arXiv:2601.02942v1 [physics.plasm-ph] 6 Jan 2026

表示 Grad-Shafranov方程解所需的最少参数数量是多少?

Huasheng Xie[1,2,*] **和 Yueyan Li**[3]

[1] 河北省紧凑型聚变重点实验室，中华人民共和国廊坊市 065001[2] 新奥科技发展有限公司，中华人民共和国廊坊市 065001[3] 天津职业技术师范大学理学院，中华人民共和国天津市 300072

电子邮箱：huashengxie@gmail.com，
xiehuasheng@enn.cn2026年1月7日

摘要。 在磁约束聚变中，快速且精确地求解 Grad–Shafranov（GS）方程，对于平衡分析、集成建模和代理模型构建至关重要。本文探讨一个基本问题：在固定边界条件下，准确表示 GS 方程数值解所需的自由参数最少有多少？我们证明，对于大多数实际应用，只需使用 2–5 个自由参数即可表示 GS平衡，同时将相对误差控制在 5% 以下。对于更高的精度要求，我们提出一种统一谱表示：在极向方向采用 Miller 扩展谐波（MXH）展开，并结合径向方向上的移位切比雪夫（Cheb）多项式。这种 MXH–Cheb基对二维GS平衡具有快速收敛性。对于在最后闭合磁通面（LCFS）处指定三个几何矩（位移、拉长率和三角度）的构型，只需使用 13–20 个参数，即可将相对误差控制在 10^{-2}–10^{-3} 量级。在更一般的情形下，包括上下非对称平衡态、X点构型以及刚性压力和电流剖面（如 H 模台基），使用少于 100 个参数即可达到更高的精度。所得平衡构型和剖面函数均为全解析形式，且各阶导数均光滑。这些结果为开发高保真、超快速 GS 求解器奠定了系统性基础，并可实现对托卡马克平衡的高效降阶建模和基于人工智能的代理建模。

1 引言

在磁化受控聚变等离子体研究中，确定平衡态是几乎所有后续分析的基础步骤，包括稳定性评估、输运模拟和加热优化。对于托卡马克等轴对称构型，这一问题可归结为求解磁流体力学（MHD）平衡理论中的 Grad–Shafranov（GS）方程。在柱坐标系（R，ϕ，Z）中，GS 方程表示为 [1, 2]:

$$\Delta^* \psi \equiv R \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R J_\phi, \tag{1}$$

其中，ψ 是每弧度的极向磁通，μ_0是真空磁导率。环向等离子体电流密度 $J\phi$ 为:

$$J_\phi = RP'(\psi) + \frac{F(\psi)F'(\psi)}{\mu_0 R}, \tag{2}$$

其中，压力剖面 $P(\psi)$ 和极向电流函数 $F(\psi) = RB\phi$。这里，撇号表示对 ψ 求导。磁场分量与磁通的关系为:

$$B_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad B_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad B_\phi = \frac{F(\psi)}{R}, \tag{3}$$

极向磁通通常定义为 $\psi = \frac{1}{2\pi}\int B_Z R dR$。

—

方程（1）的数值解是聚变研究中的标准流程。然而，目前的方法在解的表示 方面存在显著分歧 ψ（R，Z）。本文将讨论范围限定于固定边界平衡问题，其中最后闭合磁通面（LCFS）的几何形状以及剖面函数 P（ψ）和 F（ψ）均已给定。

高保真求解器通常依赖稠密的空间离散或高阶谱展开。例如，CHEASE [3]等代码在离散网格上采用有限元方法（如双三次 Hermite 多项式），而 ECOM [4] 则将保角映射与傅里叶方法和积分方程方法结合起来。这些方法在数学上稳健，但维数较高——通常需要 $10^3 \sim 10^4$ 个自由度才能准确解析陡峭的梯度或边界特征——因此计算成本从几秒到几分钟不等。对于大规模参数扫描而言，这种计算负担难以承受或系统代码 [5, 6]。另一种方案是，DESC [7] 等现代三维平衡代码采用全局基函数（如傅里叶–Zernike）。然而，使用标准傅里叶级数描述极向几何时，难以高效表示现代托卡马克形状。强烈的形状变化（如高拉长率、D 形）以及 X 点的存在会形成尖锐的几何特征，难以用平滑正弦函数近似。因此，这类展开通常会出现谱收敛缓慢和吉布斯现象，需要大量谐波系数才能抑制非物理振荡。

在另一极端，Haney 等人[8, 9] 和 Ludwig [10], 提出的变分方法等降阶模型，仅使用一组最少的几何参数（通常为 2–7 个参数，例如 Shafranov 位移 Δ、拉长率 κ 和三角度 δ）。这些模型的速度极快，但受到僵化几何假设的限制，因此不足以准确表示复杂且高度非对称的位形。尽管如此，这些变分参数方法在整体上表现出乎意料地好，往往优于大纵横比解析展开解 [1, 11]。

处于中间位置的是 VMOMS [12–14] 等逆坐标矩求解器，以及 AS- TRA [16]等输运代码中使用的三矩方法 [15] 。这些方法通常使用截断到少数几个主导阶数的标准傅里叶级数（例如，展开至 sin(2θ) 或 cos(3θ)），来表示极向磁通面几何，并通过变分原理求解由此得到的一维（1D）径向常微分方程（ODE）。与二维（2D）基于网格的求解器相比，这些方法减少了参数数量，但由于依赖标准傅里叶谐波，其表示不够紧凑：要有效表示 D形等离子体的“角部”或 X 点，仍然需要数量多得难以接受的傅里叶模态，而这些低阶近似无法捕捉它们。此外，这些代码中的径向剖面通常通过基于网格的有限差分进行求解，这进一步增加了所需参数的数量。

近期的解析托卡马克平衡解[17]也采用半解析方法，但需要通过数值求解系数来拟合实际的最后闭合磁通面，通常将自由函数 P 和F 限制为关于 ψ的二次函数。其典型 CPU时间约为

0.5s，这些方法对于实际的集成建模和实时实验拟合应用而言，速度不够快，通用性也不足。

在本工作中，我们探讨一个基本问题：要准确表示 *GS* 方程的数值解，所需的自由参数最少是多少？ 我们提出一种统一谱表示框架，弥合快速近似与高保真解之间的差距。我们不采用标准傅里叶级数或局部基于网格的方法，而是采用最新的**米勒扩展谐波（MXH）**展开 [18] 来表示极向几何。MXH基通过对角度进行谐波失真，将几何拓扑（例如 D 形和三角度）直接嵌入坐标映射中，而不是通过加性叠加实现；研究表明，这种方法能够使形状参数快速收敛 [19]。同时，我们采用平移切比雪夫多项式表示径向剖面，以确保谱精度和解析光滑性。因此，极向和径向表示都能以最少的自由参数快速收敛。

该方法提供了一种层次化结构：

- **近似层级（系统代码模式）：** 在较低的截断阶数下，我们的模型自然退化为经典的变分形式（类似于 Haney），仅需 2–5 个参数即可进行定性描述。

- **高保真层级（物理分析模式）：** 通过适度提高分辨率，模型能够以指数速度收敛至基于网格的代码所达到的精度。我们证明，仅需 13–20 个参数即可实现 10^{-2}–10^{-3} 量级的相对误差，并且少于 100 个参数就能完全解析复杂的平衡态。

所得平衡构型完全具有解析形式，且各阶导数均光滑。这些结果为开发高保真、超快速 GS 求解器奠定了系统性基础，并支持对托卡马克平衡进行高效的降阶建模和基于人工智能的代理建模。

本文其余部分安排如下。第2 节阐述理论框架，详细介绍米勒扩展谐波（MXH）参数化和移位切比雪夫径向基底的数学公式。第3 节概述分层参数化策略，定义极简近似（第1级）和高保真表示（二级）的参数空间。第4节将给出与标准网格代码 CHEASE 的全面数值基准测试，验证其对标准和复杂非对称平衡的谱收敛性与精度，态。第5 节讨论这种紧凑表示对超快速求解器和基于人工智能的代理建模的更广泛意义。最后，第6节将给出总结与结语。

