arXiv:2601.02940v1 [math.AT] 6 Jan 2026

等变射影空间与格拉斯曼流形的有理稳定同伦型

SAMIK BASU、VANNY DOEM 和 CHANDAL NAHAK

Abstract. 我们证明了等变复射影空间 $\mathbb{C}P(V)$ 和格拉斯曼流形 $Gr_n(V)$ 的显式有理稳定分裂，其中 V 是复表示。当 V 是一维表示之和时， $\mathbb{C}P(V)$ 和 $Gr_n(V)$ 都有理地等价于表示球的楔和。对于一般有限群 G ，若 V 是由不一定为一维的不可约表示构成的和，我们证明 $\mathbb{C}P(V)$ 有理地分裂为 V 中不可约因子上的托姆空间的楔和。对于 $Gr_n(V)$，相应有理分裂中的因子是定义在 V 中不可约因子上的低阶格拉斯曼流形之托姆空间的积。

1. Introduction

在等变稳定同伦论中，最有用的分裂结果之一是 tom Dieck 分裂 [4, Satz 2], [9, § V.11]：悬挂 G谱的不动点谱是对 H的子群共轭类取 W_GH-Borel 构造所得的 H-不动点谱的楔和。在有理等变稳定同伦论领域，所谓的 Greenlees-May 分裂 [6, A.1]指出：有限群 G 的有理 G 谱等价于其等变同伦群上的 Eilenberg-MacLane 谱的楔和。本文将讨论复射影空间和格拉斯曼流形的另一类有理分裂。

在非等变情形下，众所周知，复射影空间$\mathbb{C}P^n$ 在稳定意义下有理地分裂为球面的楔和

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P^n_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{i=0}^{n} S^{2i}.$$

这是因为其有理同调集中于偶数次，这一性质迫使相关余纤维序列中的连接映射为零。

现在我们希望在等变情形下考察这一结果。给定有限群 G 的一个复表示 V，将等变复射影空间 $\mathbb{C}P(V)$ 定义为 V 中的复直线所组成的空间，其底空间为 $\mathbb{C}P^{\dim_{\mathbb{C}}(V)-1}$。更一般地，将等变格拉斯曼流形 $Gr_n(V)$ 定义为所有 n 维复线性子空间 V 的集合，使得 $Gr_1(V) = \mathbb{C}P(V)$。本文的主要目的，是明确写出 $\mathbb{C}P(V)$ 和 $Gr_n(V)$ 的有理稳定分裂；在构造这些胞腔复形时会出现这两个空间。

现在我们来介绍本文的研究结果。最简单的情形是，复表示 V 是一维表示的直和。这在以下情况下总是成立：

Date：2026年1月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 55N91、55P62；次要分类 55P91、57S15。*Key words and phrases.* 复射影空间、格拉斯曼流形、等变同伦论、有理同伦论。

当 G 是阿贝尔群时。我们记作（其中 ϕ_i 是一维的）

$$V = \sum_{i=1}^{n} \phi_i, \quad \omega_i = (\phi_1 + \cdots + \phi_i) \otimes \phi_{i+1}^{-1},$$

对于舒伯特符号 $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$,

$$W_\sigma = \sum_{i=1}^{n} W_{\sigma_i}, \quad W_{\sigma_i} = (\sum_{j=1}^{\sigma_i - 1} \phi_j - \sum_{l=1}^{i-1} \phi_{\sigma_l}) \otimes \phi_{\sigma_i}^{-1}.$$

用这一记号表示，我们有（定理 3.5 和定理 3.9）

定理 A。 设 V 是上述记法所表示的一维表示之和。那么，存在等价

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{i=0}^{n-1} S^{\omega_i},$$

$$\Sigma^\infty Gr_n(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{\substack{\text{Schubert} \\ \text{symbols } \sigma}} S^{W_\sigma}.$$

定理 A 的证明涉及将 $\mathbb{C}P(V)$ 和 $Gr_n(V)$ 写成等变细胞复形，并注意到附着映射在有理意义下是平凡的。当然，这些表达式取决于我们书写一维表示 ϕ_i的顺序。

对于一般表示 V，将 V 表示为不可约表示的直和：$V = \sum \psi_i$。 $\mathbb{C}P(V)$ 到 $\to \mathbb{C}P(V + \psi)$ 的余纤维可识别为 Thom 空间 [1]。我们证明，由此得到的滤子诱导出等变射影空间 $\mathbb{C}P(V)$ 的有理稳定分裂，使其分裂为若干 Thom 空间的楔和。（定理 4.13）

定理 B. 设

$$V = \sum_{i=1}^{n} \psi_i, \quad V_i = \sum_{j \le i} \psi_j,$$

其中 ψ_j 是不可约表示。存在一个等价

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathrm{Th}(V_i \otimes \gamma_{\psi_{i+1}}),$$

其中 γ_{ψ_j} 是 $\mathbb{C}P(\psi_j)$上的典范线丛。

我们将这一论证推广到 $Gr_n(V)$的情形。在这种情况下，我们展示了当 $V_0 \subset V$和 $V/V_0 = V'$时单步操作的结果。在有理意义下，它分解为一个楔和，其各项是 V_0 上的低阶格拉斯曼流形与 V'上的低阶格拉斯曼流形的 Thom 空间的 smash 积。（定理 5.13）

定理 C. 存在一个稳定同伦等价

$$\Sigma^\infty Gr_n(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{k=1}^{n} \mathrm{Th}(Gr_k(V'), V_0 \otimes \xi_k) \wedge Gr_{n-k}(V_0)_+ \bigvee Gr_n(V)_{V_0 +}.$$

可以迭代应用该定理中的等价，进一步将表达式化简为以不可约表示为底空间的格拉斯曼流形。

1.1. **文章结构**。 在 §2 中，我们回顾全文将用到的一些预备知识。§3 讨论阿贝尔群的情形并证明定理 A，§4 则给出定理 B 的证明。最后，我们在 §5 中证明定理 C。

1.2. **记号**。 本文中，我们使用以下记号。

- G表示一个有限群。
- 假设底层范畴是 G-等变有理稳定同伦范畴。

- $W_G H = N_G H/H$ 表示子群 H 的 Weyl群。
- 记号 $\mathbb{C}P(V)$ 表示 V 中直线所构成的等变复射影空间。
- 记号 $Gr_n(V)$ 表示 V 中 n 维子空间构成的格拉斯曼流形。
- 对于一个 G-丛 E，令 Th(E) 表示它的 Thom 空间。
- $\mathbb{T}$ 表示圆群 S^1，其对应于 $\mathbb{T}$ 通过乘法作用于 $\mathbb{C}$的表示记作 λ。

