arXiv:2601.02974v1 [math.AG] 6 Jan 2026

# 借助 plt 旗与凸几何研究 Fano 加权超曲面的 K-稳定性

LIVIA CAMPO、KENTO FUJITA、TARO SANO 和 LUCA TASIN

Abstract. 我们结合双有理几何与凸几何方法，建立了研究加权 Fano 超曲面 K-稳定性的框架。作为应用，我们证明，所有指标为 1 且权重大于 1 的权重至多有两个的拟光滑加权 Fano 超曲面都是 K-稳定的。我们还构造了若干低指标拟光滑加权 Fano 超曲面的 K-不稳定实例。

为证明这些结果，我们运用 Abban–Zhuang 方法建立稳定性阈值的下界，该方法将问题化归为低维情形。我们方法的一个关键特点是使用不一定可容许的 plt 旗。

## 1. 引言

K-稳定性已成为研究 Fano 簇的核心概念，可视为 K¨ahler–Einstein 度量存在性的代数几何对应物（参见 [CDS15a, CDS15b, CDS15c, Tia15]）。它在双有理几何、模空间理论与复微分几何之间架起桥梁，并在 Fano 簇及其退化的分类中发挥着关键作用。关于这一主题的全面论述，读者可参见[Xu25]。例如，维数为 2 和 3 的 Fano 流形已得到分类，其 K-稳定性也已受到深入研究（参见 [Tia90], [ACC+23]及其中的参考文献）。研究 K-稳定性最有效的方法之一，是考察与反典范除子相关的稳定性阈值 $-K_X$ [Fuj19b, Li17, FO18, BJ20, LXZ22]。其中，稳定性阈值提供了一个尤为具体的数值判据：一个 klt Fano 簇 $X$ 是 K-稳定的，当且仅当 $\delta(X; -K_X) > 1$。

在 Fano 簇中，加权射影空间中的超曲面构成了一类尤为自然且丰富的对象。它们推广了普通射影空间中的光滑超曲面，同时也允许出现种类繁多的奇点和几何性质（参见 [Mor75，Dol82，IF00]）。尽管人们预期每个次数至少为 3 的光滑 Fano 超曲面都是 K-稳定的（已知结果见小节 1.2 ），但在加权情形下，情况则复杂和微妙得多（见小节 1.3）。

本文首次系统研究拟光滑加权 Fano 超曲面的 K-稳定性。我们的主要目标是发展有效方法来估计其稳定性阈值，并找出明确的 K-稳定例族。我们提出的方法结合了双有理几何与凸几何中的方法，为广泛的情形提供了一个可用的框架。作为首个应用，我们证明如下结果。

**定理 1.1**。 设 $a > 1$ 和 $n \geq 3$ 为整数。设 $X = X_d \subset \mathbb{P}(1^{n+1}, a)$ 为一个次数为 $d$、维数为 $n$ 且指标为 1的拟光滑 *Fano* 加权超曲面。那么

$$\delta(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{n+1}{n} > 1.$$

特别地， $X$ 是 *K*-稳定的。

正如预期，定理 1.1 证明中的难点在于理解局部稳定性阈值 $\delta_P(X, \mathcal{O}(1))$ 在 $P = [0 : \cdots : 0 : 1] \in X$ 的情形。如果 $P$是一个广义 Eckardt 点（参见第 7.2 节），那么我们可以在以下意义下得到一个尖锐估计。

*Date*: 2026 年 1 月 7 日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 14J40，14J45。*Key words and phrases.* Fano 簇、K-稳定性、加权超曲面。

**例 1.2** (见推论 7.12)。 设 $X_d \subset \mathbb{P}(1^{n+1},\ a)$ 是一个维数为 $n \geq 3$ 、次数为 $d = ak+1 \geq n$ 且满足 $k \in \mathbb{N}$ 的拟光滑加权超曲面。假设点$P = [0 : \cdots : 0 : 1]$ 是 $X$ 的广义 Eckardt 点，即 $X$ 由一个如下形式的多项式定义：

$$f = x_{n+1}^k x_0 + x_{n+1}^{k-1} f_{a+1}(x_0, \ldots, x_n) + \cdots + f_{ak+1}(x_0, \ldots, x_n)$$

使得 $x_0 \mid f_{at+1}$ 对于任意 $t = 1, \ldots, k-1$ (参见例7.9) 。那么

$$\delta_P(X; \mathcal{O}_X(1)) = \frac{n(n+1)}{ak+n}. \tag{1}$$

作为这一结果的推论，我们构造了指标小于维数的 K-不稳定 Fano 拟光滑加权超曲面例子；见例7.14。据我们所知，这是高维中首批具有此类性质的例子，并凸显了它们与标准射影空间中光滑超曲面情形的显著差异。另可比较 [KW21], [ST24，定理 6。1]。

若 $P$ 不是广义 Eckardt 点，我们无法得到尖锐估计，但仍可导出若干下界。参见命题7.7 和7.8。

接下来，我们考虑恰有两个权重大于 1 的情形。

**定理 1.3**。设 $2 \leq a \leq b$和 $n \geq 3$ 为整数。设 $X = X_d \subset \mathbb{P}(1^n, a, b)$ 是一个次数为 $d$、维数为 $n$ 且指标为1的拟光滑 *Fano* 加权超曲面。那么

$$\delta(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{n+1}{n+\frac{1}{a}} > 1.$$

特别地， $X$ 是 *K*-稳定的。

当大于 1 的权重超过两个时，K-稳定性的分析会更加微妙。即使对于一些明确的族，例如

$$X_{2n+3} \subset \mathbb{P}(1^{n-1}, 2, 2, n+1)$$

其中 $n \geq 4$，所有成员的 K-稳定性仍是一个开放问题。沿着这一方向，我们对一般的拟光滑加权超曲面得到了以下结果。

**推论 1.4**。 设 $n, c_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$满足 $n \geq 3$且 $c_1 \geq \frac{n+2}{2}$。令 $X_d \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(1^{c_1}, a_{c_1}, \ldots, a_{n+1})$为一个次数为 $d$ 、指标为1 的拟光滑 *Fano* 加权超曲面，使得 $2 \leq a_{c_1} \leq \cdots \leq a_{n+1}$。假设满足以下条件：

- $d \equiv 1$ 模 $a_i$ 对所有 $c_1 \leq i \leq n+1$均成立。
- $X_d$ 在 $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)|$线性系中一般。

那么 $X_d$ 是 *K*-稳定的。

我们简要说明定理1.1和1.3的证明策略。为了估计加权射影空间中拟光滑且良构超曲面的局部稳定性阈值 $X$， $\mathbb{P}$，*Abban–Zhuang* 方法 [AZ22] 是最有力的技巧之一。对于给定的点 $p \in X$，如果存在一个拟光滑素因子 $Y$位于 $X$ 上并经过$p$ 且次数较小，那么 Abban–Zhuang 方法便能将估计 $X$ 在 $p$ 处的局部稳定性阈值，转化为估计 $Y$ 在 $p$处的局部稳定性阈值。

在许多情况下，我们可以利用 Abban– Zhuang 方法将问题约化到拟光滑曲面。估计曲面局部稳定性阈值的主要工具之一，是与容许旗标相关联的曲面（加权）爆破的 *Okounkov* 体。事实上，Abban–Zhuang [AZ23，引理 3.2] 给出了*Seshadri*常数与光滑曲面的局部稳定性阈值之间一个有趣的关系，该关系可通过考察适当奥昆科夫体重心的位置来证明。在第6节，我们将把这一结果推广到给定点具有商奇点的情形（推论6.2、6.3）。此外，在第7节，我们将给出特定商奇点处 Seshadri 常数的尖锐估计。定理1.1 可利用这一技巧证明。

另一方面，一般而言，我们无法在 $X$上取一个合适的拟光滑素因子，以便应用 Abban–Zhuang 方法。为了解决这一困难，在第3 节中，我们

引入另一项基础工具，即加权射影空间的标准加权爆破。这种爆破是对沿线性子空间爆破普通射影空间的一种加权推广。在某些情形下，即使 $X$ 上经过给定点 $p$ 的一个素除子并非拟光滑，其到标准加权爆破的严格变换也可能是拟光滑的，参见推论4.8。

定理 1.3 可通过结合上述技巧证明。除了在本文中的直接作用外，我们还预计，这一构造将在涉及加权双有理几何与环面双有理几何的更广泛研究中发挥作用。

1.1. 论文结构。我们简要介绍本文的组织结构。第 2 节回顾（局部）稳定性阈值的概念及我们将要用到的主要性质。第 3 节介绍标准加权爆破的概念，并考察其基本性质。我们还在第 3.3 小节分析 $\mathbb{Q}$-阶乘环面簇中超曲面的拟光滑性与良形性。第 4 节和第 5 节考察拟光滑加权超曲面中的因子或覆盖何时仍为拟光滑。所得结果推广了 [ST25, §3 和 §5]中的结果。第 6 节是本文的主要技术关键之一。我们在命题 6.1 中分析二维凸集的位置。与 [Fuj23, § 11], 类似，可以利用适当奥昆科夫体重心的信息估计局部稳定性阈值。事实上，作为命题 6.1 的直接推论，我们可以在推论 6.2 中得到 [AZ23, 引理 3.2] 的加权版本。第 7 节讨论定理 1.1 中的情形。更确切地说，我们考虑环境加权射影空间为 $\mathbb{P}(1^{n+1}, a)$ 的情形。在第 7.1 小节，我们考虑超曲面 $X$ 在奇异顶点处不是广义 Eckardt 点的情形。通过考察沿其奇异顶点的标准加权爆破，我们可以在推论 7.6 中为原加权超曲面的一般截面得到 Seshadri常数的尖锐估计。在第 7.2 小节，我们考虑 $X$ 在奇异顶点处是广义 Eckardt 点的情形。在这种情况下，局部稳定性阈值的估计可在推论 7.12 中明确描述。第 8、9 和 10 节分别利用前面各节中的技巧证明定理 1.1、定理 1.3 和推论 1.4。

1.2. 标准超曲面的已知结果。猜想认为，标准射影空间 $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 中次数至少为 3 的每个光滑 Fano 超曲面都是 K-稳定的。当 Fano 指数为 $X$ 1 [Puk98, Che01, Fuj19a],或 2 [AZ22], 时，这一猜想已得到验证；对于三次四维簇 [Liu22], 以及 $\dim X \geq \iota_X^3$ [AZ23, 定理 B],所述范围内的情形也已得到验证，其中 $\iota_X$ 是 $X$的 Fano 指数。值得注意的是，对于费马型超曲面，这一猜想也已得到证明 [Tia87, Tia00, AGP06, Zhu21]。由 K-稳定性的开性 [BL22, BLX22], 可知，次数至少为 3 的一般 Fano 超曲面都是 K-稳定的。

1.3. **加权超曲面的已知结果。** 指标 1 的拟光滑德尔佩佐曲面 $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_3)$ 已在以下文献中分类 [JK01b]，且所有情形下都已证明 K¨ahler–Einstein 度量的存在性（参见同上， [Ara02, CPS10, CPS21]）。注意，存在指标为 2 [KW21] 的不稳定例子。

端拟光滑 Fano 三维超曲面共有 95 个族 $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_4)$，指标为 1，参见 [JK01a、CCC11、IF00]。根据 [Che08、Che09], ，每个族的一般元素都是 K-稳定的。利用其与双有理超刚性的关系（参见 [SZ19、KOW18、KOW23]），75 个族中所有成员的 K-稳定性均已得到证明，相关报告见 [KOW23，表7]。另一方面， [CO24] 证明了其余情形中 95 个族的 K-稳定性。指标 1 的非端拟光滑 Fano 三维超曲面的 K-稳定性是一个有趣的开放问题。

在高维情形下，目前的图景仍很不完整；部分结果可见 [JK01a、Zhu20]。值得回顾一下 Johnson–Koll´ar 判据 [JK01b] ，其中作者证明，若 $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots\ldots, a_{n+1})$ 是指标为 1 且满足 $a_0 \leq \ldots \leq a_{n+1}$ 的 Fano 加权超曲面

$$d < \frac{n+1}{n} a_0 a_1,$$

则 $X_d$ 存在 K¨ahler–Einstein 度量。当所有权重都相对较大时，这一判据很有用。

假设 $a_i \mid d$ 对所有 $i$，在 [ST24，推论 1.5]（另见 [LST25]）证明，次数为 $d$ 且 $\iota_X <$ 维数 $X$ 的一般 Fano 超曲面是 K-稳定的。最后， [ST25] 的主要结果表明，给定 $X \subset \mathbb{P}$（$a_0$，……，$a_n$），若存在 $r$ 使得 $a_r > 1$ 且 $a_r | d$，那么

$$\delta(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{(n+1)a_r}{d}.$$

这尤其意味着，所有指标为 1 或 2 的光滑 Fano 加权超曲面都是 K-稳定的。此外，这也为指标为 1 的拟光滑终端法诺三维超曲面 95 个族中的 82 个族的所有成员的 K-稳定性提供了另一种证明 $X \subset \mathbb{P}(a_0,$ ……，$a_4)$。

¨**致谢**。 L.C. 获得了 OFG 国际交流资助 IK-00001446 的部分支持。K.F. 获得了 JSPS KAKENHI 资助项目编号 22K03269、英国皇家学会国际合作奖 ICA\1\23109 以及亚洲青年科学家奖学金的支持。T.S 获得了 JSPS KAKENHI 资助项目编号 JP23K03032 和神户大学青年研究人员长期海外教学奖学金项目的部分支持。L.T. 获得了 PRIN2020 研究资助“2020KKWT53”的支持，并且是 INdAM 的 GNSAGA 小组成员。

## 2. Preliminaries

我们回顾 K-稳定性中的一些记号和定义。首先，回顾（局部）稳定性阈值的概念。对于我们所讨论的对数对（$X$，$\Delta$），其边界 $\Delta$ 始终假设为有效的，且系数为有理数。我们沿用 [Fuj24]中的术语。

**定义 2.1** ([FO18, BJ20, AZ22])。 设 $(X, \Delta)$ 为一个射影 klt 对，且 $\eta \in X$ 是一个概形论点。取 $X$ 上任意一个大 $\mathbb{Q}$-线丛 $L$。对于 $X^{\sim}$ $^{\sim}$ 上的任意素除子 $F$（即存在一个射影双有理态射 $\sigma\colon X \to X$，其中 $X$ 正规，使得 $F^{\sim}$ 可实现为 $X$ 上的素 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃除子），令 $A_{X,\Delta}(F) := 1+\mathrm{ord}_F(K_{\tilde{X}} - \sigma^*(K_X+\Delta))$ 表示 $(X, \Delta)$ 沿 $F$ 的对数差异，并设

$$\begin{aligned} S(L;F) &:= \frac{1}{\mathrm{vol}_X(L)} \int_0^\infty \mathrm{vol}_{\tilde{X}}(\sigma^*L - xF)dx, \\ T(L;F) &:= \min\left\{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid \mathrm{vol}_{\tilde{X}}(\sigma^*L - xF) = 0\right\}. \end{aligned}$$

$\delta(X, \Delta; L)$ 的稳定性阈值为 $L$（相应地， $L$ at$\eta$ 的局部稳定性阈值 $\delta_\eta(X, \Delta; L)$）定义为以下各值的下确界

$$\frac{A_{X,\Delta}(F)}{S(L;F)},$$

其中 $F$ 遍历 $X$ 上的所有素除子（相应地，遍历 $X$ 上的所有素除子，且其中心包含 $\eta$）。

我们如下使用 Veronese 等价这一概念。

定义 2.2。（[Fuj23], [Fuj24，定义 2.1]）设 $X$ 为一个正规射影簇，且$L_1$、……、$L_r$为 $X$上的 $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-除子，即 $L_1$、……、$L_r \in \mathrm{CaCl}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} =: \mathrm{CaCl}(X)_{\mathbb{Q}}$，其中 $\mathrm{CaCl}(X)$ 是 $X$ 上模线性等价的 Cartier 除子群。对于 $\vec{x} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$和 $\vec{L} := (L_1, \ldots\ldots, L_r) \in \mathrm{CaCl}(X)^r_{\mathbb{Q}}$，令 $\vec{x} \cdot \vec{L} := \sum_{i=1}^r x_i L_i$。