2 理论框架与基底函数

为应对在保持高保真度的同时缩减参数空间的挑战，我们构建了一种谱表示，将极向几何与径向剖面解耦。该公式遵循 COCOS=1 约定 [20]（逆时针环向角 ϕ，坐标系为 (R,ϕ,Z) 和 (ρ,θ,ϕ)），其中环向等离子体电流 I_P 通常为负。

2.1 径向坐标的定义与映射

这种表示的一个关键方面是归一化径向坐标 $\rho \in [0,1]$ 的定义。 ρ 的选择决定了剖面函数的复杂程度以及 GS 求解器的形式。我们考虑两种主要定义：

(i)**基于磁通的坐标 (ρ_ψ)：** 定义为归一化极向磁通的平方根：

$$\rho_\psi \equiv \sqrt{\frac{\psi - \psi_{axis}}{\psi_{edge} - \psi_{axis}}}. \tag{4}$$

在此坐标系中，磁通函数被解析地固定为 $\psi(\rho) = \psi_{axis} + (\psi_{edge} - \psi_{axis})\rho^2$。由于 ψ 已知，这显著简化了 GS 方程；但为了描述磁通面形状，几何小半径 $a(\rho)$ 必须作为一个自由函数。

(ii) **几何坐标 (ρ_{geom})：** 根据物理尺寸定义，通常为 $\rho_{geom} = r/a^{edge}$，其中 $r = (R_{max} - R_{min})/2$ 是一个特征小半径。在此坐标系中，式 ($a(\rho)$ 中的几何剖面函数变为常数（6a$(\rho) = a^{edge}$），大幅减少了描述几何形状所需的径向参数。然而，代价是必须求解 $\psi(\rho)$ 这个未知函数 [9]。

所提出的框架支持这两种定义。对于固定边界平衡重构（拟合），ρ_ψ 通常更受青睐，因为它与物理磁通有直接联系。对于超快速变分求解器， ρ_{geom} 则可能更具优势，因为它减少了几何自由度。

2.2 极向表示：*MXH* 与标准傅里叶

对磁通面几何（R，Z）进行高效参数化，是减少

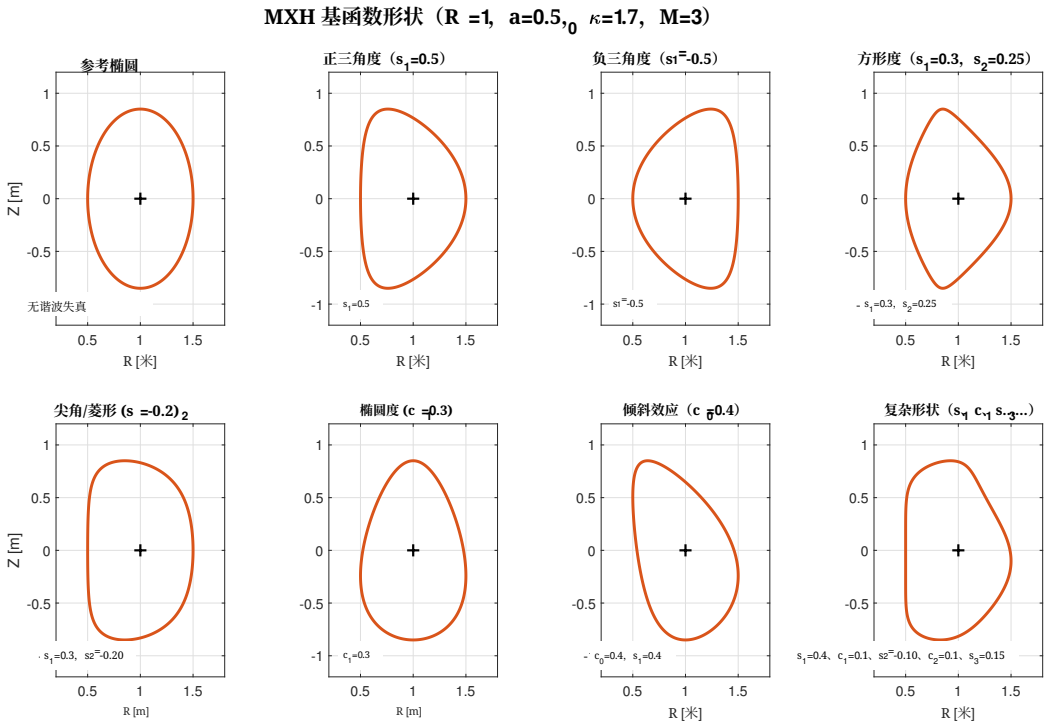


图 1. 米勒扩展谐波（MXH）极向参数化示意图。各面板通过单独设置特定谐波系数，展示了该基底的拓扑灵活性。**顶行** 展示了标准的对称塑形效应，包括参考椭圆、正/负三角度（$\delta \approx \arcsin s1$）和方形度（$s2$）。**底行** 展示了非对称和高阶形变，包括椭圆度（$c1$）、倾斜（$c0$）以及涉及高次谐波的复杂组合（$s3$ 等）。该公式能够对广泛的托卡马克几何形状进行解析描述。

自由参数数量的关键。标准谱代码通常采用直接傅里叶级数展开：

$$R(\theta) = \sum R_m \cos(m\theta), \quad Z(\theta) = \sum Z_m \sin(m\theta). \tag{5}$$

尽管在数学上是完备的，但对于具有高三角度（δ）和 X 点的现代托卡马克构型而言，该基底的收敛速度较慢。使用平滑正弦函数捕捉 D形等离子体的尖锐“角部”通常会引发吉布斯现象，需要大量谐波（$m \gg 10$）来抑制非物理振荡。

为解决这一问题，我们采用**米勒扩展谐波（MXH）**参数化方法 [18]。MXH 基底并非采用加法叠加，而是通过角度扭曲将几何拓扑直接嵌入坐标映射中。进一步验证表明，该基底在磁通面参数化方面表现良好 [19]，并已用于 FUSE 聚变电站设计代码中的 TEQUILA 二维平衡模型 [21]。磁通面坐标参数化如下：

$$R(\rho,\theta) = R_0 + h(\rho) + \rho\, a(\rho)\cos\bar{\theta}, \tag{6}$$

$$Z(\rho,\theta) = Z_0 + v(\rho) + \kappa(\rho)\rho\, a(\rho)\sin\theta, \tag{7}$$

其中 $\theta \in [0, 2\pi)$ 是几何极向角。几何矩是 ρ 的函数：$h(\rho)$ 是 Shafranov 位移，$v(\rho)$ 是垂直位移，$\kappa(\rho)$ 是拉长率，而 $a(\rho)$ 描述小半径的演化。

其关键创新在于径向分量中使用的扭曲角 θ，其定义如下：

$$\bar{\theta} = \theta + c_0(\rho) + \sum_{m=1}^{M} \left[c_m(\rho)\cos m\theta + s_m(\rho)\sin m\theta \right]. \tag{8}$$

这种表述能够以最少的项自然地描述复杂形状：

- $m = 1$ 正弦项（$s1$）直接产生三角形度（$\delta \approx \arcsin s1$）。与需要通过一系列谐波来形成 D 形的标准傅里叶级数不同，MXH 仅用一个参数便能从拓扑上实现这一点。
- $m = 1$ 余弦项（$c1$）表示椭圆度。
- $m = 2$ 项与方形度（$s2$）及更高阶形变有关。
- $c0$ 项表示构型的倾斜。

系数 c_m 和 s_m 可以描述上下非对称平衡。将求和截断在较小的 M 处（例如 $M = 1$），模型便简化为快速系统中使用的标准米勒形状 [22]

代码；增大 M 可实现对任意形状的谱收敛。图 1展示了使用 MXH 基底拟合典型最后闭合磁通面形状的示例。

2.3 径向表示：移位切比雪夫基

几何矩（例如，$h(\rho),\kappa(\rho)$）和物理源剖面（P',FF'）采用第一类平移切比雪夫多项式展开。这种选择可确保最佳收敛性，并便于处理奇偶性约束。

