arXiv:2601.02939v1 [math.DS] 6 Jan 2026

# 论丹·鲁道夫定理：第二部分：可 amenable 群

TOMASZ DOWNAR OWICZ、JEAN-PAUL THOUVENOT 和 BE NJAMIN WEISS

ABSTRACT. 我们证明了 Rudolph 定理关于可数 amenable 群作用的一个类似结果。该结果断言，在 $G$-移位上的熵至少为 $c$ 的那些不变测度中，典型测度具有熵 $c$，且为伯努利测度。我们还讨论了该定理的一个相对版本。$\Lambda^G$, $\sigma$

## 1. INTRODUCTION

在本文第一部分中，第二和第三作者证明了以下定理。Dan Rudolph 于 2003 年 9 月 11 日在马里兰大学的动力学研讨会上陈述了该定理：

**定理 1.1.** 设 $A$ 为一个有限集，令 $X = A^{\mathbb{Z}}$，并以 $S$ 表示移位。对于 $0 < c \leq \log|A|$，以 $\mathcal{M}_c$ 表示熵大于或等于 $c$ 的 $S$-不变测度集合。存在一个稠密的 $G_\delta$ 子集 $C \subset \mathcal{M}_c$，使得对所有 $\mu \in C$，系统 $(X, \mu, S)$ 的熵等于 $c$，且与一个伯努利移位同构。

本文第二部分旨在证明一个类似的结果，其中整数被任意可数可解群 $G$ 所取代。可和群的推广往往是常规性的。然而，本例中确实存在一个难点。例如，将符号序列划分为长块这一对 $\mathbb{Z}$-移位而言简单的任务，在 $G$-移位的情形下会变得复杂得多，并且需要用到铺砌理论。对于 $\mathbb{Z}$-作用，为了证明伯努利测度构成一个 $G_\delta$ 集，我们利用了伯努利过程的刻画：伯努利过程就是那些非常弱伯努利（VWB）的过程。这一概念本质上依赖于这样一个事实：对于以整数为指标的过程，存在“过去”的概念，而且过程熵可以定义为给定过去时现在的条件熵。对于一般的可和群，并不存在与之对应的概念。

为绕过这一问题，我们采用 [9] 中引入的方法，并使用 [11]中提出的伯努利扩张刻画：满足相对 VWB 性质的系统正是伯努利扩张。本质上，这相当于证明整数群情形下 Rudolph 定理的相对版本，然后利用所有遍历可解群作用之间的轨道等价。

本文主要定理的精确表述，即将 Rudolph 定理推广到可数 amenable 群的作用，内容如下：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：37A05、37A35、43A07；次要分类号：37A25、37A15。*Key words and phrases.* 可 amenable 群作用、熵、典型性质、伯努利系统、相对伯努利、非常弱伯努利、轨道等价。第一作者的研究获 NCN（波兰国家科学中心）资助，资助编号 2022/47/B/ST1/02866。

**定理 1.2.** 设 $\Omega = \Lambda^G$，其中 $\Lambda$ 是一个有限字母表，$G$ 是一个无限可数可和群，并令 $\sigma$ 表示 $\Omega$上的 $G$-移位。对于正数 $c \leq \log|\Lambda|$，令 $\mathcal{M}_c$ 表示 $\Omega$ 上所有 *Kolmogorov-Sinai* 熵至少为 $c$的 $\sigma$-不变测度所组成的集合。那么，熵等于 $c$ 的伯努利测度 $\mu$（即使得保测 $G$-系统 $(\Omega, \mu, \sigma)$ 与一个独立同分布的 $G$-过程同构的测度）是 $\mathcal{M}_c$中的稠密 $G_\delta$ 子集。

定理 1.2 直接由第 3 节和第 4 节中证明的定理 3.1 和定理 4.1 得出，后两者分别断言：熵为 $c$ 的伯努利测度在 $\mathcal{M}_c$ 中稠密，并且熵为 $c$ 的伯努利测度构成 $\mathcal{M}_c$ 的一个 $G_\delta$-子集。

证明定理 1.2 所发展的工具几乎无需额外工作，便可用于证明该定理的相对版本。具体而言，这是在第 5 节中完成的；我们将概述以下命题的证明：

定理 *1.3*。设 $\Lambda$ 和 $\Lambda_1$ 为有限字母表，且设 $\Omega = \Lambda^G$ 和 $\Omega_1 = \Lambda_1^G$。在这两个空间上，我们都考虑 $G$-移位 $\sigma$ 的作用。设 $\pi : \Omega \to \Omega_1$ 为一个拓扑因子映射。设 $\mu_1$ 是 $\Omega_1$ 上的一个遍历 $\sigma$-不变测度。对于一个正数 $c \leq \sup\{h(\mu|\Omega_1) : \mu \in \mathcal{M}, \pi^*(\mu) = \mu_1\}$，令 $\mathcal{M}_c^{\mu_1}$ 表示 $\Omega$ 上满足 $\pi^*(\mu) = \mu_1$ 的所有 $\sigma$-不变测度 $\mu$ 的集合，并且其条件熵 $h(\mu|\Omega_1)$ 大于或等于 $c$。相对于 $\mu_1$ 为相对伯努利且满足 $h(\mu|\Omega_1) = c$ 的测度 $\mu$ 构成 $\mathcal{M}_c^{\mu_1}$ 中的一个稠密 $G_\delta$ 子集。

## 2. Preliminaries

设 $G$ 是一个带单位元 $e$的可数群。给定一个有限集 $K \subset G$ 和 $\gamma > 0$，若有限集 $F \subset G$ 满足

$$\frac{|KF \triangle F|}{|F|} < \gamma$$

（$\cdot\triangle\cdot$表示集合的对称差，$|\cdot|$表示集合的基数）。$G$ 中的 Følner序列是指 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ 这一列 $G$的有限子集，使得对每个有限 $K \subset G$ 和任意 $\gamma > 0$，集合 $F_n$ 最终（即对充分大的 $n$）都是（$K, \gamma$）-不变的。$G$ 的可和性等价于 Følner序列的存在。从现在起，我们假设 $G$是可和的，并固定 $G$中的某个 Følner序列 $\{F_n\}_{n\geq 1}$。

设（$X, \mu$）是一个标准概率空间[1]。

**定义 2.1.** 设 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$、$\mathcal{P}' = \{P_1', P_2', \ldots, P_n'\}$ 是$(X, \mu)$ 上的两个可测划分，且具有相同的基数 $n$。令

$$d_1(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \inf_\pi \sum_{i=1}^n \mu(P_i \triangle P'_{\pi(i)}),$$

其中 $\pi$ 遍历 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的所有排列。

设 $\tau$: $G \times X \to X$ 为一个保测作用。当系统 $(X, \mu, \tau)$ 固定时，我们用 $gx$ 代替 $\tau(g, x)$ $(g \in G, x \in X)$，并用 $FA$ 代替 $\{gx : g \in F, x \in A\}$, $(F \subset G, A \subset X)$。若每个$g \in G \setminus \{e\}$ 都满足 $\mu\{x : gx = x\} = 0$，则称该作用是自由的。

[1]按照惯例，我们省略对 σ-代数的标记，但会将其元素称为 *measurable sets*。

设 $\Lambda$ 是一个有限集，称为字母表。在 $\Omega = \Lambda^G$ 上，我们将考虑 $G$-移位 $\sigma: G \times \Omega \to \Omega$ 的作用，其定义为

$$(g\omega)_h = \omega_{hg}, \text{ where } \omega = (\omega_h)_{h\in G} \in \Omega, \text{ and } g \in G$$

（按照之前介绍的约定， $g\omega$ 表示 $\sigma(g, \omega)$。）

对于 $\omega \in \Omega$和一个集合 $K \subset G$，我们用 $\omega|_K$ 表示 $\omega$ 在 $K$上的限制（注意， $\omega$ 是一个从 $G$ 到 $\Lambda$的函数）。如果 $K = \{g\}$ 是单元素集（$g \in G$），我们将写作 $\omega_g$，而不是 $\omega|_{\{g\}}$。

如果 $K$ 是有限的，则 $\omega|_K$ 称为一个块。一般而言， $K$ 上的一个块是一个元素$\alpha \in \Lambda^K$，即一个函数 $\alpha: K \to \Lambda$。我们通常将移位后的块视为相同，也就是说，我们将 $\Lambda^K$ 和 $\Lambda^{Kg}$ （$g \in G$）视为相同的集合。如果一个块 $\alpha \in \Lambda^K$ 出现在 $\omega$ 中，是指对于某个 $g$有 $\omega|_{Kg} = \alpha$。如果 $F \subset G$ 是另一个有限集且 $\beta \in \Lambda^F$ 是一个块，则与 $\beta$ 相关联的 $\Lambda^K$ 上的经验测度通过频率定义：

$$\mathsf{emp}_\beta(\alpha) = \frac{1}{|F|}|\{g \in F : Kg \subset F, \beta|_{Kg} = \alpha\}|, \quad \alpha \in \Lambda^K.$$