(1) 设 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $mL_1$，……，$mL_r$ 在 $\mathrm{CaCl}(X)$ 中有提升，并将其固定。若 $V_{m\vec{a}}$ 是一个与 $L_1$，……，$L_r$ 相关联的 $(m\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$-分次线性级数，则它是由线性子空间组成的集合 $\{V_{m\vec{a}}\}_{\vec{a} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}}$

$$V_{m\vec{a}} \subset H^0(X, m\vec{a} \cdot \vec{L})$$

$\vec{\ }$ 使得 $V_{m\vec{0}}=\mathbb{C}$ 且对所有 $\vec{a}$，$\vec{b}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ 都有 $V_{m\vec{a}}\cdot V_{m\vec{b}}\subset V_{m(\vec{a}+\vec{b})}$。

对于 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们可以通过设定 $V_{km\vec{a}}:=V_{m(k\vec{a})}$（对所有 $\vec{a}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$），来定义一个 $(km\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$-分次线性级数 $V_{km\vec{\bullet}}$。

(2) 令 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $V_{m\vec{\bullet}}$ 如（1）中所述。令 $m'\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 $V_{m'\vec{\bullet}}$ 也为此类对象（并固定提升 $m'L_1,\dots,m'L_r\in\mathrm{CaCl}(X)$）。

如果存在 $d\in mm'\mathbb{Z}_{>0}$，使得线性等价关系 $(d/m)mL_i\sim(d/m')m'L_i$ 对 $1\leq i\leq r$ 成立，并且

$$V_{(\frac{d}{m})m\vec{\bullet}}=V_{(\frac{d}{m'})m'\vec{\bullet}}$$

作为（$d\mathbb{Z}_{\geq 0}$）$^r$-分次线性级数在上述线性等价下成立。我们可以验证，这定义了一个等价关系（定义在 $X$上与 $L_1,\dots,L_r$ 相关联的分次线性级数集合上，其中各项如（1）中所述）。记 $V_{\vec{\bullet}}$为$V_{m\vec{\bullet}}$的 Veronese 等价类。

(3) 设 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ 如（1）中所述。则我们有一个（$m\mathbb{Z}_{\geq 0}$）$^r$-分次线性级数 $H^0(m\vec{\bullet}\cdot\vec{L})$，定义为

$$H^0(m\vec{a}\cdot\vec{L}):=H^0(X,\vec{a}\cdot m\vec{L}).$$

我们用 $H^0(\vec{\bullet}\cdot\vec{L})$ 表示 $H^0(m\vec{\bullet}\cdot\vec{L})$ 在 Veronese 等价意义下的等价类，并称其为完全线性系 $H^0(\vec{\bullet}\cdot\vec{L})$ 的 *Veronese* 等价类。

**定义 2.3** ([Fuj23, Fuj24])。设（$X$，$\Delta$）是一个 $n$维正规射影簇 .

(1) 设 $F$ 是 $X$ 上的一个素除子。若存在一个射影双有理态射 $\sigma\colon X\to X$，其中 $X$ 正规，使得 $F$ 可实现为 $X$ 上的一个素 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃除子，且其在 $X$ 上反丰沛，并且对 $(X,\ \Delta+F)$ 是纯对数终端，则称 $F$ 在 $(X,\ \Delta)$ 上为 *plt* 型，其中 $\Delta$ 定义为

$$\sigma^*(K_X+\Delta)=K_{\tilde{X}}+\tilde{\Delta}+(1-A_{X,\Delta}(F))F.$$

我们称态射 $\sigma$ 为与 相关的 *plt* 爆破。

(2) 我们称

$$Y_\bullet\colon X=Y_0\triangleright Y_1\triangleright\cdots\triangleright Y_j$$

若 $(Y_0,\Delta_0):=(X,\Delta)$，且 $Y_i$是 $(Y_{i-1},\Delta_{i-1})$ 上的 plt 型素除子，并且 klt 对 $(Y_i,\Delta_i)$ 由 $K_{Y_i}+\Delta_i:=(K_{\tilde{Y}_{i-1}}+\sim\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \sim\Delta_{i-1}+Y_i)|_{Y_i}$ 对任意 $1\leq i\leq j$归纳定义，其中 $\sigma_{i-1}\colon Y_{i-1}\to Y_{i-1}$ 是与 $Y_i$相关的 $(Y_{i-1},\Delta_{i-1})$ 的 plt 爆破，则称其为 $(X,\Delta)$ 上的*plt* 旗 。此外，若 $j=n$，则称 $(X,\Delta)$ 上的 plt 旗是完备的。

(3) 设 $Y\subset X$是一个正规素 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃除子，且 $L_1,\dots,L_r$ $\mathbb{Q}$是 $X$上的 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃除子。设 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$满足存在提升 $mL_1,\dots,mL_r\in\mathrm{CaCl}(X)$，且$mY$ 是卡蒂埃的。设 $V_{m\vec{\bullet}}$ 是 $X$ 上与$L_1,\dots,L_r$相关的 $(m\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$-分次线性级数。于是，我们定义与$L_1|_Y,\dots,L_r|_Y$，$-Y|_Y\in\mathrm{CaCl}(Y)\mathbb{Q}$ 相关的 $(m\mathbb{Z}_{\geq 0})^{r+1}$-分次线性级数 $V_{(Y)\,m\vec{\bullet}}$如下:

$$V^{(Y)}_{m(\vec{a},j)}:=\mathrm{Im}\left(V_{m\vec{a}}\cap\left(jmY+H^0(X,\vec{a}\cdot m\vec{L}-jmY)\right)\to H^0(Y,\vec{a}\cdot m\vec{L}|_Y-jmY|_Y)\right).$$

我们看到，$V_{(Y)\,m\vec{\bullet}}$的 Veronese 等价类由 $V_{\vec{\bullet}}$的类$V_{m\vec{\bullet}}$良好定义。因此，我们将 $V_{(Y)\,m\vec{\bullet}}$的类记为 $V_{(Y)\,\vec{\bullet}}$，并称其为 $V_{\vec{\bullet}}$的细化，通过 $Y$。

(4) 设 $L_1$、……、$L_r$、$V_{\vec{\bullet}}$ 和 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ 如 (3) 中所述。设 $Y$ 是 $(X,\Delta)$ 上的 plt 型素除子$\tilde{\ }$，且 $\sigma\colon X\to X$ 是相应的 plt 爆破。按照 Fuj24，定义 2.3]，我们可以通过 $\sigma$ 拉回 $(m\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$-分次线性级数 $V_{m\vec{\bullet}}$，从而自然地定义一个 $(m\mathbb{Z}_{\geq 0})^{r+1}$-分次线性级数 $\sigma^*V_{m\vec{\bullet}}$。由此可知，$\sigma^*V_{m\vec{\bullet}}$ 的 Veronese 等价类 $\sigma^*V_{\vec{\bullet}}$ 是良定义的，并称其为 $V_{\vec{\bullet}}$ 的拉回。我们还可以定义细化 $V_{(Y)\,\vec{\bullet}}$，即用 $Y$ 对 $\sigma^*V_{\vec{\bullet}}$ 作细化，也就是说，

$$V^{(Y)}_{\vec{\bullet}}:=(\sigma^*V_{\vec{\bullet}})^{(Y)}.$$

(5) 对于非完全 plt 旗 $Y_\bullet$: $X = Y_0 \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j$、 $Y_j$ 上的素除子 $F$，以及 $X$ 上的大 $\mathbb{Q}$-线丛 $L$，我们可以如下定义数值 $S(L; Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j \triangleright F)$:

$$S\left(L; Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j \triangleright F\right) := S\left(V_{\vec{\bullet}}^{(Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j)}; F\right)$$

如 [Fuj24，定义 4.7],，其中 $V_{(Y_1)\vec{\bullet}} := H^0(\bullet \cdot L)^{(Y_1)}$ 是由 $Y_1$ 对与 $L$ 相关联的完全线性系类进行细化后得到的，而对于 $2 \leq i \leq j$，级数 $V_{(Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_i)\vec{\bullet}}$的类归纳定义为

$$V_{\vec{\bullet}}^{(Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_i)} := \left(V_{\vec{\bullet}}^{(Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_{i-1})}\right)^{(Y_i)}.$$

设 $\eta \in Y_j$ 是一个概形论点。与定义2.1类似，令

$$\delta\left(X, \Delta \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j; L\right) \text{ (resp., } \delta_\eta\left(X, \Delta \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j; L\right))$$

为这些值的下确界

$$\frac{A_{Y_j, \Delta_j}(F)}{S\left(L; Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j \triangleright F\right)},$$

其中 $F$ 遍历 $Y_j$ 上的所有素因子（分别地，遍历 $Y_j$ 上中心包含 $\eta$ 的所有素因子）。

(6) 假设 $Y_\bullet$: $X = Y_0 \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_n$ 是 $(X, \Delta)$ 上的一个完全纯对数终端旗，并取 $X$ 上任意一个大 $\mathbb{Q}$-线丛 $L$。与旗 $Y_\bullet$ 相关联的 $L$ 的 Okounkov 体 $\mathrm{O}_{Y_\bullet}(L) \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，定义如 [Fuj24，定义 4.9]。注意，该定义只是 [LM09] 中标准定义的自然推广。另请注意，与 [Fuj24，定义 4.9]（参见 [Fuj23，命题 3.12]）一样，值 $S(L; Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j)$ 等于 $\mathrm{O}_{Y_\bullet}(L)$ 重心的第 $j$ 个坐标。

注 2.4. (1) 假设 $(X, \Delta)$ 是一个 klt 对数 Fano 对（即，除子 $-(K_X + \Delta)$ 是丰沛的）。那么，如 [Fuj19b、Li17、FO18、BJ20、LXZ22], 中所示，当且仅当 $\delta(X, \Delta) := \delta(X, \Delta; -(K_X + \Delta)) > 1$（分别为 $\geq 1$）成立时，$(X, \Delta)$ 是 K-稳定（分别为 K-半稳定）的。(2) 对于若干特殊情形，可以计算 $S(L; Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j)$ 的值。参见 [Fuj24，第 7 节和第 8], 。事实上，我们将在第 7 节使用 [Fuj24，定理 8.8]

下述定理已知是*Abban–Zhuang* 方法的一个特殊情形；应用[AZ22，定理 3。2] 对于 klt 对来说是 $(Y_{j-1}, \Delta_{j-1})$，plt 爆破为$\sigma_j$ 且分次线性级数为 $H^0(\bullet L)_{(Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_{j-1})}$。另见引理 4.1。

定理 *2.5*（[*AZ22*，定理 *3*.2] （另见 [*Fuj24*，定理 *12*.3]））。设 $(X, \Delta)$ 是一个射影 *klt* 对，$L$ 是 $X$ 上的大 $\mathbb{Q}$-线丛，$Y_\bullet$: $X = Y_0 \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j$ 是 $(X, \Delta) = (Y_0, \Delta_0)$ 上方的纯对数终端旗 $\tilde{}$，$\sigma_{i-1}$: $Y_{i-1} \to Y_{i-1}$ 是 $(Y_{i-1}, \Delta_{i-1})$ 的相应纯对数终端爆破，并且对任意 $1 \leq i \leq j$，$(Y_i, \Delta_i)$ 是由该纯对数终端爆破自然诱导的 *klt* 对。取任意概形论点 $\eta \in Y_{j-1}$，使得 $Y_j$ 的中心包含 $\eta$。那么

$$\delta_\eta\left(X, \Delta \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_{j-1}; L\right) \geq \min\left\{\frac{A_{Y_{j-1}, \Delta_{j-1}}(Y_j)}{S\left(L; Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j\right)}, \quad \inf_{\eta'} \delta_{\eta'}\left(X, \Delta \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j; L\right)\right\},$$

其中 $\eta' \in Y_j$ 遍历所有满足 $\sigma_{j-1}(\eta') = \eta$ 的概形论点。

## 3. Blowing-up weighted projective spaces and their hypersurfaces

本节的主要目标是介绍并研究加权射影空间的加权爆破这一概念。关于环面簇理论，我们采用 [CLS11]中的概念。

3.1. **加权射影空间**。 本小节回顾加权射影空间及其超曲面的一些事实，主要是为了统一记号并供后文参考。几乎所有结果都是专家们熟知的。

**定义 3.1.** 设 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$，并设 $a_0, \ldots, a_s \in \mathbb{Z}_{>0}$，其最大公约数 $\gcd(a_0, \ldots, a_s)$ 为 $= 1$ .

(1) 考虑 $\mathbb{Z}^{s+1} = \bigoplus_{i=0}^{s} \mathbb{Z}\mathbf{e}_i$ 和

$$N := \mathbb{Z}^{s+1}/\mathbb{Z}\sum_{i=0}^{s} a_i \mathbf{e}_i.$$

我们通常将典范投影记为 $\pi_N \colon \mathbb{Z}^{s+1} \twoheadrightarrow N$。对任意 $0 \le i \le s$，令 $u_i := \pi_N(\mathbf{e}_i) \in N$。令 $\Sigma$ 为 $N_{\mathbb{R}}$ 中的扇，定义如下:

$$\Sigma := \{\mathrm{Cone}(\mathcal{C}) \subset N_{\mathbb{R}} \mid \mathcal{C} \subsetneq \{u_0, \ldots, u_s\}\}.$$

我们令 $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s) := X_\Sigma$ 如 [CLS11，例 3.1 所示。17] 并称其为 加权射影空间。我们通常令 $D_i := V(u_i) \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$ 对任意 $0 \le i \le s$，其中我们令

$$V(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) := V(\mathbb{R}_{\ge 0}u_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\ge 0}u_{i_k}) \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$$

如 [CLS11，§3.2]。

(2) 若对任意 $0 \le i \le s$，都有 $\gcd(a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_s) = 1$，则称 $(a_0, \ldots, a_s)$（或 $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$）为良定 。

以下是众所周知的。

**命题 3.2** ([IF00、引理 5.7 和推论 5。9])。 设 $a_0$、……、$a_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足最大公约数($a_0$、……、$a_s$) $= 1$。对于任意 $0 \le i \le s$，令

$$g_i := \gcd(a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_s), \quad g := \prod_{i=0}^{s} g_i, \quad a_i' := \frac{a_i g_i}{g}.$$

*(1)* 元组($a_0'$、……、$a_s'$) 是良定的，且 $\prod_{i=0}^{s} a_i = g^{s-1} \cdot \prod_{i=0}^{s} a_i'$ 成立。令

$$N' := \mathbb{Z}^{s+1}/\mathbb{Z}\sum_{i=0}^{s} a_i' \mathbf{e}_i.$$

则对于任意 $0 \le i \le s$， $u_i' := \pi_{N'}(\mathbf{e}_i)$ 是 $N'$ 中的本原元。

*(2)* 存在一个同构

$$\pi_{N',N} \colon N' \to N$$

在格之间，使得对于任意 $0 \le i \le s$， $g_i u_i$ 映射到 $u_i$ 。特别地， $\mathbb{P}(a_0'$、……、$a_s')$ 与 $\mathbb{P}(a_0$、……、$a_s)$之间存在自然同构。

**定义 3.3.** 假设 $(a_0, \ldots, a_s)$ 是良定的，并令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$。

(1) 根据 [CLS11，练习 4.1，5], 我们有 $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}) \simeq \mathbb{Z}$。我们通常将 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \in \mathrm{Cl}(\mathbb{P})$ 记作 $\mathrm{Cl}(\mathbb{P})$ 的丰沛生成元。若将 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ 视为 $\mathrm{Pic}(\mathbb{P})_{\mathbb{Q}}$中的元素， $[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)] \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P})_{\mathbb{Q}}$。

(2) 我们通常将 $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_s]$ 的 Cox 环（即按 [CLS11，§5.2] 中的意义定义的全坐标环）记为 $\mathbb{P}$ ，使得 $x_i$ 对应于 $u_i \in N$。特别地，$\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_s]$ 带有一个 $\mathbb{Z}$-分次，且 $\deg x_i = a_i$。变量 $x_0, \ldots, x_s$ 称为 的（加权）齐次坐标，属于 $\mathbb{P}$。根据 [CLS11，命题 5.3，7], 我们有典范同构

$$\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)) \simeq \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_s]$$

分次 $\mathbb{C}$-代数。此外，元素 $x_i \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i))$ 对应于素除子 $D_i \subset \mathbb{P}$。换言之，$D_i = (x_i = 0) \subset \mathbb{P}$ 成立。更一般地，对于任意次数为 $d$ 的非零齐次元 $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_s]$，它给出 $\mathbb{P}$ 上的 $\mathbb{Q}$-Cartier 魏尔除子 $(f = 0) \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)|$ ，如 CLS11 中的命题 5.3.7] 所示。我们称其为由 $f$ 定义的次数为 $d$ 的（加权）超曲面。

