arXiv:2601.02951v1 [math.OC] 6 Jan 2026

作为端口哈密顿系统和梯度系统的Hopfield神经网络

Arjan van der Schaft *

2026年1月7日

摘要

本文从系统理论的角度重新审视连续Hopfield网络的结构。通过采用一种涉及非线性电容器的新型电网络解释，本文证明，只要满足额外的无源性条件，Hopfield 网络就可以采用端口哈密顿表述。随后，本文证明，任意Hopfield网络都可以表示为梯度系统，其黎曼度量由非线性电容器中储存的总能量的海森矩阵的逆矩阵给出。另一方面，Hopfield所采用的著名“能量”函数实际上是该梯度系统的耗散势，并且本文证明这一势满足一个可用于分析和互连的耗散不等式。

关键词：神经网络动力学、非线性电容器、端口哈密顿系统、梯度系统、耗散性

1 引言

在 [6] 中，Hopfield 提出了他此前在 [5]中介绍的离散神经网络的连续（“分级响应”）版本。对于离散模型，人们曾将其与伊辛自旋系统作类比；而这一连续版本则强调它与电网络的相似性，这与例如霍奇金-赫胥黎模型中对神经元的标准表征一致

*A.J. van der Schaft 任职于荷兰格罗宁根大学 Bernoulli数学、计算机科学与人工智能研究所、Jan C. Willems系统与控制中心，邮政信箱407号，9700 AK，A.J.van.der.Schaft@rug.nl

模型。在本文中，我们将重新审视连续Hopfield网络的电网络表征。首先，将 [6] 中的“放大器”或“激活函数”纳入神经元的电容行为，从而把神经元描述为与线性电阻并联的非线性电容器。这样，我们便能将网络的总能量定义为储存在这些非线性电容器中的电能之和。随后将证明，只要满足关于网络能量耗散的一项附加条件，该网络就具有端口哈密顿表述。接着将证明，任意Hopfield 网络都定义了一个梯度系统，其黎曼度量由总储存能量的海森矩阵的逆给出。此外，该梯度系统的耗散势与Hopfield在 [6] 中确定的函数相同（尽管当时称之为“能量”，严格来说它的量纲是功率）。这扩展了此前给出的Hopfield 网络梯度形式 [11, 3]。此外，我们将看到，该耗散势可作为耗散不等式的储存函数；这一耗散不等式不同于端口哈密顿表述中的标准无源性耗散不等式。事实上，对于恒定输入，这一替代耗散不等式在 [6] 中被关键性地用于证明Hopfield 网络的联想记忆特性；数学细节见 [4, 10, 15, 11]。

2 霍普菲尔德网络的电网络表述

[6] 中提出的（连续）霍普菲尔德网络方程为

$$C\dot{v} = TV - R^{-1}v + I. \tag{1}$$

此处， $v \in \mathbb{R}^n$ 和 $V \in \mathbb{R}^n$ 均为网络n 节点（即神经元）处的电压势向量。如 [6]所示， v_i 可视为第 i个神经元的平均胞体电压势，而 V_i 则是其输出势（放电率的短期平均值）。重要的是，假设 V_i与 v_i 之间通过一个函数相关

$$V_i = g_i(v_i), \tag{2}$$

属于$sigmoid$ 类型，其中 $g_i'(v_i) > 0$。在 [6] 中，将 g_i 与 v_i 和 V_i联系起来的函数称为放大器；在后来的论文中也称为激活函数。此外， C 是一个由电容 $C_i > 0$构成的对角矩阵， R 是一个对角

电阻矩阵 $R_i > 0$ （二者均源于第 i 个细胞膜），而 I是网络节点处输入电流的向量。最后， $n \times n$ 矩阵 T 中的第（i, j）个元素描述了从神经元 i 到神经元 j的突触连接强度。假设矩阵 T 为对称矩阵，且通常是不定的。

我们先将 (1) 改写为广义电网络的方程。与 [6] 中的表述主要不同之处在于，将电容值为 C_i 的线性电容器与“放大器”（2）组合成非线性电容器。为此，记 $q_i := C_i v_i$ 为第 i 个节点的电荷，并定义函数 $h_i(q_i) := g_i(\frac{q_i}{C_i})$，其中 $h_i'(q_i) > 0$。于是存在函数 $H_i(q_i)$（除相差一个常数外唯一），使得 $h_i(q_i) = H_i'(q_i)$，且 $H_i''(q_i) > 0$（这意味着严格凸性）。因此，对于每个节点，电荷 q_i 与输出电压 V_i 之间的关系为

$$V_i = g_i(v_i) = \frac{dH_i}{dq_i}(q_i), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{3}$$