我们也可以为元素 $\omega \in \Omega$ 关联经验测度。为此，需要用到固定的 Følner序列 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ in $G$，并令

$$\mathsf{emp}_\omega(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{emp}_{\omega|_{F_n}}(\alpha),$$

前提是该极限存在。

**定义 2.2**。若点 $\omega$ 的经验测度 $\mathsf{emp}_\omega$ 在 $\Lambda^K$ 上对所有有限集 $K \subset G$ 都存在，并且对任意 $K$ 和 $\alpha \in \Lambda^K$，均有：则称点 $\omega$ 是 $\Omega$ 上一个 $\sigma$-不变测度 $\mu$ 的典型 点。

$$\mathsf{emp}_\omega(\alpha) = \mu([\alpha]),$$

其中， $[\alpha]$ 表示与块 $\alpha$, $[\alpha] = \{\omega \in \Omega : \omega|_K = \alpha\}$相对应的柱集 。

根据可和群上的 Lindenstrauss逐点遍历定理 [6, 定理 1.3], ，若选择温和的 Følner序列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ （我们总能做到这一点），则每个遍历测度都存在一个典型点，尤其是对任意伯努利测度也如此。

在下文中，我们稍微滥用一下记号，将 $\mu(\alpha)$ 写作 $\mu([\alpha])$。注意，同样滥用记号时，对每个有限集 $K \subset G$， $\Lambda^K$ 都是 $\Omega$ 的一个既开又闭划分（即其原子既开又闭）。

2.1. **罗赫林引理的类比**。我们将多次使用 [2, 定理 3.6], ，并将其改写为适用于全文所用记号的形式。

**定理 2.3**。设 $\tau$ 在标准概率空间 $(X, \mu)$上有一个自由作用 $G$。对于任意有限集 $K$ 和任意 $\gamma > 0$，存在一个由 $X$的可测子集组成的集合族 $\{B_i : \ 1 \leq i \leq m\}$，以及一个由 $G$的 $(K, \gamma)$-不变子集组成的集合族 $\{S_i : \ 1 \leq i \leq m\}$，其中每个子集都包含 $e$，并且满足 $\{gB_i : \ 1 \leq i \leq m, \ g \in S_i\}$ 构成划分$X$ （除去零测度集）。

上述定理是对已知的、关于$\mathbb{Z}$ 作用（在这种情况下， $m = 2$ 就足够）的 Rokhlin 引理的推广。集合 $S_iB_i$ 被解释为塔（我们有 $m$ 个不相交塔）；对于给定的 $1 \leq i \leq m$，满足 $g \in S_i$ 的集合 $gB_i$ 称为第 $i$个塔的层（有 $|S_i|$ 个不相交的层）。集合 $B_i$ （它是一个层，因为 $e \in S_i$）称为第 $i$个塔的基底。在此语境下，通常的

塔高的概念并不充分，因此我们将集合 $S_i$ 称为第 $i$个塔的形状。

**2.2. 铺砌因子。** 除了集合 $B_i$ with $1 \le i \le m$ 外，我们还定义$B_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i$。通过因子映射 $\psi\colon X \to \Omega$，可以在字母表 $\{0,1,2,\dots,m\}$ 上构造系统 $(X,\mu,\tau)$ 的一个自然符号因子，其中 $\Omega = \{0,1,2,\dots,m\}^G$，由以下规则定义

$$\psi(x)_g = i \iff gx \in B_i, \quad 0 \le i \le m.$$

换言之， $\psi(x)$ 是 $x$ 的 $\mathcal{P}$-轨道，其中 $\mathcal{P}$ 是由集合 $B_i, i \in \{0,1,\dots,m\}$ 对 $X$ 作出的划分。 $\mu$, $\psi^*(\mu)$ 的推前是 $\Omega$ 上的一个移位不变测度¯，记作 $\nu$。定理 2.3 的划分条件蕴含¯我们所称的因子 $(\Omega, \nu, \sigma)$ 关于形状$S_1, S_2, \dots, S_m$具有铺砌性质：

(1) ¯对于几乎所有的 $\bar{\omega} \in \Omega$（相对于 $\nu$），族 $\{S_i g\colon 1 \le i \le m, \bar{\omega}_g = i\}$ 是 $G$的一个划分。

此划分将 $G$ 分成若干“瓦片”，每块都是有限多个¯形状 $S_i$之一的移位副本。符号保测系统 $(\Omega, \nu, \sigma)$ 称为 $(X,\mu,\tau)$ 的一个铺砌因子。满足 (1) 的同一符号系统，单独来看时称为铺砌系统，其元素记为 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_g)_{g \in G}$。

¯反过来，任何将 $(X,\mu,\tau)$ 映到形状为 $S_1, S_2, \dots, S_m$ 的铺砌系统 $(\Omega, \nu, \sigma)$ 的因子映射 $\psi\colon X \to \Omega$，都确定了定理 2.3 中所指定的塔。具体而言，这些塔的基底为集合 $B_i = \psi^{-1}([i]) = \{x\colon \psi(x)_e = i\}$ $(1 \le i \le m)$，而塔的形状则分别为集合 $S_i$。定理 2.3 的划分条件直接由铺砌性质 (1) 得出。

当我们不考虑一般系统 $(X,\mu,\tau)$，而考虑符号系统 $G$-移位 $(\Omega, \mu, \sigma)$，其中 $\Omega = \Lambda^G$ 且 $\mu$ 是自由的，并选取定义在铺砌因子 $\psi : \Omega \to \Omega$ 的定义域内的 $\omega \in \Omega$ 时，块 $\omega|_{S_i g}$（其中 $g$ 满足 $\psi(\omega)_g = i (1 \le i \le m)$）称为 $\omega$ 的瓦片。集合 $S_i$ 称为该瓦片的形状，而 $g$是其中心。几乎每个元素 $\omega \in \Omega$ 都是其瓦片的拼接[2]。

令 $\mathcal{M}$ 表示 $\Omega$ 上所有 $\sigma$-不变测度的集合。下文中，我们将使用一个与弱*拓扑相容的 $\mathcal{M}$ 上的凸度量。给定这样的度量和一个 $\varepsilon > 0$，存在一个有限集 $K$ 和 $\delta > 0$，使得如果两个测度在每个块 $\alpha \in \Lambda^K$ 上的取值都相差不超过 $\delta$，那么这两个测度彼此 $\varepsilon$-接近。 $\Lambda^K$ 中的块将称为测试块。此外，如果 $F$ 是一个较大的有限集，我们称块 $\beta \in \Lambda^F$ 与测度 $\mu$ 的距离为 $\varepsilon$，若其在测试块上的经验测度 $\mathrm{emp}_\beta$ 与 $\mu$所赋的值相差不超过 $\delta$。

## 3. Bernoulli measures are dense in $\mathcal{M}_c$

我们假定读者熟悉测度论熵和条件熵的概念。我们将使用以下记号。

[2]形式上，定义在互不相交的定义域 $K_\kappa \subset G$ 上的块 $\alpha_\kappa$ 的拼接（$\kappa$ 遍历一个有限集或可数集）是定义在并集 $\bigcup_\kappa K_\kappa$ 上的函数，其图像是这些块 $\alpha_\kappa$ 的图像的并集。

• 若概率空间 ( $\tau$ (X， $\mu$) 上的作用X， $\mu$， $\tau$) 固定，则该系统的柯尔莫哥洛夫–辛奈熵简记为 $h(\mu)$。这一记号在具有众多不变测度的拓扑系统中尤其方便。于是我们可以讨论不变测度上的熵函数 $h$ 。众所周知，对于移位系统（Ω $\sigma$），熵函数在 $\mathcal{M}$ 上是上半连续的。

• 如果 $\mathcal{P}$ 是 $X$ 的有限可测划分，那么 $\mathcal{P}$的香农熵记为 $H_\mu(\mathcal{P})$，而由 $\mathcal{P}$生成的过程的熵记为 $h_\mu(\mathcal{P})$。

• 最后，如果 $\pi : X \mapsto X'$ 是两个保测 $G$-系统 $(X, \mu, \tau)$ 与 $(X', \mu', \tau')$ 之间的因子映射（注意此时 $\mu' = \pi^*(\mu)$），那么 $h(\mu|X')$ 表示相对于从 $X'$ 提升的σ-代数而言， $\mu$ 相对于 $\pi$的条件熵。

从现在起，我们将主要关注 $G$-移位 (Ω $\sigma$) 以及 Ω 上所有 $\sigma$-不变测度的集合 $\mathcal{M}$ 。对于一个数 $0 < c \leq \log|\Lambda|$，令 $\mathcal{M}_c = \{\mu \in \mathcal{M} : h(\mu) \geq c\}$。由于熵函数是上半连续的， $\mathcal{M}_c$ 是 $\mathcal{M}$的闭子集，因此它是一个贝尔空间。