我们来看加权射影空间的若干基本性质。

命题 *3.4.* 假设 $(a_0, \ldots, a_s)$ 是良定的。按照定义 *3.1* 和 *3.3*，令 $N := \mathbb{Z}^{s+1}/\mathbb{Z}\sum_{i=0}^{s} a_i \mathbf{e}_i, u_i := \pi_N(\mathbf{e}_i)$，$\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$。对于任意 $0 \leq i \leq s$，取 $\bar{a}_i, e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $a_i = e_i \bar{a}_i$。显然，$(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_s)$ 是良定的。令

$$\bar{N} := \mathbb{Z}^{s+1}/\mathbb{Z}\sum_{i=0}^{s} \bar{a}_i \mathbf{e}_i, \quad \bar{u}_i := \pi_{\bar{N}}(\mathbf{e}_i) \in \bar{N}, \quad \bar{\mathbb{P}} := \mathbb{P}(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_s).$$

令 $f_{\bar{N},N}\colon \mathbb{Z}^{s+1} \to \mathbb{Z}^{s+1}$ 由对角矩阵 $\mathrm{diag}(e_0, \ldots, e_s)$ 定义。于是得到格同态 $\pi_{\bar{N},N}\colon N \to N$，满足 $\pi_{\bar{N},N} \circ \pi_{\bar{N}} = \pi_N \circ f_{\bar{N},N}$。由同态 $\pi_{\bar{N},N}$，我们得到次数为 $\prod_{i=0}^{s} e_i$ 的自然的环面有限态射 $\tau\colon \bar{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$。

*(1)* 我们有

$$\tau^*[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)] = [\mathcal{O}_{\bar{\mathbb{P}}}(1)], \quad K_{\bar{\mathbb{P}}} = \tau^*\left(K_{\mathbb{P}} + \sum_{i=0}^{s}\left(1 - \frac{1}{e_i}\right) D_i\right).$$

特别地，我们有 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^{\cdot s}) = 1/\prod_{i=0}^{s} a_i$。

*(2)* 对于任意非零的次数为 $d$ 的齐次 $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_s]$，魏尔除子 $(f = 0) \subset \mathbb{P}$ 的拉回 $\tau^*(f = 0) \subset \mathbb{P}$满足

$$\tau^*(f = 0) = (f(\bar{x}_0^{e_0}, \ldots, \bar{x}_s^{e_s}) = 0) \subset \bar{\mathbb{P}},$$

其中 $\mathbb{C}[\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_s]$ 是 $\mathbb{P}$ 的 *Cox* 环。

证明。由于 $\pi_{\bar{N},N}(\bar{u}_i) = e_i u_i$，对于任意 $0 \leq i \leq s$，我们有 $\tau^* D_i = e_i D_i$。此外，态射 $\tau$ 由下式定义

$$[\bar{x}_0 : \cdots : \bar{x}_s] \mapsto [\bar{x}_0^{e_0} : \cdots : \bar{x}_s^{e_s}].$$

因此断言得证。若令 $e_i = a_i$，并对所有 $0 \leq i \leq s$ 取 $\bar{a}_i = 1$，则等式 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^{\cdot s}) = 1/\prod_{i=0}^{s} a_i$ 可直接推出。□

**命题 3.5.** 假设 $(a_0, \ldots, a_s)$ 是良定的，并令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$. 任取 $0 \leq r \leq s-2$，并令

$$Z := (D_0 \cap \cdots \cap D_r)_{\mathrm{red}} = V(u_0, \ldots, u_r) \subset \mathbb{P}.$$

此外，对于任意 $r+1 \leq j \leq s$，令

$$h := \gcd(a_{r+1}, \ldots, a_s), \quad a_j'' := \frac{a_j}{h},$$

$$g_j := \gcd\left(a_{r+1}'', \ldots, \hat{a}_j'', \ldots, a_s''\right), \quad g := \prod_{j=r+1}^{s} g_j, \quad a_j' := \frac{a_j'' g_j}{g}.$$

那么我们有 $Z \simeq \mathbb{P}' := \mathbb{P}\left(a_{r+1}', \ldots, a_s'\right)$. 此外，我们有

$$[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)]\,|_Z \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}\left(\frac{1}{gh}\right)\right]$$

在上述同构下。

证明. 令

$$\tau := \mathbb{R}_{\geq 0} u_0 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} u_r \in \Sigma.$$

注意，$Z = V(\tau)$。考虑子格 $N_\tau := N \cap \mathbb{R}\tau \subset N$ 以及商 $N(\tau) := N/N_\tau$ 如 [CLS11，引理 3.24]所示。注意，我们有一个交换图，其中水平正合列为

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \sum_{i=0}^{r} \mathbb{Z} u_i & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{s-r}/\mathbb{Z}\sum_{j=r+1}^{s} a_j \mathbf{e}^j & \longrightarrow & 0\,. \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\
0 & \longrightarrow & N_\tau & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N(\tau) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

并由蛇引理可知 Coker $\iota \simeq$ Ker $\rho$。令 mult($\tau$) 为余核的阶。由于 $N(\tau)$ 和 $\mathbb{Z}^{s-r}/\mathbb{Z}\sum_{j=r+1}^{s} a_j''\mathbf{e}j$ 都是秩为 $s-r-1$ 的无挠群，因此我们得到自然同构

$$\mathbb{Z}^{s-r}/\mathbb{Z}\sum_{j=r+1}^{s} a_j''\mathbf{e}_j \simeq N(\tau)$$

由满射 $\rho$，且 mult($\tau$) $= h$ 成立。根据 [CLS11，定理 3.2。6] 和命题 3.2，得到 $Z \simeq \mathbb{P}'$。令 $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ 满足 $[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)]|_Z \sim_{\mathbb{Q}} [\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(\alpha)]$。根据 [Ful93，第 100], 页可得

$$D_0 \cdots D_r = \frac{1}{\mathrm{mult}(\tau)} Z = \frac{1}{h} Z.$$

因此，由命题 3.4，得到

$$\begin{aligned} \frac{h}{a_{r+1}\cdots a_s} &= h\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^{\cdot s-r-1} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_0)\cdots\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_r)\right) \\ = \quad \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)^{\cdot s-r-1} \cdot Z\right) &= \frac{\alpha^{s-r-1}}{a'_{r+1}\cdots a'_s} = \frac{g^{s-r-1}h^{s-r}\alpha^{s-r-1}}{a_{r+1}\cdots a_s}. \end{aligned}$$

因此得到等式 $\alpha = 1/(gh)$。 □

引理 3.6。假设 $(a_0, \ldots, a_s)$ 是良定的，并令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$。取一般的 $\varphi \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_0))$。（更一般地，假设 $\varphi \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_0))$ 在 [KOW23，定义 2.17] 的意义下是准线性的。）那么存在一个同构 $\iota\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$，使得 $\iota^* D_0 = (\varphi = 0)$。

证明。由于 $\varphi$ 是一般的，我们可以假设 $\varphi = x_0 + \varphi_0(x_1, \ldots, x_s)$，其中 $\varphi_0(x_1, \ldots, x_s) \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_0))$。若取 $\iota$ 为

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_r] \mapsto [x_0 + \varphi_0(x_1, \ldots, x_s) : x_1 : \cdots : x_r]$$

则 $\iota$ 显然是一个同构，且可得 $\iota^* D_0 = (\varphi = 0)$。 □

**命题 3.7**。假设 $s \geq 2$，$(a_0, \ldots, a_s)$ 是良定的，并令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$。对于任意 $0 \leq i_1 < i_2 \leq s$，令

$$D_{i_1 i_2} := V(u_{i_1}, u_{i_2}) \subset \mathbb{P}.$$

我们关注除子 $D_0 \subset \mathbb{P}$。对于任意 $1 \leq i \leq s$，令

$$g_i := \gcd(a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_s), \quad g := \prod_{i=1}^{s} g_i, \quad a'_i := \frac{a_i g_i}{g}.$$

（根据命题 3.5，我们有 $D_0 \simeq \mathbb{P}(a'_1, \ldots, a'_s)$ 以及 $[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)]|_{D_0} \sim_{\mathbb{Q}} [\mathcal{O}_{D_0}(1/g)]$。）

*(1)* 对任意 $1 \leq i \leq s$，我们有 $D_0 \cdot D_i = \frac{1}{g_i} D_{0i}$。特别地，我们有

$$(K_{\mathbb{P}} + D_0)|_{D_0} = K_{D_0} + \sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{g_i}\right) D_{0i}.$$

*(2)* 任取非零的次数为 $d$ 的齐次 $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_s]$，并令 $X := (f = 0) \subset \mathbb{P}$。假设 $D_0 \not\subset X$ 和 $(a_1, \ldots, a_s)$ 是良定的。那么，$D_0$ 上的 $\mathbb{Q}$-*Cartier* $\mathbb{Q}$-除子 $X|_{D_0}$ 是 $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(a_1,\ldots,a_s)}(d)|$ 中由齐次多项式定义的魏尔除子

$$f|_{D_0} := f(0, x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s].$$

证明。与命题3.5的证明中一样，我们有

$$\mathrm{mult}(\mathbb{R}_{\geq 0} u_0 + \mathbb{R}_{\geq 0} u_i) = g_i.$$

Thus 断言 (1) 可由下式推出 [Ful93，第 100] 页，以及 [FS20，引理 2.3 的证明。1] .

我们考虑 (2)。由 $g_1 = \cdots = g_s = 1$ 中的假设可知。因此，根据 (1)，$D_0$ 和 $D_i$ 在 $D_{0i}$的泛点处都是 Cartier 除子。（事实上，根据 [IF00，5.15], ，已知 $\mathbb{P}$ 在 $D_{0i}$的泛点处是光滑的。）因此，$\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-除子 $X|_{D_0}$

对于 $D_0$ 中所有余维 1 点，它等于魏尔除子 $(f(0, x_1, \ldots, x_s) = 0)$。因此它们彼此相等。□

**注 3.8.** 一般而言， $X|_{D_0}$ 不是魏尔除子。例如，若 $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, 1, 2)$且$X = (x_1 = 0)$，则 $X|_{D_0}$ 是 $D_0 \simeq \mathbb{P}^1$上的一个次数为 $1/2$ 的 $\mathbb{Q}$-除子。

**定义 3.9.** 假设$(a_0, \ldots, a_s)$是良定的，并令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$。取任意 $p \in \mathbb{P}$。

(1) 对任意 $0 \leq i \leq s$，令

$$H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p) \subset H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i))$$

表示由在 $p$处消失的齐次多项式构成的子空间。我们也用 $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)|$ 表示相应的子线性系。

(2) 对任意 $a \in \mathbb{Z}_{>0}$，令

$$B_a^{\mathbb{P}} := \bigcap_{a_i \leq a} \operatorname{Bs} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)| \subset \mathbb{P}$$

并赋予其约化结构。例如， $B_1^{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ 是 $\operatorname{Bs}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|$的约化结构。类似地，令

$$B_{a,p}^{\mathbb{P}} := \bigcap_{a_i \leq a} \operatorname{Bs} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p| \subset \mathbb{P}$$

赋予约化结构。

**引理 3.10.** 在定义 *3.9*中的假设下，对于任意 $0 \leq i \leq s$，我们有

$$\operatorname{Bs} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p| \subset B_1^{\mathbb{P}} \cup B_{a_i,p}^{\mathbb{P}}.$$

证明。 我们可以假设

$$1 = a_0 = \cdots = a_{c_1 - 1} < a_{c_1} \leq \cdots \leq a_s$$

满足 $0 \leq c_1 \leq s$。若 $c_1 = 0$，则 $B_1^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}$。因此我们可以假设 $c_1 \geq 1$。由于

$$\operatorname{Bs} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p| \subset \operatorname{Bs} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)_p|,$$

我们可以进一步假设 $p \notin B_1^{\mathbb{P}}$。经过坐标变换后，我们还可以假设$a_i < a_{i+1}$（或 $i = s$），并且 $p = [1 : 0 : \cdots : 0] \in \mathbb{P}$。于是我们有

$$B_1^{\mathbb{P}} = (x_0 = \cdots = x_{c_1 - 1} = 0), \quad B_{a_i,p}^{\mathbb{P}} = (x_1 = \cdots = x_i = 0).$$

取任意一点

$$q = [q_0 : \cdots : q_s] \in \mathbb{P} \setminus \left( B_1^{\mathbb{P}} \cup B_{a_i,p}^{\mathbb{P}} \right).$$

若 $q_0 \neq 0$，则存在 $1 \leq j \leq i$ 使得 $q_j \neq 0$。由于多项式 $x_0^{a_i - a_j} \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p)$ 在 $q$ 处不为零，因此有 $q \notin \operatorname{Bs} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p|$。若 $q_0 = 0$，则存在$1 \leq j \leq c_1 - 1$ 使得 $q_j \neq 0$。由于多项式 $x_j^{a_i} \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p)$ 在 $q$ 处不为零，因此有 $q \notin \operatorname{Bs} |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)_p|$。□

3.2. **标准加权爆破**。 我们定义加权射影空间的标准加权爆破的概念，并考察其基本性质。在本小节3.2中，我们固定如下内容：

**设定 3.11**。 设 $s$、$r \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $1 \leq r \leq s - 1$，并设 $a_0$、…、$a_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $(a_0$、…、$a_s)$良定。对于任意 $0 \leq i \leq r$，定义

$$h := \gcd(a_0, \ldots, a_r), \quad a_i'' := \frac{a_i}{h},$$

$$g_i := \gcd\left(a_0'', \ldots, \hat{a}_i'', \ldots, a_r''\right), \quad g := \prod_{i=0}^{r} g_i, \quad a_i' := \frac{a_i'' g_i}{g}.$$

类似地，对于任意 $r+1 \le j \le s$，定义

$$h' := \gcd(a_{r+1}, \dots, a_s), \quad a''_j := \frac{a_j}{h'},$$
$$g_j := \gcd\left(a''_{r+1}, \dots, \hat{a}''_j, \dots, a''_s\right), \quad g' := \prod_{j=r+1}^{s} g_j, \quad a'_j := \frac{a''_j g_j}{g'}.$$

此外，与定义 3.1中一样，我们固定典范满射

$$\pi_N \colon \mathbb{Z}^{s+1} = \bigoplus_{i=0}^{s} \mathbb{Z}\mathbf{e}_i \twoheadrightarrow N := \mathbb{Z}^{s+1}/\mathbb{Z}\sum_{i=0}^{s} a_i\mathbf{e}_i,$$

集合 $u_i := \pi_N(\mathbf{e}_i)\ (0 \le i \le s)$，并考虑扇

$$\Sigma := \{\mathrm{Cone}(\mathcal{C}) \subset N_{\mathbb{R}} \mid \mathcal{C} \subsetneq \{u_0, \dots, u_s\}\}$$

在 $N_{\mathbb{R}}$ 中，令 $\mathbb{P} := X_\Sigma = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_s)$，并设 $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_s]$ 为 $\mathbb{P}$ 的 *Cox* 环，其中度 $x_i = a_i$。对任意 $0 \le i \le s$，令 $D_i := (x_i = 0) \subset \mathbb{P}$。我们还固定典范满射

$$\pi_{N'} \colon \mathbb{Z}^{r+1} = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathbb{Z}\mathbf{e}_i \twoheadrightarrow N' := \mathbb{Z}^{r+1}/\mathbb{Z}\sum_{i=0}^{r} a'_i\mathbf{e}_i,$$

集合 $u'_i := \pi_{N'}(\mathbf{e}_i)\ (0 \le i \le r)$，并考虑扇

$$\Sigma' := \left\{\mathrm{Cone}(\mathcal{C}') \subset N'_{\mathbb{R}} \mid \mathcal{C}' \subsetneq \left\{u'_0, \dots, u'_r\right\}\right\}$$

在 $N'_{\mathbb{R}}$ 中，令 $\mathbb{P}' := X_{\Sigma'} = \mathbb{P}(a'_0, \dots, a'_r)$，并设 $\mathbb{C}[x'_0, \dots, x'_r]$ 为 $\mathbb{P}'$ 的 *Cox* 环，其中度 $x'_i = a'_i$。对任意 $0 \le i \le r$，令 $D'_i := (x'_i = 0) \subset \mathbb{P}'$。

注意，根据命题 3.2，所有 $u_i \in N$（分别地，所有 $u'_i \in N'$）都是本原元素 .

