相应项在球谐基底上的投影。大多数投影的形式为

由 Swanekamp 等人给出。 [30], 其他项见附录 A。随后将球谐展开截断至前 N_l 个模态，对 l 指标而言，从而得到 N_l^2个偏微分方程，定义于 (z, w) 中，可通过数值方法求解 δf_e，进而得到输运量。本文采用 $N_l = 4$ ，先前研究已表明 [15, 31] 当克努森数为 $N_K \lesssim 1/10$时，输运量具有良好的收敛性；我们也通过收敛性研究再次进行了验证。可解性条件（方程 21）变为

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dw\ w^2\delta f_e^{(0,0)} = 0, \quad \int_0^\infty dw\ w^4\delta f_e^{(0,0)} = 0,\\ &\int_0^\infty dw\ w^3\delta f_e^{(1,m)} = 0, \quad \text{for } m = -1, 0, 1,\end{aligned} \tag{34}$$

原则上，将以球谐函数展开的 DDF 方程在完整的三维三速度空间中求解是可行的。不过，要完整体现磁场效应，需要三个速度维度，而研究非局域输运只需一个空间维度。因此，空间几何可简化为单一空间维度 z，并假设在 x 和 y 方向上具有平移对称性，从而得到一维三速度空间。

分别求解电子或离子DDF方程，得到 $\delta f_\alpha^{(l,m)}$和 $\alpha = e,\ i$后，即可将输运项恢复为 δf_α的相应速度矩。利用球谐函数的正交关系，这些输运项可直接表示为 $\delta f_\alpha^{(l,m)}$关于 w的一维积分：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_\alpha &= \frac{1}{2}m_\alpha\int_0^\infty dw\ w^5\boldsymbol{S}_{1,\alpha},\\ \boldsymbol{R}_e &= \boldsymbol{R}_e^0 - \hat{\nu}_{ei}v_{\mathrm{th},e}^3\int_0^\infty dw\ \boldsymbol{S}_{1,e},\\ \Pi_\alpha &= m_\alpha\int_0^\infty dw\ w^4\mathrm{S}_{2,\alpha},\end{aligned} \tag{35}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{1,\alpha} &= -\mathrm{Re}\{\delta f_\alpha^{(1,1)}\}\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{Im}\{\delta f_\alpha^{(1,1)}\}\hat{\boldsymbol{y}} + \delta f_\alpha^{(1,0)}\hat{\boldsymbol{z}},\\ \mathrm{S}_{2,\alpha} &= \left(\frac{1}{12}\mathrm{Re}\{\delta f_\alpha^{(2,2)}\} - \frac{1}{3}\delta f_\alpha^{(2,0)}\right)\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}}\\ &+ \left(-\frac{1}{12}\mathrm{Re}\{\delta f_\alpha^{(2,2)}\} - \frac{1}{3}\delta f_\alpha^{(2,0)}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{y}}\\ &+ \frac{2}{3}\delta f_\alpha^{(2,0)}\hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{z}} - \frac{1}{12}\mathrm{Im}\{\delta f_\alpha^{(2,2)}\}(\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{x}})\\ &- \frac{1}{6}\mathrm{Re}\{\delta f_\alpha^{(2,1)}\}(\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{x}}) + \frac{1}{6}\mathrm{Im}\{\delta f_\alpha^{(2,1)}\}(\hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{y}}).\end{aligned} \tag{36}$$

3.5. 数值实现

方程 33在单一空间坐标 $z = z_{\min} + i\Delta z$上，采用简单的均匀网格进行数值求解。和速度坐标 $w = (j+1)\Delta w$。对于量 Q的空间导数，采用简单的有限差分格式 $[\partial_z Q]_i \approx (Q_{i+1} - Q_{i-1})/(2\Delta z)$；对于速度导数，则采用 Chang-Cooper 启发式格式[32]。方程 33 离散化为 $\boldsymbol{D} = M\boldsymbol{F}$，其中$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别是驱动项 $\mathcal{D}_e^{(l,m)}$和 DDF 的模态 $\delta f_e^{(l,m)}$在均匀网格上的离散向量，而 M 包含碰撞算子、Vlasov 算子和磁场算子的球谐投影所对应的有限差分算子。随后，可使用用于求解线性问题的标准 Python 库求解离散方程。与先前针对 RKM 的方法不同，DDF 方程在整个速度域上求解，而非仅在速度尾部求解；同时，场粒子算子也包含在矩阵 M中。

驱动项 D_e 和质心 Vlasov 算子 $\hat{V}_e$ 依赖于输运量，而这些输运量本身由 δf_e的矩确定。对于克努森数 $N_\mathrm{K} \lesssim 1/10$，这些项几乎都属于次要项，因此可以像 Chapman-Enskog 展开中那样忽略。唯一的例外是出现在电子驱动项 D_e中的动量交换 $\boldsymbol{R}_e$ ，它在主导阶依赖于 δf_{e0}。Braginskii [18] 通过将 $\boldsymbol{R}_e$ 作用于 δf_e 时产生的积分部分移至右端，然后求解所得的线性问题来处理这一情况。虽然这里也可以采用类似的方法，但我们将这些输运项保留在左端的 D_e 中。在克努森数较高的情况下，若将出现在空间导数下的额外输运项（例如 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_e$）纳入右端，会使 D_e 中的矩阵算子变得更加复杂和稠密；而$\hat{}$ V_e 中输运量的出现则会导致一个非线性问题。这些复杂因素对动力学方程的影响仅是微小修正，因此可以通过迭代求解方程来处理。首先使用输运量的局域结果求解 DDF 方程，以得到 DDF δf_{e0}。然后根据 DDF 重新计算输运量。在局域极限下，预期这些结果彼此一致。在非局域情形下，输运量可能会发生变化，因此解将不再一致。随后可将这些计算得到的输运量反馈到同一个 DDF 方程中再次求解。重复这一过程，直至整个空间区域内的所有输运量在给定容差范围内达到自洽。在大多数情况下，忽略 $\mathcal{O}(N_K^2)$ 项即可

满足要求，此时 $D_e \approx D_e^{(0)}$其中

$$D_e^{(0)} = \left[\frac{2}{v_{\mathrm{th},e}^2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_e : \left(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w} - \frac{1}{3}w^2\mathbb{I}\right) + \left(\left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},e}^2} - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\nabla}\ln T_e + \frac{\boldsymbol{R}_e}{p_e} + 2\hat{\nu}_{ei}\frac{v_{\mathrm{th},e}}{w^3}\Delta\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{w}\right] f_e^M. \tag{37}$$

4. 电子输运

4.1. 温度梯度驱动项

为研究电子传导热流 $\boldsymbol{q}_e^T$和热力 $\boldsymbol{R}_e^T$的非局域性，考虑具有如下形式温度梯度的简单氢等离子体

$$T_e(z) = \frac{T_{\mathrm{left}} + T_{\mathrm{right}}}{2} + \frac{T_{\mathrm{left}} - T_{\mathrm{right}}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{z}{L}\right), \tag{38}$$

其中，针对不同的克努森数 $T_{\mathrm{left}}/T_{\mathrm{right}} = 10$进行研究，$N_K = \lambda_0/L$其中 $\lambda_0 = \lambda_{\mathrm{th},e}(z \to -\infty)$ 表示热端的热平均自由程。首先考虑非磁化情形，随后考虑具有均匀磁场 $\boldsymbol{B} = -B_0\hat{\boldsymbol{x}}$ 的磁化情形，并以热端的电子霍尔参数 $\chi_0 = \chi_e(z \to -\infty)$ 作为参数。此处使用的电子热平均自由程为 $\lambda_{\mathrm{th},e} = v_{\mathrm{th},e}/\hat{\nu}_{ee}\sqrt{1+Z}$。

图 1 展示了非磁化和中度磁化情形下（分别为 $N_K = 0.001$,**0.1** 和 $\chi_0 = 0$,**0.5**），小克努森数和大克努森数对应的传导热流。对于每个传导热流分量 $\boldsymbol{q}_{e,(\parallel,\perp,\times)}^T$，当克努森数较小时 $N_K = 0.001$，局域解析结果会自然地得到恢复；也就是说，RKM求解器事先并不知道局域解，但在克努森数足够小时仍能复现该解。这与许多其他非局域闭合不同，后者通过方法构造确保复现局域输运结果。经验证，RKM能够在广泛的霍尔参数 χ 和电离度 Z范围内复现局域解析结果。

对于较高的克努森数 $N_K = 0.1$，随着克努森数增大，各分量的峰值热流都会降低，并且冷端会出现预热 $0 \lesssim z/L \lesssim 1.5$，这与物理推理和 VFP 模拟的预期一致。即使霍尔参数仅为中度偏大 $\chi_0 \gtrsim 10$，磁场也会抵消非局域效应，使输运通量恢复至局域解析结果。这在物理上是合理的，因为当霍尔参数为 $\chi_0 \gtrsim 1$时，热粒子群中电子的回旋半径变得与其平均自由程相当或更小，因此电子在沿温度梯度陡峭的方向流动时，可能会经历更多次碰撞。