致谢。 第二位作者获得了印度文化关系委员会（ICCR）研究资助（编号：PHN/ICCR/321/1/2021）的支持。

2. Preliminaries

本节回顾一些将在后文使用的标准构造。本文始终只考虑有限群 G。

2.1. **等变射影空间**。 设 G为有限群， V 为G 的一个表示，并赋有一个 G-不变内积。我们分别用 $D(V)$ 表示 V 中的单位圆盘，用$S(V)$表示 V的单位球面，具体定义如下：

$$D(V) = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle \leq 1\} \text{ and } S(V) = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 1\}.$$

记 S^V 为 V 的一点紧化，并将基点取为 ∞，注意到$S^V \cong D(V)/S(V)$。

用 $\mathbb{C}P(V)$ 表示与表示 V相关联、带有线性 G作用的等变复射影空间。更准确地说，我们作如下定义。

定义 2.1. 对于有限群 G的复表示 V，令 $\mathbb{C}P(V)$ 为 V的一维复线性子空间的集合。

我们可以将 $\mathbb{C}P(V)$ 拓扑化为一个商 G空间

$$\mathbb{C}P(V) \cong (V \smallsetminus \{0\})/\mathbb{C}^*$$

其中 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ 通过标量乘法作用于 $V \smallsetminus \{0\}$ 。若用 $\mathbb{T}$ 表示圆群，并用 λ 表示 $\mathbb{T}$ 的一维表示，则定义 2.1 可改写如下 [2, §2]。

命题 2.2. 空间 $\mathbb{C}P(V)$ 与商 G空间 G-同胚

$$\mathbb{C}P(V) \cong S(V \otimes \lambda)/\mathbb{T}$$

其中， λ 是 $\mathbb{T}$的一维表示，定义为 $\mathbb{T}$ 通过乘法作用于 $\mathbb{C}$ 。

沿着一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} S(V \otimes \lambda) & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}P(V) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow_{\tilde{q}} & \\ S(V \otimes \lambda)/\mathbb{T} & & \end{array}$$

使得映射 q: $S(V \otimes \lambda) \to \mathbb{C}P(V)$，可描述为 $(v,\ z) \mapsto \text{span}\{v\}$，显然$\mathbb{C}P(V) \cong S(V \otimes \lambda)/\mathbb{T}$。

2.2. () 的等变胞腔结构 $\mathbb{C}P(V)$。我们回顾一下在 [8, §3] 中构造的$\mathbb{C}P(V)$的等变胞腔结构。射影空间上的通常 CW 复形结构给出了这样的等变胞腔结构：胞腔的形式为 $D(W)$，沿着从$S(W)$出发的映射粘接；这里 V 是一维表示的直和。

我们对 G 胞腔结构 $\mathbb{C}P(V)$ 有如下显式描述。令 $V = V' \oplus \phi$ 表示一维 ϕ，则有一个余纤维序列

$$\mathbb{C}P(V')_+ \to \mathbb{C}P(V)_+ \to S^{V' \otimes \phi^{-1}}. \tag{2.3}$$

G 胞腔的形式为 $D(V' \otimes \phi^{-1})$。现在设 V 是一个维数为 $\dim V = n$ 的表示，并记

$$V = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \text{ and } V_i = \sum_{j=1}^{i} \phi_j \tag{2.4}$$

一维表示 ϕ_i。

按照 [2, §3]，我们选取关于上述 V_i 的 V_i 完全旗 (2.4)

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V.$$

与此旗相关联，我们得到 $\mathbb{C}P(V)$ 的一个完全胞腔过滤

$$\emptyset \subset \mathbb{C}P(V_1) \subset \mathbb{C}P(V_2) \subset \cdots \subset \mathbb{C}P(V_n) = \mathbb{C}P(V) \tag{2.5}$$

具有一个余纤维序列（2.3）

$$\mathbb{C}P(V_i)_+ \to \mathbb{C}P(V_{i+1})_+ \to S^{W_i} \tag{2.6}$$

其中，$W_i = V_i \otimes \phi_{i+1}^{-1}$ 和 ϕ_i 是一维表示。

注意，对于一维的 ϕ，空间 $\mathbb{C}P(\phi)$ 只是一个点，因此我们有

$$\mathbb{C}P(V) \cong \mathbb{C}P(V \otimes \phi).$$

2.3. Thom 复形与 $\mathbb{C}P(V)$ 的滤子。 如果 G 是阿贝尔群，则每个复表示都是一维表示的直和。对于一般的有限群，这并不成立。在这种情况下，我们得到一个滤子，其余纤维可用 Thom 空间描述。

设 G 是一个有限群，V 是 G 的一个表示。记 $V = V' + \psi$ 为 ψ 的一个不可约表示。由定义 2.2，我们通过映射锥得到一个余纤维序列

$$S(V' \otimes \lambda)/\mathbb{T} \xhookrightarrow{i} S(V \otimes \lambda)/\mathbb{T} \to C(i) \tag{2.7}$$

其中，$C(i)$ 是 $S(V \otimes \lambda)/\mathbb{T}$ 对 $S(V' \otimes \lambda)/\mathbb{T}$ 的子商。

Fr由 [1] 可知，$\mathbb{C}P(V) \setminus \mathbb{C}P(V')$ 是 $\mathbb{C}P(\psi)$ 上的一个向量丛。更正式地说

$$\mathbb{C}P(V) \setminus \mathbb{C}P(V') \cong D(V' \otimes \gamma_\psi \to \mathbb{C}P(\psi))$$

其中 γ_ψ 是 $\mathbb{C}P(\psi)$ 上的典范线丛，定义如下

$$S(\psi) \times_{\mathbb{T}} \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_\psi} \mathbb{C}P(\psi), (v, z) \mapsto \text{span}\{v\}.$$

我们将这个 Thom 空间记为 $\text{Th}(V' \otimes \gamma_\psi)$。于是，余纤维序列 (2.7) 可简化为

$$\mathbb{C}P(V')_+ \to \mathbb{C}P(V)_+ \to \text{Th}(V' \otimes \gamma_\psi). \tag{2.8}$$

2.4. 等变格拉斯曼流形。设 G 是一个有限群，V 是一个 m 维复 G-表示，并赋予一个 G-不变内积。对于 $n \leq m$，我们将带有与 V对应的线性 G作用的复格拉斯曼流形记为 $Gr_n(V)$。