**引理 3.12.** 元素

$$v_{s+1} := -\frac{1}{h}\sum_{j=r+1}^{s} a''_j u_j = \frac{1}{h'}\sum_{i=0}^{r} a''_i u_i \in N_{\mathbb{Q}}$$

是 $N$ 中的本原元。注意，元素 $v_{s+1} \in N$ 可以表征为 $N$ 中的本原元，使得

$$v_{s+1} \in \sum_{i=0}^{r} \mathbb{Q}_{\ge 0} u_i \quad \textit{and} \quad v_{s+1} \in \left(\sum_{i=0}^{r} \mathbb{Q}u_i\right) \cap \left(\sum_{j=r+1}^{s} \mathbb{Q}u_j\right) \simeq \mathbb{Q}.$$

证明。首先可见，$v_{s+1}$ 是 $N$中的一个元素。由于 $\gcd(h, h') = 1$，存在 $k, k' \in \mathbb{Z}$使得 $h'k - hk' = 1$ 成立。令

$$(c_0, \dots, c_r) := k\left(a''_0, \dots, a''_r\right), \quad (c_{r+1}, \dots, c_s) := k'\left(a''_{r+1}, \dots, a''_s\right).$$

于是可以直接验证

$$\pi_N\left(\sum_{i=0}^{s} c_i\mathbf{e}_i\right) = k(h'v_{s+1}) + k'(-hv_{s+1}) = v_{s+1}.$$

因此，只需证明 $v_{s+1} \in N$ 是本原的。任取满足以下条件的 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$、$q \in \mathbb{Z}$ 和 $(c'_0, \dots, c'_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$

$$d\left(c'_0, \dots, c'_s\right) - q(a_0, \dots, a_s) = (c_0, \dots, c_s).$$

只需证明 $d = 1$。由于

$$\begin{aligned} d\left(c'_0, \dots, c'_r\right) &= (hq + k)\left(a''_0, \dots, a''_r\right), \\ d\left(c'_{r+1}, \dots, c'_s\right) &= (h'q + k')\left(a''_{r+1}, \dots, a''_s\right), \end{aligned}$$

我们有 $d \mid (hq + k)$ 和 $d \mid (h'q + k')$。由于 $h'(hq + k) - h(h'q + k') = 1$，因此必有$d = 1$。□

**引理 3.13**。 对于任意 $0 \le i \le s$，我们有

$$\operatorname{mult}\left(\mathbb{R}_{\ge 0}u_i + \mathbb{R}_{\ge 0}v_{s+1}\right) = g_i.$$

证明。 我们只考虑 $0 \le i \le r$ 的情形，因为另一种情形 $r+1 \le i \le s$ 可以用完全相同的方法证明。不妨设 $i = 0$。根据重数的定义，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{mult}\left(\mathbb{R}_{\ge 0}u_0 + \mathbb{R}_{\ge 0}v_{s+1}\right) &= \frac{1}{h'}\operatorname{mult}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_0'' & a_1'' & \cdots & a_r'' & 0 & \cdots & 0\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r & a_{r+1} & \cdots & a_s\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{mult}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_1'' & \cdots & a_r'' & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{r+1}'' & \cdots & a_s''\end{pmatrix} = \frac{1}{g_0},\end{aligned}$$

因为 $(a_1'', \ldots, a_r'')$ 恰好被 $g_0$ 整除。 □

**定义 3.14**。 令

$$v_j := \begin{cases} u_j & \text{if } r+1 \le j \le s,\\ v_{s+1} & \text{for } j = s+1.\end{cases}$$

令 $\Sigma$ 为由 $v_{s+1}$ 对 $\Sigma$ 作的星形细分。换言之，$\Sigma$ 的最大维数锥组成如下集合：

$$\operatorname{Cone}\left(u_0, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{s+1}\right)$$

其中 $0 \le i \le r$ 且 $r+1 \le j \le s+1$。令 $\mathbb{P} := X_{\tilde{\Sigma}}$，并令 $\psi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 为自然的 toric 态射。我们称 $\psi$ 为 $\mathbb{P}$ 沿 $\mathbb{P}(a_{r+1}, \ldots, a_s)$ 的标准加权爆破（或称为沿 $(x_0 = \cdots = x_r = 0)$ 的标准加权爆破）。通常将 $\mathbb{P}$ 的 Cox 环记作 $\mathbb{C}\left[x_0, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_s, z\right]$，其中

$$\begin{aligned}\tilde{D}_i &:= V(u_i) = (x_i = 0) \quad (0 \le i \le r),\\ \tilde{D}_j &:= V(v_j) = (y_j = 0) \quad (r+1 \le j \le s),\\ \mathbb{E} &:= V(v_{s+1}) = (z = 0).\end{aligned}$$

注意，除子 $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}$ 是 $\psi$ 和 $\psi(\mathbb{E}) = (x_0 = \cdots = x_r = 0) \subset \mathbb{P}$ 的例外除子。

**定义 3.15**。 考虑典范满射

$$\pi_{N''}\colon \mathbb{Z}^{r+1} = \bigoplus_{i=0}^{r}\mathbb{Z}\mathbf{e}_i \twoheadrightarrow N'' := \mathbb{Z}^{r+1}/\mathbb{Z}\sum_{i=0}^{r}a_i''\mathbf{e}_i$$

并令 $u_i'' := \pi_{N''}(\mathbf{e}_i)$ 对任意 $0 \le i \le r$。到前 $(r+1)$ 个坐标的标准投影诱导出满射 $\pi_{N,\,N''}\colon N \twoheadrightarrow N''$。此外，根据命题 3.2，存在一个同构 $\pi_{N',N''}\colon N' \simeq N''$，其中 $g_iu_i' \mapsto u_i''$ 对任意 $0 \le i \le r$ 均成立。因此，复合映射 $\pi_{N,N'} := (\pi_{N',N''})^{-1} \circ \pi_{N,N''}\colon N \twoheadrightarrow N'$ 满足

$$\begin{aligned}u_i &\mapsto g_iu_i' \quad (0 \le i \le r),\\ v_j &\mapsto 0 \quad (r+1 \le j \le s+1).\end{aligned}$$

因此，同态 $\pi_{N,\,N'}$ 与扇 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 相容（依照 [CLS11，定义 3.3.1]）。由此诱导的环面态射 $\pi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ 称为 $\mathbb{P}$ 的诱导加权丛结构。由于 $\pi_{N,\,N'}$ 是满射，因此有 $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}$。

**命题 3.16**。 存在一个同构 $\operatorname{Cl}\left(\tilde{\mathbb{P}}\right) \simeq \mathbb{Z}^2$，使得

- 对任意 $0 \le \tilde{i} \le r$，除子 $D_i$ 映射到 $(a_i'', 0)$
- 对任意 $r+1 \le j \le s$，除子 $D_j$ 映射到 $(0, a_j'')$，并且
- 除子 $\mathbb{E}$ 映射到 $(-h', h)$。

证明。令 $\left(\mathbb{Z}^{s+1}\right)^\vee = \bigoplus_{i=0}^s \mathbb{Z}\mathbf{e}_i^\vee$，其中 $\{\mathbf{e}_i^\vee\}_{i=0}^s$ 是 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^s$ 的对偶基。那么 $M := N^\vee$ 等于

$$\left\{ \sum_{i=0}^s m_i \mathbf{e}_i^\vee \in \left(\mathbb{Z}^{s+1}\right)^\vee \;\middle|\; \sum_{i=0}^s m_i a_i = 0 \right\}.$$

Set

$$\mathbb{Z}^{s+2} = \mathbb{Z}^{\tilde{\Sigma}(1)} := \bigoplus_{i=0}^{r} \mathbb{Z}[u_i] \oplus \bigoplus_{j=r+1}^{s+1} \mathbb{Z}[v_j].$$

根据 [CLS11，定理 4.1。3],存在一个正合列

$$0 \to M \xrightarrow{\iota_{\tilde{\Sigma}}} \mathbb{Z}^{\tilde{\Sigma}(1)} \to \mathrm{Cl}\left(\tilde{\mathbb{P}}\right) \to 0,$$

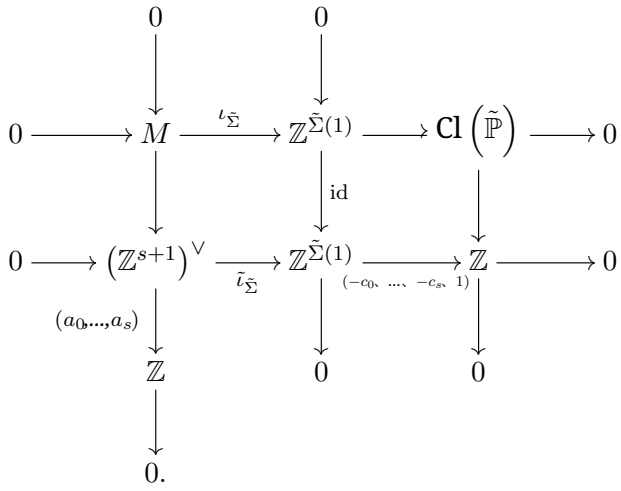
其中

$$\iota_{\tilde{\Sigma}}(m) = \left(\langle m, u_0\rangle, \ldots, \langle m, u_r\rangle, \langle m, v_{r+1}\rangle, \ldots, \langle m, v_{s+1}\rangle\right).$$

考虑同态 $\tilde{\iota}_{\tilde{\Sigma}}$: $\left(\mathbb{Z}^{s+1}\right)^\vee \to \mathbb{Z}^{\tilde{\Sigma}(1)}$，定义如下

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ c_0 & \cdots & c_s \end{pmatrix},$$

其中（$c_0$，……，$c_s$）$\in \mathbb{Z}^{s+1}$ 如引理 3.12 的证明中所述。则，同态 $\iota_{\tilde{\Sigma}}$ 等于 $\tilde{\iota}_{\tilde{\Sigma}}$ 在 $M$上的限制。因此，我们有如下正合图:




由蛇引理，我们得到如下短正合列:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}\left(\tilde{\mathbb{P}}\right) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

通过简单的图表追逐，存在一个同构 $\mathrm{Cl}\left(\tilde{\mathbb{P}}\right) \simeq \mathbb{Z}^2$，使得

$$\begin{aligned} [u_i] &\mapsto a_i''(h,k) \quad (0 \le i \le r), \\ [v_j] &\mapsto a_j''(h',k') \quad (r+1 \le j \le s), \\ [v_{s+1}] &\mapsto (0,-1), \end{aligned}$$

其中 $[u_i]$、$[v_j]$、$[v_{s+1}] \in \mathrm{Cl}(\tilde{\mathbb{P}})$ 由自然满射 $\mathbb{Z}^{\tilde{\Sigma}(1)} \to \mathrm{Cl}(\tilde{\mathbb{P}})$ 和$k$给出，$k' \in \mathbb{Z}$ 其定义与引理 3.12的证明中相同。结合该同构

$$\begin{pmatrix} -k' & h' \\ k & -h \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2,$$

我们得到该断言。 □

**定义 3.17。** 根据命题 $\left(\tilde{\mathbb{P}}\right) \simeq \mathbb{Z}^2$ 中的同构 $\mathrm{Cl}\left(\tilde{\mathbb{P}}\right) \simeq \mathbb{Z}^2$，3.16我们将与（$\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}$（$\alpha$、$\beta$）$\in \mathrm{Cl}\left(\tilde{\mathbb{P}}\right)$ 相对应的元素记为（$\alpha$、$\beta$）$\in \mathbb{Z}^2$。此外，Cox 环的 $\mathbb{Z}^2$-分次为 $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_s, z]$，

$$\deg x_i = \left(a_i'', 0\right), \quad \deg y_j = \left(0, a_j''\right), \quad \deg z = \left(-h', h\right).$$

**引理 3.18.** 对于任意 $0 \leq i \leq r$，我们有

$$\psi^* D_i = \tilde{D}_i + \frac{a_i}{hh'}\mathbb{E}, \quad \pi^* D_i' = g_i \tilde{D}_i.$$

对于任意 $r+1 \leq j \leq s$，我们有 $\psi^* D_j = D_j$。特别地，我们有

$$\psi^*\left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\right] = \left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left(0, \frac{1}{h'}\right)\right], \quad \pi^*\left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)\right] = \left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left(g, 0\right)\right].$$

此外，态射 $\psi$ 和 $\pi$ 由以下方式得到

$$\begin{aligned} \psi\colon \left[x_0 : \cdots : x_r ; y_{r+1} : \cdots : y_s : z\right] &\mapsto \left[x_0 : \cdots : x_r : y_{r+1} : \cdots : y_s\right], \\ \pi\colon \left[x_0 : \cdots : x_r ; y_{r+1} : \cdots : y_s : z\right] &\mapsto \left[x_0^{g_0} : \cdots : x_r^{g_r}\right]. \end{aligned}$$

证明。注意到 $v_{s+1} = \frac{1}{h'}\sum_{i=0}^{r} a_i'' u_i$ 以及满射 $\pi_{N,N'}\colon N \twoheadrightarrow N'$ 将 $u_i$ 映射到 $g_i u_i'$。因此，该断言显然成立。□

**命题 3.19.** 对于任意 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，存在一个自然同构

$$\begin{aligned} \pi^*\colon H^0\left(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(d)\right) &\to H^0\left(\tilde{\mathbb{P}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(gd, 0)\right), \\ f\left(x_0', \ldots, x_r'\right) &\mapsto f\left(x_0^{g_0}, \ldots, x_r^{g_r}\right). \end{aligned}$$

*(因此，我们常用 $\pi^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)|$ 代替 $\left|\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(gd,0)\right|$。)*

证明。由于

$$\begin{aligned} & \left\{f \in \mathbb{C}\left[x_0, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_s, z\right] \mid \deg f = (gd, 0)\right\} \\ \simeq\ & \left\{f \in \mathbb{C}\left[x_0'', \ldots, x_r''\right] \mid \deg f = gd\right\} \end{aligned}$$

且次数为 $x_i'' = a_i''$，由 [IF00，引理 57]得出断言。 □

接下来，我们将看到，标准加权爆破及其诱导的加权丛结构可以拉回到环面有限覆盖 $\tau\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 如命题 3.4所示。

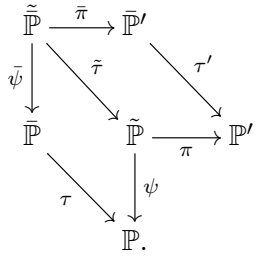
引理 *3.20*。对于任意 $0 \leq i \leq s$，取 $e_i, \bar{a}_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $a_i = e_i \bar{a}_i$。注意，$(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_s)$ 是良定的。令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_s)$，并令 $\tau\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 为环面有限态射，如命题 *3.4* 中的。令 $\psi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 为沿 $\mathbb{P}(\bar{a}_{r+1}, \ldots, \bar{a}_s)$ 对 $\mathbb{P}$ 作的标准加权爆破，并令 $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}$ 为 $\psi$ 的例外除子。此外，令 $\bar{\pi}\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ 为 $\mathbb{P}$ 的诱导加权丛结构。对于任意 $0 \leq i \leq r$，设

$$\begin{aligned} \bar{h} &:= \gcd\left(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_r\right), \quad \bar{a}_i'' := \frac{\bar{a}_i}{\bar{h}}, \\ \bar{g}_i &:= \gcd\left(\bar{a}_0'', \ldots, \hat{\bar{a}}_i'', \ldots, \bar{a}_r''\right), \quad \bar{g} := \prod_{i=0}^{r} \bar{g}_i, \quad \bar{a}_i' := \frac{\bar{a}_i'' \bar{g}_i}{\bar{g}}. \end{aligned}$$

对于任意 $r+1 \leq j \leq s$，定义

$$\begin{aligned} \bar{h}' &:= \gcd\left(\bar{a}_{r+1}, \ldots, \bar{a}_s\right), \quad \bar{a}_j'' := \frac{\bar{a}_j}{\bar{h}'}, \\ \bar{g}_j &:= \gcd\left(\bar{a}_{r+1}'', \ldots, \hat{\bar{a}}_j'', \ldots, \bar{a}_s''\right), \quad \bar{g}' := \prod_{j=r+1}^{s} \bar{g}_j, \quad \bar{a}_j' := \frac{\bar{a}_j'' \bar{g}_j}{\bar{g}'}. \end{aligned}$$