里吉-勒杜克热流 $\boldsymbol{q}_{e,\times}^T$ 在中等霍尔参数下变得与传导热

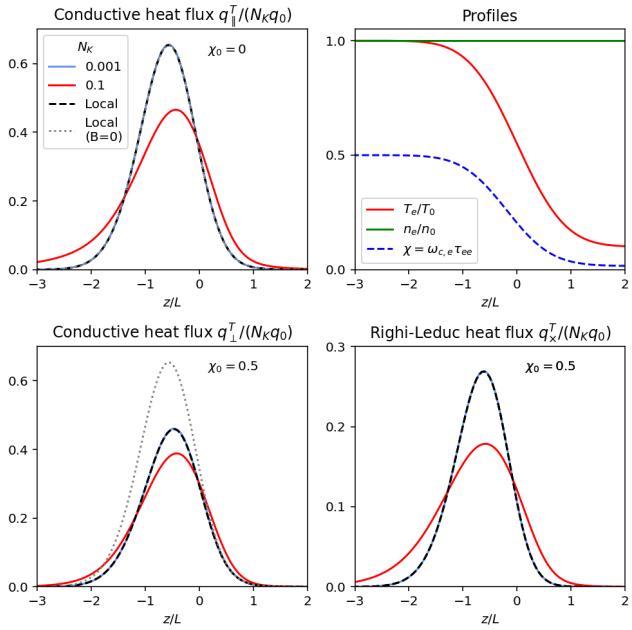


图1. 非磁化情形和中度磁化情形（$\chi_0 = 0.5$）下由温度梯度驱动的热流，按克努森数和特征热流 $q_0 = n_0 T_0 v_0$ 进行适当归一化，其中 n_0、T_0 和 v_0 分别表示热端 $z \to -\infty$处的电子数密度、温度和热速度。局域非磁化（平行）结果以黑色点线表示。平行方向的结果对应于非磁化情形 $\chi_0 = 0$。图中还显示了温度、数密度和霍尔参数的归一化剖面。黑色曲线表示局域非磁化结果在 z 方向上的分布。

流的其他分量相当。在 $\chi_0 \lesssim 1$和高克努森数下，里吉-勒杜克热流会受到非局域效应的强烈影响，这一点已在此前的 VFP模拟中得到指出 [33]。里吉-勒杜克热流降低了惯性约束聚变内爆中冷尖峰的热化程度，因此会对热点温度和聚变产额产生不利影响 [34]。里吉-勒杜克热流的非局域抑制可能因此有利于提高产额。

图2展示了热力分量$\boldsymbol{R}_{e,(\parallel,\perp,\times)}^T$ 对应与图1相同的情况。热力受到非局域效应的影响小于热流，因为它是较低阶的速度矩，因此对流动的超热粒子不那么敏感。与里吉-勒杜克热流类似，能斯特力比其垂直分量具有显著更强的非局域性。在惯性约束聚变内爆中，能斯特效应源于$\boldsymbol{R}_e^T$，会将磁场从热点带走，从而使热输运去磁化，并对最高温度和产额造成不利影响。

在忽略电子惯性和位移电流的标准磁流体力学近似下，

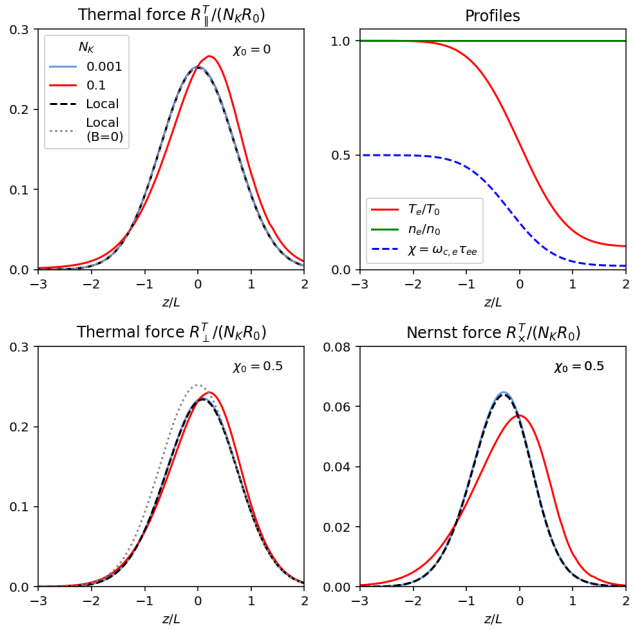


图 2. 非磁化情形和中度磁化（$\chi_0 = 0.5$）情形下，温度梯度驱动的动量交换（热力），其归一化方式适当地采用克努森数和特征动量交换 $R_0 = n_0 m_e v_0 \hat{\nu}_0$。局域非磁化（平行）结果以黑色点线表示。平行结果对应非磁化 $\chi_0 = 0$ 情形。图中还显示了温度、数密度和霍尔参数的归一化剖面。 z 方向上的局域非磁化结果以黑色表示。

热力和摩擦力以如下形式出现在广义欧姆定律中：$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{en_e}\boldsymbol{R}_e + \ldots$，进而与法拉第定律结合，构成感应方程 $\partial_t \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times (\frac{1}{en_e}\boldsymbol{R}_e + \ldots)$。令 $\boldsymbol{B} = 0$（因此 $\boldsymbol{j} = 0$），以聚焦于负责自发生成磁场的项，感应方程变为 $(\partial_t \boldsymbol{B})|_{\boldsymbol{B}=0} = \boldsymbol{\nabla} \times (\frac{1}{en_e}\boldsymbol{R}_{e,\parallel}^T) + \frac{1}{e}\boldsymbol{\nabla} T_e \times \boldsymbol{\nabla} \ln n_e$。后一项即为比尔曼电池效应，通常被视为碰撞等离子体中唯一可能自发生成磁场的磁流体力学项。利用非磁化热力的局域结果，热力项会消失，因为对于均匀的 $\boldsymbol{\nabla} \times (\frac{1}{e}\hat{\boldsymbol{\beta}}_\parallel \boldsymbol{\nabla} T_e) \equiv 0$，根据向量恒等式 Z。然而，由于非局域效应，非磁化热力会偏离这种无旋形式，因此该项不会消失，并且能够自发生成磁场。研究人员已通过完整的VFP模拟和其他方法研究了自发产生磁场的非局域机制 [35, 36]。这种机制似乎与广义能斯特速度有关 [37]，而不是比尔曼项的非局域扩展。由于必须在第二个空间方向上存在变化，因此无法在一维情况下对此进行全面研究，故此处不再进一步探讨。

4.2. 电流驱动项

为研究电流驱动输运的非局域性，我们考虑一种非等温等容简单等离子体，其流动沿 y 方向，形式为

$$\boldsymbol{u}_e = u_0 \exp(-(z/L)^2)\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{39}$$

磁场沿 $-x$ 方向均匀分布 $\boldsymbol{B} = -B_0 \hat{\boldsymbol{x}}$，且不存在离子流 $\boldsymbol{u}_i = 0$。无量纲数 $N_u^0 = |u_0/v_{\mathrm{th},e}|$ 描述流动最大速度相对于电子热速度的大小。先前研究考察了 $N_u^0 \sim 1/100 - 1/10$ 对非局域电流驱动热流的影响 [16],；不过，为简化起见，本文关注流速较小的情形，其中 $N_u^0 = 10^{-4} \ll 1$。克努森数 $N_K = \lambda_{\mathrm{th},e}/L$ 在此定义为流动剖面的宽度，而非温度剖面的宽度。

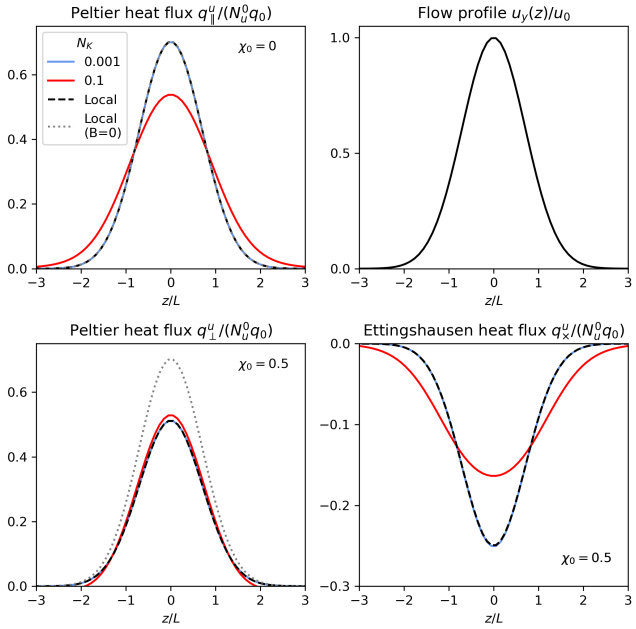


图 3. $N_u^0 = 10^{-4} \ll 1$ 对应的非磁化和中度磁化等温等容简单氢等离子体在局域和非局域情形下的电流驱动热通量。

局域和非局域的电流驱动热通量（珀尔帖热流和埃廷斯豪森热流）及力（摩擦力和交叉摩擦力）分别如图3 和4 所示。对于霍尔参数 $\chi_0 \lesssim 1$，珀尔帖热流 $\boldsymbol{q}_{e,(\parallel,\perp)}^u$ 和埃廷斯豪森热流 $\boldsymbol{q}_{e,\times}^u$ 都呈现非局域性。与非局域热传导通量类似，峰值热流受到抑制，而远离峰值电流处的热流则增强。摩擦力和交叉摩擦力属于较低阶速度矩，因此对非局域效应的敏感程度低于热通量，但仍表现出性质相似的偏差。与温度梯度驱动通量类似，中等磁化度下的交叉分量