这定义了一个非线性电容器，其储存的电能为 $H_i(q_i)$。因此，霍普菲尔德网络中的第 i 个神经元可表示为一个与线性电阻 R_i并联的非线性电容器。再加上表示神经元间相互作用的矩阵 T，便构成了一个广义电网络。（称为“广义”，是因为T 中的元件通常并不对应于电阻或任何其他电网络元件。）该广义电网络的总电能由凸函数给出

$$H(q) := \sum_{i=1}^{n} H_i(q_i), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q^\top \partial q}(q) > 0, \tag{4}$$

其中 $q \in \mathbb{R}^n$ 为非线性电容器的电荷向量。

此外，令 $H_i^*(V_i) = \sup_{q_i}[q_i V_i - H_i(q_i)]$ 为 $H_i(q_i)$ 的 勒让德-芬切尔变换。则 (3) 的逆变换为 $q_i = \frac{dH_i^*}{dV_i}(V_i)$，因此 $q = \frac{\partial H^*}{\partial V}(V)$，其中$H^*(V) = \sum_i H_i^*(V_i)$，且 V为 n个神经元的输出电压向量。按照此记法，Hopfield 在 [6] 中引入的“能量”函数为

$$P(V, I) := -\frac{1}{2} V^\top T V + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i C_i} H_i^*(V_i) - V^\top I, \tag{5}$$

并且可以验证，霍普菲尔德网络 (1) 具有如下形式

$$\dot{q} = -\frac{\partial P}{\partial V}(V, I), \quad V = \frac{\partial H}{\partial q}(q) = -\frac{\partial P}{\partial I}(V, I). \tag{6}$$

这些方程与 [6], 中使用的方程相同，此外， V 被写成总能量 $H(q)$ 的梯度向量。不过请注意，在电网络解释中， P 并非系统能量（尽管术语中常有此用法），而是具有功率物理量纲的耗散势。事实上，表达式$P(V,\ 0)$中的各项与非线性电网络理论中使用的余含量函数相似。

基于霍普菲尔德网络的电网络表示（6），我们将在接下来的两节中研究其端口哈密顿和梯度系统表述。

3 霍普菲尔德网络的端口哈密顿表述

回顾一下，参见例如 [14], ，一大类具有输入 $u \in \mathbb{R}^m$、输出 $y \in \mathbb{R}^n$ 和状态 $x \in \mathbb{R}^n$ 的端口哈密顿系统可表示为如下形式:

$$\begin{bmatrix} -\dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J(x) & -G(x) \\ G^\top(x) & M(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial e}(x,e,u) \\ \frac{\partial P}{\partial u}(x,e,u) \end{bmatrix}, \quad e = \frac{\partial H}{\partial x}(x), \tag{7}$$

其中，矩阵 $J(x)$ 和 $M(x)$ 均为斜对称矩阵， H是哈密顿量（总能量），而耗散势 P: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$满足

$$e^\top \frac{\partial P}{\partial e}(x,e,u) + u^\top \frac{\partial P}{\partial u}(x,e,u) \geq 0, \quad \text{for all } x,e,u. \tag{8}$$

可以看出，性质（8）等价于

$$\frac{d}{dt}H - u^\top y = -\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^\top}(x) & u^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{x} \\ y \end{bmatrix} = -e^\top \frac{\partial P}{\partial e}(x,e,u) - u^\top \frac{\partial P}{\partial u}(x,e,u) \leq 0, \tag{9}$$

因此也等价于满足耗散不等式 $\frac{d}{dt}H \leq u^\top y$; 这通常称为无源性（能量 H 只会因外部功率供给 $u^\top y$而增加）。因此，后文将把（8）称为无源性条件。

请注意，式（7）中的复合（$n+m$）×（$n+m$）斜对称矩阵刻画了系统内部的无损能量交换（例如，动能

转化为势能，反之亦然）。另一方面，弛豫系统是式（7）中斜对称部分为零的端口哈密顿系统；此外，假设耗散势 $P(x,\ e,\ u)$ 与 x 无关，且哈密顿量 H 的海森矩阵为正定矩阵（因此严格凸）。因此，弛豫系统可表示为 [13]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial P}{\partial e}(e,u), \qquad e=\frac{\partial H}{\partial x}(x), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^\top \partial x}(x)>0, \\ y &= \frac{\partial P}{\partial u}(e,u). \end{aligned} \tag{10}$$