定义 2.9。设 $Gr_n(V)$ 是所有 n 维复线性子空间 V构成的集合，并按通常方式赋予拓扑，即视为 V中 n 个两两正交向量所构成的斯蒂费尔流形的商空间。

注意，$Gr_1(V) \cong \mathbb{C}P(V)$ 是等变复射影空间。

2.5. **Gr 的等变舒伯特胞腔结构**$_n(V)$。 如果 G 是一个阿贝尔群，那么V是一维表示的直和，而 $Gr_n(V)$ 按舒伯特胞腔进行的通常滤子给出了一个等变胞腔结构。我们在下面回顾这一点。

假设 V 是一个表示，满足 $\dim V = m$。按照 [10, §6] ，我们选取一个完全旗

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m = V. \tag{2.10}$$

并记作 $\phi_i = V_i/V_{i-1}$。回顾舒伯特符号 $\sigma = (\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n)$，其中 σ_i 是整数并满足

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n \leq m. \tag{2.11}$$

利用 (2.11) 重写 (2.10)

$$0 \subset V_{\sigma_1} \subset V_{\sigma_2} \subset \cdots \subset V_{\sigma_n} \tag{2.12}$$

从而 $V_{\sigma_i} = \phi_{\sigma_1} + \phi_{\sigma_2} + \cdots + \phi_{\sigma_i}$。

根据 (2.12)，我们记一个非等变舒伯特胞腔为

$$e(\sigma) = \{W \in Gr_n(V) \mid \dim(W \cap V_{\sigma_i}) = i \text{ and } \dim(W \cap V_{\sigma_i - 1}) = i - 1\}. \tag{2.13}$$

这样的 n-平面 W由一组基 z_1、z_2、$\cdots$、z_n组成，其中 $z_i \in V_{\sigma_i}$且在$V_{\sigma_i}/V_{\sigma_i - 1}$中非零。用矩阵表示时，这个 n-平面 W可表示为一个 $m \times n$矩阵，其行是 z_1、z_2、$\cdots$、z_n，列则由修改后的序列 (ϕ_1、ϕ_2、$\cdots$、ϕ_m) 标记。将每个 z_i 除以其 ϕ_{σ_i} 坐标后，我们可以假设每行的最后一个非零项为正，不妨取为 1；通过从其他行中减去 z_i 的适当倍数，使其后所有项均为零，因为我们可以假设该矩阵处于行最简阶梯形。

如 [3, §3], 中所述，将 V 写成 (2.4) 中的形式，于是上述描述在 $Gr_n(V)$ 上给出了一个等变胞腔结构。事实上，由于所有 V_i 都是 G-不变的，胞腔 $V(\sigma)$ 是 G-子空间。作为一个 G-空间，这个等变舒伯特胞腔 $V(\sigma)$ 是一个与 $(V_{\sigma_i - 1} - \sum_{j=1}^{i-1} \phi_{\sigma_j}) \otimes \phi_{\sigma_i}^{-1}$ 的乘积同胚的圆盘。更明确地，利用 (2.11) 并将 (2.13) 改写为 $V(\sigma)$

$$V(\sigma) = \{W \in Gr_n(V) \mid \dim(W \cap V_{\sigma_i}) = i \text{ and } \dim(W \cap V_{\sigma_i - 1}) = i - 1\}, \tag{2.14}$$

$Gr_n(V)$ 的等变舒伯特胞腔为

$$V(\sigma) \cong D(W_\sigma), W_\sigma = \bigoplus_{i=1}^{n} W_{\sigma_i} \tag{2.15}$$

使得

$$W_{\sigma_i} = (V_{\sigma_i - 1} - \sum_{j=1}^{i-1} \phi_{\sigma_j}) \otimes \phi_{\sigma_i}^{-1}.$$

正如 [10, 6.3] 所指出的，这个胞腔 $V(\sigma)$ 本质上是一个维数为

$$|\sigma| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i - i. \tag{2.16}$$

2.6. **有理稳定同伦**。设 G 是一个有限群。本文所采用的核心技术建立在 [5, 6 中有理 G-谱的完备代数模型之上。2]: 同伦范畴的一个等价

$$\mathrm{Sp}^G_{\mathbb{Q}} \simeq \prod_{H \leq G} D(\mathbb{Q}[W_G H])$$

作为三角范畴。由此代数模型，我们得到如下对应关系 [7,§2]

$$[X, Y]^G \xrightarrow{\cong} \prod_n \prod_{H \leq G} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[W_G H]}(\pi_n(\Phi^H(X)), \pi_n(\Phi^H(Y))). \tag{2.17}$$

3. Rational stable homotopy type of $Gr_n\ (V)$ over Abelian groups

对于阿贝尔群 G，每个复表示都是一维表示的直和。因此，我们将维数为 n 的复表示 V 写作

$$V = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$$

使得 $\dim\phi_i = 1$。我们首先证明，复射影空间 $\mathbb{C}P(V)$ 在有理意义下分裂为球面的楔和。作为楔和的这种表示取决于我们排列 ϕ_i 的顺序。更确切地说，我们固定有序序列

$$(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \tag{3.1}$$

对于 ϕ_i 是 V 中的元素，并改写 (2.4)

$$V = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \text{ and } V_i = \sum_{j=1}^{i} \phi_i. \tag{3.2}$$

我们有 $\mathbb{C}P(V)$ 的恰当胞腔过滤 (2.5)

$$\emptyset = \mathbb{C}P(V_0) \subset \mathbb{C}P(V_1) \subset \mathbb{C}P(V_2) \subset \cdots \subset \mathbb{C}P(V_n) = \mathbb{C}P(V)$$

其余纤维序列为

$$\mathbb{C}P(V_i)_+ \to \mathbb{C}P(V_{i+1})_+ \to S^{\omega_i} \tag{3.3}$$

其中表示

$$\omega_i = V_i \otimes \phi_{i+1}^{-1} \tag{3.4}$$

对于某些 $1 \leq i \leq n-1$ 和 ϕ_i 是一维的。注意，由于 $\mathbb{C}P(V_1) = S^0$，表达式 $S^{\omega_0} = S^0$。

我们通过使用第 2.6 节中的方法，证明该余纤维序列 (3.3) 在 $\mathrm{Sp}^G_{\mathbb{Q}}$ 中分裂，并由此得到 $\mathbb{C}P(V)$ 的一个有理稳定分裂。

定理 3.5。 存在一个等价

$$\Sigma^\infty \mathbb{C}P(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{i=0}^{n-1} S^{\omega_i}$$