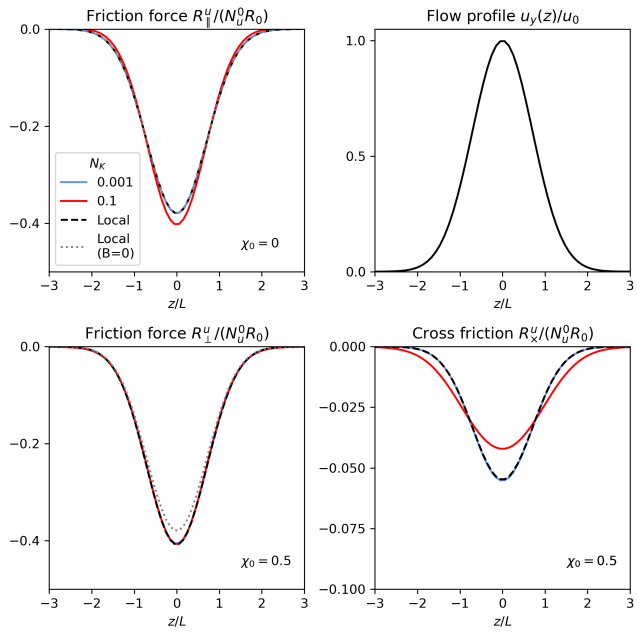


图 4. 1

$N_u^0 = 10^{-4} \ll$ 条件下，非磁化和中度磁化等温等容简单氢等离子体在局域和非局域情形中的电流驱动力（即摩擦力）。

受非局域行为的影响远大于其垂直分量。

4.3. 强磁化非局域输运

对于较大的霍尔参数 $\chi_e \gtrsim 10$，等离子体处于足够强磁化的状态，因此即使克努森数为 $N_K \sim 0.1$，输运仍是局域的。此时，拉莫尔半径$\rho_L = v_{\mathrm{th},\,e}/\omega_{\mathrm{c},\,e}$ 变得小于梯度尺度 L，因而成为限制非局域行为的因素。然而，这种强磁化状态会提高流体模型仍适用时的最大克努森数。

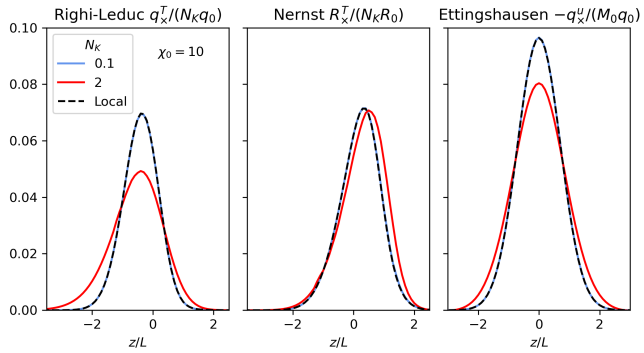


图 5. 强磁化等离子体中的里吉-勒杜克热流、能斯特力和埃廷斯豪森热流。

图5 展示了上述温度梯度驱动和电流驱动情形下的强磁化等离子体。图中仅展示交叉项，因为在假设热力学驱动（$\boldsymbol{\nabla} T_e$或 $\Delta \boldsymbol{u}$）垂直于磁场时，交叉项是高磁化条件下占主导地位的输运项。对于已经很大的克努森数 $N_K = 0.1$，强磁场会完全抑制非局域行为，使通量恢复为局域结果。强磁场还允许流体描述在更大的克努森数下仍然有效，因此这里展示了克努森数 $N_K = 2$ 的情形，此时梯度足够陡峭，非局域效应再次显现。

5. 动力学

5.1. 非局域分布函数

RKM 会自然地求解分布函数 f_e，该分布函数由球谐展开得到31。此处，我们绘制了f_e 上述非局域磁化温度梯度情形下的分布函数，以直观展示非局域性和磁场如何扭曲分布函数的尾部。

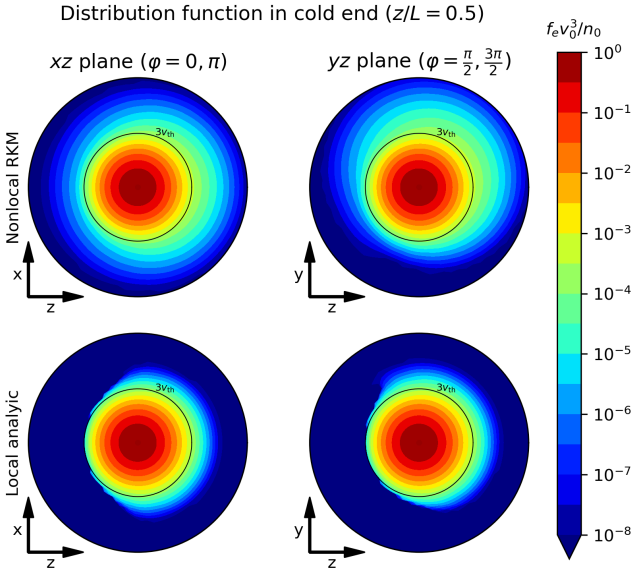


图 6. 上述磁化（$\chi_0 = 0.5$）等容温度阶跃情形冷端的电子分布函数。图中在 $w = 3v_{\mathrm{th}}$（$z/L = 0.5$）处标出了一个圆，以表示径向速度尺度。

图 6 显示了在上文第 f_e 节非局域磁化情形下冷端（z/L =0.5）处的分布函数 4.1。在 xz 平面内，该平面包含温度梯度和磁场，局域解在 $+\hat{\boldsymbol{z}} \parallel -\boldsymbol{\nabla} T_e$ 方向上具有各向异性。在yz 平面内，由于磁场的作用，各向异性在 $+\hat{\boldsymbol{y}} \parallel \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\nabla} T_e$ 方向上发生偏转。在尾部后方足够远处，

分布函数 ($w/v_{\rm th} \gtrsim 3$, $\vartheta \gtrsim 3\pi/4$) 的局域解为负值，凸显了其适用范围的局限性。由于从热端流来的超热粒子近乎无碰撞地传播，非局域分布的尾部相较于 $w/v_{\rm th} \gtrsim 3$有所增强。受磁场影响，这条超热尾部向 $+\hat{\boldsymbol{y}} \parallel \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{\nabla} T_e$ 方向偏转。非局域解修正了局域解析解中存在的尾部后方分布函数的非物理负值。

5.2. 热流被积函数

为更好地理解非局域效应和磁化效应对传导热流的影响，我们可以考察热流积分被积函数的行为。

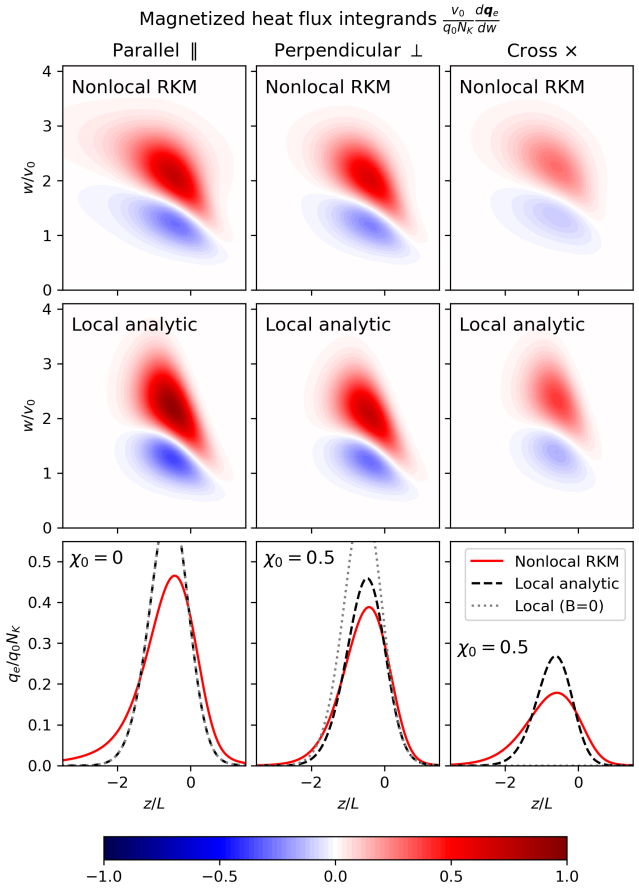


图7. 采用 RKM 和局域解析结果得到的非磁化与磁化温度梯度情形下，传导热流分量的被积函数，其中 $N_K = 0.1$ 。

图7 展示了上述非磁化和磁化温度梯度情形下电子传导热流被积函数的各个分量$\propto w^5 \boldsymbol{S}_{1,\,e}$ 。在非磁化情形下，非局域效应会扭曲较高速度处的热流被积函数 w ，此处的平均自由程较长，从而使被积函数弥散到整个空间区域。相比之下与局域解析解相比， $w \gtrsim 2v_0$ 时有一种束流状特征穿透至冷端，从而产生了下文非局域热流中所见的预热。热端也出现了类似的增强，非局域效应使超热粒子能够沿温度梯度穿行。