*(1)* 存在有限环面态射 $\tilde{\tau}\colon \tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$ 和 $\tau'\colon \mathbb{P}' \to \mathbb{P}'$，使得图表交换：



*(2)* 我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^*\tilde{D}_i &= e_i\tilde{\bar{D}}_i \quad (0 \le i \le r),\\ \tilde{\tau}^*\tilde{D}_j &= e_j\tilde{\bar{D}}_j \quad (r+1 \le j \le s),\\ \tilde{\tau}^*\mathbb{E} &= \frac{hh'}{\bar{h}\bar{h}'}\tilde{\mathbb{E}}.\end{aligned}$$

特别地，我们有

$$\tilde{\tau}^*\left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\alpha,\beta)\right] \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\tilde{\bar{\mathbb{P}}}}\left(\frac{h}{\bar{h}}\alpha, \frac{h'}{\bar{h}'}\beta\right)\right].$$

*(3)* 对任意 $0 \le i \le r$，我们有

$$(\tau')^*D'_i = \frac{e_i g_i}{\bar{g}_i}\bar{D}'_i.$$

特别地，我们有

$$(\tau')^*\left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)\right] \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\bar{\mathbb{P}}'}\left(\frac{gh}{\bar{g}\bar{h}}\right)\right].$$

*(4)* 态射 $\tilde{\tau}$ 和 $\tau'$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}\colon [\bar{x}_0 : \cdots : \bar{x}_r; \bar{y}_{r+1} : \cdots : \bar{y}_s : \bar{z}] &\mapsto \left[\bar{x}_0^{e_0} : \cdots : \bar{x}_r^{e_r}; \bar{y}_{r+1}^{e_{r+1}} : \cdots : \bar{y}_s^{e_s} : \bar{z}^{\frac{hh'}{\bar{h}\bar{h}'}}\right],\\ \tau'\colon \left[\bar{x}'_0 : \cdots : \bar{x}'_r\right] &\mapsto \left[\bar{x}_0'^{\frac{e_0 g_0}{\bar{g}_0}} : \cdots : \bar{x}_r'^{\frac{e_r g_r}{\bar{g}_r}}\right].\end{aligned}$$

证明。设 $\pi_{\bar{N},N}\colon N \twoheadrightarrow N$ 如命题3.4所述。于是我们可以直接验证

$$\pi_{\bar{N},N}(\bar{v}_{s+1}) = \frac{hh'}{\bar{h}\bar{h}'}v_{s+1}.$$

由此我们得到态射 $\tilde{\tau}$。结合命题 3.4，可得断言 (2)。我们注意到，诱导的加权丛结构 $\bar{\pi}$ 是唯一非平凡的纤维化结构 $\mathbb{P}$。因此 $\bar{\pi}$ 可由态射 $\pi \circ \tilde{\tau}$的 Stein 分解得到。由此我们得到满足断言 (1) 的所需环面有限态射 $\tau'$。断言 (3) 由 (2) 和引理 3.18立即推出。剩余的断言 (4) 由 (2) 和 (3) 显然可得。□

**推论 3.21**。设 $\psi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 为定义 *3.14* 中的标准加权爆破，且$\pi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ 为定义 *3.15*中的诱导加权丛结构。

*(1)* 对任意 $0 \le k \le s$，有

$$\left(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(1,0)^{\cdot k} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(0,1)^{\cdot s-k}\right) = \begin{cases}\frac{h^k(h')^{s-k}}{a_0\cdots a_s} & \text{if } 0 \le k \le r,\\ 0 & \text{if } r+1 \le k \le s.\end{cases}$$

*(2)* 两个限制态射

$$\begin{aligned}\pi|_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{E} &\to \mathbb{P}\left(a'_0, \ldots, a'_r\right),\\ \psi|_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{E} &\to \mathbb{P}\left(a'_{r+1}, \ldots, a'_s\right)\end{aligned}$$

给出同构

$$\pi|_{\mathbb{E}} \times \psi|_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{E} \simeq \mathbb{P}\left(a'_0, \ldots, a'_r\right) \times \mathbb{P}\left(a'_{r+1}, \ldots, a'_s\right).$$

此外，在该同构下，我们有

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\alpha, \beta)\right]|_{\mathbb{E}} &\sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}\left(a'_0, \ldots, a'_r\right) \times \mathbb{P}\left(a'_{r+1}, \ldots, a'_s\right)}\left(\frac{\alpha}{g}, \frac{\beta}{g'}\right)\right], \\ \mathbb{E}|_{\mathbb{E}} &\sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}\left(a'_0, \ldots, a'_r\right) \times \mathbb{P}\left(a'_{r+1}, \ldots, a'_s\right)}\left(-\frac{h'}{g}, \frac{h}{g'}\right)\right]. \end{aligned}$$

证明。(1) 令我们应用引理 3.20 于 $\bar{a}_i = 1$，$e_i = a_i$ 对所有 $0 \leq i \leq s$。于是 $h = h' = 1$。此外，我们有 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^s$ 且 $\mathbb{P}$ 正是沿着 $\mathbb{P}^s$ 一个（$s - r - 1$）维线性子空间的普通爆破（另见例3.27）。特别地，我们有

$$\tilde{\tilde{\mathbb{P}}} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{P}^r}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{\oplus s-r} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)\right)$$

且 $\bar{\pi}$ 是 $\mathbb{P}^{s-r}$-丛。此外，$\mathcal{O}_{\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}}(1, 0) \simeq \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ 和 $\mathcal{O}_{\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}}(1, 0)$ 关于上述丛结构同构于典范线丛。这立即推出

$$\left(\mathcal{O}_{\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}}(1,0)^{\cdot k} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}}(0,1)^{\cdot s-k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq k \leq r, \\ 0 & \text{if } r+1 \leq k \leq s. \end{cases}$$

注意，$\deg \tilde{\tau} = \deg \tau = \prod_{i=0}^{s} e_i = \prod_{i=0}^{s} a_i$。因此，断言（1）由引理 3.20得出。（2）置 $\gamma := \pi|_{\mathbb{E}} \times \psi|_{\mathbb{E}}$。于是 $\gamma$ 是一个有限态射。根据命题 3.5，我们有

$$\left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)\right]|_{\mathbb{P}\left(a'_{r+1}, \ldots, a'_s\right)} \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\mathbb{P}\left(a'_{r+1}, \ldots, a'_s\right)}\left(\frac{1}{g'h'}\right)\right].$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} &\left(\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)^{\cdot r} \cdot \psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(g'h'\right)^{\cdot s-r-1} \cdot \mathbb{E}\right) \\ = \quad &\deg \gamma \cdot \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)^{\cdot r}\right) \cdot \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(g'h'\right)^{\cdot s-r-1}\right) = \frac{\deg \gamma}{a'_0 \cdots a'_s}. \end{aligned}$$

另一方面，由 (1) 和引理 3.18，我们有

$$\begin{aligned} &\left(\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)^{\cdot r} \cdot \psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(g'h'\right)^{\cdot s-r-1} \cdot \mathbb{E}\right) \\ = \quad &\left(\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(g,0)^{\cdot r} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left(0,g'\right)^{\cdot s-r-1} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left(-h',h\right)\right) = \frac{g^r h^{r+1} (g')^{s-r-1} (h')^{s-r}}{a_0 \cdots a_s}. \end{aligned}$$

结合上述两个等式，我们得到 $\deg \gamma = 1$。其余断言显然。□

注 3.22. 假设 $r = s - 1$。那么 $\mathbb{E} \simeq \mathbb{P}'$ 是 $\pi$的一个截面。对于任意非零$f \in H^0(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(d))$，我们可以考虑 $(\pi^* f = 0) \in \left|\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(gd, 0)\right|$，如命题 3.19 中所述，即 $\pi^* f = f(x_0^{g_0}, \ldots, x_r^{g_r})$。我们可以直接验证，限制 $(\pi^* f = 0)|_{\mathbb{E}}$ 是 $\mathbb{E}$上的一个 $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-除子，在同构 $\pi|_{\mathbb{E}}$ 下，它是由 $(f = 0) \subset \mathbb{P}'$ 定义在 $\mathbb{E}$ 上的一个魏尔除子。此外，如果 $(a_0, \ldots, a_r)$ 是良定的（即，如果 $g_0 = \cdots = g_r = 1$），那么对于任意 $\tilde{f} \in H^0\left(\tilde{\mathbb{P}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\alpha, \beta)\right)$，限制 $\left(\tilde{f} = 0\right)|_{\mathbb{E}}$ 在同构 $\mathbb{E} \simeq \mathbb{P}'$ 下也是由 $\left(\tilde{f}(x_0, \ldots, x_r, 1, 0) = 0\right) \subset \mathbb{E}$ 定义在 $\mathbb{E}$ 上的一个魏尔除子。

引理 *3.23.* 假设 $g_0 = 1$。若 $\varphi' \in H^0(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(a'_0))$ 是一般的，则存在~同构 $\tilde{\iota} \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 和 $\iota' \colon \mathbb{P}' \to \mathbb{P}'$，满足 $\iota' \circ \pi = \pi \circ \tilde{\iota}$、$(\iota')^* D'_0 = (\varphi' = 0)$ 以及 ~ ~ $\tilde{\iota}^* D_0 = (\pi^* \varphi' = 0)$，其中 $D'_0 = (x'_0 = 0) \subset \mathbb{P}'$ 和 $D_0 = (x_0 = 0) \subset \mathbb{P}$ 如设定 *3.11* 和定义 *3.14* 中所述，并且

$$\pi^* \varphi' \in H^0\left(\tilde{\mathbb{P}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(a''_0, 0)\right)$$

与命题*3.19*相同。

证明。 证明与引理3.6的证明几乎相同。我们可以假设 $\varphi' = x_0' + \varphi_0'(x_1', \dots, x_r')$ 满足 $\varphi_0' \in H^0(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(a_0'))$。注意到

$$\pi^*\varphi' = x_0 + \varphi_0'(x_1^{g_1}, \dots, x_r^{g_r}).$$

我们设

$$\begin{aligned} \iota' \colon \left[x_0' : x_1' : \cdots : x_r'\right] &\mapsto \left[x_0' + \varphi_0'\left(x_1', \dots, x_r'\right) : x_1' : \cdots : x_r'\right], \\ \tilde{\iota} \colon \left[x_0 : x_1 : \cdots : x_r; y_{r+1} : \cdots : y_s : z\right] & \\ \mapsto \left[x_0 + \varphi_0'\left(x_1^{g_1}, \dots, x_r^{g_r}\right) : x_1 : \cdots : x_r; y_{r+1} : \cdots : y_s : z\right]. & \end{aligned}$$

那么，由引理3.20，这些态射满足引理 3.23中的性质。 □

~标准加权爆破 $\psi \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 以及诱导的加权丛结构~$\pi \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ 为 $D_0$ 和 $D_s$ 诱导如下态射。

**命题 3.24.** 假设 $s \geq 2$。

*(1)* 对任意 $1 \leq i \leq s$，设

$$\dot{g}_i := \gcd\left(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_s\right), \quad \dot{g} := \prod_{i=1}^{s} \dot{g}_i, \quad \dot{a}_i := \frac{a_i \dot{g}_i}{\dot{g}}.$$

~我们知道 $D_0 \simeq \mathbb{P}\left(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_s\right)$ 由命题 *3.7*可知。若 $r = 1$，则 $\psi|_{\tilde{D}_0} \colon D_0 \to D_0$是一个同构。假设 $r \geq 2$。那么

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_0 & \xrightarrow{\pi|_{\tilde{D}_0}} & D_0' \\ {\scriptstyle \psi|_{\tilde{D}_0}} \downarrow & & \\ D_0 & & \end{array}$$

是沿着 $\mathbb{P}\left(\dot{a}_{r+1}, \dots, \dot{a}_s\right)$对 $D_0 = \mathbb{P}\left(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_s\right)$ 进行的标准加权爆破，并带有加权丛结构。我们有

$$\mathbb{E} \cdot \tilde{D}_0 = \frac{1}{g_0} \mathbb{E}_{D_0},$$

~其中 $\mathbb{E}_{D_0} \subset D_0$ 是 $\psi|_{\tilde{D}_0}$的例外除子，并且

$$\left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\alpha, \beta)\right]|_{\tilde{D}_0} \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\tilde{D}_0}\left(\frac{\gcd\left(\dot{a}_{r+1}, \dots, \dot{a}_s\right)}{g_0 h'} \alpha, \frac{\gcd\left(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_r\right)}{g_0 h} \beta\right)\right].$$

*(2)* 对任意 $0 \leq i \leq s-1$，令

$$\ddot{g}_i := \gcd\left(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_{s-1}\right), \quad \ddot{g} := \prod_{i=0}^{s-1} \ddot{g}_i, \quad \ddot{a}_i := \frac{a_i \ddot{g}_i}{\ddot{g}}.$$

~由命题 $D_s \simeq \mathbb{P}\left(\ddot{a}_0, \dots, \ddot{a}_{s-1}\right)$ *3.7*可知。若 $r = s-1$，则 $\psi|_{\tilde{D}_s} \colon D_s \to_{\sim} D_s$ 是一个同构，而 $D_s$ 是 $\pi$的一个截面。设 $r \leq s-2$。则

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_s & \xrightarrow{\pi|_{\tilde{D}_s}} & \mathbb{P}' \\ {\scriptstyle \psi|_{\tilde{D}_s}} \downarrow & & \\ D_s & & \end{array}$$

是沿着 $\mathbb{P}\left(\ddot{a}_{r+1}, \dots, \ddot{a}_{s-1}\right)$ 对 $D_s = \mathbb{P}\left(\ddot{a}_0, \dots, \ddot{a}_{s-1}\right)$ 进行的标准加权爆破，并带有加权丛结构。我们有

$$\mathbb{E} \cdot \tilde{D}_s = \frac{1}{g_s} \mathbb{E}_{D_s},$$

其中 $\mathbb{E}_{D_s} \subset D_s$ 是 $\psi|_{\tilde{D}_s}$的例外除子，并且

$$\left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\alpha,\beta)\right]|_{\tilde{D}_s} \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\tilde{D}_s}\left(\frac{\gcd\left(\ddot{a}_{r+1},\ldots,\ddot{a}_{s-1}\right)}{g_s h'}\alpha, \frac{\gcd\left(\ddot{a}_0,\ldots,\ddot{a}_r\right)}{g_s h}\beta\right)\right].$$

证明。 我们只需证明（1），因为（2）的证明与（1）的证明相同。我们可以假设 $r \geq 2$。断言 $\mathbb{E}\cdot\tilde{D}_0 = \frac{1}{g_0}\mathbb{E}_{D_0}$ 由引理 3.13得出。令

$$\dot{N}'' := N/\mathbb{Z}u_0 \simeq \mathbb{Z}^s/\mathbb{Z}\sum_{i=1}^{s} a_i \mathbf{e}_i.$$

令 $\dot{u}_i'' \in N''$（分别为，$\dot{v}_j'' \in N''$）是对所有 $u_i \in N$（分别为，$v_j \in N$）的像。对所有 $1 \leq i \leq r$（分别为，$r+1 \leq j \leq s$）。由命题 3.2，存在一个格的同构 $N \simeq N''$，并且存在本原元素

$$\dot{u}_1,\ldots,\dot{u}_r,\dot{v}_{r+1},\ldots,\dot{v}_s \in \dot{N}$$

满足

$$\dot{g}_i\dot{u}_i \mapsto \dot{u}_i'', \quad \dot{g}_j\dot{v}_j \mapsto \dot{v}_j''.$$

在满射 $N \twoheadrightarrow N'' \simeq N$ 下，$v_{s+1} \in N$ 的像 $\dot{v}_{s+1} \in N$ 可表示为

$$\dot{v}_{s+1} = \frac{1}{h'}\sum_{i=1}^{r} a_i''\dot{u}_i = -\frac{1}{h}\sum_{j=r+1}^{s} a_j''\dot{v}_j.$$

元素 $\dot{v}_{s+1} \in N$ 是一个满足以下条件的非零元素

$$\dot{v}_{s+1} \in \sum_{i=1}^{r}\mathbb{Q}_{\geq 0}\dot{u}_i \quad \text{and} \quad \dot{v}_{s+1} \in \left(\sum_{i=1}^{r}\mathbb{Q}\dot{u}_i\right) \cap \left(\sum_{j=r+1}^{s}\mathbb{Q}\dot{v}_j\right).$$