其中 V 如 (3.2) 中所定义，而 ω_i 如 (3.4) 中所定义。

证明。 我们对 $n =$ 维V进行归纳。使用记号 (3.2)，并考虑余纤维序列 (3.3)

$$\mathbb{C}P(V_{n-1})_+ \to \mathbb{C}P(V)_+ \to S^{\omega_{n-1}}.$$

归纳地假设

$$\mathbb{C}P(V_i)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}P(V_{i-1})_+ \vee S^{\omega_{i-1}}.$$

只需证明该序列中的连接映射，也就是

$$S^{\omega_n} \xrightarrow{\delta_n} \Sigma\mathbb{C}P(V_{n-1})_+$$

是零映射。

根据归纳法假设

$$\mathbb{C}P(V_{n-1})_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}P(V_{n-2})_+ \vee S^{\omega_{n-2}} \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{i=0}^{n-2} S^{\omega_i}.$$

接下来，我们按如下方式处理 $i=n$。映射

$$S^{\omega_n} \xrightarrow{\delta_n} \Sigma\mathbb{C}P(V_{n-1})_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{i=0}^{n-2} S^{\omega_i+1}$$

在同伦意义下，是一族 G-映射 (2.17)

$$\begin{aligned}\bigvee_{i=0}^{n-2}[S^{\omega_n}, S^{\omega_i+1}]^G &\cong \bigoplus_{i=0}^{n-2}\prod_k \prod_{H\leq G} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[W_GH]}(\pi_k(\Phi^H S^{\omega_n}), \pi_k(\Phi^H S^{\omega_i+1})) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{n-2}\prod_k \prod_{H\leq G} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[W_GH]}(\pi_k(S^{\omega_n^H}), \pi_k(S^{\omega_i^H+1}))\end{aligned}$$

这会产生零元，因为对于所有子群 $H\leq G$， H-不动点维数 $|\omega_n^H|$ 均为偶数，而$|\omega_i^H+1|$ 均为奇数。

因此短正合列分裂

$$\mathbb{C}P(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}P(V_{n-1})_+ \vee S^{\omega_{n-1}}.$$

这就证明了所需的断言。 □

在阿贝尔群的情形下，将定理 3.5 推广到 $Gr_n(V)$ 并不困难。现在设 V 是一个表示，其维数为 $\dim V=m$，并重写 (2.4)

$$V=\sum_{i=1}^{m}\phi_i \text{ and } V_i=\sum_{j=1}^{i}\phi_j. \tag{3.6}$$

回顾一下，具有（2.11）中的 Schubert 符号 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 时，写出（2.15）

$$W_\sigma=\bigoplus_{i=1}^{n}W_{\sigma_i} \text{ and } W_{\sigma_i}=(V_{\sigma_i-1}-\sum_{j=1}^{i-1}\phi_{\sigma_j})\otimes\phi_{\sigma_i}^{-1}. \tag{3.7}$$

由于 $Gr_n(V)$ 的复维数等于 $d=n(\dim V-n)$，利用（2.15）和（2.16），我们可表示为

$$Gr_n(V)=\bigcup_{i=0}^{d}Gr_n(V)^{(i)}$$

具有如下性质

$$Gr_n(V)^{(i)}=\bigcup_{|\sigma|\leq i}V(\sigma) \text{ and } |\sigma|=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i-i.$$

于是， G-CW 复形是 $Gr_n(V)^{(i-1)}$ 的序列余极限，其中 $Gr_n(V)^{(i)}$ 是一个推出

$$\begin{array}{ccc}\bigsqcup_{|\sigma|=i} S(W_\sigma) & \longrightarrow & Gr_n(V)^{(i-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{|\sigma|=i} D(W_\sigma) & \longrightarrow & Gr_n(V)^{(i)}\end{array}$$

由此我们得到一个余纤维序列

$$Gr_n(V)_+^{(i-1)} \to Gr_n(V)_+^{(i)} \to \bigvee_{|\sigma|=i} S^{W_\sigma}. \tag{3.8}$$

与定理 3.5 中的做法相同，我们断言这个序列 (3.8) 在 $\mathrm{Sp}^G_{\mathbb{Q}}$ 中分裂，并给出 $Gr_n(V)$ 的一个显式有理稳定分裂。

定理 3.9。 存在一个等价

$$\Sigma^\infty Gr_n(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{\sigma} S^{W_\sigma}$$

其中使用了 (3.6) 中的记号 V 和 (3.7) 中的记号 W_σ。

证明。 我们对 i 进行归纳，证明余纤维序列 (3.8)

$$Gr_n(V)^{(i-1)}_+ \to Gr_n(V)^{(i)}_+ \to \bigvee_{|\sigma|=i} S^{W_\sigma}$$

在有理数意义下分裂。通过归纳步骤

$$Gr_n(V)^{(i-1)}_+ \simeq_{\mathbb{Q}} Gr_n(V)^{(i-2)}_+ \bigvee \bigvee_{|\sigma|=i-1} S^{W_\sigma} \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{|\sigma|\leq i-1} S^{W_\sigma}.$$

接下来，我们通过考察 (3.8) 中的连接映射，证明对于 i

$$\bigvee_{|\sigma|=i} S^{W_\sigma} \xrightarrow{\delta_i} \Sigma Gr_n(V)^{(i-1)}_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{|\sigma|\leq i-1} S^{W_\sigma+1}$$

是零映射。对于所有子群 $H \leq G$，不动点 $|W^H_\sigma|$ 是偶维的，而$|W^H_\sigma + 1|$ 是奇维的。因此，根据 (2.17)，映射 $\delta_i = 0$，由此通过归纳法证明了该定理。□

4. Rational stable homotopy type of $\mathbb{C}P(V)$ over general groups

对于一般的有限群 G，每个复 G-表示不再都是一维表示的直和。在这种情况下，我们将 V写成 G的不可约表示的直和。然后我们证明，复射影空间$\mathbb{C}P(V)$可以在有理意义下分裂为某些较低维复射影空间上的托姆空间的楔和（定理 4.13）。首先，我们回顾 §2.3 中的一些相关构造，并计算 $\mathbb{C}P(V)$ 的H-不动点。

给定一个复 n-维表示 V 以及不可约表示 ψ_i，我们改写 (2.4)

$$V = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \text{ and } V_i = \sum_{j=1}^{i} \psi_j. \tag{4.1}$$

仿照（2.7），我们可以得到（2.8）的余纤维序列

$$\mathbb{C}P(V_i)_+ \to \mathbb{C}P(V_{i+1})_+ \to \mathrm{Th}(V_i \otimes \gamma_{\psi_{i+1}}) \tag{4.2}$$