备注 3.1。如果假设 P 是凸的，则还可以将其扩展到不可微的 P；将梯度替换为次梯度，参见 [2]。

由此可知，霍普菲尔德网络(6)是一个松弛系统，当且仅当由(5)给出的 P 满足无源性条件(8)，该条件可写为

$$V^\top R^{-1} v \geq V^\top T V, \quad \text{for all } v, V \text{ related by (2)}. \tag{11}$$

这意味着，网络节点处的总能量耗散应大于或等于从一个节点流向另一个节点的总功率。一般而言（取决于 R、 T、 g_i），不等式(11)不一定对所有 v 和 V都成立，在这种情况下会出现内部有源 行为。另一方面，具体地假设 g_i 是介于-1 和 1 之间的 S形函数（例如， $g_i(v_i) = \tanh(\lambda_i v_i)$），那么对于足够大的 v，(11)将 始终成立（因此对于足够接近 n-立方体边界的 V 也是如此（$-1,\ 1)^n$）。这种弱化的无源性性质在 [9]中被称为半无源性：无源性 $\frac{d}{dt}H \leq V^\top I$ 仅对距离原点足够远的状态成立。正如 [9, 12]中所讨论的，系统的半无源性意味着，对于满足 $y^\top \phi(y) \leq 0$ 的每个反馈 $u=\phi(y)$，闭环系统都具有最终有界解；也就是说，每个解都会在有限时间内进入一个紧集，并一直停留在那里。

4 霍普菲尔德网络的梯度形式

霍普菲尔德神经网络的半弛豫系统表述（6）立即将其描述为梯度系统。事实上，考虑任意半弛豫系统（10），其中 P 不一定满足无源性条件（8）。再次记 $H^*(e) = \sup_x [x^\top e - H(x)]$ 为 $H(x)$ 的勒让德-芬切尔变换，其中 $e = \frac{\partial H}{\partial x}(x)$ 通过凸性定义了一个映射$x \longmapsto e$，该映射在其像上可逆。众所周知，

$$x = \frac{\partial H^*}{\partial e}(e), \quad \frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^\top \partial x}(x) \right)^{-1}. \tag{12}$$

将 $\dot{x} = \frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e)\,\dot{e}$ 代入（10），可知 [13] 在 e-坐标下，半弛豫系统（10）具有如下形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e)\dot{e} &= -\frac{\partial P}{\partial e}(e,u) \\ y &= \frac{\partial P}{\partial u}(e,u). \end{aligned} \tag{13}$$

这定义了一个梯度系统 [13]，其具有海森黎曼度量 $\frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e)$和势函数 P。（在推导 RLC 电网络[1, 7]的 Brayton-Moser 方程时，也曾对二次型 H 使用类似的推理。）

梯度系统表述 (13) 提供了有关动力学的有用信息。特别是，当 u 为常数时，函数 P 沿轨迹递减，但并非相对于 e 空间上的欧几里得内积，而是相对于海森矩阵 $\frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e)$。更一般地，参见[13]，可得出以下耗散不等式（它与无源性耗散不等式 $\frac{d}{dt}H \le y^\top u$有所不同）：

$$\frac{d}{dt}P = \frac{\partial P}{\partial e^\top}(e,u)\dot{e} + \frac{\partial P}{\partial u^\top}(e,u)\dot{u} = -\dot{e}^\top \frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e)\dot{e} + y^\top \dot{u} \le y^\top \dot{u}. \tag{14}$$

特别地，这意味着以下结果。

命题 4.1。考虑(13) 所示系统，其中常数 $u = \bar{u}$。那么，对于 e 空间中的任意不变紧集 $\mathcal{K}$，从 $\mathcal{K}$ 出发的解都收敛到不变集 $\{e \in \mathcal{K} \mid \dot{e} = 0\} = \{e \in \mathcal{K} \mid \frac{\partial P}{\partial e}(e, \bar{u}) = 0\}$。因此，对于 $\mathcal{K}$ 中的所有初始条件，解都将收敛到(13)的平衡点。