若测度 $\mu \in \mathcal{M}$ 是伯努利测度，则保测系统 (Ω $\mu$， $\sigma$) 同构于一个独立同分布过程。等价地，在测度空间 (Ω $\mu$) 上存在一个有限可测划分 $\mathcal{P}$，它是生成的（即，划分 $g\mathcal{P}$ 与$g \in G$ 共同生成 (Ω $\mu$) 上的 σ-代数），并且当 $g$ 遍历 $G$时，(Ω $\mu$) 的划分$g\mathcal{P}$ 彼此独立。

本节的目标是证明以下事实：

**定理 3.1**。 熵为 $c$ 的伯努利测度集合在 $\mathcal{M}_c$中稠密。

证明分为四个引理、一个构造和最后的总结部分。

**引理 3.2**。 对于每个有限集 $K \subset G$及任意 $\gamma > 0$，存在一个铺砌¯系统 (Ω $\nu, \sigma$)，其具有 $(K, \gamma)$-不变形状，熵小于 $c$，并且是伯努利的。

证明。 令 $\lambda_p$为 $\Omega_2 = \{0, 1\}^G$ 上的 $(p, 1-p)$-伯努利测度。若 $p$足够小，则系统 ($\Omega_2, \lambda_p, \sigma$) 的熵 $h(\lambda_p)$ 小于 $c$。注意， $\lambda_p$是遍历且自由的。由定理 2.3，系统 ( $\Omega_2, \lambda_p, \sigma$) 存在一个铺砌因子¯(Ω $\nu, \sigma$)，其形状为 $(K, \gamma)$-不变形状。由于因子映射不会增加熵，且伯努利系统的任何因子都是伯努利系统[3]，，该铺砌系统满足断言。□

¯构造。设 (Ω $\nu, \sigma$) 是一个动力铺砌，其形状为 $S_1, S_2, \ldots, S_m$，并设 $\Omega = \Lambda^G$，其中 $\Lambda$ 是一个有限字母表。我们称 Ω×Ω 上的 ($\sigma \times \sigma$)-不变¯ ¯测度 $\eta$是 $\nu$的一个提升，当且仅当其在第一坐标 Ω 上的边缘分布等于 $\nu$。¯ ¯显然，对于 $\nu$的每个提升 $\eta$，映射 $\pi_1 : \Omega \times \Omega \to \Omega$，由 $\pi_1(\bar{\omega}, \omega) = \bar{\omega}$ ¯ ¯给出，是 (Ω $\times$Ω $\eta, \sigma \times \sigma$) 的一个铺砌因子，因此它确定了定理 2.3 中的集合 $B_i \subset \Omega \times \Omega$（对 $1 \leq i \leq m$ 而言）以及塔 $S_i B_i$ 。对于每个 $1 \leq i \leq m$，令 $D_i$表示由 $\eta$ 在 $\Lambda^{S_i}$ 上给出的、以 $B_i$为条件的分布，即，

$$D_i(\alpha) = \frac{\eta(B_i \cap [\alpha])}{\eta(B_i)},$$

[3]此结果以比可数可解群更一般的形式出现在 [8, 定理 4，第 127] 页。关于可数 amenable 群的另一种处理方式，见 [3]。

其中 $\alpha \in \Lambda^{S_i}$ 且 $[\alpha] = \{(\bar{\omega}, \omega) \in \bar{\Omega} \times \Omega : \omega|_{S_i} = \alpha\}$。给定 $\alpha \in \Lambda^{S_i}$，$D_i(\alpha)$ 的值可解释为条件概率：每当 $(\bar{\omega}, \omega) \in B_i$（此时 $(\bar{\omega}, \omega)|_{S_i}$ 是 $(\bar{\omega}, \omega)$ 的一个铺块），该铺块在第二坐标上的投影，即 $\omega|_{S_i}$，与块 $\alpha$相匹配。接下来，令 $\bar{\eta}$ 为 $\nu$ 的一个提升，它具有由 $\eta$诱导的相同条件分布 $D_i$，但另外满足以下性质：对于任意固定的 $\bar{\omega} \in \Omega$，$(\bar{\omega}, \omega)^-$ 的各个铺块在第二坐标上的块 $\alpha$ 彼此独立地出现。具体而言，令 $\{\bar{\eta}_{\bar{\omega}} : \bar{\omega} \in \Omega\}$ 表示关于 $\nu$ 的 $\bar{\eta}$ 的解体（注意，对于 $\nu$-几乎所有的 $\bar{\omega} \in \Omega$，$\bar{\eta}_{\bar{\omega}}$ 都是 $\Omega$ 上的一个$^-$测度）。给定 $\bar{\omega} \in \Omega$ 和 $1 \le i \le m$，令

$$G_{\bar{\omega},i} = \{g \in G : g\bar{\omega} \in B_i\},$$

并令 $G_{\bar{\omega}} = \bigcup_{i=1}^{m} G_{\bar{\omega},\, i}$。那么，对于 $\nu$-几乎所有的 $\bar{\omega}$，集合

$$\{\omega : \omega|_{S_i g} = \alpha\},$$

其中 $\alpha \in \Lambda^{S_i}$ 和 $i$ 满足 $g \in G_{\bar{\omega},\, i}$，对于所有 $g \in G_{\bar{\omega}}$ 都是 $\bar{\eta}_{\bar{\omega}}$-独立的。

**引理 3.3**。测度 $\bar{\eta}$ 在诱导相同条件分布 $D_i$ 的 $\nu$ 的所有提升中具有最大熵。

证明。只需证明 $h(\bar{\eta}) \ge h(\eta)$，其中 $\eta$ 和 $\bar{\eta}$ 在$^-$构造中描述。由于 $h(\eta) = h(\nu) + h(\eta|\Omega)$，并且

$$h(\eta|\bar{\Omega}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|F_n|} \int H_{\eta_{\bar{\omega}}}(\Lambda^{F_n})\, d\nu(\bar{\omega}),$$

其中 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是我们在 $G$中的固定 Følner序列（见 [13]），因此只需证明：对于 $\nu$-几乎所有 $\bar{\omega} \in \Omega$，任意 $\delta > 0$ 以及足够大的 $n \in \mathbb{N}$，都有$^-$

$$\tfrac{1}{|F_n|} H_{\bar{\eta}_{\bar{\omega}}}(\Lambda^{F_n}) \ge \tfrac{1}{|F_n|} H_{\eta_{\bar{\omega}}}(\Lambda^{F_n}) - \delta. \tag{2}$$

$^-$固定一个 $\bar{\omega} \in \Omega$和一个足够大的 $n \in \mathbb{N}$。我们可以将 $F_n$ 分解为 $\bar{\omega}$中若干完整铺块的并，即形如 $S_i g$的集合，其中$g \in G_{\bar{\omega},\, i}$ 和 $S_i g \subset F_n$，以及一个余项 $R$。于是，

$$H_{\eta_{\bar{\omega}}}(\Lambda^{F_n}) = H_{\eta_{\bar{\omega}}}\Big(\Lambda^R \vee \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{\{g\in G_{\bar{\omega},i}:\, S_i g \subset F_n\}} \Lambda^{S_i g}\Big) \le H_{\eta_{\bar{\omega}}}(\Lambda^R) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\{g\in G_{\bar{\omega},i}:\, S_i g\subset F_n\}} H(D_i). \tag{3}$$

对 $\bar{\eta}$也有相同的公式，只不过由于瓦片之间的条件独立性，不等式变成了等式：

$$H_{\bar{\eta}_{\bar{\omega}}}(\Lambda^{F_n}) = H_{\bar{\eta}_{\bar{\omega}}}(\Lambda^R) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\{g\in G_{\bar{\omega},i}:\, S_i g\subset F_n\}} H(D_i). \tag{4}$$

由于 $n$ 很大，我们可以假设 $|R|$ 是 $|F_n|$的一小部分，从而$H_{\eta_{\bar{\omega}}}(\Lambda^R) \le |R| \log |\Lambda| < |F_n|\delta$。将（3）和（4）并列起来，即可得到所需的不等式（2）。□

$^-$**引理 3.4**。如果系统 $(\Omega\ \nu, \sigma)$ 是伯努利系统，那么上面构造的系统 $(\Omega \times \Omega\ \bar{\eta}, \sigma \times \sigma)$也是伯努利系统。