其中典范线丛 $\gamma_{\psi_{i+1}}$ 定义为

$$S(\psi_{i+1}) \times_{\mathbb{T}} \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_{\psi_{i+1}}} \mathbb{C}P(\psi_{i+1}), (v, z) \mapsto \mathrm{span}\{v\}. \tag{4.3}$$

对于每个子群 $H \leq G$，令 i^*_H : Rep(G) →Rep(H) 表示限制。我们记

$$i^*_H V = \sum_{i=1}^{k} n_i \phi_i \oplus \sum_{j=1}^{l} m_j \alpha_j \tag{4.4}$$

其中，所有 ϕ_i 都是一维 H-表示，α_j 是不可约的 H-表示，且 dim(α_j) > 1，重数为 n_i，$m_j > 0$。在限制下，我们观察到， H-不变复直线基本上是$i^*_H V$的 一维 H-子表示，它们包含在 (4.4) 的第一项中。

命题 4.5。 对于满足 $|H| = k$ 的 $H \leq G$ 以及记号 (4.4)

$$\mathbb{C}P(V)^H \simeq \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathbb{C}P^{n_i-1}.$$

证明。 使用表示 (4.4)，并写作

$$\mathbb{C}P(V)^H = \mathbb{C}P(i_H^* V)^H = \{L \in \mathbb{C}P(V) \mid h \cdot L = L, \forall h \in H\}.$$

由于直线 L 是 H-不变子空间，根据 V 的不可约性，它们必定包含在 $i_H^* V$ 的一维表示中。于是

$$\mathbb{C}P(i_H^* V)^H \simeq \mathbb{C}P(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_k\phi_k)^H. \tag{4.6}$$

然而，直线 $L \subset V$ 被子群 $H \leq G$ 固定，当且仅当 H 将 L 映到其自身。这意味着 L 完全位于 $i_H^* V$ 的某个同型分量中，即

$$L \subset n_i\phi_i \text{ for some } i.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{C}P(V)^H &\simeq \mathbb{C}P(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + \cdots + n_k\phi_k)^H \\ &\simeq \mathbb{C}P(\mathbb{C}^{n_1}) \sqcup \mathbb{C}P(\mathbb{C}^{n_2}) \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{C}P(\mathbb{C}^{n_k}) \\ &\simeq \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathbb{C}P^{n_i-1}\end{aligned}$$

结论得证。 □

例 4.7（阿贝尔群）。 设 G 是一个阶为 n 的阿贝尔群。则可以将一个 G-表示 V 写成一维表示 ϕ_i 的直和，即

$$V = \sum_{i=0}^{n-1} n_i\phi_i.$$

As 所有 G-不变复直线恰好是 V 的一维表示 ，

$$\mathbb{C}P(V)^G \simeq \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \mathbb{C}P^{n_i-1}.$$

固定一个子群 $H \leq G$。如同（4.4）中一样，我们写成

$$i_H^* \psi_{i+1} = \sum_{j=1}^{k} n_j\phi_j \oplus \sum_{r=1}^{l} m_r\psi_r$$

使得 ϕ_j 是一维 H-表示， ψ_r 是 H-不可约表示，且 $\dim(\psi_r) > 1$，以及 $n_j,\ m_r > 0$。由命题 4.5 可得

$$\mathbb{C}P(\psi_{i+1})^H \simeq \mathbb{C}P(i_H^*\psi_{i+1})^H \simeq \bigsqcup_{j=1}^{k} \mathbb{C}P^{n_j-1}. \tag{4.8}$$

在（4.3）上应用不动点 $\Phi^H(-)$，并写成

$$S(i_H^*\psi_{i+1}) \times_{\mathbb{T}} \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma_{n_j}} \mathbb{C}P(n_j\phi_j) \subseteq \mathbb{C}P(i_H^*\psi_{i+1}) \tag{4.9}$$

$\gamma_{\psi_{i+1}}$ 在某个 H-不动点连通分支上的子丛。我们逐纤维计算 γ_{n_i} 的空间层级 H-不动点。若 $\gamma_{\psi_{i+1}}(x) \in$，则元素 $x \in D(V_i \otimes \gamma_{n_i})$ 是 H-不动点

在诱导的 H-作用下，$\mathbb{C}P(\psi_{i+1})$ 是 H-不动点，而 x 在 $\gamma_{\psi_{i+1}}^{-1}\gamma_{\psi_{i+1}}(x)$ 中是 H-不动点。更明确地说，我们通过一个拉回丛来描述这个 H-不动点作用

$$\begin{array}{ccc} i_H^*V_i\otimes\gamma_{n_i} & \longrightarrow & V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^{n_i-1}\cong\mathbb{C}P(n_i\phi_i) & \xrightarrow[H-\text{map}]{} & \mathbb{C}P(\psi_{i+1}) \end{array}$$

由上图中的 H-映射可知， $D(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H$ 中的所有元素都是 H-不动点族

$$\{x\in D(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H \mid \gamma_{\psi_{i+1}}(x)\in\mathbb{C}P^{n_i-1}\}=D(i_H^*V_i\otimes\gamma_{n_i})^H=D(V_i^H\otimes\gamma_{n_i}). \tag{4.10}$$

有了这一要素，我们现在可以陈述如下分解。

命题 4.11。 对于 $H\leq G$ ，使得 $|H|=k$ ，采用记号 (4.1) 和 (4.9)

$$\mathrm{Th}(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H\simeq\bigvee_{j=1}^{k}\mathrm{Th}(V_i^H\otimes\gamma_{n_j})$$

其中γ_{n_j} 定义于 (4.9) 中。

证明。 在 $V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}}$ 上选取一个 G-不变内积，并记

$$\mathrm{Th}(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})\cong D(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})/S(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}}).$$

现在我们计算空间层级的 H-不动点。首先注意到

$$\mathrm{Th}(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H\simeq(D(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H\setminus S(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H)^+$$

其中 $(-)^+$ 表示一点紧化。

由 (4.10) 可得

$$D(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H\simeq\bigsqcup_{j=1}^{k}D(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}|_{\mathbb{C}P^{n_j-1}}})^H\simeq\bigsqcup_{j=1}^{k}D(V_i^H\otimes\gamma_{n_j}).$$