此外，托里克簇 $D_0$ 由 $N_{\mathbb{R}}$ 中的扇定义，其极大锥集合由以下部分组成

$$\mathrm{Cone}\left(\dot{u}_1,\ldots,\hat{\dot{u}}_i,\ldots,\dot{u}_r,\dot{v}_{r+1},\ldots,\hat{\dot{v}}_j,\ldots,\dot{v}_{s+1}\right)$$

其中 $1 \leq i \leq r$ 且 $r+1 \leq j \leq s+1$ 由 [CLS11，§3.2]。因此，正如我们在引理3.12中指出的，态射 $\psi|_{\tilde{D}_0}\colon D_0 \to D_0$ 不过是标准加权爆破。此外，态射 $\pi|_{\tilde{D}_0}\colon D_0 \twoheadrightarrow D_0'$ 是一个具有连通纤维的纤维化。因此，态射 $\pi|_{\tilde{D}_0}$是诱导的加权丛结构。令

$$\tilde{h} := \gcd\left(\dot{a}_1,\ldots,\dot{a}_r\right), \quad \tilde{h}' := \gcd\left(\dot{a}_{r+1},\ldots,\dot{a}_s\right).$$

我们可以取 $d_0$，$d_0' \in \mathbb{Q}_{>0}$ 使得

$$\left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\alpha,\beta)\right]|_{\tilde{D}_0} \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\tilde{D}_0}\left(d_0\alpha, d_0'\beta\right)\right].$$

对任意 $\alpha$，$\beta \in \mathbb{Q}$均成立。由于 $\mathbb{E}|_{\tilde{D}_0} = \frac{1}{g_0}\mathbb{E}_{D_0}$，我们得到

$$\left[\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left(-h',h\right)\right]|_{\tilde{D}_0} \sim_{\mathbb{Q}} \left[\mathcal{O}_{\tilde{D}_0}\left(-\frac{\tilde{h}'}{g_0}, \frac{\tilde{h}}{g_0}\right)\right].$$

因此我们得到

$$d_0 = \frac{\tilde{h}'}{g_0 h'}, \quad d_0' = \frac{\tilde{h}}{g_0 h}$$

由上述等式可知。 □

**推论 3.25.** 在命题 3.24的记号下，进一步假设 $r \geq 2$，$(a_1,\ldots,a_s)$是良定的，且 $g_0 = 1$。（例如，若 $r \geq 2$ 且 $(a_1,\ldots,a_r)$ 是良定的，则上述三个条件均得到满足。）那么我们可以很容易地验证，对于任意 $1 \leq i \leq s$以及

$$\frac{\tilde{h}'}{g_0 h'} = \frac{\tilde{h}}{g_0 h} = 1.$$

此外，对于任意非零齐次多项式

$$f\left(x_0,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_s,z\right)\in\mathbb{C}\left[x_0,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_s,z\right]$$

~次数为$(d_1,d_2)$的 $\mathbb{P}$ 的 *Cox* 环中的一个齐次多项式，其限制$(f=0)|_{\tilde{D}_0}$到$(f=0)\subset\mathbb{P}$是在 $\left|\mathcal{O}_{\tilde{D}_0}(d_1,d_2)\right|$ 中的 $\tilde{D}_0$ 上由该齐次多项式定义的一个魏尔除子

$$f|_{\tilde{D}_0}:=f\left(0,x_1\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_s,z\right)\in\mathbb{C}\left[x_1,\ldots,x_r,y_{r+1},\ldots,y_s,z\right]$$

~次数为$(d_1,d_2)$ 的 $D_0$ 的 *Cox* 环中的一个齐次多项式。

证明。 由命题 3.24 (1) 和命题 3.7， $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-除子 $(f=0)|_{\tilde{D}_0}$ 在~的所有余维一点处都是 Cartier $D_0$。因此，如命题3.7的证明所示，我们得到所述结论。 □

**例 3.26**。 假设 $s=r+1$、$(a_0,\ldots,a_r)$ 是良定的，并令

$$P:=[0:\cdots:0:1]\in\mathbb{P}.$$

那么， $P\in\mathbb{P}$ 的奇点同构于商奇点

$$0\in\mathbb{A}^{r+1}_{\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_r}/\mathbb{Z}_{a_{r+1}}\left(a_0,\ldots,a_r\right)$$

~按照 [Kaw24，定义 2.2。10]。根据引理 3.12，态射 $\psi$: $\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ 不过是对 $P\in\mathbb{P}$ 进行加权爆破，其权重为 $\mathrm{wt}\left(\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_r\right)=\frac{1}{a_{r+1}}\left(a_0,\ldots,a_r\right)$，其意义如 [Kaw24，定义 2.211]。

**例 3.27**。 假设存在 $a\in\mathbb{Z}_{>0}$ ，使得

$$a_0=\cdots=a_r=1\quad\text{and}\quad a_{r+1}=\cdots=a_s=a.$$

那么我们有

$$\begin{aligned}&h=1,\quad a_i''=a_i=1,\quad g_i=g=1\quad(0\le i\le r),\\&h'=a,\quad a_j''=a_j'=1,\quad g_j=g'=1\quad(r+1\le j\le s).\end{aligned}$$

在这种情况下，格

$$N=\mathbb{Z}^{s+1}/\mathbb{Z}\left(\sum_{i=0}^{r}\mathbf{e}_i+a\sum_{j=r+1}^{s}\mathbf{e}_j\right)$$

满足该条件。

$$N=\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}u_i\oplus\bigoplus_{j=r+2}^{s+1}\mathbb{Z}v_j$$

with

$$v_{r+1}=-\sum_{j=r+2}^{s+1}v_j,\quad u_0=-\sum_{i=1}^{r}u_i+av_{s+1}.$$

根据 [CLS11中的例 7.3，5],我们可以直接验证

$$\tilde{\mathbb{P}}\simeq\mathbb{P}_{\mathbb{P}^r}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}^{\oplus s-r}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(a)\right).$$

此外，态射 $\pi$ 是通常的射影空间丛。令 $\xi\in\mathrm{Pic}\left(\tilde{\mathbb{P}}\right)$ 为相对于上述丛结构的典范线丛。于是我们有

$$\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\alpha,\beta)\simeq\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(\alpha)\otimes\xi^{\otimes\beta}$$

对于任意 $\alpha$， $\beta\in\mathbb{Z}$。

3.3. **关于拟光滑性**。我们首先讨论拟光滑加权超曲面的一些性质，然后研究拟光滑性是否在加权爆破下保持。

**定义 3.28**。设 $N=\mathbb{Z}^s$ 为一个格， $\Theta$ 为 $N_{\mathbb{R}}$中的一个单纯完备扇， $\{u_1,\dots,u_k\}\subset N$为 $\Theta$ 的一维锥的本原生成元集合。设 $\mathbb{P}$为与 $\Theta$相关联的适当且 $\mathbb{Q}$-阶乘托里克簇 $=X_\Theta$:$\mathbb{P}$，设 $\mathbb{P}$ 的 Cox 环为 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_k]$，其中 $u_i$对应于 $z_i$，并设

$$Z(\Theta)\subset\mathbb{A}^k=\mathbb{A}^k_{z_1,\dots,z_k}$$

按照 $\Theta$的意义， [CLS11，§5.1]。如 [CLS11定理 5.1 所示，11],存在典范商态射

$$\mathbb{A}^k\setminus Z(\Theta)\to\mathbb{P}.$$

对任意 $1\le i\le k$，令 $\alpha_i:=\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(V(u_i))\in\mathrm{Cl}(\mathbb{P})$。取任意非零且次数为 $\beta\in\mathrm{Cl}(\mathbb{P})$ 的齐次 $f\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_k]$，并令 $X:=(f=0)\in|\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\beta)|$。

(1) 除子 $X\subset\mathbb{P}$ 的非拟光滑轨迹 $\mathrm{NQS}(X)\subset X$ 定义为 $\mathbb{A}^k\setminus Z(\Theta)\to\mathbb{P}$ 对

$$\left\{z\in\mathbb{A}^k\setminus Z(\Theta)\mid(f=0)\subset\mathbb{A}^k\text{ is singular at }z\right\}.$$

若 $\mathrm{NQS}(X)=\emptyset$，则称除子 $X\subset\mathbb{P}$ 为拟光滑。

(2)（参见 [ST25，定义 2.1]）除子 $X\subset\mathbb{P}$ 称为 良定，如果子集 $\mathrm{Sing}\,\mathbb{P}\cap X\subset X$ 的余维数为 $\ge 2$。

**命题 3.29**。若 $X\subset\mathbb{P}$ 拟光滑，则对 $(\mathbb{P},X)$ 是一个纯对数终端对，并且

$$(K_{\mathbb{P}}+X)|_X=K_X+\sum_{\substack{\tau\in\Theta(2);\\ V(\tau)\subset X}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{mult}(\tau)}\right)V(\tau),$$

其中 $\Theta(2)$ 是 $\Theta$ 中的2维锥的集合。特别地，若此外 $X\subset\mathbb{P}$ 良定，则有 $K_X=(K_{\mathbb{P}}+X)|_X$。

证明。任取一个 $s$ 维锥

$$\sigma=\mathbb{R}_{\ge0}u_1+\cdots+\mathbb{R}_{\ge0}u_s\in\Theta$$

以及任意二维子锥 $\tau=\mathbb{R}_{\ge0}u_1+\mathbb{R}_{\ge0}u_2\in\Theta$ 满足 $V(\tau)\subset X$。考虑由 $\mathbb{A}_\sigma\subset\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{P}$ 中定义的仿射开子集 $\sigma$。根据 [BC94，命题 3，5], 代数群

$$\mathbf{D}(\sigma):=\mathbb{C}[\mathrm{Cl}(\sigma)]\subset(\mathbb{C}^*)^s$$

在 [BC94，定理 1 中，9]是有限且小的，而商

$$q\colon\mathbb{A}^s_{x_1\dots x_s}\to\mathbb{A}^s/\mathbf{D}(\sigma)$$

同构于 $\mathbb{A}_\sigma$。此外，对于任意 $1\le i\le s$， $D_i:=V(u_i)\subset\mathbb{A}_\sigma$ 的拉回等于超平面 $(x_i=0)$，且除子 $q^*(X|_{\mathbb{A}_\sigma})\subset\mathbb{A}^s$ 是光滑的。由于

$$K_{\mathbb{A}^s}+q^*(X|_{\mathbb{A}_\sigma})=q^*(K_{\mathbb{A}_\sigma}+X|_{\mathbb{A}_\sigma}),$$

对 $(\mathbb{P},\ X)$ 是纯对数终端的。此外，根据分歧公式，$X\subset\mathbb{P}$沿 $V(\tau)$ 的不同子的系数等于 $1-\frac{1}{d}$，其中 $d\in\mathbb{Z}_{>0}$定义为

$$q^*V(\tau)=d\cdot(x_1=x_2=0)_{\mathrm{red}}.$$

另一方面，与命题的证明3.7中一样，我们有

$$(K_{\mathbb{P}}+D_1)|_{D_1}=K_{D_1}+\sum_{\substack{u\in\Theta(1);\\ \tau_1:=\mathbb{R}_{\ge0}u+\mathbb{R}_{\ge0}u_1\in\Theta(2)}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{mult}(\tau_1)}\right)V(\tau_1)$$

其中 $D_1=V(u_1)$。因此，上述 $d$ 必须等于 $\mathrm{mult}(\tau)$，因为 $D_1\subset\mathbb{P}$ 也具有拟光滑性。□

对于拟光滑超曲面 $X \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\beta)|$， $X$ 其良形性可以按照 [IF00,6.10]中的方式以组合方式解释。

**引理 3.30**。 在定义 *3.28*中的假设下，有如下结论：*(1)* 对任意 $1 \leq i \leq k$，有

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}) = \sum_{j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i\}} \mathbb{Z}\alpha_j.$$

*(2)* 任取 $2 \leq t \leq s$。假设 $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}u_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}u_{i_t} \in \Theta(t)$ 对于某个 $1 \leq t \leq k$成立，其中 $\Theta(t)$是 $\Theta$ 中的 $t$维锥的集合。那么商群

$$\mathcal{C} := \mathrm{Cl}(\mathbb{P}) / \sum_{j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i_1,\dots,i_t\}} \mathbb{Z}\alpha_j$$

是有限阿贝尔群，其阶为$\mathrm{mult}(\tau)$。

证明。 (1) 由于 $u_i \in N$ 是本原的，存在 $m \in M$ 使得 $\langle m,\ u_i\rangle = 1$ 成立，其中$M := N^\vee$。因此可得

$$\alpha_i = -\sum_{j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i\}} \langle m, u_j\rangle \alpha_j.$$

(2) 不妨设 $\{i_1,\dots,i_t\} = \{1,\dots,t\}$。令 $M_\tau$为

$$N_\tau := N \cap (\mathbb{R}u_1 + \cdots + \mathbb{R}u_t).$$

考虑同态

$$\begin{aligned} \phi\colon M &\to \mathbb{Z}^t \\ m &\mapsto (\langle m, u_1\rangle, \dots, \langle m, u_t\rangle). \end{aligned}$$

由于 $\phi$ 自然地经由投影 $M \twoheadrightarrow M_\tau$分解， $\phi$ 的余核 $\mathcal{C}'$ 是一个阶为 $\mathrm{mult}(\tau)$ 的有限群。考虑如下图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\mathrm{id}} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{k-t} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^k & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{Z}^t & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

其中 $\iota(m) := (\langle m,\ u_i\rangle)_{1 \leq i \leq k}$， 且 $p$ 是到前 $t$ 个分量的典范投影。由蛇引理，我们得到以下正合列：

$$\mathbb{Z}^{k-t} \to \mathrm{Cl}(\mathbb{P}) \to \mathcal{C}' \to 0.$$

$\mathbb{Z}^{k-t} \to \mathrm{Cl}(\mathbb{P})$ 的像恰好是 $\sum_{j=t+1}^{k} \mathbb{Z}\alpha_j$。因此我们有一个同构$\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$。□

**命题 3.31**。 在定义 *3.28*中的假设下，假设 $X \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\beta)|$ 是 $\mathbb{P}$中的一个拟光滑超曲面。那么以下条件等价：

*(1)* 除子 $X \subset \mathbb{P}$ 是良定的。*(2)* 对任意 $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}u_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}u_{i_2} \in \Theta(2)$，我们有

$$\beta \in \sum_{j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i_1,i_2\}} \mathbb{Z}\alpha_j$$

在 $\mathrm{Cl}(\mathbb{P})$ 中。

证明。 假设 $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}u_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}u_2 \in \Theta$满足 (2)，且 $\mathrm{mult}(\tau) > 1$。由引理3.30(2)，可得

$$\sum_{i=3}^{k} \mathbb{Z}\alpha_i \subsetneq \mathrm{Cl}(\mathbb{P}).$$

我们可以唯一地写成

$$f = f_0(z_3, \ldots, z_k) + z_1 g_1(z_3, \ldots, z_k) + z_2 g_2(z_3, \ldots, z_k) + \sum_{i+j\geq 2} z_1^i z_2^j g_{i,j}(z_3, \ldots, z_k).$$

非良定义条件 $V(\tau) \subset X$ 等价于 $f_0 = 0$。

若 $\beta \notin \sum_{i=3}^k \mathbb{Z}\alpha_i$，则必有 $f_0 = 0$。反之，假设 $f_0 = 0$。我们可以取一点 $p = (0, 0, p_3, \ldots\ldots, p_k) \in \mathbb{A}^k \setminus Z(\Theta)$，使得 $p \in (f = 0)$。由于

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(p) = 0$$

对于任意 $3 \leq i \leq k$，我们有 $g_1(p_3, \ldots\ldots, p_k) \neq 0$ 或 $g_2(p_3, \ldots\ldots, p_k) \neq 0$，因为 $X \subset \mathbb{P}$ 是拟光滑的。这意味着

$$\beta - \alpha_1 \text{ or } \beta - \alpha_2 \in \sum_{i=3}^k \mathbb{Z}\alpha_i.$$