磁场会在较大的 w 处抑制这种非局域行为，大幅抑制冷端出现的束流特征和预热。被积函数和热流中仍存在非局域畸变，但程度低于非磁化情形。随后，磁场会在交叉 $\times$方向上增加一个不可忽略的分量，从而产生里吉-勒杜克热流。与平行和垂直传导分量相比，局域里吉-勒杜克被积函数的权重更多集中在较高的 w 处，因此非局域效应对里吉 - 勒杜克热流的影响大于对垂直分量的影响。

5.3. 碰撞算子有效性

RKM 的关键假设是忽略碰撞算子的非线性分量，也就是展开碰撞算子时的最后一项

$$C_{\alpha\beta}\{f_\alpha, f_\beta\} = C_{\alpha\beta}\{f_\alpha^M, f_\beta^M\} + C_{\alpha\beta}\{f_\alpha^M, \delta f_\beta\} + C_{\alpha\beta}\{\delta f_\alpha, f_\beta^M\} + C_{\alpha\beta}\{\delta f_\alpha, \delta f_\beta\}, \tag{40}$$

其中，重新引入一般的物种下标 α 和 β ，以强调 $C_{\alpha\beta}$ 表示物种 α 与物种 β之间的碰撞。关注碰撞算子展开中的最后两项，即试探粒子分量和非线性分量，可得

$$C_{\alpha\beta}\{\delta f_\alpha, f_\beta^M\} + C_{\alpha\beta}\{\delta f_\alpha, \delta f_\beta\} \equiv C_{\alpha\beta}\{\delta f_\alpha, f_\beta\} \tag{41}$$

因此，相较于试探粒子算子，忽略非线性分量等价于将该算子中出现的罗森布鲁斯势近似为由麦克斯韦分布计算得到的势，即$\mathcal{H}_\beta \approx \mathcal{H}_\beta^M$和 $\mathcal{G}_\beta \approx \mathcal{G}_\beta^M$。通过事后检查罗森布鲁斯势的偏差 $\delta\mathcal{H}_\beta$ 相对于其麦克斯韦分布结果 $\mathcal{H}_\beta^M$（对于 $\mathcal{G}$也同样如此）的比值是否较小，可以验证这一假设。图8 展示了非磁化温度梯度情形下，罗森布鲁斯势相对于其麦克斯韦分布结果的偏差，其中 $N_K = 0.1$。将 $\mathcal{H}$ 的偏差定义为

$$\Delta_{\mathcal{H}} \equiv \frac{1}{|\mathcal{H}^M|}\sum_{l=0}^{N_l-1}\sum_{m=-l}^{l}\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}|\delta\mathcal{H}^{(l,m)}|, \tag{42}$$

这是 $|\delta\mathcal{H}/\mathcal{H}^{\mathcal{M}}| \le \Delta_{\mathcal{H}}$ 在速度角度空间上的上界， $\mathcal{G}$ 也同样如此。最大偏差分别为 $\Delta_{\mathcal{H}}^{\max} \approx 1.4\%$ 和 $\Delta_{\mathcal{G}}^{\max} \approx 0.6\%$，这证明了在克努森数为 $N_K \lesssim 1/10$ 时，忽略碰撞算子的非线性分量这一假设是合理的。

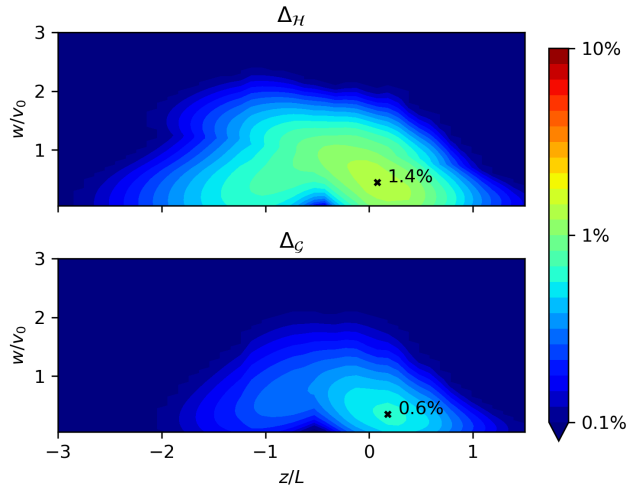


图8. *A posteriori* 对非局域修正较小这一点的论证：对于具有温度梯度且克努森数为 $N_K = 1/10$ 的等容非磁化等离子体，电子罗森布鲁斯势 $\mathcal{H}$ 和$\mathcal{G}$ 的非局域修正很小。这些比值在整个相空间内均很小（$\lesssim$ 1%），因此可以忽略$N_K \lesssim 1/10$的碰撞算子的非线性分量。

5.4. 求解非局域偏离

DDF 方程可写为

$$D = (\hat{C}^T + \hat{C}^F - \hat{V} - \hat{B})\delta f, \tag{43}$$

其中，试探粒子算子和场-粒子算子分别写出，并为简洁起见省略物种下标。通过求解方程43 并保留克努森数的一阶项，可得到DDF的局部最低阶Chapman-Enskog解，即

$$D^{(0)} = (\hat{C}^T + \hat{C}^F - \hat{B})\delta f^{\text{local}}. \tag{44}$$

若将DDF分解为 $\delta f = \delta f^{\text{local}} + g$，则通过从方程 g 中减去方程44，可得到非局域修正43的方程，结果为

$$D' = (\hat{C}^T + \hat{C}^F - \hat{V} - \hat{B})g, \tag{45}$$

其中，新的非齐次驱动项 $D' \equiv D - D^{(0)} + \hat{V}\delta f^{\text{local}} \approx \hat{V}\delta f^{\text{local}}$。方程 45看起来与原始 DDF 方程同样复杂，只是左侧的非齐次项有所不同。然而，这种分解还带来了额外的计算优势。试探粒子碰撞算子是速度空间中的微分算子，而场-粒子算子是速度空间中的积分算子。离散化时，试探粒子算子在速度指标上是稀疏的，只连接相邻点$j \pm 1$；而场-粒子算子在速度指标上是稠密的，会连接给定空间位置i 和谐波 l, m对应的所有 j 。包含场-粒子算子后，RKM 仍然可以处理，但若不包含它，计算效率会更高。在第一性原理描述中，从 DDF 方程中舍弃场-粒子算子是不合理的，而且这样做意味着无法再复现局域极限。然而，在求解非局域修正 g时，舍弃场-粒子算子或许是合理的，因为场-粒子算子只在分布函数主体部分显著，而非局域效应在尾部最为显著。舍弃 $\hat{C}^F g$ 后留下

$$D' \approx (\hat{C}^T - \hat{V} - \hat{B})g, \tag{46}$$

通过构造即可复现局域极限，因为对于足以小的 $N_K \lesssim 1/100$，与输运相关的速度范围内，g 将是次阶项，相较于 δf^{local} 而言。

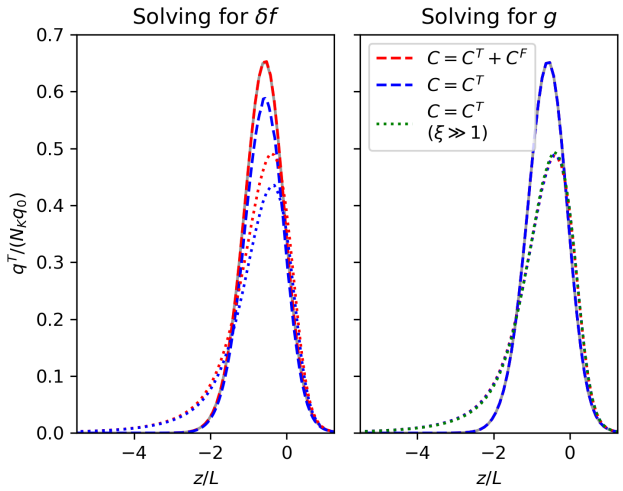


图 9。对于 $N_K = 0.001$ （虚线）和 $N_K = 0.1$ （点线），比较 RKM 求解 $g = f - f^M - \delta f^{\text{local}}$ 与 $\delta f = f - f^M$ 时，在包含和不包含场-粒子算子情况下的非磁化非局域热传导通量。