证明。让我们构造一个新的巨大（但有限的）字母表，即 $\Delta = \prod_{i=1}^{m} \Lambda^{S_i}$。根据定义，$\Delta$ 中的每个符号都是由块组成的 $m$-元组。在 $\Delta$上，考虑乘积分布$D = \prod_{i=1}^{m} D_i$ ，并令 $\tilde{\lambda}$ 表示 $\tilde{\Omega} = \Delta^G$上的伯努利测度 $D^G$ 。显然，$\bar{\tilde{}}$直积 $(\Omega \times \Omega\ \nu \times \lambda, \sigma \times \sigma)$ 是一个伯努利系统。我们将证明$\bar{\tilde{}}(\Omega \times \Omega\ \bar{\eta}, \sigma \times \sigma)$ 是 $(\Omega \times \Omega\ \nu \times \lambda, \sigma \times \sigma)$ 的一个因子。由于伯努利$\bar{\tilde{}}$系统的任何因子都是伯努利系统，这就完成了证明。设因子映射 $\theta : \Omega \times \Omega \to \Omega \times \Omega$ 给定如下：

$$\theta(\bar{\omega}, \tilde{\omega}) = (\bar{\omega}, \omega),$$

其中，$\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ 和 $\omega \in \Omega$ 定义为 $\omega|_{S_i g} = \alpha \in \Lambda^{S_i}$，其中 $S_i g$ 是 $\bar{\omega}$ 的一个铺块，且$\alpha$ 在符号（$m$元组的块） $\tilde{\omega}_g$中作为第 $i$个坐标出现。验证$\tilde{}\ \theta$ 是一个将 $\nu \times \lambda$ 映射到 $\bar{\eta}$ 的因子映射，这一点很直接。□

**引理 3.5**。设 $\mu$ 是定义在$\Omega = \Lambda^G$ 上的任意自由遍历移位不变测度，其熵为 $h(\mu) > 0$。对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及任意 $c \in (0, h(\mu)]$ ，存在一个测度论因子映射 $\phi : \Omega \to \Omega$ ，使得 $\phi^*(\mu)$ 与 $\mu$ 的距离小于 $3\varepsilon$，且 $h(\phi^*(\mu)) = c$。

证明。我们先为系统 $(\Omega\ \mu, \sigma)$ 选取一个熵小于 $c$ 的自由因子 $(X, \mu', \tau)$。[4] 根据定理 2.3，系统 $(X, \mu', \tau)$ 可分解为一族不相交塔，其底集为 $B_1, B_2, \ldots, B_m$，且具有 $(K, \gamma)$-不变形状 $S_1, S_2, \ldots, S_m$（参数 $K$ 和 $\gamma$ 稍后指定）。这些塔可以提升为原系统 $(\Omega\ \mu, \sigma)$ 的塔。从现在起，我们将 $B_1, B_2, \ldots, B_m$ 视为 $\Omega$ 的子集。这样做的收获是，与这些塔相关联的铺砌系统的熵小于 $c$。由于$\mu$ 是自由的，因此它是无原子的；于是，对每个 $1 \le i \le m$，都存在一族以 $t \in [0, 1]$ 为指标的可测子集 $B_i^{(t)} \subset B_i$，使得

(1) $B_i^{(1)} = B_i$, $B_i^{(0)} \subset B_i = \varnothing$,
(2) $t < t' \implies B_i^{(t)} \subset B_i^{(t')}$,
(3) $\mu(B_i^{(t)}) = t\mu(B_i)$.

由于 $\mu$ 是遍历的，通过适当选择 $K$ 和 $\gamma$，我们可以保证，对于每个 $1 \le i \le m$，都存在一个块 $\alpha_i \in \Lambda^{S_i}$，其经验测度与 $\mu$相差不超过 $\varepsilon$。[5] 对于每个 $t \in [0, 1]$，我们令 $\phi_t : \Omega \to \Omega$ 为因子映射，它几乎处处由以下局部规则定义：如果 $g^{-1}\omega \in B_i$ ，那么我们令

$$\phi_t(\omega)|_{S_i g} = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } g^{-1}\omega \in B_i^{(t)}, \\ \omega|_{S_i g} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在下面的步骤 (a)-(c) 中，我们将证明 $\phi_t^*(\mu)$与 $\mu$相差不超过 $3\varepsilon$。

(a) 令 $\omega \in \Omega$ 对 $\mu$ 具有典型性。其形状是 $(K, \gamma)$-不变的，因此，在 $\omega$ 中与多个铺块相交的测试块出现次数，对该块在 $\omega$ 中总频率的贡献小于 $\delta$。由此， $x$ 的 与铺块相关联的平均经验测度（通过对 $x$的所有铺块上的经验测度取平均而得到）与 $\mu$ 相差不超过 $\varepsilon$。

---

[4]这一因子的存在性在 [8] 第 3 页中虽有陈述，但未给出证明（可从该论文推导得出）。一个明确的版本见 [3, 定理 54]。[5]这可由平均遍历定理的标准论证得出，参见 [8, 定理 3，第 52]页。[6]平均过程取决于 Følner序列，但我们已将其与群 $G$一并固定。

(b) 映射 $\phi_t$ 将 $\omega$ 的一些“随机”铺块替换为与$\mu$相差不超过 $\varepsilon$ 的铺块，因此，与 $\phi_t$ 的铺块相关联的平均经验测度（$\omega$）仍与 $\mu$ 相差不超过$2\varepsilon$。[7](c) 显然， $\phi_t$（$x$）对 $\phi_t^*$（$\mu$）具有典型性。使用与 (a) 中相同的论证，与 $\phi_t$（$x$）的铺块相关联的平均经验测度与 $\phi_t^*$（$\mu$）相差不超过 $\varepsilon$。

现在，将 (b) 与 (c) 复合即可得到 $\phi_t^*(\mu)$ 与 $\mu$ 之间的 $3\varepsilon$-接近性。

接下来，我们断言，当 $t$ 从 0 取到 1 时， $\phi_t^*(\mu)$ 的熵从 $h(\mu)$ 连续变化到一个小于 $c$ 的数。对于每个 $t$，令 $\mathcal{P}_t = \phi_t^{-1}(\Lambda)$，其中 $\Lambda$ 被视为 Ω 的划分。对于 $t < t'$，划分 $\mathcal{P}_t$ 和 $\mathcal{P}_{t'}$ 在集合（的一个子集）上不同，

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B_i^{(t')} \setminus B_i^{(t)}),$$

该集合的测度易见等于 $t' - t$。这意味着映射 $t \mapsto \mathcal{P}_t$ 关于具有相同基数的划分的 $d_1$-距离是连续的（见定义 2.1）。由于 $\mathcal{P}_t$ 是 $\phi_t^*(\mu)$ 的一个生成元，我们有 $h(\phi_t^*(\mu)) = h_\mu(\mathcal{P}_t)$。众所周知，划分 $h_\mu(\cdot)$ 的动力系统熵在配备 $d_1$-距离的固定有限基数划分空间上是连续的。由此我们得出， $h(\phi_t^*(\mu))$ 是 $t$ 的连续函数。由于 $\mathcal{P}_0 = \Lambda$，我们有 $h(\phi_0^*(\mu)) = h\,\mu \geq c$。另一方面，划分 $\mathcal{P}_1$ 关于与这些塔相关联的铺砌因子是可测的（该铺砌因子是 $(X, \mu', T)$ 的因子），因此 $h(\phi_1^*(\mu)) = h_\mu(\mathcal{P}_1) \leq h(\mu') < c$。现在可以调用介值定理，从而得到存在某个 $t_0 \in [0, 1]$，使得 $h(\phi_{t_0}^*(\mu)) = c$。映射 $\phi = \phi_{t_0}$ 满足该引理的断言。□

定理 *3.1* 的证明。取 $\mu \in \mathcal{M}_c$ 和 $\varepsilon > 0$。只要我们能在 $\Lambda^G$上构造一个与 $\mu$ $4\epsilon$接近、且熵等于 $c$的伯努利测度，证明便完成了。

¯设 $(\Omega\ \nu, \sigma)$ 是一个动力铺砌，其不变形状 $S_1, S_2, \ldots, S_m$关于 $(K, \gamma)$ 不变，并且该系统是伯努利系统（参见引理 3.2；这次甚至不要求熵较小）。对每个形状 $1 \leq i \leq m$，令 $D_{\mu,i}$ 表示 $\mu$ 在$\Lambda^{S_i}$上的分布。令 $(\bar{\Omega} \times \Omega\ \bar{\eta}_\mu, \sigma \times \sigma)$ 为按照构造生成的系统。根据引理 3.4，该系统是伯努利系统；根据引理 3.3， $\bar{\eta}_\mu$ 在所有满足以下条件的 $\nu$ 提升中具有最大熵：对于每个 $1 \leq i \leq m$，在 $B_i$ 条件下 $\Lambda^{S_i}$ 上的分布等于$D_{\mu,i}$。特别地， $\bar{\eta}_\mu$ 满足

$$h(\bar{\eta}_\mu) \geq h(\nu \times \mu) = h(\nu) + h(\mu).$$

设（$\bar{\omega}$， $\omega$）是 $\bar{\eta}$ 的典型点。对（$\bar{\omega}$， $\omega$）的瓦片取平均所得的测试块上的经验测度，与任何对于 $\nu \times \mu$ 典型的元素所对应的经验测度相同，因为它只取决于 $\nu$ 以及分布 $D_{\mu,\ i}$。由于这些形状是（$K$， $\gamma$）-不变的， $\bar{\eta}_\mu^{(2)}$在第二坐标 Ω 上的投影 $\bar{\eta}_\mu$ 与 $\varepsilon$-接近 $\mu$（这可由此前步骤 (a) 中所用的同样论证得到）。我们还得到

$$h(\bar{\eta}_\mu^{(2)}) \geq h(\bar{\eta}_\mu) - h(\nu) \geq h(\mu) \geq c.$$

[7]可以将这种平均视为函数 $d$（表示到 $\mu$的距离）在瓦片上的概率积分。我们知道，积分至多为 $\varepsilon$。映射 $\phi_t$ 对应于将函数 $d$ 在某个子集上替换为函数 $c \leq \varepsilon$。显然，新函数的积分不超过 $d$ 与 $c$的积分之和，而该和至多为 $2\varepsilon$。