我们可以假设 $\beta - \alpha_2 \in \sum_{i=3}^k \mathbb{Z}\alpha_i$。若 $\beta \in \sum_{i=3}^k \mathbb{Z}\alpha_i$，则有 $\alpha_2 \in \sum_{i=3}^k \mathbb{Z}\alpha_i$。因此有 $\sum_{i=2}^k \mathbb{Z}\alpha_i \subsetneq \mathrm{Cl}(\mathbb{P})$，这与引理 3.30 (1) 矛盾。因此必有$\beta \notin \sum_{i=3}^k \mathbb{Z}\alpha_i$，于是立即得到所需的等价关系。□

例 3.32。(1) 假设 $(a_0, \ldots, a_s)$ 是良定的，且令 $\Sigma$ 属于 $N_{\mathbb{R}}$，并令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s)$，如定义 3.1 和 3.28 所述。则 $Z(\Sigma) = \{0\} \subset \mathbb{A}^{s+1}_{x_0 \cdots x_s}$ 成立。根据 [PST17，命题 2.3]，，若 $s \geq 4$，且若 $X \subset \mathbb{P}$ 是拟光滑且良定的超曲面，则 $X$ 的类群由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|_X$ 自由生成。本文中通常将该层记为 $\mathcal{O}_X(1)$。此外，若进一步假设 $X$ 是 Fano（即 $-K_X$ 是丰沛的），则将 $X$ 的指标定义为满足 $\mathcal{O}_X(-K_X) \simeq \mathcal{O}_X(\iota)$ 的正整数 $\iota$。根据命题 3.29， $X$ 的指标等于 $\sum_{i=0}^s a_i - d$，其中 $d$ 是 $X$ 的次数。

(2) 无关轨迹 $Z\left(\tilde{\Sigma}\right)$ 如定义3.28 中所述，扇 $\tilde{\Sigma}$ 如定义3.14 中所述，可以描述为

$$Z\left(\tilde{\Sigma}\right) = (x_0 = \cdots = x_r = 0) \cup (y_{r+1} = \cdots = y_s = z = 0) \subset \mathbb{A}^{s+2}_{x_0 \cdots x_r y_{r+1} \cdots y_s z}.$$

**注 3.33**。(1) 在命题3.7的假设下，假设 $(a_1, \ldots, a_s)$ 是良定的，并取 $X := (f = 0) \subset \mathbb{P}$ 如命题3.7 (2) 中所述。取一个一般的$\varphi \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_0))$。由引理3.6，存在 $\iota \in$ 自同构群 $\mathbb{P}$ 使得 $\iota^* D_0 = (\varphi = 0)$。显然，除子

$$X|_{(\varphi=0)} \subset (\varphi = 0) \simeq \mathbb{P}(a_1, \ldots, a_s)$$

当且仅当对任意点 $p \in (f = \varphi = 0) \subset \mathbb{A}^{s+1} \setminus \{0\}$，雅可比矩阵 $J(f, \varphi)(p)$ 的秩为 2 时，它才是拟光滑的，其中

$$J(f, \varphi)(p) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(p) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(p) & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}(p) \end{pmatrix}.$$

（有时，若我们只关心其秩，则用 $J(X, \varphi)(p)$ 或 $J(X, (\varphi = 0))(p)$ 代替 $J(f, \varphi)(p)$。）

（2）在推论 3.25 的假设下，取一个非零齐次元$f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_s, z]$ 并令 $X := (f = 0) \subset \mathbb{P}$。取一个一般的 $\varphi' \in H^0(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(a_0'))$。由引理 3.23，存在 $\tilde{\iota} \in$ 自同构群 $\tilde{\mathbb{P}}$ 使得 $\tilde{\iota}^* (\pi^* \varphi' = 0) = \tilde{D}_0$成立。显然，魏尔除子

$$X|_{\tilde{\iota}^*(\pi^*\varphi'=0)} \subset \tilde{\iota}^* \left(\pi^* \varphi' = 0\right) \simeq \tilde{D}_0$$

当且仅当对任意一点

$$p \in \left(f = \pi^* \varphi' = 0\right) \subset \mathbb{A}^{s+1} \setminus Z\left(\tilde{\Sigma}\right),$$

雅可比矩阵 $J(f, \pi^* \varphi')(p)$ 的秩等于 2。

**命题 3.34.** 在设置 3.11中的假设下，取 $f \in H^0(\mathbb{P},\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)) \setminus \{0\}$ 其中

$$f = \sum_{\substack{I=(m_0,\dots,m_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r+1}\\ J=(m_{r+1},\dots,m_s)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{r-s}}} c_{I,J}x^I x^J,$$

其中 $c_{I,\ J}\in\mathbb{C}$、 $x^I:=x_0^{m_0}\cdots x_r^{m_r}$且 $x^J:=x_{r+1}^{m_{r+1}}\cdots x_s^{m_s}$。令 $X:=(f=0)\subset\mathbb{P}$。我们还令

$$\deg'' I := \sum_{i=0}^{r} a_i'' m_i, \quad \deg'' J := \sum_{j=r+1}^{s} a_j'' m_j.$$

考虑以下数值

$$d_0 := \min\left\{\deg'' I \mid c_{I,J}\neq 0\right\}, \quad d_0' := \max\left\{\deg'' J \mid c_{I,J}\neq 0\right\}.$$

显然 地，我们有 $hd_0+h'd_0'=d$。于是，严格变换 $\tilde{X}:=\psi_*^{-1}X\subset\tilde{\mathbb{P}}$ 由下式定义

$$\tilde{f}=\sum_{I,J} c_{I,J}x^I y^J z^{\frac{\deg'' I-d_0}{h'}} \in H^0\left(\tilde{\mathbb{P}},\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(d_0,d_0')\right).$$

证明。 由于 $\gcd(h,\ h')=1$，$\deg'' I-d_0$ 始终能被 $h'$整除。此外，我们有

$$\frac{\deg'' I-d_0}{h'}=\frac{d_0'-\deg'' J}{h}.$$

~ ~因此 $f$ 是齐次的。由引理 3.18 可直接看出， $f$ 不能被 $z$和 $\psi_*\left(\tilde{f}=0\right)=X$整除。因此得到所述结论。 □

~我们注意到，即使 $X$ 是拟光滑的， $X$ 一般也不一定是拟光滑的。

**例 3.35**。 (1) 假设 $s=3$、 $r=2$、 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)=(3,\ 1,\ 1,\ 1)$。考虑加权齐次多项式

$$f := x_3^2x_1^2+x_3x_0+x_1^4+x_2^4$$

次数为 4。我们可以直接验证，由 $f$ 定义的超曲面 $X\subset\mathbb{P}$ 是~ ~拟光滑的。然而，由于其严格变换 $X\subset\mathbb{P}$ 由下式定义

$$\tilde{f}=y^2x_1^2+zyx_0+z^2(x_1^4+x_2^4)$$

~ ~次数为 $(2,\ 1)$（其中令 $y:=y_3$），因此该 $X\subset\mathbb{P}$ 在点$[x_0$处不是拟光滑的： $x_1:\ x_2;\ y:\ z]=[0:\ 0:\ 1;\ 1:\ 0]$。

(2) 假设 $s=4$、 $r=2$、 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5)$。考虑加权齐次多项式

$$f=x_0x_4^2+x_1x_3x_4+x_2x_3^2+x_0^6+x_1^4+x_2^3$$

次数为 12。我们可以直接验证，由 $f$ 定义的超曲面 $X\subset\mathbb{P}$ 是拟光滑的。此外， $X$ 包含标准加权爆破的中心（$x_0=x_1=x_2=0$）$\subset\mathbb{P}$。然而，由于其严格变换 $X\subset\mathbb{P}$ 由以下方程定义

$$\tilde{f}=x_0y_4^2+x_1y_3y_4z+x_2y_3^2z^2+\left(x_0^6+x_1^4+x_2^3\right)z^{10}$$

~ ~的次数为 (2，10)，因此 $X\subset\mathbb{P}$ 在任何点 $[x_0:\ x_1:\ x_2;\ 1:\ 0:\ 0]$ $(x_0,\ x_1,\ x_2)\in\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$ 处都不是拟光滑的。

Howe然而，当 $s=r+1$ 和 $a_0\leq\cdots\leq a_s$ 时，我们得到如下肯定结果 ：

**命题 3.36**。 假设 $s=r+1$ （这意味着 $h=1$ 和 $h'=a_s$）且~ ~$a_0\leq\cdots\leq a_s$。那么，如果 $X\subset\mathbb{P}$ 是拟光滑超曲面，则其严格变换 $X\subset\mathbb{P}^{\sim}$ 也是拟光滑的。若进一步假设 $(a_0,\dots,a_r)$ 是良定的，则 $X|_{\mathbb{E}}\subset\mathbb{E}\simeq\mathbb{P}'$ 是拟光滑超曲面。

证明。令 $f$ 为 $X$ 的定义方程，并设 $d:=$度 $f$。我们可以唯一地写成

$$f = x_{r+1}^k f_{d-h'k}(x_0,\dots,x_r) + x_{r+1}^{k-1} f_{d-h'(k-1)}(x_0,\dots,x_r) + \cdots + f_d(x_0,\dots,x_r),$$

其中 $f_{d-h'j}(x_0,\dots,x_r)$ 是次数为 $d-h'j$ 的加权齐次多项式，对任意满足 $f_{d-h'k}\neq 0$ 的 $0\leq j\leq k$ 均成立。于是，$X\subset\mathbb{P}$ 由方程定义

$$\tilde{f} = y^k f_{d-h'k}(x_0,\dots,x_r) + z y^{k-1} f_{d-h'(k-1)}(x_0,\dots,x_r) + \cdots + z^k f_d(x_0,\dots,x_r),$$

其中我们令 $y:=y_{r+1}$。

假设 $d=h'k$。那么我们可以假设 $f_{d-h'k}=1$。由于 $[0\colon\cdots\colon 0\colon 1]\notin X$，显然 $X$ 是拟光滑的，因为 $X$ 也是如此。注意，在这种情况下，$X|_{\mathbb{E}}$ 是空集。

因此，我们可以假设 $d>h'k$ 在剩余的情形中。在这种情形下，$[0\colon\cdots\colon 0\colon 1]\in X$。由 $X$ 在该点处的拟光滑性，存在 $0\leq j\leq k$ 使得 $f_{d-h'j}$ 是准线性的（按 [KOW23，定义 2。17]）。另一方面，由于 $a_0\leq\cdots\leq a_r\leq h'$，$j$ 必须等于 $k$。（事实上，存在 $0\leq i\leq r$ 使得 $d-h'j=a_i$。如果 $j<k$，那么

$$0<d-h'k\leq d-h'j-h'=a_i-h'\leq 0,$$

矛盾。）任取一点 $\tilde{p}=[x_0\colon\cdots\colon x_r;\, y\colon z]\in X$。若 $z\neq 0$，则显然，$X$在 $\tilde{p}$ 处拟光滑，这可由 $X$ 在点 $[x_0\colon\cdots\colon x_r\colon y]\in X$ 处的拟光滑性推出。因此我们可以假设 $z=0$。由于 $f_{d-h'k}$ 是准线性的，存在 $0\leq i\leq r$ 使得$d-h'k=a_i$，且多项式 $f_{d-h'k}$ 中 $x_i$ 的系数非零。由于

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(\tilde{p}) = y^k\frac{\partial f_{d-h'k}}{\partial x_i}(\tilde{p})\neq 0,$$

除子 $X$ 在 $\tilde{p}$ 处拟光滑。若进一步假设 $(a_0,\dots,a_r)$ 是良定的，则$X|_{\mathbb{E}}\subset\mathbb{E}\simeq\mathbb{P}'=\mathbb{P}(a_0,\dots,a_r)$ 由 $f_{d-h'k}(x_0,\dots,x_r)$ 定义；根据 $X$的拟光滑性，它是准线性的。因此结论成立（参见引理 3.6）。□

## 4. Cutting process

我们考虑拟光滑超曲面的超平面截面。首先，回顾以下内容，它是我们已在定理 *Abban–Zhuang* 方法中见过的一个特例2.5。

引理 *4.1*（参见 [*ST25*，定理 *4.*12]）。设 $X$ 为一个 $n$维射影簇，$\eta\in X$ 为一个概形论点，$\Delta$ 为 $X$上的一个有效 $\mathbb{Q}$-魏尔除子，$L$ 为 $X$上的一个大$\mathbb{Q}$线丛，$a\in\mathbb{Q}_{>0}$，且 $Y\in|aL|$ 为一个不可约约化除子，使得 $\eta\in Y$，并且在 $\eta\in X$处，偶对 $(X,\Delta+Y)$ 是纯对数终端的。取一个$Y$ 上的有效 $\mathbb{Q}$-魏尔除子 $\Delta_Y$，使得

$$(K_X+\Delta+Y)|_Y = K_Y+\Delta_Y$$

在 $\eta$附近成立。那么我们有

$$\delta_\eta(X,\Delta;L)\geq\min\left\{a(n+1),\quad\frac{n+1}{n}\delta_\eta(Y,\Delta_Y;L|_Y)\right\}.$$

证明。这个结果对专家而言是众所周知的。为方便起见，我们给出证明。不妨假设 $a=1$。令 $V_\bullet$ 为完整线性系在 $X$ 上所对应的 Veronese 等价类 $H^0(\bullet L)$，其中该线性系与 $L$ 相关，如定义 2.2 所述；再令 $W_\bullet:=V(Y)_\bullet$ 为 $V_\bullet$ 关于 $Y$ 的细化，如定义 2.3 所述。根据 [BFJ09、定理 B 和推论 3.6]，，$Y$ 上的 $\mathbb{Q}$-线丛 $L|_Y$ 是大丛。此外，我们有

$$\mathrm{vol}_X(L)=\mathrm{vol}_Y(L|_Y)=\limsup_{k\to\infty}\frac{\dim\mathrm{Image}\left(H^0(X,kL)\to H^0(Y,kL|_Y)\right)}{k^{n-1}/(n-1)!}.$$

˜特别地，根据 [Fuj24，引理 3.3]，级数 $W_{\bullet,\bullet}$ 渐近等价于 $W_{\bullet,\bullet}$（参见[Fuj24，定义 3.2]），其中 $\tilde{W}_{\bullet,\bullet}$ 是一个 $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$-分次线性级数，定义为

$$\tilde{W}_{k,j} = \begin{cases} H^0\left(Y,(k-j)L|_Y\right) & \text{if } 0 \leq j \leq k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

任取一个 $F$ 在 $Y$ 上且其中心包含 $\eta$的素除子。根据 [Xu25，引理 4.73] 和[Fuj24，命题 6.2]，可得

$$\begin{aligned} S\left(W_{\bullet,\bullet};F\right) &= S\left(\tilde{W}_{\bullet,\bullet};F\right) \\ &= \frac{n}{\mathrm{vol}_Y(L|_Y)}\int_0^1\int_0^\infty \mathrm{vol}_Y\left(x(L|_Y)-yF\right)dydx \\ &= \frac{n}{\mathrm{vol}_Y(L|_Y)}\int_0^1 x^n\int_0^\infty \mathrm{vol}_Y\left(L|_Y-zF\right)dzdx \\ &= \frac{n}{n+1}S\left(L|_Y;F\right). \end{aligned}$$

这意味着

$$\delta_\eta\left(Y,\Delta_Y;W_{\bullet,\bullet}\right) = \frac{n+1}{n}\delta_\eta\left(Y,\Delta_Y;L|_Y\right).$$

由于$A_{X,\ \Delta}(Y) = 1$且 $S(L;\ Y) = \frac{1}{n+1}$，由 [AZ22，定理 3.2]（参见定理 2.5；另见 [Fuj24，定理 12.3]）。□

下面给出一个贝尔蒂尼型结果，它对于将 Abban–Zhuang 方法应用于拟光滑超曲面（引理 4.1）至关重要。

**引理 4.2**。设 $n$，$r \in \mathbb{Z}_{>0}$满足 $r-1 \leq n$。取正整数 $1 \leq a_0 \leq \cdots \leq a_{n+1}$满足$a_r = 1$，并令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0,\ldots\ldots,\ a_{n+1})$。取任意一个拟光滑超曲面 $X \subset \mathbb{P}$及一点$p \in \mathbb{P}$。令 $B_1^{\mathbb{P}}$和$B_{1,\ p}^{\mathbb{P}}$如定义3.9所述。