图 9比较了求解δf 和 g 时纳入与不纳入场-粒子算子的两种方法。求解 δf时，舍弃场-粒子算子会导致局域和非局域热流的结果不正确。局域结果的热导率降低了 $\sim$ 10%，非局域热流的峰值也有所降低。不过，非局域热流的预热仍与完整结果相符良好，这表明非局域热流主要由试探粒子碰撞决定。求解 g时，局域极限按构造即可重现。舍弃场-粒子算子后，由 g 得到的非局域热流几乎没有变化，因此这是一种更易处理的第一性原理方法。

此外，由于非局域偏离 g 在分布函数的尾部最大，此处 $\xi \equiv w/v_{\mathrm{th},\,e} \gtrsim 1$，我们可以采用试探粒子算子中速度依赖的碰撞频率的渐近极限。这样，算子便可简化为

$$\hat{C}^T g \approx \hat{\nu}_{ee}(\boldsymbol{x})\left[-\frac{1+Z}{2\xi^3}\hat{\mathcal{L}}_\mu + \frac{1}{\xi^2}\partial_\xi\left(1+\frac{1}{2\xi}\partial_\xi\right)\right]g. \tag{47}$$

采用这种近似得到的非局域热流，与 $\xi \gg 1$ 针对 ν_D、ν_s和$\nu_\parallel$的首阶渐近展开结果如图所示，两者仍然非常吻合。将这些碰撞频率的渐近形式代入方程46 后，便得到第一性原理RKM的一种特别简单的形式，有望适用于多维空间。经验证，去掉任何源自 ν_D、 ν_s或$\nu_\parallel$的测试粒子项，都会严重扰乱非局域解，即使只去掉 $l=0$ 或 $l\geq 1$ 项也是如此。因此，不能再通过去掉这类项来简化测试粒子算子。

6. 离子输运

与电子类似，离子也具有热流和黏性应力张量等输运量。非局域输运研究几乎都集中于电子热流，因为电子比离子轻得多，预计电子热流会占主导地位。 然而，磁化电子输运 $\chi_e \gtrsim 10$、较高的离子温度$T_i > T_e$ 以及更陡的离子温度梯度$|\boldsymbol{\nabla} T_i| > |\boldsymbol{\nabla} T_e|$ ，都可能使离子热流达到与电子热流相当的水平，甚至超过电子热流。单一组分离子热流在定性上与电子热流相似，因此此处不再展示，因为电子情形下的电子热流已经清楚呈现。相比之下，黏性效应几乎总是由离子主导，因此此处展示离子的黏性效应，而非电子的。需要指出的是，离子-电子碰撞会显著改变离子输运系数 [25] ，因此预计也会影响非局域离子热流。这些效应很容易纳入RKM，并将在未来的工作中介绍。

6.1. 离子的 *RKM*

对于具有 VFP方程的简单等离子体，可针对单一离子组分重新表述 RKM

$$\begin{aligned}&\partial_t f_i + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} f_i + \frac{Ze}{m_i}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}} f_i \\ &\quad = C_{ii}\{f_i, f_i\} + C_{ie}\{f_i, f_e\},\end{aligned} \tag{48}$$

通过与之前类似的推导，得到离子 DDF 的方程

$$D_i = \big(\hat{C}_i - \hat{V}_i - \hat{B}_i\big)\delta f_i, \tag{49}$$

含非齐次驱动项

$$\begin{aligned}D_i = &\left[\left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},i}^2} - \frac{3}{2}\right)K_i + \frac{2}{v_{\mathrm{th},i}^2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_i\colon\left(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w} - \frac{1}{3}w^2\mathbb{I}\right)\right.\\ &\left.+\left(\left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},i}^2} - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\nabla}\ln T_i - \frac{1}{p_i}\boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_i\right)\cdot\boldsymbol{w}\right]f_i^M,\\ \text{where}\quad K_i = &\frac{2}{3p_i}\left[-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}_i - \Pi_i\colon\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_i\right],\end{aligned} \tag{50}$$

以及算子

$$\begin{aligned}\hat{V}_i &= (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_i)\cdot\boldsymbol{\nabla}\\ &\quad -\left[\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_i) + \frac{1}{\rho_i}\left(-\boldsymbol{\nabla}p_i - \boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_i\right)\right]\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}},\\ \hat{B}_i &= \frac{Ze}{m_i}(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}.\end{aligned} \tag{51}$$

离子-电子麦克斯韦碰撞项 $\tilde{C}_{ei}\{f_i^M, f_e^M\}$与 $\boldsymbol{R}_e$ 和 W_{ie} 项在D_i中完全抵消，同样， $C_{ie}\{\delta f_i, f_e^M\}$ 中的 $\boldsymbol{R}_e$ 项也与$\hat{}$ V_i完全抵消。这些抵消意味着，所有电子输运项都已从离子DDF方程中消失，因此离子解无需先求解电子输运。电子在离子DDF方程中唯一的体现，是通过离子-$\hat{}$电子试探粒子碰撞算子 $C_{ie}\delta f_i$。随后将离子DDF方程投影到球谐基底上，得到

$$\mathcal{D}_i^{(l,m)} = \mathcal{C}_i^{(l,m)} - \mathcal{V}_i^{(l,m)} - \mathcal{B}_i^{(l,m)}, \tag{52}$$

其求解方法与电子情形类似。

6.2. 黏性应力张量

黏性应力张量表示由流动梯度引起的动量通量。与热流不同，除非电子受到磁化，或存在显著的温度分离，否则电子热流会占主导地位；而离子黏度通常大于或占主导地位于电子对应项。据作者所知，既往文献中尚无研究黏性应力张量非局域性的完整动力学研究或闭合关系，即使不采用第一性原理方法或不考虑磁场的情况也没有。利用 RKM，可以按照方程 35 中所述，通过对 DDF 积分自然地恢复黏性应力张量。

尽管深入研究非局域黏度超出了本文的范围，但我们使用 RKM 进行的初步研究已揭示黏性应力的许多新颖非局域特征

张量。首先，有两个无量纲数会影响其非局域行为：马赫数$M \sim |\boldsymbol{u}_i|/v_{\mathrm{th},i}$它决定流动的特征速度；以及克努森数$N_K \sim \lambda_{\mathrm{th},ii}|\boldsymbol{\nabla}\ln(|\boldsymbol{u}_i|)|^{-1}$它决定流动剖面变化所跨越的长度尺度。当$N_K \ll 1$和$M \lesssim \mathcal{O}(1)$时，黏性应力张量是局域的。然而，当$N_K \gtrsim 1/10$时，黏性应力张量会变成非局域的；在此状态下，马赫数$M \sim \mathcal{O}(1)$会通过$V_i\delta f_i$项对该应力张量$\hat{}$产生进一步的非局域效应。本文取固定的$M \sim \mathcal{O}(1)$。

上述研究的所有输运量都是一阶张量，即向量，它们由球谐展开的$l = 1$分量计算得出。相比之下，黏性应力由二阶张量表示，并由$l = 2$分量计算得出。其他非局域闭合要么不包含$l \geq 2$项，要么对$l = 2$分量使用最小熵闭合，因此不太可能正确捕捉黏性应力张量的非局域行为，而该张量是直接由$l = 2$分量计算得出的。RKM将分布函数展开为任意阶球谐函数；本研究发现，$N_l = 5$能够实现良好的收敛性。

产生应力的流动有两种：压缩流，其流动沿着流动变化的同一方向变化$\boldsymbol{u}_i \parallel \boldsymbol{\nabla}$，例如$\boldsymbol{u}_i = u_z(z)\hat{}\boldsymbol{z}$；以及剪切流，其流动沿垂直于流动的方向变化$\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{\nabla}$，例如$\boldsymbol{u}_i = u_y(z)\hat{}\boldsymbol{y}$。本研究展示了均匀磁场$\boldsymbol{B} = -B_0\hat{}\boldsymbol{x}$下剪切流的结果。图10展示了等温等容简单氢等离子体中，剪切流$\boldsymbol{u}_i = -\frac{1}{2}u_0\,\mathrm{erf}(z/L)\hat{}\boldsymbol{y}$产生的黏性应力分量$\Pi_{yz}$和$\Pi_{zz}$。与向量输运量的结果类似，当克努森数较小时，RKM能够准确再现黏性应力分量的局域解析结果。当克努森数较大时$N_K = 0.25$，非磁化平行应力Π_{yz}会受到非局域效应的显著影响，其定性行为与其他输运量相似：峰值通量受到抑制，并形成“预热”现象；由于超热粒子的流动，远离主梯度处的通量会增强。在磁化情形下$\chi_{i,0} = 0.25$，磁场使非局域垂直应力恢复到更接近其局部结果的状态。交叉应力Π_{zz}受非局域效应的影响似乎比磁化剪切应力更强，这与里吉-勒杜克热流$\boldsymbol{q}^T_{\alpha,\times}$比垂直分量$\boldsymbol{q}^T_{\alpha,\perp}$对非局域性更敏感的情况类似。