根据表示 (4.9) 和 (4.10),

$$\begin{aligned}\mathrm{Th}(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H&\simeq(\bigsqcup_{j=1}^{k}(D(V_i^H\otimes\gamma_{n_j})\setminus S(V_i^H\otimes\gamma_{n_j})))^+\\&\simeq\bigvee_{j=1}^{k}\mathrm{Th}(V_i^H\otimes\gamma_{n_j}).\end{aligned}$$

□

将托姆同构 [10, 10 应用于命题 4.11 后，我们立即得到以下推论。2]

推论 4.12。 有理同调群

$$H_*(\mathrm{Th}(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H;\mathbb{Q})$$

对所有子群 $H\leq G$，都集中在偶数次。

证明。 应用命题 4.11 和托姆同构

$$\tilde{H}_*(\mathrm{Th}(V_i\otimes\gamma_{\psi_{i+1}})^H;\mathbb{Q})\cong H_{*-2d}(\mathbb{C}P(\psi_{i+1})^H;\mathbb{Q})$$

其中 $d=$维数V_i。我们声称右边的项位于偶数次。

由式 (4.8) 中 $\mathbb{C}P(\psi_{i+1})$ 的分解

$$H_{*-2d}(\mathbb{C}P(\psi_{i+1})^H;\mathbb{Q}) \cong H_{*-2d}(\bigsqcup_{j=1}^{k}\mathbb{C}P^{n_j-1};\mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{j=1}^{k} H_{*-2d}(\mathbb{C}P^{n_j-1};\mathbb{Q})$$

它们集中在偶数次。由此便可直接证明该结论。 □

作为定理 3.5 的推广，对于任意有限群的复表示，我们现在有 $\mathbb{C}P(V)$ 的分解 V G。

定理 4.13。 存在一个等价

$$\Sigma^{\infty}\mathbb{C}P(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathrm{Th}(V_i \otimes \gamma_{\psi_{i+1}})$$

记号 V，V_i 见 (4.1)，而 $\gamma_{\psi_{i+1}}$ 见 (4.3)。

Proof. 我们对 $n = \dim V$ 使用归纳法进行证明。回顾记号 (4.1) 以及余纤维 er
序列 nce (4.2)

$$\mathbb{C}P(V_i)_+ \to \mathbb{C}P(V_{i+1})_+ \to \mathrm{Th}(V_i \otimes \gamma_{\psi_{i+1}}).$$

通过归纳法，我们假设

$$\mathbb{C}P(V_i)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}P(V_{i-1})_+ \bigvee \mathrm{Th}(V_{i-1} \otimes \gamma_{\psi_i}).$$

只需证明连接映射

$$\mathrm{Th}(V_{n-1} \otimes \gamma_{\psi_n}) \xrightarrow{\delta_n} \Sigma\mathbb{C}P(V_{n-1})_+$$

是零映射。

根据 $\mathbb{C}P(V_i)_+$ 的归纳步骤，我们有

$$\mathbb{C}P(V_{n-1})_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}P(V_{n-2})_+ \bigvee \mathrm{Th}(V_{n-2} \otimes \gamma_{\psi_{n-1}}).$$

接下来，我们证明 $i = n$ 如下。考虑连接映射

$$\mathrm{Th}(V_{n-1} \otimes \gamma_{\psi_n}) \xrightarrow{\delta_n} \Sigma\mathbb{C}P(V_{n-1})_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \Sigma\mathbb{C}P(V_{n-2})_+ \bigvee \Sigma\mathrm{Th}(V_{n-2} \otimes \gamma_{\psi_{n-1}})$$

并应用几何不动点函子 $\Phi^H(-)$

$$\mathrm{Th}(V_{n-1} \otimes \gamma_{\psi_n})^H \xrightarrow{\Phi^H(\delta_n)} \Sigma\mathbb{C}P(V_{n-2})_+^H \bigvee \Sigma\mathrm{Th}(V_{n-2} \otimes \gamma_{\psi_{n-1}})^H.$$

根据命题 4.5 和推论 4.12，左侧项的有理同调群集中于偶数次，而右侧项的有理同调群集中于奇数次。由此，根据 (2.17)，连接映射为零映射，结论随即成立。□

5. Rational stable homotopy type of $Gr_n(V)$ over general groups

本节旨在说明，格拉斯曼流形 $Gr_n(V)$ 在有理意义下分裂为一系列 Thom 空间的积，这些空间定义在 V 中不可约表示上的低阶格拉斯曼流形之上（定理 5.13）。我们首先介绍一些构造，然后推导出证明主要结果所需的要素。

设 V 是一个 m 维表示，并配备一个 G-不变内积。将 V 表示为正交直和 $V = V' \oplus V_0$，使得 $V' = V - V_0$。接下来我们给出如下定义。

定义 5.1。 令 V_0 为 V 的一个子空间。定义

$$Gr_n(V)_{V_{0,1}} = \{W \in Gr_n(V) \mid \dim(W \cap V_0) \geq 1\}.$$

由定义 5.1 可知

$$Gr_n(V)_{V_{0,1}+} \to Gr_n(V)_+ \to Gr_n(V)/Gr_n(V)_{V_{0,1}} \tag{5.2}$$

是一个余纤维序列。上述商空间可更明确地描述如下。考虑交换三角形中的一个投影映射 p

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & V \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & V' \end{array}$$

并定义一个相应的映射

$$Gr_n(V) \setminus Gr_n(V)_{V_{0,1}} \to Gr_n(V'), W \mapsto p(W)$$

其中 W 按照定义 5.1 中的方式确定。它表明，空间 $Gr_n(V) \setminus Gr_n(V)_{V_{0,1}}$ 自然对应于一个向量丛

$$E(V_0 \otimes \xi_n) \xrightarrow{V_0 \otimes \xi_n} Gr_n(V') \tag{5.3}$$

w其中 ξ_n 是 $Gr_n(V')$ 上的典范 n-丛。于是得到一个 G-同胚

$$Gr_n(V) \setminus Gr_n(V)_{V_{0,1}} \cong E(V_0 \otimes \xi_n)$$

并诱导出同伦等价

$$Gr_n(V)/Gr_n(V)_{V_{0,1}} \simeq (E(V_0 \otimes \xi_n))^+ \simeq \mathrm{Th}(Gr_n(V'), V_0 \otimes \xi_n).$$

利用这些信息，余纤维序列 (5.2) 可写为

$$Gr_n(V)_{V_{0,1}+} \to Gr_n(V)_+ \to \mathrm{Th}(Gr_n(V'), V_0 \otimes \xi_n). \tag{5.4}$$