注意， $\bar{\eta}_\mu^{(2)}$作为 $\bar{\eta}_\mu$ 的一个因子，是伯努利的（因而是自由的）。将引理 3.5 应用于 $\bar{\eta}_\mu^{(2)}$，存在一个在 $\bar{\eta}_\mu^{(2)}$-几乎处处有定义的因子映射 $\phi:\ \Omega \to \Omega$，使得 $\phi^*(\bar{\eta}_\mu^{(2)})$ 与 $3\varepsilon$- 接近 $\bar{\eta}_\mu^{(2)}$（因而与 $4\varepsilon$- 接近 $\mu$），且其熵等于 $c$。作为伯努利测度的一个因子， $\phi^*(\bar{\eta}_\mu^{(2)})$ 是伯努利的，因此满足证明开头所规定的全部性质。□

## 4. Bernoulli measures form a $G_\delta$-set

由定理 3.1，熵为 $c$ 的伯努利测度在 $\mathcal{M}_c$ 中稠密。本节将证明，同一集合是 $G_\delta$ 类型的。

**定理 4.1.** 熵为 $c$ 的伯努利测度在 $\mathcal{M}_c$ 中构成一个 $G_\delta$-集。

这个定理的证明思路是转而考虑一个具有相同轨道的 $\mathbb{Z}$-作用（即由单个变换生成的作用），并使用针对 $\mathbb{Z}$-作用已确立的技术。

令 $(X,\ \lambda,\ T)$ 为一个辅助性的符号系统伯努利 $\mathbb{Z}$-作用（例如，两个符号的 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-独立同分布过程）。存在一个伯努利 $G$-作用 $\tau$ on $(X,\ \lambda)$，其轨道与 $(X,\ \lambda,\ T)$ 相同（使用 [7, 定理 6] 和 Dye 定理 [4]）。令$x \mapsto g_x$ 为一个（可测）映射，它将对 $\lambda$-几乎处处的 $x \in X$ 关联到一个元素 $g_x \in G$，使得 $Tx = g_x x$。那么，对于 $\nu$-几乎处处的 $x \in X$，映射$\vartheta_x:\ \mathbb{N} \to G$，定义为

$$\vartheta_x(n) = \begin{cases} g_{T^n x} g_{T^{n-1}x} \cdots g_{Tx} g_x, & n \geq 1, \\ e, & n = 0, \\ g^{-1}_{T^{-n}x} g^{-1}_{T^{-n+1}x} \cdots g^{-1}_{T^{-1}x}, & n \leq -1, \end{cases}$$

是一个双射，并且对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $T^n x = \vartheta_x(n)x$。令 $\mu$ 为 $\Omega = \Lambda^G$ 上的一个测度，在 $G$-移位 $\sigma$ 下保持不变，并考虑 $G$-移位 $(\Omega\ \mu,\ \sigma)$ 与伯努利 $G$-作用 $(X,\ \lambda,\ \tau)$ 的直积，

$$(X \times \Omega, \lambda \times \mu, \tau \times \sigma).$$

在 $X \times\Omega$ 上定义斜积变换 $T$：

$$\bar{T}(x,\omega) = (T(x), g_x(\omega)) = g_x(x,\omega). \tag{5}$$

由于 $\vartheta_x$ 几乎处处是 $\nu$ 的双射，系统 $(X \times \Omega\ \lambda \times \mu,\ \tau \times \sigma)$ 与$\bar{}$$(X \times \Omega\ \lambda \times \mu,\ T)$ 轨道等价（具有相同的轨道）。

回顾一下，若斜积与基底和一个伯努利系统的直积同构，且该同构保持基底因子，则称该斜积相对于基底是相对伯努利的。这一定义适用于任何能够开展合理遍历理论的群作用，尤其适用于可数 amenable 群。

为简洁起见，从现在起我们将 $\lambda \times \mu$ 记作 $\bar{\mu}$。

**引理 4.2**。在 $G$-移位 $\sigma$ 的作用下，测度 $\mu \in \mathcal{M}$ 是伯努利测度，当且仅当在由 $T$ 生成的 $\mathbb{Z}$ 作用下，$\bar{\mu}$ 相对于 $\lambda$ 是伯努利测度。

证明。显然，如果 $\mu$ 在 $\sigma$ 下是伯努利的，那么 $\bar{\mu}$ 在$\tau \times \sigma$下相对于 $\lambda$ 是伯努利的。由于轨道等价保持相对伯努利这一性质（见 [1, 引理 5.2]），测度 $\bar{\mu}$ 在由 $T$生成的 $\mathbb{Z}$-$\bar{}$作用下也相对于 $\lambda$ 是伯努利的。反之，如果 $\bar{\mu}$ 在由 $T$ 生成的 $\mathbb{Z}$作用下相对于 $\lambda$ 是伯努利的，那么 $\bar{\mu}$ 在 $\tau \times \sigma$下相对于 $\lambda$ 是伯努利的。这意味着该

系统 $(X\times\Omega,\ \bar{\mu},\ \tau\times\sigma)$ 同构于一个直积 $(X\times Y,\ \lambda\times\eta,\ \tau\times\pi)$，其中 $(Y,\ \eta,\ \pi)$ 是某个伯努利 $G$-系统[8]。这意味着系统 $(X\times\Omega,\ \bar{\mu},\ \tau\times\sigma)$ 是伯努利的（因为它同构于两个伯努利系统的直积），因此 $(X,\ \mu,\ \sigma)$ 作为伯努利系统的非平凡因子，也是伯努利的。证明完毕。□

我们的目标是证明，熵为 $c$ 的伯努利测度构成一个 $G_\delta$-集。根据引理 4.2，只需证明满足以下条件的测度集合 $\mu$ 构成一个 $G_\delta$-集：其熵为 $c$，并且 $\bar{\mu}$，视为一个 $T$-不变测度时，相对于 $\lambda$ 是伯努利的。这样一来，我们便可以完全专注于由斜积变换 $T$ 给出的 $\mathbb{Z}$-作用。我们的主要工具是相对极弱伯努利（VWB）性质，以及划分的条件 $\varepsilon$-独立性。我们将采用一种由 Dan Rudolph 发明的技巧，该技巧已被用于例如 [1, 5, 12]。我们将更具体地遵循 [12]，因为其中对论证的描述最为详尽。

由于 $(X,\ \lambda,\ T)$ 是符号系统，因此它有一个有限闭开生成划分 $\mathcal{P}$。此外，$\Lambda$ 视为 $\Omega$ 的一个划分时，是既开又闭的。

**引理 4.3**。划分 $\mathcal{R}=\mathcal{P}\times\Lambda$ 在 $(X\times\Omega,\ \bar{\mu},T)$ 中既开又闭且生成，对任意 $\mu\in\mathcal{M}$ 均成立。

证明。显然，$\mathcal{R}$ 是既开又闭的。我们需要证明，除去满足 $x\neq x'$ 且其轨道无法由 $\mathcal{P}$ 区分的点对（对于任意 $\mu$，这类点对的 $\bar{\mu}$-测度为零）之外，$\mathcal{R}$ 能区分 $(x,\omega)\neq(x',\omega')$ 的 $T$-轨道。如果 $x,x'$ 的轨道能由 $\mathcal{P}$ 区分，我们便得证。剩下只需考虑情形 $x=x'$。于是 $\omega\neq\omega'$，而双射 $\vartheta_x$ 与 $\vartheta_{x'}$ 重合。存在 $g\in G$ 使得 $\omega_g\neq\omega'_g$。令 $n=\vartheta_x^{-1}(g)$。那么，$\bar{T}^n(x,\omega)$ 和 $\bar{T}^n(x,\omega')$ 的 $\Omega$ 分量在 $e$ 处具有不同的符号，即属于划分 $\Lambda$ 中的不同元素。□

根据 [11]，$\bar{\mu}$ 相对于 $\lambda$（在 $T$ 的作用下）是伯努利的，当且仅当划分 $\mathcal{R}$ 相对于 $\mathcal{P}$ 具有 VWB 性质。此判据仅在 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{P}$ 分别是相应测度的生成划分时才适用，因此引理 4.3 至关重要。相对 VWB 性质的定义取决于块上概率分布之间的 $\bar{d}$-距离：