设x 为定义在区间 $[-1,1]$上的映射径向坐标：

$$x(\rho)=2\rho^2-1,\quad \text{for } \rho\in[0,1]. \tag{9}$$

我们将径向基函数$u_l(\rho)$构造为：

$$u_l(\rho)=(1-\rho^2)\cdot T_l(2\rho^2-1), \tag{10}$$

其中$T_l(x)$是次数为l的切比雪夫多项式，满足递推关系$T_0(x)=1, T_1(x)=x$，且$T_{l+1}(x)=2xT_l(x)-T_{l-1}(x)$。任意径向剖面$f(\rho)$随后展开为：

$$f(\rho)=f_{edge}+\sum_{l=0}^{L} f_l u_l(\rho), \tag{11}$$

其中，f_{edge} 是边界处的值（由固定的最后闭合磁通面确定），而$\{f_l\}$是待优化的自由参数。

这种基底选择具有三项明显的数学优势：

(i) **边界条件：** 由于$u_l(\rho=1)=0$，这是由因子$(1-\rho^2)$导致的，因此无论谱系数如何取值，条件$f(\rho=1)=f_{edge}$都能严格满足。

(ii)**正则性与奇偶性：** 基函数仅通过 ρ^2依赖于 ρ 。这确保所有剖面都是 ρ的偶函数，从而自动满足磁轴处的物理正则性条件 $\partial f/\partial\rho|_{\rho=0}=0$，无需施加额外约束。这是因为磁轴附近$f=f(\psi)$且 $\psi|_{\rho\to0}\sim\rho^2$，从而得到$\frac{df}{d\rho}|_{\rho\to0}=\frac{df}{d\psi}\frac{d\psi}{d\rho}|_{\rho\to0}\sim\frac{df}{d\psi}(2\rho)|_{\rho\to0}=0$。

(iii) **极小极大性质：** 切比雪夫展开可使光滑函数的最大逼近误差最小（极小极大性质），并能通过快速傅里叶变换（FFT）高效计算。

DESC 中采用了类似的全局径向基底（傅里叶–泽尼克基底）[7]，以消除磁轴处的不准确性，因为这类全局基底天然满足坐标奇点处的必要条件。

图2 展示了径向剖面的典型切比雪夫拟合，呈现出指数收敛。对于光滑的剖面，$L\le3$ 通常已足够。

然而，对于P 中的强梯度或J中的峰值，$L\approx20$–50 可准确捕捉数值及其导数，而基于网格的求解器通常需要 $N_r\ge256$ 个径向网格点。对于上述基底选择，以逆坐标（ρ，θ）表示的 GS 方程及相关解析导数见附录A。

3 分层参数化策略

第 2 节定义的统一谱框架将连续的平衡问题转化为离散的参数优化问题。通过调整极向谐波（M）和径向多项式（L）的截断阶数，我们可以系统地改变表示的复杂度。由此形成的分层策略能够无缝适应不同的精度要求。

3.1 参数空间

托卡马克平衡的总体状态由几何剖面的谱系数唯一确定；根据问题定义，也可能由物理源剖面的谱系数共同确定。对于标准的固定边界平衡问题，最后闭合磁通面（LCFS）的几何形状已给定，因此所有几何矩的边界值（f_{edge}）也随之确定。源函数——压力梯度 $P'(\psi)$ 和极向电流函数 $FF'(\psi)$——通常作为输入提供。因此，自由参数主要是内部磁通面几何的系数。

我们将全局参数向量$\mathbf{X}$ 定义为以下系数的串联：

- **几何剖面：** Shafranov 位移$h(\rho)$、垂直位置$v(\rho)$、拉长率 $\kappa(\rho)$以及形状谐波$\{c_m(\rho),s_m(\rho)\}_{m=1}^{M}$的径向变化。
- **径向坐标映射：** 小半径剖面$a(\rho)$（若使用基于磁通的坐标ρ_ψ），或磁通剖面 $\psi(\rho)$（若使用几何坐标ρ_{geom}）。
- **标量未知量：** 总磁通标量ψ_a 或$\psi_{边缘}-\psi_{轴}$。

$\mathbf{X}$的维数记为N_{par}，这是我们要寻求最小化的基本量。

3.2 Level1：极简表示（近似）

此层级针对“系统代码” [5, 6]或实时控制应用场景。在这些场景中，计算速度至关重要，对核心等离子体进行定性描述即可满足需求。

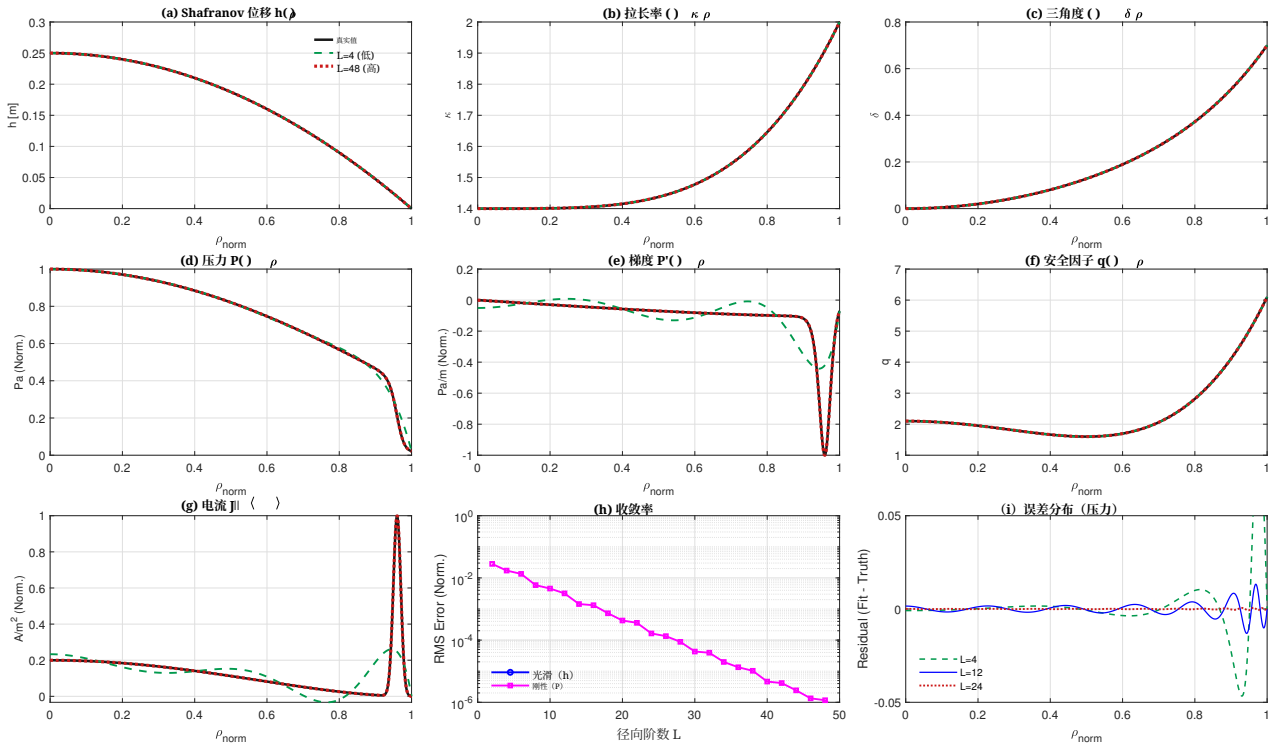


图2。 平移切比雪夫径向基的谱收敛性分析。 **（a–g）**使用低（$L = 4$，绿色虚线）和高（$L = 48$，红色点线）截断阶数，对代表性几何剖面（例如 Shafranov 位移 h、拉长率 κ）和刚性物理源剖面（例如压力 P、电流 J）进行拟合，并与真实基准（黑色实线）进行比较。光滑的几何矩可以通过较低阶数得到良好拟合，而具有 H 模台基的刚性剖面则需要更高阶数来解析梯度。 **（h）**均方根（RMS）误差随径向阶数 L 的变化证实了光滑函数和刚性函数均具有指数收敛性。 **（i）**压力剖面的残差分布表明，提高L 能够有效减小台基附近的吉布斯振荡。