证明。直接应用 LaSalle 不变性原理以及在 $u = \bar{u}$ 为常数时的 (14)，可知从 $\mathcal{K}$ 出发的解收敛到包含于 $\{e \in \mathcal{K} \mid \dot{e}^\top \frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e)\,\dot{e} = 0\}$ 中的最大不变集。由于 $\frac{\partial^2 H^*}{\partial e^\top \partial e}(e)$ 正定，该集合即为 $\{e \in \mathcal{K} \mid \dot{e} = 0\}$。 ■

将其应用于 Hopfield 网络，可得到 Hopfield 网络在 V 坐标下的以下梯度形式:

$$\frac{\partial^2 H^*}{\partial V^\top \partial V}(V)\dot{V} = -\frac{\partial P}{\partial V}(V,I), \quad -V = \frac{\partial P}{\partial I}(V,I), \tag{15}$$

其中 H 和 P 如式 (4)、(5) 所定义。（这一点此前已在 [11, 3]中得到认识，但当时并未将黎曼度量识别为能量 H的海森矩阵的逆矩阵。）此外，还可得到耗散不等式（关于 RLC 网络中的类似结果，参见 [8] ）

$$\frac{d}{dt}P = \frac{\partial P}{\partial V^\top}(V,I)\dot{V} + \frac{\partial P}{\partial I^\top}(V,I)\dot{I} = -\dot{V}^\top \frac{\partial^2 H^*}{\partial V^\top \partial V}(V)\dot{V} - V^\top \dot{I} \le -V^\top \dot{I}.$$

(16)

Hopfield 网络的梯度形式有一个特殊之处：由于函数 g_i （因此 h_i）属于 Sigmoid 型，梯度系统 (15) 的 V空间是有界的。例如，参见式 (11) 下方的讨论：若 $g_i(v_i) = \tanh(\lambda v_i)$ $\lambda \in \mathbb{R}$， $i = 1, \cdots, n$，则梯度形式 (15) 的状态空间为开 n立方体 $(-1, 1)^n$。因此，将命题 4.1 应用于 (15)，可得到下文 [6]中部分结果的一个加强版本。

命题 4.2。考虑常数$I = I$ 以及在 -1 与1之间的 *Sigmoid* 型 g_i 的霍普菲尔德神经网络（15）。则在 V空间中的紧集$\mathcal{K}_\epsilon$：
$= \{V \mid |V_i| \leq 1 - \epsilon, i = 1, \cdots, n\}$ 对于足够小的 ϵ 是不变的。因此，对于足够小的 ϵ，从 $\mathcal{K}_\epsilon$出发的解将收敛到 $P(V, I)$ 的局部极值。

证明。（略） $\mathcal{K}_\epsilon$ 对于足够小的 ϵ 是不变这一事实已在 [11], 第 203 页证明。其余部分由命题 4.1 得出。关于各种数学细节及扩展，请参见 [4, 10, 15]。■

因此，通常情况下，常数 $I = I$的霍普菲尔德网络的解会收敛到 $P(V, I)$ 的局部极小值，对应于“联想记忆”[6]。

注 4.3。注意，对于 $\lambda \to \infty$（Sigmoid 函数锐化），函数 $V = \tanh(\lambda v)$“收敛”到如下关系：当 $v < 0$时为 $V = -1$，当$v > 0$时为 $V = 1$，当 $v = 0$ 时为 $V \in [-1, 1]$。满足 $K'_\lambda(v) = \tanh(\lambda v)$的相应凸函数 $K_\lambda(v)$“收敛”到凸函数 $K(v) = |v|$。其勒让德变换为：当 $-1 \leq V \leq 1$时为 $K^*(V) = 0$，当 $V < -1$ 或 $V > 1$时为 $K^*(V) = \infty$。因此，对于 $\lambda \to \infty$，式（5）中 $H_i^*(V_i)$项的净效应与 $V_i = \tanh(\lambda v_i)$一起在受约束的 V空间 $(-1, 1)^n$上收敛于零，从而 $P(V, I)$收敛于$-\frac{1}{2} V^\top T V - V^\top I$。

最后，考虑 Hopfield 网络的互连和控制很有意义。我们对式 (15) 稍作推广，将节点（神经元）划分为端节点和隐节点，其中隐节点指零外部电流的节点（不与环境相互作用）。由此得到梯度系统