**定义4.4**。对于两个块 $\alpha、\ \beta\in\Lambda^n、\ n\in\mathbb{N}、\ \alpha=(\alpha_i)_{1\le i\le n}、\ \beta=(\beta_i)_{1\le i\le n}$，汉明距离 定义为

$$\bar{d}_n(\alpha,\beta)=\tfrac{1}{n}|\{1\le i\le n:\alpha_i\neq\beta_i\}|.$$

对于 $\Lambda^n$ 上的两个概率分布 $P、\ P'$，令

$$\bar{d}_n(P,P')=\inf_{\xi}\int\bar{d}_n(\alpha,\beta)\,d\xi(\alpha,\beta),$$

其中 $\xi$ 遍历所有耦合 $P\vee P'$，也就是说，遍历所有满足相应边缘分布分别为 $P$ 和 $P'$ 的 $\Lambda^n\times\Lambda^n$ 上的概率测度。

在下面的定义中，对于 $n_1,n_2\in\mathbb{Z},\ n_1<n_2$，我们将把划分的 $\bigvee\bigvee_{i=n_1}^{n_2}\bar{T}^{-i}\mathcal{R}$ 简记为 $\mathcal{R}^{[n_1,n_2]}$（对划分 $\mathcal{P}$ 也采用类似约定）。

[8]一般而言，仅凭 $(X\times\Omega\ \lambda\times\mu,\tau\times\sigma)$ 与 $(X\times Y,\lambda\times\eta,\tau\times\pi)$ 同构，并不能推出 $(\Omega\ \mu,\sigma)$ 与 $(Y,\eta,\pi)$ 同构。然而，在这个特定情形下确实可以推出，这可由证明的其余部分以及可和群的奥恩斯坦同构定理得出（见 [8]）。

**定义 4.5.** 划分 $\mathcal{R}$ 相对于 $\mathcal{P}$ 是非常弱伯努利的（在扭斜¯乘积系统 $(X \times \Omega\ \bar{\mu}, T)$）当且仅当，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在自然数 $N$和 $k_0$，使得对于所有 $k \geq k_0$，都存在一个族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}^{[-k,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k,k]}$，满足

$$\bar{\mu}(\bigcup \mathcal{G}) > 1 - \varepsilon, \tag{6}$$

$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|A \cap B, \mathcal{R}^{[0,N-1]}|B) < \varepsilon, \tag{7}$$
$$whenever\ A \in \mathcal{R}^{[-k,-1]},\ B \in \mathcal{P}^{[-k,k]},\ A \cap B \in \mathcal{G},$$

其中 $\mathcal{R}^{[0,N-1]}|E$ 表示相对于归一化测度 $\bar{\mu}$、限制在正测度集合 $E \subset X \times \Omega$ 上的 $\mathcal{R}^{[0,N-1]}$ 的分布 $\bar{\mu}$。

**引理 4.6。** 定义 *4.5* 还有一种等价表述，即将条件(7) 替换为

$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|A \cap B, \mathcal{R}^{[0,N-1]}|A' \cap B) < 2\varepsilon, \tag{8}$$
$$whenever\ A, A' \in \mathcal{R}^{[-k,-1]},\ B \in \mathcal{P}^{[-k,k]},\ A \cap B, A' \cap B \in \mathcal{G}.$$

证明。若 (7) 成立，且 $A, A' \in \mathcal{R}^{[-k,-1]},\ B \in \mathcal{P}^{[-k,k]},\ A \cap B, A' \cap B \in \mathcal{G}$，则由三角不等式可直接推出 (8)。反过来，假设 (8) 对满足 $\bar{\mu}(\mathcal{G}) > 1 - \varepsilon$的集合 $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}^{[-k,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k,k]}$ 成立。考虑族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}^{[-k,k]}$，使得对于每个 $B \in \mathcal{B}$，族 $\mathcal{A}_B = \{A \in \mathcal{R}^{[-k,-1]}$的并集-$A \cap B \in \mathcal{G}\}$的测度至少为 $1 - \sqrt{\varepsilon}$。那么,-容易看出 $\bar{\mu}(\bigcup \mathcal{B}) > 1 - \sqrt{\varepsilon}$。令 $\mathcal{G}_0 = \{A \cap B\colon\ B \in \mathcal{B}, A \in \mathcal{A}_B\}$。注意

$$\bar{\mu}(\bigcup \mathcal{G}_0) > 1 - 2\sqrt{\varepsilon}. \tag{7a}$$

对于任意 $B \in \mathcal{B}$，分布满足以下等式

$$\mathcal{R}^{[0,N-1]}|B = \sum_{A' \in \mathcal{R}^{[-k,-1]}} \bar{\mu}(A') \cdot \mathcal{R}^{[0,N-1]}|A' \cap B =$$
$$\sum_{A' \in \mathcal{R}^{[-k,-1]} \setminus \mathcal{A}_B} \bar{\mu}(A') \cdot \mathcal{R}^{[0,N-1]}|A' \cap B + \sum_{\mathcal{A}_B} \bar{\mu}(A') \cdot \mathcal{R}^{[0,N-1]}|A' \cap B.$$

¯由度量 $d_N$ 的凸性可知，对于任意 $A \in \mathcal{A}_B$，我们得到

$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|A \cap B, \mathcal{R}^{[0,N-1]}|B) < \sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon, \tag{8a}$$

其中，$\sqrt{\varepsilon}$估计了 $\bar{d}_N$（$\mathcal{R}^{[0,N-1]}|A \cap B$，$\mathcal{R}^{[0,N-1]}|A' \cap B$）在 $A' \in \mathcal{R}^{[-k,-1]} \setminus \mathcal{A}_B$ 上的贡献（其上界为 1），而 $2\varepsilon$ 估计了相同项在 $A' \in \mathcal{A}_B$ 上的贡献。由于定义 4.5 $\varepsilon$ 中的量是任意的，我们现在可以将 $\mathcal{G}$ 替换为 $\mathcal{G}_0$，并将 $\varepsilon$ 替换为 $\max\{2\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon\}$，从而得到一个等价定义。□

由于所涉及的划分既开又闭，且条件 (6) 和 (8) 都是通过严格不等式定义的，因此它们在测度的开集上成立。遗憾的是，量词的配置，

$$\forall_\varepsilon\ \exists_{N,k_0}\ \forall_{k \geq k_0}\ \exists_{\mathcal{G},\mathcal{Q}}\ (6) \wedge (8)$$

并不表示一个 $G_\delta$-集。我们需要消去量词 $\forall_{k \geq k_0}$。为此，我们使用分布之间另一种（标准的）距离，以及 $\varepsilon$-独立性的概念。

**定义 4.7.** 设 $P, P'$ 是 $\Lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$ 上的概率分布。令

$$\mathsf{dist}(P, P') = \sum_{\alpha \in \Lambda^n} |P(\alpha) - P'(\alpha)|.$$

众所周知，$\bar{d}_n(P, P') \leq \mathsf{dist}(P, P')$。[9]

**定义 4.8**。设 $\mathcal{R}_0$、$\mathcal{R}_1$、$\mathcal{R}_2$ 是概率空间 $(X, \mu)$的有限划分。若存在一个由交集 $C_1 \cap C_2$、$C_1 \in \mathcal{R}_1$ 和 $C_2 \in \mathcal{R}_2$组成的族 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{R}_0$ 在条件上 $\varepsilon$独立于 $\mathcal{R}_2$ 给定 $\mathcal{R}_1$，即 $\mu(\bigcup \mathcal{C}) > 1 - \varepsilon$，且对于所有 $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$，有

$$\mathsf{dist}(\mathcal{R}_0|C_1 \cap C_2, \mathcal{R}_0|C_1)| < \varepsilon.$$

众所周知，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得，

$$\mathcal{R}_0 \overset{\delta}{\underset{\mathcal{R}_1}{\perp}} \mathcal{R}_2 \implies H_\mu(\mathcal{R}_0|\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2) > H_\mu(\mathcal{R}_0|\mathcal{R}_1) - \varepsilon, \text{ and}$$

$$H_\mu(\mathcal{R}_0|\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2) > H_\mu(\mathcal{R}_0|\mathcal{R}_1) - \delta \implies \mathcal{R}_0 \overset{\varepsilon}{\underset{\mathcal{R}_1}{\perp}} \mathcal{R}_2 \tag{9}$$

（我们只会使用 (9)）。由于 $\delta$ 不仅取决于 $\varepsilon$，还取决于 $\mathcal{R}$的基数，因此我们将记作 $\delta(\varepsilon, |\mathcal{R}|)$。