- **设置：**我们将极向展开截断于$M = 1$，并将径向展开截断在较低阶（通常为$L = 1$ 或 2）。

- **物理学：** 仅保留$M = 1$ 会将几何形状限制为 Miller类形状（其特征由位移、拉长率和三角度决定）。通过将径向变化限制在$L = 1$–2，剖面被约束为抛物线型或单调型，能够捕捉整体几何矩，但会平滑掉局部梯度。

- **等价性：** 在此状态下，我们的表示在数学上等价于 Haney 所描述的变分矩模型 [8], 或 Lao 提出的更复杂公式 [12] 以及 Za- kharov 提出的公式 [15]。

- **参数数量：** 自由参数的数量最低可达 $N_{par} \approx 3$–5。例如，如果假设剖面具有刚性，那么除了磁通标量之外，只需使用芯部的位移和拉长率数值。

在这一层面上，与快速集成建模工具（如 METIS [23], ）中使用的解析矩解相比，该谱求解器具有更高的精度；这些工具通常依赖大长宽比展开 [12]。此外，通过允许采用灵活的径向基底阶数（L），该方法推广了 ASTRA 中使用的三矩方法 [15]，无需求解基于网格的常微分方程，即可更准确地描述 Shafranov 位移和拉长率剖面。

3.3 Level2：高保真表示（完整）

该层级面向“物理分析”状态，例如磁流体动力学稳定性（如剥离-气球模）或输运建模，此时磁通面曲率和局部梯度的精确描述至关重要。

- **设置：** 我们将极向分辨率提高至$M \approx 3$–6，并将径向分辨率提高至 $L \approx 6$–12。
- **物理：**

  (i)极向： 高次谐波（$m \geq 2$）在¯MXH 角 θ 中捕捉“方形度”（s_2）、椭圆度以及 X 点引起的局部变形。正如第 2.2节所述，在此处，MXH基的收敛速度显著快于标准傅里叶级数；$M = 4$ 在

MXH 通常仅需标准傅里叶表示中的$m \sim 20$ 即可达到相同的保真度。

(ii) **径向：** 高阶切比雪夫多项式能够高保真地描述内部输运屏障（ITBs）或陡峭的边缘台基。

- **参数数量：** 我们发现，$N_{par} \approx$ 13–20 足以重现基于网格的求解器（例如 CHEASE）对标准 D 形等离子体所得的结果，相对误差约为10^{-3}。我们还观察到，基于网格的代码在磁轴和边缘附近的参考解可能不准确，这是由于违反了物理解析性特征，例如三角度条件$ds1/d\rho|_{\rho\to 0} \to 0$；而我们的谱基能够自然地满足该条件。

对于更高的精度要求，例如解析陡峭的边缘梯度或复杂的 X点几何形状，N^{par} 可能增加到 80–100。不过，这仍然比 CHEASE 和 ECOM 等基于网格的求解器所需的自由度少两个数量级。

3.4 优化目标

因此，“最少参数数量”问题可表述为：寻找最小的整数 M 和L （从而也是最小的向量$\mathbf{X}$），使其在给定容差内逼近 GS 方程的解。“最佳逼近”的定义取决于求解器策略：

（i）**变分法：**最小化 MHD 能量泛函的拉格朗日量，类似于 VMOMS[12] 或 Haney [9]。（ii）**残差法：**最小化 GS 方程残差的 L_2 范数，类似于 DESC [7]。

在实际测试中，对于较小的$N_{par} \le 10$，我们发现变分法表现更好；例如，与残差法相比，它能够更准确地捕捉磁轴的 Shafranov 位移。对于较大的N^{par}，通常更倾向于使用残差法 [7]。

对于残差最小化方法，优化问题表述如下：

$$\min_{\mathbf{X}} \dim(\mathbf{X}) \quad \text{subject to } ||\Delta^* \psi(\mathbf{X}) + \mu_0 R J_\phi(\mathbf{X})|| < \epsilon, \quad (12)$$

其中， ϵ 是指定的容差。在下一节中，我们将展示这一问题的数值解，并将结果与标准高保真代码进行基准比较。

4 数值结果与验证

为量化所提出表示方法的效率和准确性，我们将 MXH-Cheb 基底与由固定边界代码 CHEASE 生成的高保真平衡进行对比 [3]。验证分为两个层次，对应于第3节所概述的策略。

本节需要区分两个不同的目标：

- **正向求解器（第1级）：** 从头求解变分问题，以最少的参数集求得平衡态。这用于检验降阶模型的物理有效性。
- **逆向表示（二级）：** 拟合已有的高保真数值解（ CHEASE ）以求得最紧凑的谱系数。这用于检验基函数在数学上的完备性和收敛性。

4.1 第*1*级：变分参数*GS*求解器

在近似层级上，我们将表示限制为最低阶矩，以模拟快速系统代码的要求。我们采用三矩几何近似，其中径向坐标按几何方式定义为 $\rho = \rho_{geom}$，且小半径 $a(\rho) = a$ 保持恒定。

为尽量减少自由度，几何矩采用低阶多项式近似：

$$h(\rho) = d_1(1-\rho^2), \quad (13)$$
$$\kappa(\rho) = \kappa_0 + (\kappa_a - \kappa_0)\rho^4, \quad (14)$$
$$s_1(\rho) = s_{1a}\rho^2, \quad (15)$$
$$\psi(\rho) = \psi_a[\nu_1\rho^2 + \nu_2\rho^4 + (1-\nu_1-\nu_2)\rho^6], \quad (16)$$

其中，边界参数（κ_a,s_{1a}）是用于定义最后闭合磁通面的输入。该公式仅需求解 5 个自由参数：（$d1, \kappa_0, \nu_1, \nu_2, \psi_a$）。我们的模型与 Haney 模型的主要区别有两点：我们移除了三角度剖面的自由参数，因为它们对变分能量不太敏感；同时在磁通函数 $\psi(\rho)$中增加了一个高阶参数 ν_2 ，以更准确地描述极向磁场 B_P 和安全因子 $q(\rho)$。此外，此处无需采用 [9]中用于描述上下不对称性和 X 点的显式高阶构型函数，因为扩展模型后，通用 MXH 基底能够自然地呈现这些形状。

我们开发了 VEQ（“V”代表变分或 Veloce）代码，通过最小化 MHD拉格朗日量来求解这 5 个参数。图 3展示了与基于网格的GS求解器进行典型比较的结果。尽管极度压缩为 5 个参数，二者仍表现出惊人的一致性。虽然 $\psi(R,Z)$ 的二维形状与精确的数值解相比存在轻微偏差，但一维物理剖面——例如安全因子 $q(\rho)$、极向磁场 $B_P(\rho)$ 以及