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H^*}{\partial V^\top \partial V}(V)\dot{V} &= -\frac{\partial P}{\partial V}(V, I^t) \\ -V^t &= \frac{\partial P}{\partial I^t}(V, I^t) \end{aligned} \tag{17}$$

其输入 I^t 等于端节点处的外部电流），输出为相应的电压势 $-V^t$。考虑两个 Hopfield 网络，分别以 α 和 β 为索引，可通过施加某个矩阵 S 来将它们互连，$I_\alpha^t = S^\top V_\beta^t$，$I_\beta^t = SV_\alpha^t$。这意味着 $\dot{I}_\alpha^t = S^\top \dot{V}_\beta^t$，$\dot{I}_\beta^t = S\dot{V}_\alpha^t$，并得到一个互连 Hopfield 网络，其总能量等于 $H_\alpha(q_\alpha) + H_\beta(q_\beta)$，耗散势为

$$P_\alpha(V_\alpha, 0) + P_\beta(V_\beta, 0) + \left(V_\alpha^t\right)^\top S V_\beta^t \tag{18}$$

5 结语

我们通过将对应于细胞膜的线性电容器与 Sigmoid 型“放大器”结合起来构成非线性电容器，重新审视了 [6] 中给出的连续Hopfield网络的电网络解释。这自然导出一个半弛豫系统，在远离状态空间原点的区域内，该系统相对于总电能具有足够的无源性。进而，这导出一种梯度系统表述，其黎曼度量由总能量的海森矩阵的逆给出，耗散势的物理量纲为功率。这似乎与 [5], 中的离散神经网络模型形成对照；该模型“与伊辛模型同构”，因此 $-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} T_{ij} V_i V_j - \sum_i V_i I_i$ 其量纲更可能是能量。最后，涉及耗散势的另一种耗散不等式（16）为霍普菲尔德网络的互连与控制提供了出发点。

–

参考文献

[1] R.K. Brayton, J.K. Moser, 《非线性网络理论 I》, 《应用数学季刊》 22(1):1–33, 1964年。[2] M.K. Camlibel, A.J. van der Schaft, 端口哈密顿系统理论与单调性, SIAM《控制与优化杂志》61(4):2193–2221, 2023年。[3] A. Halder, K.F. Caluya, B. Travacca, S.J. Moura, Hopfield神经网络流：几何视角, IEEE《神经网络与学习系统汇刊》 31(11):4869–4880, 2020年。[4] M.W. Hirsch, 神经网络中的收敛性, 国际神经网络联合会议论文集, 第II卷, 第115–125页, 1987年。

[5] J.J. Hopfield，具有涌现集体计算能力的神经网络与物理系统，美国国家科学院院刊79:2554–2558，1982年。[6] J.J. Hopfield，具有分级响应的神经元拥有类似双态神经元的集体计算特性，美国国家科学院院刊81:3088–3092，1984年。[7] D. Jeltsema, J.M.A. Scherpen，非线性网络与系统的多域建模：基于能量和功率的视角，IEEE《控制系统杂志》，2009年8月，第28–59页。[8]R. Ortega, D. Jeltsema, J.M.A. Scherpen，功率整形：非线性RLC电路稳定化的新范式，IEEE《自动控制汇刊》48(10):1762–1767，2003年。[9] A. Pogromsky, H. Nijmeijer，互耦动态系统的协同振荡行为。IEEE《电路与系统汇刊 I》48(2):152–162，2001年。[10] F.M.A. Salam, Y.-W. Wang, M.-R. Choi，关于动态反馈神经网络的分析，IEEE《电路与系统汇刊》CAS-38:196–201，1991年。[11] S. Sastry，《非线性系统：分析、稳定性与控制》，IAM，《系统与控制》，施普林格，纽约，1999年。[12] E. Steur, I. Tyukin, H. Nijmeijer，神经元振荡器的半无源性与同步，IFAC会议论文集42(7):21-26，2009年。[13] A.J. van der Schaft，非线性系统的互易性，SIAM《控制与优化杂志》62(6):3019–3041，2024年。[14] A. van der Schaft and D. Jeltsema，端口哈密顿系统理论：入门概述。《系统与控制基础与趋势》1(2-3):173–378，2014年。[15] M. Vidyasagar，具有多线性目标函数的模拟神经网络的寻最小值性质，IEEE《自动控制汇刊》40(8): 1359–1375，1995年。