**引理 4.9**。（参见 [12, 引理 4]，关于非相对 VWB 性质）考虑引理 *4.2* 之前介绍的扭积系统 $(X \times \Omega, \bar{\mu}, T)$。假设$h(\mu) = c$。划分 $\mathcal{R} = \mathcal{P} \times \Lambda$ 相对于 $\mathcal{P}$ 具有 *VWB* 性质，当且仅当对于每个$\varepsilon > 0$，都存在自然数 $N$和 $k_0$ 以及一个族 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{R}^{[-k_0,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}$，使得

$$\bar{\mu}(\bigcup \mathcal{G}_1) > 1 - \varepsilon, \tag{10}$$

$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|A_1 \cap B_1, \mathcal{R}^{[0,N-1]}|A_1' \cap B_1) < \varepsilon, \tag{11}$$

$$\textit{whenever } A_1, A_1' \in \mathcal{R}^{[-k_0,-1]},\ B_1 \in \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]},\ A_1 \cap B_1, A_1' \cap B_1 \in \mathcal{G}_1,$$

$$H_{\bar{\mu}}(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|\mathcal{R}^{[-k_0,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}) < Nc + \delta(\varepsilon, |\mathcal{R}|^N). \tag{12}$$

证明。在整个证明过程中，我们将简记 $H_{\bar{\mu}}$ 为 $H$，并将 $h_{\bar{\mu}}$ 简记为 $h$。如果 $\mathcal{R}$ 相对于 $\mathcal{P}$ 具有 VWB 性质，那么根据 (6) 和 (8)，对于所有充分大的 $k_0$，条件 (10) 和 (11) 均成立。另一方面，随着 $k_0$ 增大，条件熵

$$H(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|\mathcal{R}^{[-k_0,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}) \tag{13}$$

单调不增地趋于

$$h(\bar{T}^N|X) = Nh(\bar{T}|X).$$

根据 [13, 定理 2.6], 条件熵在轨道等价下保持不变，因此 $h(T|X) = h(\tau \times \sigma|X) = h_\mu(\sigma) = c$，所以 (13) 的极限等于 $Nc$。因此，当 $k_0$ 充分大时，(12) 也成立。

反过来，固定某个 $\varepsilon > 0$，并假设对于某些 $N$、$k_0$ 和 $\mathcal{G}_1$，条件 (10)、(11) 和 (12) 均成立。注意，根据前述单调收敛定理，对于任意 $k \geq k_0$，我们有

$$Nc \leq H(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|\mathcal{R}^{[-k,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k,k]}) \leq Nc + \delta(\varepsilon, |\mathcal{R}|^N).$$

[9]事实上，我们有 $\bar{d}_n(P, P') \leq \frac{1}{2}\mathsf{dist}(P, P')$，理由如下：对于任意耦合 $P \vee P'$，$\bar{d}_n$ 的积分不超过 $\Lambda^n \times \Lambda^n$非对角部分的质量。存在一个 *maximalcoupling*，使得该质量恰好等于 $\frac{1}{2}\mathsf{dist}(P, P')$（这种耦合的存在通常归功于 Dobrushin）。这就说明了所需的不等式。

特别地，我们得到

$$H(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|\mathcal{R}^{[-k,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k,k]}) \geq H(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|\mathcal{R}^{[-k_0,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}) - \delta(\varepsilon, |\mathcal{R}|^N).$$

我们简记

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}^{[0,N-1]}, \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}^{[-k_0,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}, \quad \text{and}$$
$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}^{[-k,-k_0-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k,-k_0-1]\cup[k_0+1,k]}.$$

（特别是，$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{R}_1$）。注意，$\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}^{[-k,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k,k]}$。采用此记号，我们得到

$$H(\mathcal{R}_0|\mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2) \geq H(\mathcal{R}_0|\mathcal{R}_1) - \delta(\varepsilon, |\mathcal{R}_0|).$$

鉴于 (9)，这意味着给定 $\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_0$ 与 $\mathcal{R}_2$ 条件 $\varepsilon$独立（见图 1）。

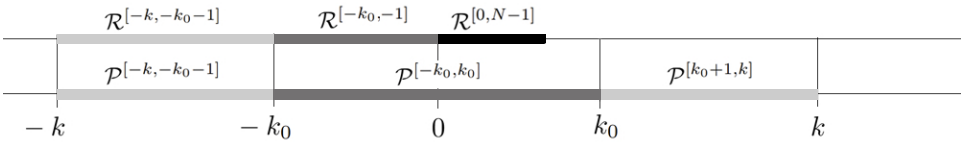



FIGURE 1. 顶行和底行分别表示$\mathcal{R}$和 $\mathcal{P}$的演化。 $\mathcal{R}_0$ 以黑色阴影表示， $\mathcal{R}_1$ 以深灰色阴影表示， $\mathcal{R}_2$ 以浅灰色阴影表示。深灰色区域将黑色区域与浅灰色区域“分隔”开来，使它们条件$\varepsilon$-$\varepsilon$独立（对于任意 $\mathbb{Z}$-作用以及任意两个有限划分 $\mathcal{R}$，$\mathcal{P}$，此结论均成立）。

根据定义 4.8，这意味着存在一个由交集 $\mathcal{C}$ 组成的集合族$C_1 \cap C_2$，其中 $C_1 \in \mathcal{R}_1$ 和 $C_2 \in \mathcal{R}_2$，使得 $\bar{\mu}(\bigcup \mathcal{C}) > 1 - \varepsilon$，并且对于任意$C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$，有

$$\mathsf{dist}(\mathcal{R}_0|C_1 \cap C_2, \mathcal{R}_0|C_1) < \varepsilon,$$

特别地，

$$\bar{d}_N(\mathcal{R}_0|C_1 \cap C_2, \mathcal{R}_0|C_1) < \varepsilon. \tag{14}$$

Let

$$\begin{aligned}\mathcal{G} = \{A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 : \\ &A_1 \in \mathcal{R}^{[-k_0,-1]}, \\ &B_1 \in \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}, \\ &A_2 \in \mathcal{R}^{[-k,-k_0-1]}, \\ &B_2 \in \mathcal{P}^{[-k,-k_0-1]\cup[k_0+1,k]}, \\ &\quad A_1 \cap B_1 \in \mathcal{G}_1, \quad A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 \in \mathcal{C}\}.\end{aligned}$$

Then

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{R}^{[-k,-1]} \cap \mathcal{P}^{[-k,k]}, \quad \mu(\bigcup \mathcal{G}) > 1 - 2\varepsilon,$$

这就是 (6)（仅将 $\varepsilon$ 替换为 $2\varepsilon$，这一替换并无实质影响）。

$\mathcal{G}$ 的每个元素都具有形式 $E = A \cap B$，其中 $A = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{R}^{[-k,-1]}$，$B = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{P}^{[-k,k]}$。现在我们可以如下证明（8）。设 $A, A' \in \mathcal{R}^{[-k,-1]}$ 和

$B \in \mathcal{P}^{[-k,k]}$ 满足 $A \cap B, A' \cap B \in \mathcal{G}$。按照上文所述表示 $A = A_1 \cap A_2, A' = A'_1 \cap A'_2$和 $B = B_1 \cap B_2$。记 $C_1 = A_1 \cap B_1$, $C'_1 = A'_1 \cap B_1$,$C_2 = A_2 \cap B_2$, $C'_2 = A'_2 \cap B_2$。于是 $C_1$,$C'_1 \in \mathcal{R}_1$, $C_2$,$C'_2 \in \mathcal{R}_2$, $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$,$C'_1 \cap C'_2 \in \mathcal{C}$, 我们按如下步骤进行:

$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^{[0,N-1]}|A \cap B, \mathcal{R}^{[0,N-1]}|A' \cap B) =$$
$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^0|A_1 \cap A_2 \cap B_1 \cap B_2, \mathcal{R}^0|A'_1 \cap A'_2 \cap B_1 \cap B_2) \leq$$
$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^0|A_1 \cap A_2 \cap B_1 \cap B_2,\ \mathcal{R}^0|A_1 \cap B_1) +$$
$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^0|A_1 \cap B_1, \mathcal{R}^0|A'_1 \cap B_1) +$$
$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^0|A'_1 \cap B_1, \mathcal{R}^0|A'_1 \cap A'_2 \cap B_1 \cap B_2) =$$
$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^0|C_1 \cap C_2,\ \mathcal{R}^0|C_1) +$$
$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^0|A_1 \cap B_1, \mathcal{R}^0|A'_1 \cap B_1) +$$
$$\bar{d}_N(\mathcal{R}^0|C'_1, \mathcal{R}^0|C'_1 \cap C'_2) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

分别根据 (14)、(11) 和再次根据 (14)。我们证明了 (8), 其中用 ($3\varepsilon$ 代替$2\varepsilon$), 引理的证明至此结束。□