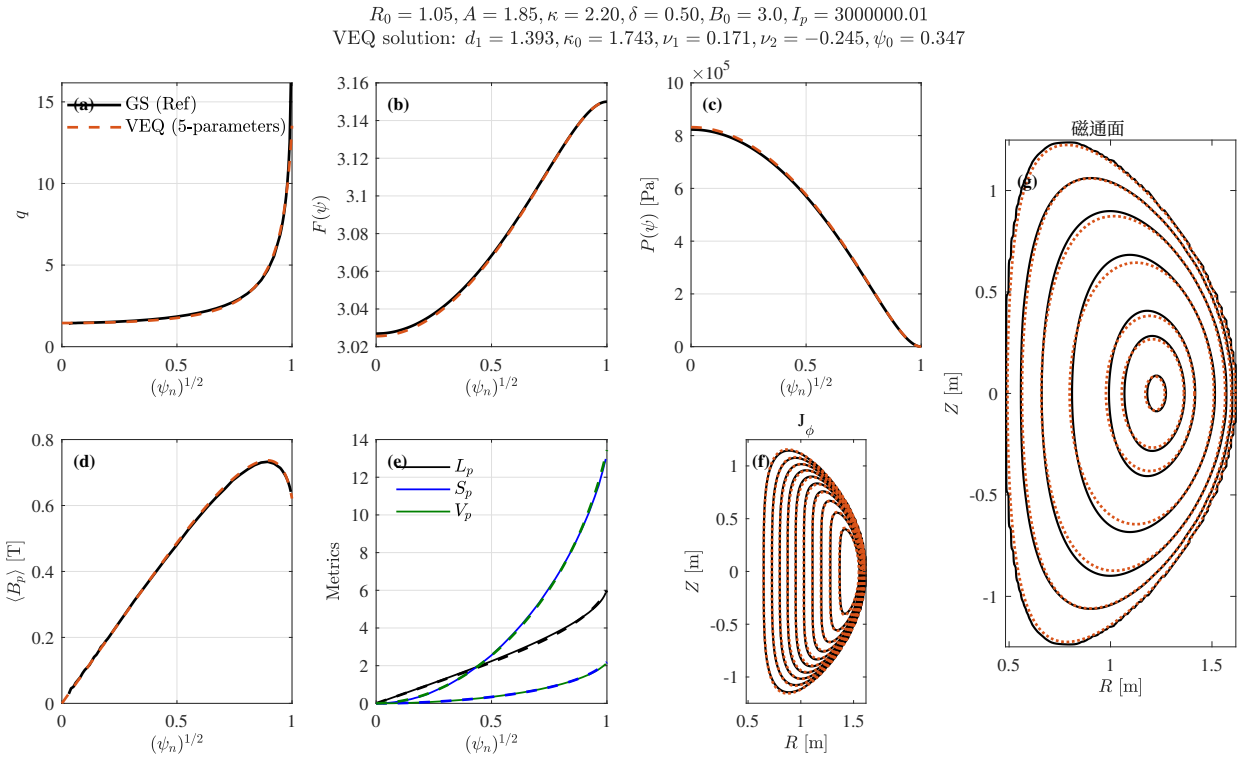


图3. 第1级验证：降阶变分求解器 VEQ（红色虚线）与全网格GS求解器（黑色实线）的对比。VEQ 模型仅使用**5个自由参数**（$d1, \kappa_0, \nu_1, \nu_2, \psi a$）的最小集合来近似平衡。尽管压缩程度极高，一维物理剖面——包括安全因子q、极向场B_p、等离子体体积V_p、表面积S_p和极向弧长L_p——仍与高保真数值解高度吻合（相对误差为 $< 5\%$），验证了其适用于系统代码。

宏观量（V_p、S_p、L_p）——均吻合良好。磁轴位置也得到了准确再现。在大多数测试案例中，总体偏差小于 5%。使用 VEQ 求解这些参数的典型 CPU时间 少于 50 ms [6], ，并且还可以进一步优化。

4.2 二级：高保真表示

对于需要精确局部曲率和梯度信息的应用（例如稳定性分析），我们采用完整的 MXH-Cheb 基来表示 CHEASE 生成的高保真平衡。

4.2.1 几何拟合算法（*ICP*）与基于网格的代码进行基准测试时，一个关键挑战是如何定义几何角。最初尝试采用原始 MXH 研究 [18] 提出的直接包围盒拟合流程，但得到的几何残差仅在 10^{-2}量级，尤其是在形状复杂的等离子体中。为突破这一限制，我们实现了一种迭代最近点（ICP）细化算法。通过迭代优化几何参数，使 MXH 曲线与离散数据点之间的欧几里得距离最小化（而非依赖固定的角度参数化），我们将几何拟合误差降至 $\sim 5 \times 10^{-4}$，从而几乎精确地匹配最后闭合磁通面。这一步对于建立高保真度的谱表示真实基准至关重要。

4.2.2 标准平衡态拟合（三矩最后闭合磁通面）标准系统代码通常使用边界的三矩描述。我们证明，对于此类构型，内部径向剖面只需 13–16 个参数即可准确表示。这相当于将基底截断于 $M = 1$（极向）和 $L \leq 4$（径向）。

图 4 展示了标准 D 形等离子体的拟合结果（$\kappa \approx 1.7$, $\delta \approx 0.4$）。谱拟合（红色虚线）与 CHEASE 参考结果（黑色实线）在视觉上完全重合。几何矩的径向剖面平滑，并能准确捕捉核心变化。

4.2.3 拟合复杂非对称平衡态 对于涉及单零偏滤器的实验构型，等离子体形状会变得上下不对称，并出现一个 X 点。这需要使用高阶谐波。

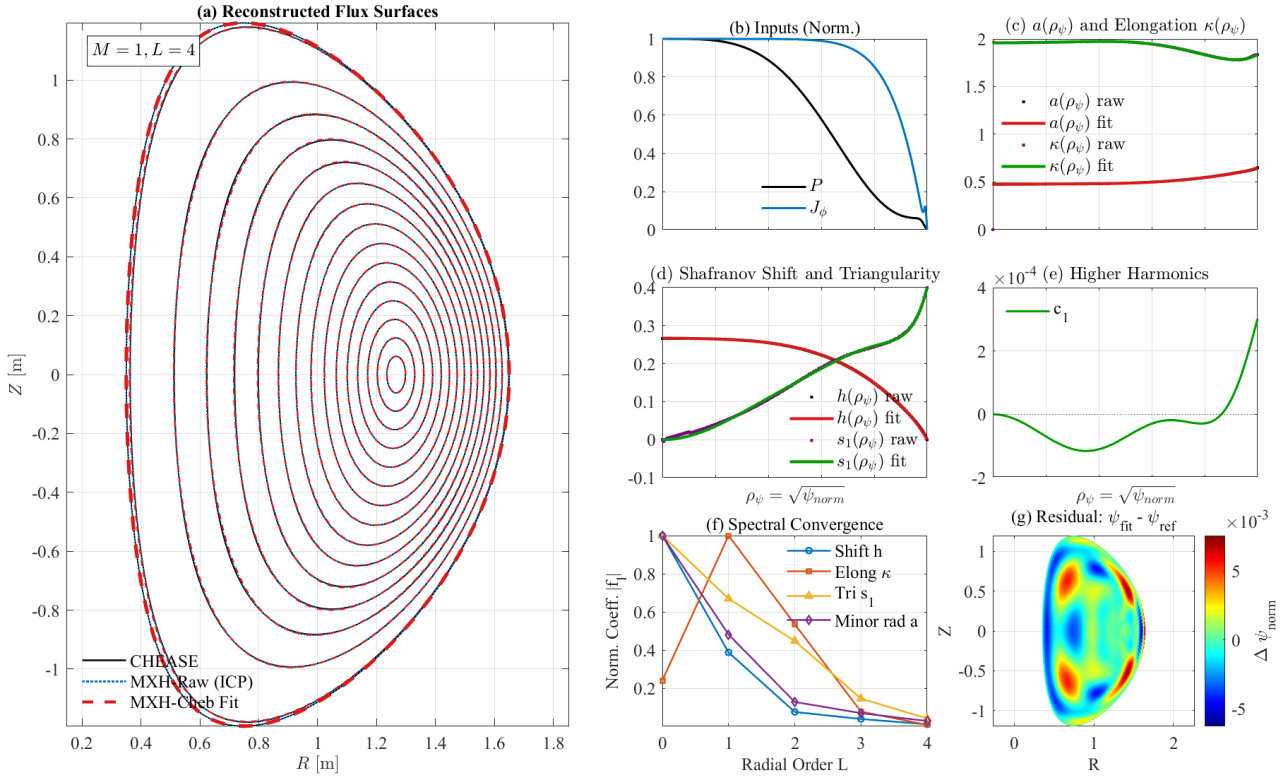


图 4. 二级验证（标准构型）：对具有标准上下对称 D 形的高保真 CHEASE 平衡进行谱表示。(a) 重构的二维磁通面（红色虚线）与参考解（黑色实线）在视觉上完全重合。(b-g) 几何矩和输入物理量的径向剖面。对于这一标准构型，使用由$M = 1$（极向）和$L \leq 4$（径向）构成的截断基，仅需 **≈13–16 个参数**即可准确表示该平衡（$\epsilon \sim 10^{-3}$）。