采用 §3 中相同的术语，我们断言此序列 (5.4) 在 $\mathsf{Sp}^G_{\mathbb{Q}}$ 中分裂，并给出定理 5.13 中 $Gr_n(V)$ 的稳定分裂。为了在 $Gr_n(V)$ 的语境下给出适当的描述，我们需要改写前面的一些表达式。

首先，将 (4.4) 中关于 V 的限制改写为

$$i_H^* V = \sum_{i=1}^{k} n_i \psi_i \tag{5.5}$$

其中 ψ_i 是不可约的 H-表示，且 $n_i > 0$。利用这一表达式，我们得到如下推论。

命题 5.6. 对于满足 $|H| = k$ 的 $H \leq G$，以及表达式 (5.5)

$$Gr_n(V)^H \simeq \bigsqcup_{\sum_{i=1}^{k} m_i \dim \psi_i = n} \prod_{i=1}^{k} Gr_{m_i}(\mathbb{C}^{n_i}).$$

证明。 首先注意到

$$Gr_n(V)^H = \{W \in Gr_n(V) \mid h \cdot W = W, \forall h \in H\}.$$

由此可见，每个 n-平面 W 都是 V 的 H-不变子空间，因此 W 本身必定分解为 H 的同型分量所对应的子空间。具体而言，

$$\begin{aligned} \{W \subset n_i\psi_i \mid \dim W = m_i \dim \psi_i, W \text{ is } H\text{-fixed}\} &= \mathrm{Hom}_H(m_i\psi_i, n_i\psi_i)/\mathrm{Hom}_H(m_i\psi_i, m_i\psi_i) \\ &= \{\mathbb{C}^{m_i} \to \mathbb{C}^{n_i} \text{ injective }\}/GL_{m_i}(\mathbb{C}) \\ &= Gr_{m_i}(\mathbb{C}^{n_i}). \end{aligned}$$

如果我们记

$$\underline{m} = (m_1, \cdots, m_k) \text{ such that } \sum_{i=1}^{k} m_i \dim \psi_i = n,$$

$$G_{\underline{m},H} = \{W \in Gr_n(V)^H \mid (W \cap n_i\psi_i) = m_i\psi_i\} \cong \prod_{i=1}^{k} Gr_{m_i}(\mathbb{C}^{n_i}). \tag{5.7}$$

由此可知

$$\begin{aligned} Gr_n(V)^H &\simeq \bigsqcup_{\sum_{i=1}^{k} m_i \dim \psi_i = n} Gr_{m_1}(\mathbb{C}^{n_1}) \times \cdots \times Gr_{m_k}(\mathbb{C}^{n_k}) \\ &\simeq \bigsqcup_{\sum_{i=1}^{k} m_i \dim \psi_i = n} \prod_{i=1}^{k} Gr_{m_i}(\mathbb{C}^{n_i}). \end{aligned}$$

□

现在我们计算空间 Th($Gr_n(V)$ $U \otimes \xi_n$) 的 H-不动点，其中 U 是一个复 G-表示。我们用 $\xi_{m,H}$ 表示 ξ_n 对 $Gr_{m,H}$ 的限制。

命题 5.8。对于子群 $H \leq G$ 和复 G-表示 U

$$\mathrm{Th}(Gr_n(V), U \otimes \xi_n)^H \simeq \bigvee_{\underline{m}} \mathrm{Th}(G_{\underline{m},H}(V)^H, U^H \otimes \xi_{\underline{m},H}).$$

H_*(Th($Gr_n(V)$ $U \otimes \xi_n$)^H; $\mathbb{Q}$) 集中在偶数次。

证明。在假设 $U \otimes \xi_n$ 具有一个 G-不变内积的条件下，

$$\mathrm{Th}(Gr_n(V), U \otimes \xi_n) \cong D(Gr_n(V), U \otimes \xi_n)/S(Gr_n(V), U \otimes \xi_n).$$

然后我们推导出空间层级的 H-不动点

$$\begin{aligned} \mathrm{Th}(Gr_n(V), U \otimes \xi_n)^H &\simeq (D(Gr_n(V), U \otimes \xi_n)^H \setminus S(Gr_n(V), U \otimes \xi_n)^H)^+ \\ &\simeq (\bigsqcup_{\underline{m}} (D(G_{\underline{m},H}(V)^H, U^H \otimes \xi_{\underline{m},H}) \setminus S(G_{\underline{m},H}(V)^H, U^H \otimes \xi_{\underline{m},H})))^+ \\ &\simeq \bigvee_{\underline{m}} \mathrm{Th}(G_{\underline{m},H}(V')^H, U^H \otimes \xi_{\underline{m},H}). \end{aligned}$$

此外，空间 $G_{m,\ H}$ 是 (5.7) 中低阶格拉斯曼流形的乘积，因此具有由偶数维胞腔构成的 CW 复形结构。因此，第二个陈述由托姆同构得出。□

现在我们利用 (5.4) 的一个滤过余纤维序列来证明主要结果。为此，我们将定义 5.1 改写为如下更一般的形式。

定义 5.9。设 V_0 是 V 的一个子空间。定义

$$Gr_n(V)_{V_{0,k}} = \{W \in Gr_n(V) \mid \dim(W \cap V_0) \geq k\}.$$

这一表述给出了一个完备滤过

$$Gr_n(V_0) = Gr_n(V)_{V_{0,n}} \subseteq \cdots \subseteq Gr_n(V)_{V_{0,1}} \subseteq Gr_n(V)_{V_{0,0}} = Gr_n(V)$$

以及一个余纤维序列

$$Gr_n(V)_{V_{0,k+1}+} \to Gr_n(V)_{V_{0,k}+} \to Gr_n(V)_{V_{0,k}}/Gr_n(V)_{V_{0,k+1}}. \tag{5.10}$$

秉持与前文相同的思路，考虑一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & V \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & V' \end{array}$$

使得 $\dim(W \cap V_0) = k-1$ in W 且 $\dim(W \cap V_0) = n-k+1$ in V'。定义一个映射

$$Gr_n(V)_{V_{0,k}} \setminus Gr_n(V)_{V_{0,k+1}} \to Gr_{n-k}(V') \times Gr_k(V_0), W \mapsto (p(W), W \cap V_0)$$

其中 W等于 $(W \cap V_0) \oplus W'$，且 W'是 $W \cap V_0$的正交补。于是，对于每个满足 $p(W') = p(W)$ 的 $W' \in Gr_{n-k}(V)$，它都同构地映射到 $Gr_{n-k}(V')$ 中的 $p(W)$。因此， W'是从 $p(W)$ 到 V_0 的线性映射的图像。这表明它将 W' 典范地关联为向量丛中的一个元素

$$E(V_0 \otimes \xi_{n-k}) \xrightarrow{V_0 \otimes \xi_{n-k}} Gr_{n-k}(V') \tag{5.11}$$