现在我们可以完成定理 4.1 的证明了。

**定理 *4.1* 的证明。** 设 $(X, \lambda, T)$ 是一个辅助的符号伯努利 $\mathbb{Z}$-作用，其具有一个既开又闭的生成划分 $\mathcal{P}$ ，并设 $\tau$ 是作用于 $(X, \lambda)^{-}$上的一个伯努利 $G$-作用，它与 $(X, \lambda, T)$ 具有相同的轨道。设 $T$ 是在 $X \times \Omega$ 上定义的斜积变换，如式 (5) 所示。由引理 4.3 可知，对于任意 $\mu \in \mathcal{M}$, $\mathcal{P} \times \Lambda$ 都是系统 $(X \times \Omega\ \bar{\mu}, T)$ 中的既开又闭生成划分。因此， $\mathcal{M}_c$ 中熵为 $c$ 的伯努利测度集合等于

$$\mathcal{N}_c \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathcal{G}_1 \in \mathcal{R}^{[-k_0,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}} \mathcal{U}(n, N, k_0, \mathcal{G}_1),$$

其中 $\mathcal{N}_c = \{\mu \in \mathcal{M} : h(\mu) = c\}$，而 $\mathcal{U}(n, N, k_0, \mathcal{G}_1)$ 表示满足以下条件的 $\mu \in \mathcal{M}$ 的集合： $\bar{\mu} = \lambda \times \mu$ 满足引理 4.9 的条件 (10)、(11) 和 (12)，其中 $\mathcal{G}_1$ 和 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ 如上所述。由于符号系统中的熵函数是上半连续的， $\mathcal{N}_c$ 在 $\mathcal{M}$ 中属于 $G_\delta$ 型。划分 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{P}$ 都是既开又闭的，且映射 $\mu \mapsto \bar{\mu}$ 是到其像上的同胚。因此，对于每个 $n, N, k_0 \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{G}_1 \in \mathcal{R}^{[-k_0,-1]} \vee \mathcal{P}^{[-k_0,k_0]}$, 集合 $\mathcal{U}(n, N, k_0, \mathcal{G}_1)$ 在 $\mathcal{M}$.[10] □中是开集。

## 5. Relative Rudolph's theorem

定理 1.3 的证明完全遵循定理 1.2 的相同方案：我们需要证明定理 3.1 和定理 4.1 的显然类比。我们将略去大部分细节，而只指出主要的必要修改。

定理 3.1 的类似结论指出，相对于$\mu_1$具有相对熵 $c$ 的相对伯努利测度在 $\mathcal{M}_c^{\mu_1}$ 中稠密。在题为"构造"$^{-}$的段落中，我们像之前一样取乘积 $\Omega \times \Omega$，但现在 $\eta$ 被定义为 $\nu \times \mu_1$的一个提升。接着，我们考察在集合 $B_i \times [\beta]$条件下，块 $\alpha \in \Lambda^{S_i}$ 上的分布 $D_{i,\ \beta}$, $1 \leq i \leq m$, $\beta \in \Lambda_1^{S_i}$。测度 $\bar{\eta}$ 的构造

[10]对 $\mathcal{N}_c$ 的限制至关重要。如果在条件 (12) 中，我们将 $c$ 替换为 $h(\mu)$，相应的集合 $\mathcal{U}(n,\ N,\ k_0,\ \mathcal{G}_1)$ 将不再是开集。

采用相同的方法，利用条件独立性进行构造。接下来，我们证明引理 3.3 的一个类似结论：在具有相同分布 $D_{i,\ \beta}$的 $\nu \times \mu_1$ 的提升中，$\bar{\eta}$ 具有最大熵。这将使我们之后能够推导出条件熵$h(\bar{\eta}_\mu|\Omega_1)$ 至少为 $c$。在证明引理 3.4 的一个类似结论时，即测度 $\bar{\eta}$ 相对于 $\mu_1$ 是相对伯努利的，我们使用这样一个事实的相对版本：伯努利系统的任何因子都是伯努利系统。该版本见 [10, 命题 5，第 198], 页；另见 [3,定理 4.9，第 1731], 页。我们用自己的记号将其改写如下：

定理 *5.1*。设 $\pi: (X,\mu,\tau) \to (X',\mu',\tau')$ 以及 $\pi': (X',\mu',\tau') \to (X'',\mu'',\tau'')$ 是某些保测度 $G$-作用之间的因子映射。若 $(X,\mu,\tau)$ 关于 $(X'',\mu'',\tau'',)$ 是相对伯努利的，则 $(X',\mu',\tau')$ 也是如此。

我们陈述一下所需的引理 3.5 的类似结果。记号与定理 1.3 中的相同。证明几乎完全相同，只需进行一些相当明显的修改。

引理 *5.2*。设 $\mu$ 是 $\Omega$ 上任意的自由遍历移位不变测度，其条件熵为 $h(\mu|\Omega_1) > 0$。对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及任意 $c \in (0, h(\mu|\Omega_1)]$，存在一个测度论因子映射 $\phi: \Omega \to \Omega$，它保持 $\pi$ 的纤维不变，并且使得 $\phi^*(\mu)$ 与 $\mu$ 的差为 $3\varepsilon$-接近，同时 $h(\phi^*(\mu)|\Omega_1) = c$。

现在，定理 3.1 的类比命题证明的最后一步很直接。

接下来，我们来证明定理 4.1 的一个类比命题，即 $\mathcal{M}_c^{\mu_1}$ 中相对伯努利测度集合的 $G_\delta$ 性质。由于在定理 4.1 的证明中我们已经处理了相对伯努利性，因此改写起来相当容易。我们先证明引理 4.2 的以下类比命题。所需的修改相当直接。最后一步中，我们再次使用定理 5.1。

**引理 5.3.** 测度 $\mu \in \mathcal{M}$ 在 $G$-移位 $\sigma$ 的作用下相对于 $\mu_1$ 是相对伯努利的，当且仅当 $\bar{\mu} = \lambda \times \mu$ 在由 $T$ 生成的 $\mathbb{Z}$ 作用下相对于 $\lambda \times \mu_1^{-}$ 是伯努利的。

由此，定理 4.1 类比命题的证明几乎完全相同；我们只需将相对于 $\lambda$ 的伯努利性替换为相对于 $\lambda \times \mu_1$ 的伯努利性。

## References

[1] Tim Austin、Eli Glasner、Jean-Paul Thouvenot 和 Benjamin Weiss, *An ergodic system is dominant exactly when it has positive entropy* **43** 10 2023 ，《遍历理论与动力系统》第（ ）期，第3216–3230页。[2] Clinton T. Conley、Steve C. Jackson、David Kerr、Andrew S. Marks、Brandon Seward 和 Robin D. Tucker-Drob, *Følner tilings for actions of amenable groups*, 《数学年刊》第371卷（2018年），663–683页。[3] Alexandre I. Danilenko 和 Kyewon K. Park, *Generators and Bernoullian factors for amenable actions and cocycles on their orbits* 2002 ，《遍历理论与动力系统》（ ），**22**，1715 1745–。[4] H. Dye, *On groups of measure-preserving transformations I*, 《美国数学杂志》，**81** （1959年），119–159页。[5] Eli Glasner, Jean-Paul Thouvenot 和 Benjamin Weiss, *On some generic classes of ergodic measure preserving transformations* **82** 2021 15 36 ，《莫斯科数学会会刊》（ ），第–页。[6] Elon Lindenstrauss, *Pointwise theorems for amenable group actions*, 《数学发明》**146** （2001年），第259–295页。[7] D. S. Ornstein 和 B. Weiss, *Ergodic theory of amenable group actions. I: The Rohlin lemma* **2** 1980 161 164 ，《美国数学会通报》（新系列）（ ），第1期，第–页。

[8] Donald S. Ornstein 和 Benjamin Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups* **48** 1987 1 141 , 《数学分析杂志》, 数学, （）, –。[9] 丹尼尔·J·鲁道夫和 Benjamin Weiss, *Entropy and mixing for amenable group actions*。《数学年刊》（第2辑）**151** （2000年）, 第1119–1150页。[10] Jean-Paul Thouvenot, *Quelques proprietes des systemes dynamiques qui se decomposent en un produit de deux systemes dont l'un est un schema de Bernoulli* **21** , 《以色列数学杂志》（1975年）, 第177–207页。[11] Jean-Paul Thouvenot, *Remarques sur les systèmes dynamiques donnés avec plusieurs facteurs* **21** 1975 215 232 , 《以色列数学杂志》（）, 第–页。[12] Jean-Paul Thouvenot 和 Benjamin Weiss, *On a theorem of Dan Rudolph: Part I*, 《以色列数学杂志》（2025年）, 第1–10页。[13] 托马斯·沃德和张青, *The Abramov–Rokhlin entropy addition formula for amenable group actions* **114** 1992 317 329 , 《月刊数学》（）, –。

Faculty of Pure and Applied Mathematics, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland*Email address*: downar@pwr.edu.pl

Laboratoire de Probabilités, Université Statistique et Modélisation, Sorbonne Uni-versité, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*Email address*: jean-paul.thouvenot@upmc.fr

Mathematics Institute, Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel
*Email address*: weiss@math.huji.ac.il