图 5 展示了对复杂非对称最后闭合磁通面的拟合结果。为捕捉“方形度”以及 X 点附近的局部形变，我们将极向分辨率提高到 $M = 3$，并将径向分辨率提高到 L =16。图 5中的“高次谐波”面板显示，尽管高阶 MXH 谐波（s_2,c_1, ...）的振幅相比主矩较小，但并非为零，对于达到10^{-3}精度水平至关重要。具体而言，c_1 捕捉上下不对称性（椭圆度），而 s_2 捕捉方形度。关于径向剖面，为处理输入压力 $P(\rho)$ 和环向电流密度 $J\phi(\rho)$ 中的强梯度（例如 H 模台基），需要采用更高的径向阶数（$L \sim 12 - 16$）。因此，复杂托卡马克平衡的典型高保真表示需要 $N_{par} \approx 85$ 个参数。

对最后闭合磁通面的几何拟合可将误差降至 5×10^{-4}，但相对于 CHEASE 数据的全局重建残差ϵ 通常会饱和在 5×10^{-3}左右。这种差异并非仅由基截断导致，还涉及数据质量和物理一致性问题。首先，对密集 CHEASE 网格（$N\psi \times N_\theta = 257 \times 1025$）进行目视检查可发现，X点区域（$\theta \sim 2\pi$）附近存在数值振荡，这表明参考解本身可能不够准确。其次，从 CHEASE 提取的原始几何参数在磁轴处通常表现出非零径向导数（例如，$d\delta/d\rho|_{\rho=0} \neq 0$），违反了物理解析性条件。我们的谱表示强制施加正确的奇偶性约束（轴处导数为零），因此自然会偏离“含噪”或非解析的参考数据。由此，谱表示充当了物理信息滤波器，修正了基于网格的解中的数值伪影。

4.3 收敛性及与标准方法的比较

我们评估了相对误差 $\epsilon = ||\psi_{fit} - \psi_{ref}||/||\psi_{ref}||$ 随自由参数总数N_{par}变化的情况。

残差来源分析：尽管

与傅里叶级数的比较：标准傅里叶表示通常需要$m > 12$个谐波，才能在不产生明显吉布斯振荡的情况下解析 D 形。相比之下，MXH-Cheb 方法只需$N_{par} < 100$，即可达到相当的精度。这

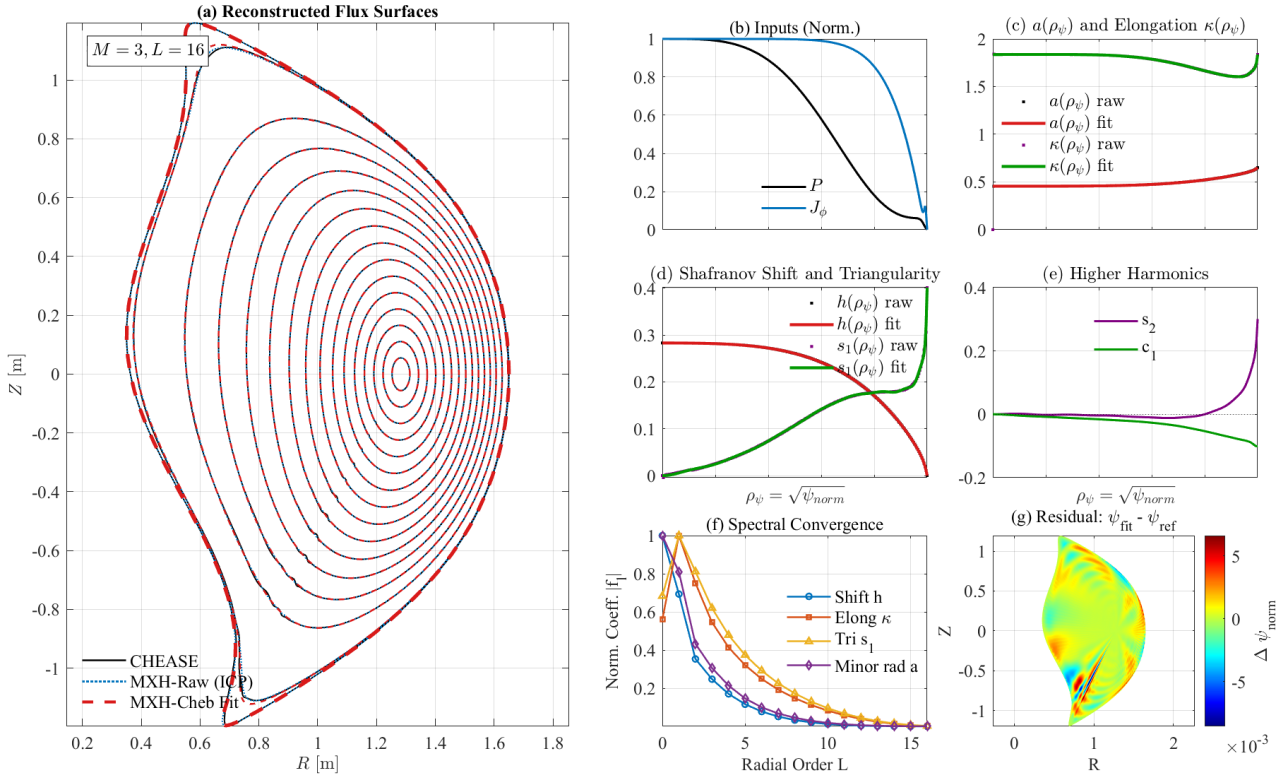


图 5. 二级验证（复杂形状不对称构型）：高保真表示具有显著上下不对称性的单零偏滤器平衡。(a) 使用迭代最近点（ICP）优化进行边界匹配的二维磁通面重构。(g)“高次谐波”面板显示，方形度（$s2$）和椭圆度（$c1$）的径向剖面均为非零，证实简单的 $M = 1$ 模型不足以描述此类状态。要达到这种保真度（解析 X 点邻域和陡峭边缘梯度），通常需要将基底扩展至 $M \approx 3$ 和 $L \approx 16$，使用约 **85** 个参数。

与基于网格的方法相比，这意味着压缩比接近两个数量级（10^4 个自由度）。

总之，“最少参数数量”取决于应用场景：

- **最小 ≈ 3–5：** 用于定性物理分析和全局范围评估（系统代码）。
- **最小 ≈ 15–20：** 用于定量分析，在大多数实验场景下，其结果与标准网格代码难以区分。
- **最小 ≈ 80–100：** 要完整解析复杂形状的 X 点几何和刚性 H 模分布。

5 讨论：对超快速 GS 求解器和人工智能的启示

第 4 节所呈现的结果具有深远影响，超越了标准平衡分析的范畴，尤其对数据驱动等离子体科学和实时控制等新兴领域意义重大。

5.1 克服人工智能的维数灾难

在聚变机器学习（ML）领域，目标数据的高维性是一大瓶颈。训练神经网络来预测表示在 65×65 网格上的二维磁通图 $\psi(R,Z)$，需要包含 4000 多个神经元的输出层。这种“维数灾难”通常需要大量训练数据集来避免过拟合，也使训练过程的计算成本高昂。

通过采用 MXH-Cheb 表示，我们有效地进行了物理信息引导压缩。神经网络无需学习网格值，只需学习从工程执行器（电流、场线圈）到小型参数向量$\mathbf{X}$ 的映射（大小为 ~ 15–100）。这一数量级的缩减显著降低了训练可靠代理模型所需的数据量。

5.2 高效数据库存储

聚变实验数据库和综合建模代码通常会存储数千个平衡时间切片，若以完整二维网格表示，就会造成沉重的存储负担，难以表

示为完整二维网格。所提出的二级表示是一种“无损”压缩格式（在误差范围内，物理上与网格数据无法区分），只需占用极少的空间，就能存储整个放电实验批次。此外，与网格数据不同，这种格式保留了解析导数，因此无需插值，便可在任意空间点精确重建磁场（B_R，B_Z）和电流密度。

5.3 迈向超快速直接求解器

虽然本研究侧重于 表示（逆问题：拟合 **X**给定 ψ），但 MXH-Cheb 基出色的收敛性表明，它也是直接求解器（正问题）的理想候选方案。基于该基底的谱求解器（采用伽辽金方法或配置点方法）有望在毫秒内求解 GS 方程，为实时应用提供一种基于物理的替代方案，取代黑箱神经网络。借助 GPU 加速和自动微分（例如 JAX）等现代数值计算框架，求解时间或可缩短至亚毫秒级。此类求解器的详细实现有待未来研究。该方法与 DESC [7]不同，它采用专为托卡马克形状优化、收敛速度更快的极向 MXH 基。

5.4 尚待解答的问题

一个尚待解答的问题是：我们能否找到比 MXH-Cheb 更好的基函数，进一步减少所需的自由参数数量？MXH 能够高效表示 D 形截面和方形度，但对于极其复杂的几何形状（例如雪花形位形，或带尖角的负三角度形状），采用区域分解或自适应谱元方法或许更有利，可避免使用高阶全局多项式。

6 总结与结论

在这项工作中，我们探讨了一个基本问题：表示 *Grad-Shafranov*方程解所需的自由参数最少有多少个?