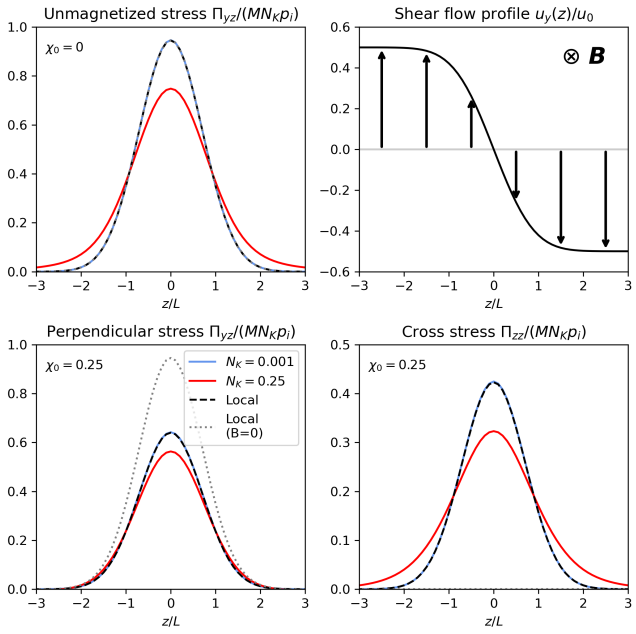


图10. 剪切离子流$\boldsymbol{u}_i = -\frac{1}{2}u_0\,\mathrm{erf}(z/L)\hat{}\boldsymbol{y}$对应的非局域离子黏性应力张量，马赫数为$M = |u_0|/v_{\mathrm{th},i} = 1$。应力以马赫数、克努森数$N_K = 0.25$和离子压强$p_i = n_iT_i$归一化。

7. 讨论

MagLIF [38, 39]等磁惯性方案是实现能源生产的约束聚变的一种有前景的方法。这些方案通过施加外部磁场来抑制电子热传导，或利用$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$压缩圆柱衬套，从而达到实现热核燃烧所需的高密度和高温。即使在非磁化的惯性约束聚变内爆中，比尔曼电池效应也可能自发产生足以使等离子体磁化的强磁场[34]。因此，在惯性约束聚变内爆模拟中正确地模拟磁化输运，对于实现惯性聚变能源的目标正变得愈发重要。

在先前工作的基础上，第一性原理RKM已扩展为纳入磁场。RKM利用福克-普朗克碰撞算子求解VFP方程的线性形式。结果表明，在短平均自由程情形下，RKM能够再现所有经典（类似Braginskii）的输运项。在非局域情形下，已对所实现的碰撞算子进行了事后验证；对于$N_K \lesssim 0.1$，罗森布鲁斯势相较于其麦克斯韦分布形式的偏差为$\lesssim 1\%$。

此外，还提出了RKM的另一种表述方式，求解分布函数的非局域偏离g，而不是相对于麦克斯韦分布的偏差δf。这种方法背后的思路可概括如下

：求解 δf 时，若舍弃场-粒子算子，则局域输运结果和非局域输运结果都会与上一段采用完整 δf 方法得到的近乎精确结果明显不同。然而，求解非局域偏离时，舍弃场-粒子算子并不会改变局域输运结果和非局域输运结果，因此忽略该算子是完全合理的。由此得到的 g 方程采用测试粒子碰撞算子，计算上更易处理，也很适合作为非局域输运闭合关系。

RKM 可作为流体代码中的非局域输运闭合，用于研究非局域输运对流体动力学演化的影响。RKM 还可用于基于机器学习技术训练代理非局域闭合，以实现计算效率特别高的方法；也可用于研究输运以外的其他动力学现象，例如受克努森层效应影响的反应性和中子谱。

本文展示了未磁化电子传导热流的典型非局域行为：陡峭的温度梯度会导致非局域热流，其峰值通量受到抑制，并在远离主梯度处产生预热。引入垂直磁场会抑制沿温度梯度方向的传导热流中的非局域效应。磁场还会引入里吉-勒杜克热流，其对非局域效应的敏感程度高于垂直分量。类似地，热力和能斯特项中也存在非局域效应。

除了考虑温度梯度来研究温度梯度驱动输运的非局域性外，也研究了不同长度尺度的电流剖面。这些情形展现了类似的非局域效应对电流驱动输运的影响，即珀尔帖和埃廷斯豪森热流，以及电子-离子摩擦力和交叉摩擦力。RKM还被用于展示更为非典型的非局域行为，例如大电流增强电流驱动热流的现象 [16]。

强磁场 $\chi \gg 1$ 会抑制非局域行为，使输运通量恢复到磁化局域结果。在强磁化条件下，通常是里吉-勒杜克热流等“交叉”分量占主导地位，超过其垂直分量。当克努森数足够高时，这些交叉分量中会再次出现非局域效应。

RKM 将球谐函数展开到任意阶，因此黏性应力张量自然包含在这一描述中。本文介绍的是离子而非电子的黏性应力张量，因为离子黏性效应几乎总是占主导地位，超过电子黏性效应。离子黏性应力张量的非局域行为是由剧烈剪切的离子流引起的。磁场会抑制普通黏性应力张量的非局域效应，但也会引入旋磁黏性分量；与里吉-勒杜克热流类似，该分量对这些非局域效应更为敏感。在现有文献中，似乎没有其他关于非局域黏性的研究，即使是针对非磁化等离子体的研究也没有。

完整的动力学模拟通常用作研究非局域输运的数值实验，而非构建闭合关系。可以考虑使用完整的VFP模拟，研究第4.1节温度梯度情形下的非局域输运。分布函数将初始化为麦克斯韦分布，其温度随空间变化。运行模拟后，分布函数会演化并形成各向异性分量，该分量经过几个碰撞时间后弛豫至准稳态结果。对于初始克努森数较低的剖面，这一准稳态结果应在空间各点与局域Chapman-Enskog解相符。对于初始克努森数较大的剖面，准稳态解将包含所关注的非局域效应；然而，温度梯度会在与初始弛豫至准稳态结果相近的时间尺度上部分弛豫。因此，此非局域情形下的热流对应的是部分弛豫后的温度剖面，而非初始温度剖面。这样一来，完整的VFP代码难以针对相同形状的剖面，对不同克努森数进行可靠比较；也难以对不同温度剖面开展更细致的参数扫描，或将其用作流体代码的输运闭合关系。此外，分布函数在初始弛豫阶段还会形成某种非零流动剖面。这种流动本身应会驱动热流，而对分布函数积分时，无法将其与传导热流区分开来。某些方法可能会通过添加粒子数、动量或能量的源项或汇项来应对这一问题，从而约束分布函数在整个初始弛豫阶段保持相同的密度、流动和温度。然而，这些约束本身是否会改变热流的物理过程尚不明确。初始麦克斯韦分布条件还可能导致模拟在早期出现异常行为，例如热流振荡[14, 40] ，从而使冷区降温。由于RKM根据瞬时流体剖面计算分布函数，因此在从流体动力学剖面求得非局域热流时不会出现这一问题。也可以在完整VFP代码中使用RKM初始化分布函数，并计入非局域效应，以避免这种异常行为。

全动力学方法是综合性模拟，无法将不同的非局域效应

清晰地分离出来进行研究；相比之下，在求解RKM时，可以通过从DF方程中移除相应项来分离这些效应。例如，完整的VFP代码无法将温度梯度与电流各自对热流的贡献区分开来。在RKM中，这两者对应于两个不同的热力学驱动力，因此，对于相同的流体动力学剖面，可以独立求得传导热流和电流驱动热流。这为理解输入流体动力学剖面的不同部分如何产生不同的非局域特征，提供了更清晰的解耦视角。

附录 A. 球谐投影

与先前的工作类似，线性碰撞算子的投影为

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{T,(l,m)}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}l(l+1)\nu_D^{\alpha\beta}\delta f_\alpha^{(l,m)} + \frac{1}{w^2}\partial_w\left(\tilde{\nu}_s^{\alpha\beta}w^3\delta f_\alpha^{(l,m)} + \frac{1}{2}\nu_\parallel^{\alpha\beta}w^4\partial_w\delta f_\alpha^{(l,m)}\right),\\
\mathcal{C}^{F,(l,m)}_{\alpha\beta} &= \left(\frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha\varepsilon_0}\right)^2\ln\Lambda_{\alpha\beta}\frac{1}{v_{\mathrm{th},\alpha}^2}f_\alpha^M\left[\frac{m_\alpha}{m_\beta}v_{\mathrm{th},\alpha}^2\delta f_\beta^{(l,m)} - \frac{l(l-1)}{2l-1}\frac{1}{v_{\mathrm{th},\alpha}^2}\Psi_{\beta,3}^{(l,m)}(w) + \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3}\frac{1}{v_{\mathrm{th},\alpha}^2}\Psi_{\beta,4}^{(l,m)}(w)\right.\\
&\left. + \left(-1+\left(\frac{m_\alpha}{m_\beta}-1\right)l + \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3}\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},\alpha}^2}\right)\Psi_{\beta,1}^{(l,m)}(w) + \left(-1-\left(\frac{m_\alpha}{m_\beta}-1\right)(l+1) - \frac{l(l-1)}{2l-1}\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},\alpha}^2}\right)\Psi_{\beta,2}^{(l,m)}(w)\right],
\end{aligned} \tag{A.1}$$