其中 ξ_{n-k} 是 $Gr_{n-k}(V')$ 上的典范 $(n-k)$-丛。若 $k=0$，则 ξ_n 是 $Gr_n(V')$ 上的典范n-丛，如 (5.3) 中所示。于是我们得到一个 G-同胚

$$Gr_n(V)_{V_{0,k}} \setminus Gr_n(V)_{V_{0,k+1}} \cong E(V_0 \otimes \xi_{n-k}) \times Gr_k(V_0)$$

以及同伦等价

$$\begin{aligned} Gr_n(V)_{V_{0,k}} / Gr_n(V)_{V_{0,k+1}} &\simeq (E(V_0 \otimes \xi_{n-k}) \times Gr_k(V_0))^+ \\ &\simeq \mathrm{Th}(Gr_{n-k}(V'), V_0 \otimes \xi_{n-k}) \wedge Gr_k(V_0)_+. \end{aligned}$$

由此，我们将余纤维序列 (5.10) 简化为

$$Gr_n(V)_{V_{0,k+1}+} \to Gr_n(V)_{V_{0,k}+} \to \mathrm{Th}(Gr_{n-k}(V'), V_0 \otimes \xi_{n-k}) \wedge Gr_k(V_0)_+. \tag{5.12}$$

根据上述构造，我们得到 $Gr_n(V)$ 的稳定分解。

定理 5.13. 存在一个稳定同伦等价

$$\Sigma^\infty Gr_n(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \bigvee_{k=1}^{n} \mathrm{Th}(Gr_k(V'), V_0 \otimes \xi_k) \wedge Gr_{n-k}(V_0)_+ \bigvee Gr_n(V_0)_+$$

其中， ξ_k 的定义同 (5.11)。

证明。 我们对指标 k 进行归纳，证明余纤维序列 (5.12)

$$Gr_n(V)_{V_{0,k+1}+} \to Gr_n(V)_{V_{0,k}+} \to \mathrm{Th}(Gr_{n-k}(V'), V_0 \otimes \xi_{n-k}) \wedge Gr_k(V_0)_+$$

在 $\mathrm{Sp}^G_{\mathbb{Q}}$ 中分裂。第一步中，我们有余纤维序列 (5.4)

$$Gr_n(V)_{V_{0,1}+} \to Gr_n(V)_+ \to \mathrm{Th}(Gr_n(V'), V_0 \otimes \xi_n)$$

及其 H-不动点连接映射

$$\mathrm{Th}(Gr_n(V'), V_0 \otimes \xi_n)^H \xrightarrow{\delta_n^H} \Sigma(Gr_n(V)_{V_{0,1}})^H_+.$$

根据命题 5.6 和 5.8，右侧的有理同调群集中在奇数次，而左侧的有理同调群根据归纳法集中在偶数次。由此根据 (2.17)，连接映射为零映射。接着

$$Gr_n(V)_+ \simeq_{\mathbb{Q}} Gr_n(V)_{V_{0,1}+} \bigvee \mathrm{Th}(Gr_n(V'), V_0 \otimes \xi_n). \tag{5.14}$$

然而，根据 (5.12) 的归纳步骤，我们有以下分解

$$\begin{aligned} Gr_n(V)_{V_{0,1}+} &\simeq_{\mathbb{Q}} Gr_n(V)_{V_{0,2}+} \bigvee \mathrm{Th}(Gr_{n-1}(V'), V_0 \otimes \xi_{n-1}) \wedge Gr_1(V)_+ \\ Gr_n(V)_{V_{0,2}+} &\simeq_{\mathbb{Q}} Gr_n(V)_{V_{0,3}+} \bigvee \mathrm{Th}(Gr_{n-2}(V'), V_0 \otimes \xi_{n-2}) \wedge Gr_2(V)_+ \\ &\vdots \\ Gr_n(V)_{V_{0,n-1}+} &\simeq_{\mathbb{Q}} Gr_n(V)_{V_{0,n}+} \bigvee \mathrm{Th}(Gr_1(V'), V_0 \otimes \xi_1) \wedge Gr_{n-1}(V_0)_+. \end{aligned}$$

结合 $Gr_n(V)_{V_{0,k}}$ 的所有下层分解，得到 $Gr_n(V)_{V_{0,1}}$，再应用 (5.14)，即可完成证明。□

References

[1] M. F. Atiyah, *Thom complexes*,《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），11 (1961)，第 291–310 页。[2] M. Cole, J. P. C. Greenlees, and I. Kriz, *Equivariant formal group laws*,《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），81 (2000)，第 355–386 页。[3] , *The universality of equivariant complex bordism*,《数学杂志》，239 (2002)，第 455–475 页。
[4] T. T. Dieck, *Orbittypen und äquivariante homologie ii*,《数学档案》，26 (1975)，第 650–662 页。
[5] J. Greenlees, *Triangulated categories of rational equivariant cohomology theories*,奥伯沃尔法赫报告，8 (2006)，第 480–488 页。[6] J. P. C. Greenlees and J. P. May, *Generalized tate cohomology*,第 543 卷，美国数学会，1995 年。[7] J. P. C. Greenlees and J. D. Quigley, *Ranks of RO G -graded stable homotopy groups of spheres* ( ), 《美国数学会会刊 B 辑》，( )，第 – 页。[8] L. G. Lewis, Jr., *for finite groups G* 10 2023 101 113 *The R G -graded equivariant ordinary cohomology of complex projective spaces* O( )Z/p *actions, with linear* 1987 1361 载于《代数拓扑与变换群》（哥廷根，），《数学讲义》第 卷，施普林格，柏林，1988 年，第 53–122 页。
[9] L. G. Lewis, Jr., J. P. May, M. Steinberger, and J. E. McClure, *Equivariant stable homotopy theory* 1213 1986 ,《数学讲义》丛书第 卷，施普林格-施普林格出版社，柏林，。J. E. McClure 参与撰稿。[10] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*,《数学年刊研究》第 76 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1974 年。

Stat-Math Unit, Indian Statistical Institute, Kolkata 700108, India
Email address: samik.basu2@gmail.com

Math Department, Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur 721302, India
Email address: vanny.doem@gmail.com

Math Department, Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur 721302, India
Email address: cnahak@maths.iitkgp.ac.in