通过引入统一谱框架，将用于极向几何的米勒扩展谐波（MXH）参数化与用于径向剖面的平移切比雪夫多项式相结合，我们证明，托卡马克平衡的复杂程度远低于传统基于网格的方法所暗示的程度。研究结果总结如下：

(i) **层次结构：**该方法在单一数学框架内实现了从低阶近似到高保真解的连续过渡，在单一数学框架内将变换为高保真解。

(ii)**第1级（系统代码范围）：**对于全局范围评估，平衡可由**3–5 个参数**充分描述（主要包括位移、拉长率、三角度和剖面标量）。这验证并推广了早期变分模型（如 Haney 等人提出的模型）背后的物理直觉。

(iii) **二级（高保真范围）：**对于精密物理研究（稳定性/输运），使用约**15– 20 个参数**即可达到10^{-2}–10^{-3} 的相对误差。对于具有刚性剖面的复杂非对称构型，只需 ~ 80–100 个参数，便足以捕捉 X 点和 H 模台基等细节。这与标准傅里叶/网格方法形成鲜明对比，后者需要 10^3 ~ 10^5 个自由度。

(iv) **解析性和物理约束符合性：**不同于分段线性网格解，重构的平衡态具有完全的解析性和无穷可微性。我们的分析表明，谱表示起到了滤波器的作用，强制满足物理约束（例如磁轴处导数为零），而这些约束在基于网格的代码中往往会因数值噪声而被破坏。

我们得出结论：对于托卡马克设计和建模中的绝大多数实际应用，“最少参数数量”介于 5 和 20 之间。这种紧凑表示为超快速平衡求解器和高效的基于人工智能的代理模型开辟了新的途径 [24], ，从而促进未来聚变反应堆的优化。

致谢

作者感谢 Wei-qi Meng 提供 CHEASE 数据。Y. Y. Li 感谢国家自然科学基金（项目编号：12405265）的支持。作者还感谢使用人工智能工具协助整理本文并润色语言。

附录A 逆坐标中的 Grad-Shafranov方程

本附录给出了变换到计算域（ρ,θ）中的 Grad-Shafranov（GS）方程的显式形式，以及构造度量张量所需的 MXH基函数的解析导数。

附录*A.1* 度量系数与*Jaco* *bian*

设从磁通坐标到物理坐标的映射为 $R = R(\rho,\theta)$ 和 $Z = Z(\rho,\theta)$。我们定义

变换的雅可比矩阵 J （取向为正）如下：

$$J = R_\rho Z_\theta - R_\theta Z_\rho, \tag{A.1}$$

其中下标表示偏导数（例如，R_ρ 即 $\partial R/\partial\rho$）。请注意，此处的符号约定可确保$J > 0$，前提是采用标准的右手系极向角定义。

极向平面中的协变度量系数为：

$$g_{\rho\rho} = R_\rho^2 + Z_\rho^2, \tag{A.2}$$
$$g_{\theta\theta} = R_\theta^2 + Z_\theta^2, \tag{A.3}$$
$$g_{\rho\theta} = R_\rho R_\theta + Z_\rho Z_\theta. \tag{A.4}$$

因此，逆坐标中的梯度算子为：

$$|\nabla\rho|^2 = \frac{g_{\theta\theta}}{J^2}, \quad |\nabla\theta|^2 = \frac{g_{\rho\rho}}{J^2}, \quad \nabla\rho\cdot\nabla\theta = -\frac{g_{\rho\theta}}{J^2}. \tag{A.5}$$

附录 *A.2* 变换后的平衡方程

GS 算子 $\Delta^*\psi = R^2\nabla\cdot(R^{-2}\nabla\psi)$ 被变换到 (ρ,θ) 坐标中。假设磁通函数仅依赖于 ρ （即 $\psi = \psi(\rho)$），则该算子可简化为：

$$\Delta^*\psi = \frac{R}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\psi_\rho\frac{g_{\theta\theta}}{JR}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\psi_\rho\frac{g_{\rho\theta}}{JR}\right)\right]. \tag{A.6}$$

将其代入平衡条件，我们得到必须通过谱系数最小化的残差方程G：

$$G \equiv \frac{R}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\psi_\rho\frac{R_\theta^2+Z_\theta^2}{JR}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\psi_\rho\frac{R_\rho R_\theta + Z_\rho Z_\theta}{JR}\right)\right] + \frac{1}{\psi_\rho}(FF' + R^2\mu_0 P') = 0. \tag{A.7}$$

对于本文使用的特定映射 $\psi(\rho) = \psi_a\rho^2$，导数就是 $\psi_\rho = 2\psi_a\rho$。

附录 *A.3 MXH* 几何的导数

为计算度量，我们需要坐标函数的导数。MXH 参数化定义如下：

$$R(\rho,\theta) = R_0 + h(\rho) + A(\rho)\cos\bar{\theta}, \tag{A.8}$$
$$Z(\rho,\theta) = Z_0 + v(\rho) + K(\rho)\sin\theta, \tag{A.9}$$

其中，为简洁起见，我们定义 $A(\rho) \equiv \rho a(\rho)$ 和 $K(\rho) \equiv \rho\alpha(\rho)$ $\kappa(\rho)$。扭曲角为 $\theta = \theta + c_0(\rho) + \sum_{m=1}^{M}(c_m\cos m\theta + s_m\sin m\theta)$。

附录 *A.3.1* 一阶导数 相对于计算坐标的导数为：

$$R_\theta = -A(\rho)\sin\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}_\theta, \tag{A.10}$$
$$Z_\theta = K(\rho)\cos\theta, \tag{A.11}$$
$$R_\rho = h'(\rho) + A'(\rho)\cos\bar{\theta} - A(\rho)\sin\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}_\rho, \tag{A.12}$$
$$Z_\rho = v'(\rho) + K'(\rho)\sin\theta. \tag{A.13}$$

这里，角度函数的导数为：

$$\bar{\theta}_\theta = 1 + \sum_{m=1}^{M} m(-c_m\sin m\theta + s_m\cos m\theta), \tag{A.14}$$
$$\bar{\theta}_\rho = c_0'(\rho) + \sum_{m=1}^{M}(c_m'\cos m\theta + s_m'\sin m\theta). \tag{A.15}$$

附录*A.3.2* 二阶导数 这些项对于构造 Newton-Krylov 求解器中残差向量的雅可比矩阵或计算磁曲率至关重要。

对于 Z 坐标：

$$Z_{\theta\theta} = -K(\rho)\sin\theta, \tag{A.16}$$
$$Z_{\rho\theta} = K'(\rho)\cos\theta, \tag{A.17}$$
$$Z_{\rho\rho} = v''(\rho) + K''(\rho)\sin\theta. \tag{A.18}$$