其中，我们利用了球谐函数是俯仰角散射算子的特征函数这一性质，即 $\hat{\mathcal{L}}(P_l^m e^{im\varphi}) = -l(l+1)P_l^m e^{im\varphi}$，并定义积分

$$\begin{aligned}
\Psi_{\beta,1}^{(l,m)}(w) &= \frac{2}{2l+1}w^l\int_w^\infty du\ u^{1-l}\delta f_\beta^{(l,m)}(u), \quad \Psi_{\beta,2}^{(l,m)}(w) = \frac{2}{2l+1}\frac{1}{w^{l+1}}\int_0^w du\ u^{2+l}\delta f_\beta^{(l,m)}(u),\\
\Psi_{\beta,3}^{(l,m)}(w) &= \frac{2}{2l+1}w^l\int_w^\infty du\ u^{3-l}\delta f_\beta^{(l,m)}(u), \quad \Psi_{\beta,4}^{(l,m)}(w) = \frac{2}{2l+1}\frac{1}{w^{l+1}}\int_0^w du\ u^{4+l}\delta f_\beta^{(l,m)}(u).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

驱动项的投影为

$$\mathcal{D}_\alpha^{(l,m)} = \int d^2\Omega\ e^{-im\varphi}P_l^m(\mu)D_\alpha = \left[d_\alpha^0\delta_{l,0}\delta^{m,0} + \boldsymbol{d}_\alpha^1\cdot\langle l,m|\hat{\boldsymbol{w}}\rangle + \boldsymbol{d}_{\alpha,z}^2\cdot\langle l,m|\left(\hat{\boldsymbol{w}}\hat{\boldsymbol{w}} - \frac{1}{3}\mathbb{I}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\rangle\right]f_\alpha^M, \tag{A.3}$$

驱动力的分量

$$\begin{aligned}
d_\alpha^0 &= \left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},\alpha}^2} - \frac{3}{2}\right)K_\alpha, \quad \boldsymbol{d}_e^1 = w\left(\left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},e}^2} - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\nabla}\ln T_e + \frac{1}{p_e}\left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_e + \boldsymbol{R}_e\right) + 2\hat{\nu}_{ei}\frac{v_{\mathrm{th},e}}{w^3}\Delta\boldsymbol{u}\right),\\
\boldsymbol{d}_{\alpha,z}^2 &= 2\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},\alpha}^2}\boldsymbol{u}_\alpha', \quad \boldsymbol{d}_i^1 = w\left(\left(\frac{w^2}{v_{\mathrm{th},i}^2} - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{\nabla}\ln T_i - \frac{1}{p_i}\boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_i\right),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

其中 $\boldsymbol{u}_\alpha' = \partial_z\boldsymbol{u}_\alpha$ 和

$$\begin{aligned}
\langle l,m|\hat{\boldsymbol{w}}\rangle &= \frac{2\pi}{3}\left[-2\delta^{m,1}(\hat{\boldsymbol{x}} - i\hat{\boldsymbol{y}}) + \delta^{m,-1}(\hat{\boldsymbol{x}} + i\hat{\boldsymbol{y}}) + 2\delta^{m,0}\hat{\boldsymbol{z}}\right]\delta_{l,1},\\
\langle l,m|\left(\hat{\boldsymbol{w}}\hat{\boldsymbol{w}} - \frac{1}{3}\mathbb{I}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\rangle &= \frac{4\pi}{15}\left[-6\delta^{m,1}(\hat{\boldsymbol{x}} - i\hat{\boldsymbol{y}}) + \delta^{m,-1}(\hat{\boldsymbol{x}} + i\hat{\boldsymbol{y}}) + 4\delta^{m,0}\hat{\boldsymbol{z}}\right]\delta_{l,2}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Vlasov 项和磁场项的投影为

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_\alpha^{(l,m)} &= u_{\alpha,z}\partial_z\delta f_\alpha^{(l,m)} + w\partial_z\langle l,m|\mu\delta f_\alpha\rangle - w\boldsymbol{u}_\alpha'\cdot\langle l,m|\mu\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\delta f_\alpha\rangle - \boldsymbol{F}_\alpha\cdot\langle l,m|\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\delta f_\alpha\rangle,\\
\mathcal{B}_\alpha^{(l,m)} &= -\boldsymbol{\omega}_\alpha\cdot\langle l,m|\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\delta f_\alpha\rangle,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

其中向量已简化为

$$\boldsymbol{F}_e = \frac{1}{\rho_e}\left(-\boldsymbol{\nabla}p_e - \boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_e + \boldsymbol{R}_e\right), \quad \boldsymbol{F}_i = \frac{1}{\rho_i}\left(-\boldsymbol{\nabla}p_i - \boldsymbol{\nabla}\cdot\Pi_i\right), \quad \boldsymbol{\omega}_e = -\frac{e}{m_e}\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{\omega}_i = \frac{Ze}{m_i}\boldsymbol{B}. \tag{A.7}$$

以及分量

$$
\begin{aligned}
\langle l,m|\mu\delta f_e\rangle &= \frac{l+1-m}{2l+1}\delta f_e^{(l+1,m)} + \frac{l+m}{2l+1}\delta f_e^{(l-1,m)},\\
\langle l,m|\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\delta f_e\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{x}}+i\hat{\boldsymbol{y}})\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{l,k}^{+}(m)\partial_w\delta f_e^{(k,m+1)} + (-c_{l,k}^{+}(m)+(m+1)d_{l,k}^{+}(m))\frac{1}{w}\delta f_e^{(k,m+1)}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{x}}-i\hat{\boldsymbol{y}})\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{l,k}^{-}(m)\partial_w\delta f_e^{(k,m-1)} + (-c_{l,k}^{-}(m)-(m-1)d_{l,k}^{-}(m))\frac{1}{w}\delta f_e^{(k,m-1)}\right]\\
&\quad+\hat{\boldsymbol{z}}\left[\frac{l+1-m}{2l+1}\frac{1}{w^{l+2}}\partial_w\Big(w^{l+2}\delta f_e^{(l+1,m)}\Big) + \frac{l+m}{2l+1}w^{l-1}\partial_w\Big(\frac{1}{w^{l-1}}\delta f_e^{(l-1,m)}\Big)\right],\\
\langle l,m|\mu\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\delta f_e\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{x}}+i\hat{\boldsymbol{y}})\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{a}_{l,k}^{+}(m)\partial_w\delta f_e^{(k,m+1)} + (-\tilde{c}_{l,k}^{+}(m)+(m+1)\tilde{d}_{l,k}^{+}(m))\frac{1}{w}\delta f_e^{(k,m+1)}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{x}}-i\hat{\boldsymbol{y}})\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{a}_{l,k}^{-}(m)\partial_w\delta f_e^{(k,m-1)} + (-\tilde{c}_{l,k}^{-}(m)-(m-1)\tilde{d}_{l,k}^{-}(m))\frac{1}{w}\delta f_e^{(k,m-1)}\right]\\
&\quad+\hat{\boldsymbol{z}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\tilde{b}_{l,k}(m)\partial_w\delta f_e^{(k,m)} + \tilde{g}_{l,k}(m)\frac{1}{w}\delta f_e^{(k,m)}\right],\\
\langle l,m|\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{w}}\delta f_e\rangle &= \frac{1}{2i}(\hat{\boldsymbol{x}}+i\hat{\boldsymbol{y}})\sum_{k=0}^{\infty}\left[(C_{l,k}^{+}(m)-(m+1)D_{l,k}^{+}(m))\delta f_e^{(k,m+1)}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2i}(\hat{\boldsymbol{x}}-i\hat{\boldsymbol{y}})\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-C_{l,k}^{-}(m)-(m-1)D_{l,k}^{-}(m))\delta f_e^{(k,m-1)}\right]\\
&\quad- im\delta f_e^{(l,m)}\hat{\boldsymbol{z}},
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

其中，矩阵元遵循 Swanekamp 等人相同的定义 [30]，带波浪号的系数表示在 μ 其定义中的被积函数额外乘以一个因子，例如

$$
\begin{aligned}
a_{l,k}^{\pm}(m) &:= \frac{2k+1}{2}\frac{(k-(m\pm1))!}{(k+(m\pm1))!}\int_{-1}^{1}d\mu\ P_l^m(\mu)\sqrt{1-\mu^2}P_k^{m\pm1}(\mu),\\
\tilde{a}_{l,k}^{\pm}(m) &:= \frac{2k+1}{2}\frac{(k-(m\pm1))!}{(k+(m\pm1))!}\int_{-1}^{1}d\mu\ P_l^m(\mu)\mu\sqrt{1-\mu^2}P_k^{m\pm1}(\mu).
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