For the R-coordinate:

$$R_{\theta\theta} = -A\left[\cos\bar{\theta}(\bar{\theta}_\theta)^2 + \sin\bar{\theta}\,\bar{\theta}_{\theta\theta}\right], \tag{A.19}$$
$$R_{\rho\theta} = -A'\sin\bar{\theta}\,\bar{\theta}_\theta - A\left[\cos\bar{\theta}\,\bar{\theta}_\rho\bar{\theta}_\theta + \sin\bar{\theta}\,\bar{\theta}_{\rho\theta}\right], \tag{A.20}$$
$$R_{\rho\rho} = h'' + A''\cos\bar{\theta} - 2A'\sin\bar{\theta}\,\bar{\theta}_\rho - A\left[\cos\bar{\theta}(\bar{\theta}_\rho)^2 + \sin\bar{\theta}\,\bar{\theta}_{\rho\rho}\right]. \tag{A.21}$$

注意，$\bar{\theta}_{\theta\theta}$、$\bar{\theta}_{\rho\theta}$ 和 $\bar{\theta}_{\rho\rho}$ 均可通过对调和级数直接求导得到。

附录 *A.4* 径向基底导数

剖面函数（例如，$h(\rho)$、$A(\rho)$）展开为$f(\rho) = \sum^{L}{}_{l=0} f_l u_l(\rho)$。关于 ρ 的导数通过平移切比雪夫多项式的递推关系计算。

令 $x = 2\rho^2 - 1 \in [-1,1]$。基函数为$u_l(\rho) = (1-\rho^2)T_l(x)$。导数根据链式法则求得：

一阶导数（f_ρ）：

$$\frac{du_l}{d\rho} = -2\rho T_l(x) + 4\rho(1-\rho^2)\frac{dT_l}{dx}. \tag{A.22}$$

二阶导数（$f_{\rho\rho}$）：

$$\frac{d^2u_l}{d\rho^2} = -2T_l(x) + (4-20\rho^2)\frac{dT_l}{dx} + 16\rho^2(1-\rho^2)\frac{d^2T_l}{dx^2}. \tag{A.23}$$

切比雪夫多项式的导数，记作$T'_l(x) \equiv dT_l/dx$ 和$T''_l(x) \equiv d^2T_l/dx^2$，，可通过递归生成：

$$T_l'(x) = 2T_{l-1}(x) + 2xT_{l-1}'(x) - T_{l-2}'(x), \tag{A.24}$$
$$T_l''(x) = 4T_{l-1}'(x) + 2xT_{l-1}''(x) - T_{l-2}''(x). \tag{A.25}$$

初始化值为：

- $l = 0$: $T_0 = 1, T\prime_0 = 0, T\prime\prime_0 = 0$.
- $l = 1$: $T_1 = x$, $T\prime_1 = 1$, $T\prime\prime_1 = 0$。

这种递归公式能够高效且精确地计算任意阶的径向导数。还需注意的是，$\{f_l\}$ 的导数也可以通过解析方法获得，这可能有助于对 $\mathbf{X}$ 中的参数值进行数值求解。

参考文献

[1]J. P. Freidberg，《理想磁流体动力学》，Plenum Press，纽约，1987年。[2]S. Jardin，《等离子体物理计算方法》，CRC Press，2010年。[3]H. Lutjens、A. Bondeson 和 O. Sauter，《用于环形磁流体动力学平衡的 CHEASE 代码》，《计算机物理通讯》97（1996年）219–260。[4] J. Lee 和 A. Cerfon，《ECOM：一种快速且精确的环形轴对称磁流体动力学平衡求解器》，《计算机物理通讯》190（2015年）72–88。[5]S. W. Haney、W. L. Barr、J. A. Crotinger、L. J. Perkins、C. J. Solomon、E. A. Chaniotakis、J. P. Freidberg、J. Wei、J. D. Galambos 和 J. Mandrekas，《用于托卡马克实验与反应堆系统分析的“SuperCode”》，《聚变技术》21，3P2A，1749–1758（1992年）。[6] C. X. Chen、H. S. Xie 和 W. Kang，《有无平衡求解器时 ENN 球形环的托卡马克系统代码结果比较》，已投稿（2026年）。[7] D. W. Dudt 和 E. Kolemen，《DESC：仿星器平衡求解器》，《等离子体物理》27，102513（2020年）。[8] S. W. Haney，《异形托卡马克的设计与优化方法》，博士论文，麻省理工学院，1988年。[9] S. W. Haney、J. P. Freidberg 和 C. J. Solomon，《一种用于计算磁流体动力学平衡的快速、易用代码》，《物理学中的计算机》9，216（1995年）。[10]G. O. Ludwig，《Grad-Schluter-Shafranov 方程的直接变分解》，《等离子体物理与受控聚变》37，6，633（1995年）。[11] R. Fitzpatrick，《逆纵横比展开托卡马克平衡》，《等离子体物理》31，082505（2024年）。[12] L. L. Lao、S. P. Hirshman 和 R. M. Wieland，《Grad–Shafranov 方程的变分矩解》，《流体物理学》24，1431（1981年）。[13]L. L. Lao、R. M. Wieland、W. A. Houlberg、S. P. Hirshman，VMOMS——一种计算机代码，用于求解 Grad-Shafranov 方程的矩解，《计算机物理通讯》27，2，129–146（1982年）。[14] L. L. Lao，《用于计算磁流体动力学平衡的变分矩方法》，《计算机物理通讯》31，2，201（1984年）。[15] L. E. Zakharov 和 V. D. Shafranov，载于 M. A. Leontovich 编《等离子体物理评论》第11卷，Consultants Bureau，纽约-伦敦，1986年，第153页。[16] G. V. Pereverzev 和 P. N. Yushmanov，《ASTRA：自动化输运分析系统》，马克斯·普朗克等离子体物理研究所，IPP 5/98，2002年。[17] L. Guazzotto 和 J. P. Freidberg，《简单、通用、真实、稳健的解析托卡马克平衡解。第1部分：限制器和偏滤器托卡马克》，《等离子体物理杂志》（2021年），87，905870303。[18]R. Arbon、J. Candy 和 E. A. Belli，《快速收敛的磁通面形状参数化》，《等离子体物理与受控聚变》63（2021年）012001。[19] G. Snoep、J. T. W. Koenders、C. Bourdelle、J. Citrin 和 JET 合作者，《通过约束非线性优化改进磁通面参数化》，《等离子体物理》30，063906（2023年）。[20]O. Sauter 和 S.Yu. Medvedev，《托卡马克坐标约定：COCOS》，《计算机物理通讯》184（2013年）293–302。[21]O. Meneghini、T. Slendebroek、B.C. Lyons、K. McLaughlin、J. McClenaghan、L. Stagner、J. Harvey、T.F. Neiser、A. Ghiozzi、G. Dose、J. Guterl、A. Zalzali、T. Cote、N. Shi、D. Weisberg、S.P. S mith、B.A. Grierson 和 J. Candy，《FUSE（聚变综合引擎）：用于聚变先导电站集成设计的下一代框架》，arXiv:2409.05894（2024年）。[22]R. Miller、M. Chu、J. Greene、Y. Lin-Liu 和 R. Waltz，《非圆形有限纵横比局域平衡模型》，《等离子体物理》5（1998年）973。[23]J.F. Artaud、F. Imbeaux、J. Garcia、G. Giruzzi、T. Aniel、V. Basiuk、A. Bécoulet、C. Bourdelle、Y. Buravand、J. Decker、R. Dumont、L.G. Eriksson、X. Garbet、R. Guirlet、G.T. Hoang、P. Huynh、E. Joffrin、X. Litaudon、P. Maget、D. Moreau、R. Nouailletas、B. Pégourié、Y. Peysson、M. Schneider 和 J. Urban，《METIS：用于场景设计的快速集成托卡马克建模工具》，《核聚变》58（2018年）105001。[24] G.H. Zheng、S.F. Liu、H.S. Xie、X. Gu、Z.Y. Chen、X.C. Lun、Y. Liu、J. Li、D. Guo、R.Y. Tao、H.Y. Zhao、Y.P. Zhang、T.T. Sun、Y.N. Xu、Y.J. Hu 和 Z.Y. Yang，《EFIT-mini：由嵌入式多任务神经网络驱动的平衡反演算法》，《核聚变》65（2025年）106008。