数据可用性

支持本研究结论的数据可在提出合理请求后向通讯作者获取。

[1] Callen J D 和 Kissick M W 1997 *Plasma Physics and Controlled Fusion* **39**B173 URL https://dx.doi.org/10.1088/0741-3335/39/12B/014[2] Rinderknecht H、Amendt P、Wilks S 和 Collins G 2018*Plasma Physics and Controlled Fusion* **60**[3] Chapman S 1939 *The Mathematical Theory Of NonuniformGases*（剑桥：AtThe University Press）URL http://archive.org/details/dli.ernet.206077 [4] Ferziger J H 和 Kaper H G 1972 *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*（North-Holland）[5] Epperlein E M 和 Short R W *ids B: Plasma Physics* **3** 3092 3098 1991 *Physics of Flu* 0899 – ISSN - 8221 (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pfb/article-pdf/3/11/3092/12317455/3092_1_online.pdf) URL https://doi.org/10.1063/1.859789[6] Nicola¨ı P D、Feugeas J L A 和 Schurtz G P 2006 *Physics of Plasmas* **13** 032701ISSN 1070-664X 网址 https://doi.org/10.1063/1.2179392[7] Del Sorbo D、Feugeas J、Nicola¨ı P、Olazabal-Loum´e M、Dubroca B、Guisset S 和 Touati M 2015 *Physics ofPlasmas* **22** 082706[8] Brodrick J P、Kingham R J、Marinak M M、Patel M V、Chankin A V、Omotani J、Umansky M、Sorbo D D、Dudson B、Parker J T、Kerbel G D、Sherlock M 和 Ridgers C P 2017 *Physics of Plasmas* **24** 092309 ISSN 1070-664X, 1089-7674 arXiv:1704.08963 [物理学] 网址 http://arxiv.org/abs/1704.08963[9] Arran C、Holec M、Sherlock M、Marinak M 和 Ridgers C P 2025 *Physics of Plasmas* **32** 043908 ISSN 1070- 664X 电子预印本：https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0250147/20505612/043908 1 5.0250147.pdf 网址 https://doi.org/10.1063/5.0250147[10]Holec M、Nikl J和 Weber S 2018 *Physicsof Plasmas* **25** 032704 ISSN 1070-664X 电子预印本：https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.5011818/16154743/032704 1 online.pdf 网址 https://doi.org/10.1063/1.5011818[11] Marocchino A、Tzoufras M、Atzeni S、Schiavi A、Nicola¨ı P D、Mallet J、Tikhonchuk V 和 Feugeas J L 2013

Physics of Plasmas **20** 022702 ISSN 1070-664X 网址 https://doi.org/10.1063/1.4789878[12] Sherlock M、Brodrick J P 和 Ridgers C P 2017 *Physicsof Plasmas* **24** 082706 ISSN 1070-664X (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.4986095/15648620/082706_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/1.4986095[13] Lezhnin K V、Totorica S R、Hyder A S、Griff-McMahon J、Adams M B P、Tzeferacos P、Diallo A 和 Fox W 2025 *Physics of Plasmas* **32** 022701 ISSN 1070- 664X 电子预印本: https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0240547/20372614/022701 1 5.0240547 网址 https://doi.org/10.1063/5.0240547[14] Dearling A D 2024 *Transport in laser-produced plasmas* 约克大学博士学位 网址 https://etheses.whiterose.ac.uk/id/eprint/36197/[15] Mitchell N T, Chapman D A, McDevitt C J, Read M P 和 Kagan G 2024 *Plasma Physics and Controlled Fusion* **66**075005 网址 https://dx.doi.org/10.1088/1361-6587/ad4740[16] Mitchell N, Chapman D 和 Kagan G 2025 *Phys. Rev. E*112 L053202 出版商: 美国物理学会 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/jn8x-nfv2[17] Spitzer L 1962 *Physics of Fully Ionized Gases* (纽约: Interscience (第 2 版), 1962 年)[18] Braginskii S I 1965 *Consultants Bureau, New York*, 1965 年, *p.205* [19]Epperlein E M 和 Haines M G 1986 *The Physics of Fluids* **29** 1029 1041 0031 9171 *Preprint* – ISSN - (https://pubs.aip.org/aip/pfl/article-pdf/29/4/1029/12593728/1029_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/1.865901[20] Sadler J D, Walsh C A 和 Li H 2021 *Phys. Rev.* ( ) 网址 *Lett.* **126** 7 075001 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.075001[21]Ji J Y 和 Held E D 2013 *Physics of Plas-mas* **20** 042114 ISSN 1070-664X (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.4801022/12468315/042114_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/1.4801022[22]Helander P 2002 *Collisional transport in magnetizedplasmas* (剑桥: 剑桥大学出版社) ISBN 0521807980[23]Ji J Y 和 Held E D 2008 *Physics of Plas-mas* **15** 102101 ISSN 1070-664X (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.2977983/15956429/102101_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/1.2977983[24]Ji J Y 和 Held E D 2013 *Physics of Plasmas* **20**042114 ISSN 1070-664X 网址 https://doi.org/10.1063/1.4801022[25]Ji J Y 和 Held E D 2015 *Physics of Plas-mas* **22** 062114 ISSN 1070-664X (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.4922755/15855929/062114_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/1.4922755[26] Stacey Jr W M 和 Sigmar D J 1983 *The Physics of Fluids* **28** 2800 2807 0031 9171 – ISSN - 网址 https://doi.org/10.1063/1.865240[27] Brodrick J P, Del Sorbo D 和 Ridgers C P 2023 *Physicsof Plasmas* **30** 054501 ISSN 1070-664X (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/5.0134966/17643054/054501_1_5.0134966.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/5.0134966[28]Chandrasekhar S 1943 *The Astrophysical Journal* **97** 255 262 – 网址 https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1943ApJ....97..255C/abstract[29] DLMF: 美国国家标准与技术研究院数学函数数字图书馆 网址 https://dlmf.nist.gov/[30] Swanekamp S B, Ottinger P F, Adamson P E, Giuliani J L, Petrova T B, Richardson A S 和 Rittersdorf I M 2019 *Physics of Plasmas* **26** 103506ISSN 1070-664X (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.5109430/15614544/103506_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/1.5109430[31] McDevitt C J, Tang X Z, Guo Z 和 Berk H L 2014 *Physicsof Plasmas* **21** ISSN 1070-664X 032708 (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/doi/10.1063/1.4868732/15880219/032708_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/1.4868732[32]Chang J 和 Cooper G 1970 *Journal of Computational Physics* **6** 1 16 0021 9991 – ISSN - 网址https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199917090001X[33] Brodrick J P, Sherlock M, Farmer W A, Joglekar A S, Barrois R, Wengraf J, Bissell J J, Kingham R J, Sorbo D D, Read M P 和 Ridgers C P 2018 *Plasma Physics and Controlled Fusion* **60** 084009 网址 https://dx.doi.org/10.1088/1361-6587/aaca0b[34]Walsh C A, Chittenden J P, McGlinchey K, Niasse N P L 和 Appelbe B D 2017 *Phys. Rev. Lett.* 118(15) 155001 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.155001[35]Kingham R J and Bell A R 2002 *Physical Re-view Letters* **88** 045004 出版商: 美国物理学会 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.045004[36] Ridgers C P, Arran C, Bissell J J 和 Kingham R J 2021 *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences* **379** 20200017ISSN 1364-503X 网址 https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7741009/[37] Sherlock M 和 Bissell J 2020 *Physical Review Letters*124 055001 出版商: 美国物理学会 网址https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.055001[38] Slutz S A 和 Vesey R A 2012 *Physical Review Letters* **108** 025003 出版商: 美国物理学会 网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.025003[39] Yager-Elorriaga D, Gomez M, Ruiz D, Slutz S, Harvey-Thompson A, Jennings C, Knapp P, Schmit P, Weis M, Awe T, Chandler G, Mangan M, Myers C, Fein J, Galloway B, Geissel M, Glinsky M, Hansen S, Harding E, Lamppa D, Lewis W, Rambo P, Robertson G, Savage M, Shipley G, Smith I, Schwarz J, Ampleford D, Beckwith K, Peterson K, Porter J, Rochau G 和 Sinars D 2022 *Nuclear Fusion* **62** 042015 网址 https://dx.doi.org/10.1088/1741-4326/ac2dbe[40] Zhao H, Sheng Z 和 Weng S 2022 *Matter and Radia-tion at Extremes* **7** 045901 ISSN 2468-2047 (*Preprint* https://pubs.aip.org/aip/mre/article-pdf/doi/10.1063/5.0086783/16581955/045901_1_online.pdf) 网址 https://doi.org/10.1063/5.0086783