*(1)* 假设 维数 $\left(B_1^{\mathbb{P}} \cap X\right) \leq r-1$。（例如，若 $n \leq 2r-1$，则 维数 $\left(B_1^{\mathbb{P}} \cap X\right) \leq r-1$。）取一个一般的 $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|$。那么，对任意 $q \in X \cap H$，雅可比矩阵的秩 $J(X,\ H)(q)$（参见注3.33*(1)*）等于 2。特别地，若 $r \geq 2$，则$X|_H \subset H \simeq \mathbb{P}(a_1,\ \ldots,\ a_{n+1})$也是拟光滑的。

*(2)* 假设 维数$\left(B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} \cap X\right) \leq r-2$。（例如，若 $n \leq 2r-3$，则有维数$\left(B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} \cap X\right) \leq r-2$。）取一个一般的 $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)_p|$。那么，对任意 $q \in X \cap H$，$J(X,\ H)(q)$ 的秩等于 2。特别地，若 $r \geq 2$，则 $X|_H \subset H \simeq \mathbb{P}(a_1,\ \ldots,\ a_{n+1})$也是拟光滑的。

证明。设 $f$ 是 $X \subset \mathbb{P}$的定义多项式。设 $r+1 \leq c_1 \leq n+2$，其中

$$1 = a_0 = \cdots = a_{c_1-1} < a_{c_1} \leq \cdots \leq a_{n+1}.$$

(1) 我们注意到 $\dim B_1^{\mathbb{P}} = n+1-c_1$。（因此，若 $n \leq 2r-1$，则有 $\dim B_1^{\mathbb{P}} \leq r-1$。）

任取闭子集 $\tilde{B}_{1,\ X} \subset \mathbb{A}^{n+2} \setminus \{0\}$，其维数为 $\dim \tilde{B}_{1,\ X} = \dim\left(B_1^{\mathbb{P}} \cap X\right)$，使得 $\tilde{B}_{1,\ X}$通过商态射 $\mathbb{A}^{n+2} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$映到 $B_1^{\mathbb{P}} \cap X$上。由于 $X$是拟光滑的，下面的映射是正则态射:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \tilde{B}_{1,X} &\to \mathbb{P}^{n+1}_{z_0\cdots z_{n+1}} \\ \tilde{q} &\mapsto \left[\frac{\partial f}{\partial x_0}(\tilde{q}) : \cdots : \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\tilde{q})\right]. \end{aligned}$$

设

$$P := \{z_{c_1} = \cdots = z_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}_{z_0\cdots z_{n+1}}.$$

由于 $\dim \tilde{B}_{1,\ X} \leq r-1 < \dim P = c_1 - 1$，一般的 $g = \sum_{i=0}^{c_1-1} e_i x_i$ 满足 tha t

$$[e_0 : \cdots : e_{c_1-1} : 0 : \cdots : 0] \in P \setminus \varphi\left(\tilde{B}_{1,X}\right).$$

这意味着，对于任意 $q \in B_1^{\mathbb{P}} \cap X$， $J(f,\ g)(q)$ 的秩为 2。因此，由贝尔蒂尼定理可得断言 (1)。

(2) 我们可以假设 $p \notin B_1^{\mathbb{P}}$。通过坐标变换，我们可以假设

$$p = [0 : \cdots : 0 : 1 : p_{c_1} : \cdots : p_{n+1}] \in \mathbb{P}.$$

We n注意，$\dim B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} = n + 2 - c_1$。（因此，若 $n \leq 2r - 3$，则有 $\dim B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} \leq r - 2$ .)

取任意闭子集 $\tilde{B}_{1,\ p,\ X} \subset \mathbb{A}^{n+2} \setminus \{0\}$，使得 $\dim \tilde{B}_{1,\ p,\ X} = \dim\left(B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} \cap X\right)$，且 $\tilde{B}_{1,\ p,\ X}$ 通过态射 $\mathbb{A}^{n+2} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$ 映到 $B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} \cap X$。与 (1) 中一样，我们可以考虑态射

$$\begin{aligned} \varphi \colon \tilde{B}_{1,p,X} &\to \mathbb{P}^{n+1}_{z_0 \cdots z_{n+1}} \\ \tilde{q} &\mapsto \left[\frac{\partial f}{\partial x_0}(\tilde{q}) : \cdots : \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\tilde{q})\right]. \end{aligned}$$

令

$$P_p := \{z_{c_1 - 1} = \cdots = z_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}_{z_0 \cdots z_{n+1}}.$$

由于 $\dim \tilde{B}_{1,\ p,\ X} \leq r - 2 < \dim P_p = c_1 - 2$，一般的 $g = \sum_{i=0}^{c_1 - 2} e_i x_i$ 满足

$$[e_0 : \cdots : e_{c_1 - 2} : 0 : \cdots : 0] \in P_p \setminus \varphi\left(\tilde{B}_{1,p,X}\right).$$

这意味着，对于任意 $q \in B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} \cap X$， $J(f,\ g)(q)$ 的秩为 2。因此，根据贝尔蒂尼定理，断言 (2) 也成立。□

在证明中，我们证明了 $H|_X$ 沿着 $B_1^{\mathbb{P}} \cap X$（或沿着 $B_{1,\ p}^{\mathbb{P}} \cap X$）的拟光滑性。事实上，有如下例子。

**例 4.3**。 [Kol97，例 (4.2.1)]设 $X$ 是一个光滑簇， $V$ 是 $X$的一个闭子集，且 $L$ 是一个线性系，其中存在一个元素 $D \in L$ 沿着 $V$光滑。一般成员 $D' \in L$ 可能沿着 $V$不光滑。

设 $X = \mathbb{C}^n$ 和 $L = |B| := \{(\lambda x_1 + \mu x_1 x_2 + \nu f = 0) \subset \mathbb{C}^n \mid \lambda,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{C}\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的线性系，其坐标为（$x_1$，……，$x_n$），其中 $f \in \mathbb{C}[x_3, \ldots, x_n]$ 是定义一个孤立奇点（$f = 0$）$\subset \mathbb{C}^{n-2}$ 于原点的多项式。那么 $D = (x_1 = 0) \in |B|$ 是光滑的，但一般成员 $D' = (\lambda x_1 + \mu x_1 x_2 + \nu f = 0)$在$(0,\ -\frac{\lambda}{\mu},\ 0,$ ……，$0)$处有奇点。

**命题 4.4.** 设 $n$、$d \geq 2$，且 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ 是良定的。取一个次数为 $d$ 的拟光滑超曲面 $X \subset \mathbb{P}$。假设 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$。

那么，对于任意满足 $a_k \geq 2$ 的 $0 \leq k \leq n + 1$，一般元素 $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_k)|$ 满足 $X|_H \subset H$ 也是拟光滑的。

证明。设 $f$ （分别为 $g$）是 $X$ （分别为 $H$）的定义方程。我们可以假设 $1 = a_0 = \cdots = a_{c_1 - 1} < a_{c_1} \leq \cdots \leq a_{n+1}$。由于 $X$ 是拟光滑的， $d \geq 2$ 且 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$，因此有 $c_1 \geq 2$。我们可以假设 $g$ 可写为 $g = x_k + g_0(x_0, \ldots, x_{k-1})$。任取 $p \in B_1^{\mathbb{P}} \cap$ （$x_k = 0$）。由于 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$ 且 $X$ 是拟光滑的，对于任意 $c_1 \leq j \leq n + 1$，有 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = 0$；并且对于某个 $0 \leq i \leq c_1 - 1$，有 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$。另一方面，有 $\frac{\partial g}{\partial x_k}(p) \neq 0$。因此，对于任意 $p \in B_1^{\mathbb{P}} \cap (x_k = 0)$， $J(f, g)(p)$ 的秩等于 2。由于 $\mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_k)| \subset B_1^{\mathbb{P}} \cap (x_k = 0)$，根据贝尔蒂尼定理，限制 $X|_H \subset H$ 是拟光滑的。□

现在我们考虑标准加权爆破中的超曲面。以下固定相关记号。

**设置 4.5**。 在设置 *3.11*、定义 *3.14*、*3.15* 和 *3.17*的条件下，我们还假设$n := r = s - 1$，且 $(a_0$、…、$a_r)$ 是良定的，其中 $1 = a_0 = \cdots = a_{c_1 - 1} < a_{c_1} \leq \cdots \leq a_n$,

其中 $0 \leq c_1 \leq n$。（我们对 $a_s = a_{n+1}$ 没有任何假设。）因此我们有一个图表

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & \mathbb{P}' = \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{s-1}) \, , \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & \\ \mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_s) & & \end{array}$$

其中，$\psi$ 是标准加权爆破，$\pi$ 是诱导的加权丛结构。此外，记 $x_i := x_i'$ 为 $\mathbb{P}'$（$0 \leq i \leq r$）的坐标，并为简便起见记 $y := y_{n+1}$。（由于 $g_0 = \cdots = g_r = 1$，由 $\tilde{}$（$a_0$、…、$a_r$）的良形性，这不会引起混淆。）我们固定一个次数为（$c$、$k$）（$c$、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）的拟光滑超曲面 $X \subset \mathbb{P}$，其由 $\left(\tilde{F}\left(x_0\text{、}\ldots\text{、}x_n\text{、}y\text{、}z\right) = 0\right)$ 定义。

**引理 4.6**。（*1*）假设

$$\dim\left(\pi^{-1}\left(B_1^{\mathbb{P}'}\right) \cap \tilde{X}\right) \leq c_1 - 2.$$

（例如，若 $n+3 \leq 2c_1$，则 维数 $\pi^{-1}\left(B_1^{\mathbb{P}'}\right) \leq c_1 - 2$ 成立。）那么，对于任意一般的 $H' \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)|$，对任意 $\tilde{q} \in \tilde{X} \cap \pi^* H'$，均有 秩 $J\left(\tilde{X}, \pi^* H'\right)(\tilde{q}) = 2$。

*(2)* 任取一点 $p' \in \mathbb{P}'$。假设

$$\dim\left(\pi^{-1}\left(B_{1,p'}^{\mathbb{P}'}\right) \cap \tilde{X}\right) \leq c_1 - 3.$$

*(For example, if $n+5 \leq 2c_1$, then $\dim \pi^{-1}\left(B_{1,p'}^{\mathbb{P}'}\right) \leq c_1 - 3$ holds.) Then, for any general $H' \in \left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)_{p'}\right|$, we have $\operatorname{rank} J\left(\tilde{X}, \pi^* H'\right)(\tilde{q}) = 2$ for any $\tilde{q} \in \tilde{X} \cap \pi^* H'$.*

证明。证明与引理 4.2 的证明几乎相同。由于（1）的证明与（2）非常相似，我们只看（2）的证明。

由（1），我们不妨设 $p' \notin B_1^{\mathbb{P}'}$。经过坐标变换后，不妨设 $p' = [0\colon \cdots \colon 0 : 1 : p'_{c_1} \colon \cdots \colon p'_n] \in \mathbb{P}'$。特别地，我们有 $\dim\ \pi^{-1}\left(B_{1,p'}^{\mathbb{P}'}\right) = n + 2 - c_1$。任取一个闭子集

$$\tilde{B}_{1,p',\tilde{X}} \subset \mathbb{A}^{n+3} \setminus Z\left(\tilde{\Sigma}\right)$$

with

$$\dim \tilde{B}_{1,p',\tilde{X}} = \dim\left(\pi^{-1}\left(B_{1,p'}^{\mathbb{P}'}\right) \cap \tilde{X}\right)$$

它在商态射 $\mathbb{A}^{n+3} \setminus Z\left(\tilde{\Sigma}\right) \to \tilde{\mathbb{P}}$ 下映满 $\pi^{-1}\left(B_{1,p'}^{\mathbb{P}'}\right) \cap \tilde{X}$。那么我们可以考虑态射

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon \tilde{B}_{1,p',\tilde{X}} & \to & \mathbb{P}^{n+2}_{z_0 \cdots z_{n+2}} \\ \tilde{q} & \mapsto & \left[\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_0}(\tilde{q}) : \cdots : \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(\tilde{q}) : \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(\tilde{q}) : \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(\tilde{q})\right]. \end{array}$$

令线性子空间

$$P_{p'} := (z_{c_1 - 1} = \cdots = z_{n+2} = 0) \subset \mathbb{P}^{n+2}$$

维数为 $c_1 - 2$。对于任意一般的 $g = \sum_{i=0}^{c_1 - 2} e_i x_i \in H^0\left(\mathbb{P}', \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(1)_{p'}\right)$，根据假设，我们有

$$[e_0 : \cdots : e_{c_1 - 2} : 0 : \cdots : 0] \in P_{p'} \setminus \varphi\left(\tilde{B}_{1,p',\tilde{X}}\right).$$

这意味着，对于任意 $\tilde{q} \in \pi^{-1}\left(B_{1,p'}^{\mathbb{P}'}\right) \cap \tilde{X}$，$J\left(\tilde{f}, \pi^* g\right)(\tilde{q})$ 的秩都等于 2。因此，该断言由贝尔蒂尼定理得出。□

**引理 4.7**。 固定 $p' \in \mathbb{P}'$，并任取 $c_1 \leq i \leq n$。假设

$$\dim\left(\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_{a_i,p'}\right)\cap\tilde{X}\right)\leq i-2.$$

（例如，若 $a_i < a_{i+1}$（或 $i=n$）且 $n+3\leq 2i$，则维数$\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_{a_i,p'}\right)\leq i-2$成立。）那么，对于任意一般的 $H' \in \left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}\left(a_i\right)_{p'}\right|$，对于任意$\tilde{q}\in\left(\pi^*H'\cap\tilde{X}\right)\setminus\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_1\right)$，我们有秩 $J\left(\tilde{X},\pi^*H'\right)\left(\tilde{q}\right)=2$。

证明。 我们不妨设 $c_1\geq 1$。若 $p'\in B^{\mathbb{P}'}_1$，则由于 $\mathrm{Bs}\left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(a_i)_{p'}\right|\subset B^{\mathbb{P}'}_1$，由贝尔蒂尼定理可得结论。因此，我们不妨设 $p'\notin B^{\mathbb{P}'}_1$。经过坐标变换，我们不妨设 $a_i<a_{i+1}$（或 $i=n$）且 $p'=[1:0:\cdots:0]\in\mathbb{P}'$。于是我们有

$$B^{\mathbb{P}'}_1=\left(x_0=\cdots=x_{c_1-1}=0\right)\subset\mathbb{P}',\quad B^{\mathbb{P}'}_{a_i,p'}=\left(x_1=\cdots=x_i=0\right)\subset\mathbb{P}'.$$

特别地，我们有 $\dim\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_{a_i,p'}\right)=n+1-i$。取一个闭子集

$$\tilde{V}\subset\left(\mathbb{A}^{n+3}_{x_0\cdots x_nyz}\cap\left(x_0=1\right)\right)\setminus Z\left(\tilde{\Sigma}\right)$$

满足

$$\dim\tilde{V}=\dim\left(\left(\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_{a_i,p'}\right)\cap\tilde{X}\right)\setminus\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_1\right)\right)$$

且 $\tilde{V}$通过商态射 $\mathbb{A}^{n+3}\setminus Z\left(\tilde{\Sigma}\right)\to\mathbb{P}$映到 $\left(\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_{a_i,p'}\right)\cap\tilde{X}\right)\setminus\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_1\right)$。我们可以考虑态射

$$\begin{aligned}\varphi\colon\tilde{V}&\to\mathbb{P}^{n+2}_{z_0\cdots z_{n+2}}\\ \tilde{q}&\mapsto\left[\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_0}\left(\tilde{q}\right):\cdots:\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_n}\left(\tilde{q}\right):\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}\left(\tilde{q}\right):\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z}\left(\tilde{q}\right)\right].\end{aligned}$$

考虑线性子空间

$$P_{p'}:=\left(z_0=z_{i+1}=\cdots=z_{n+2}=0\right)\subset\mathbb{P}^{n+2}$$

其维数为 $i-1$。由于 $\dim\tilde{V}<\dim P_{p'}$，交集 $\varphi\left(\tilde{V}\right)\cap P_{p'}$在 $P_{p'}$中不稠密。

取一般的 $g\in H^0\left(\mathbb{P}',\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(a_i)_{p'}\right)$，并令 $e_j$ 为任意$1\leq j\leq i$的 $x_0^{a_i-a_j}x_j$的系数。于是，对任意 $\tilde{q}\in V$，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g}{\partial x_0}\left(\tilde{q}\right)=\frac{\partial g}{\partial x_{i+1}}\left(\tilde{q}\right)=\cdots=\frac{\partial g}{\partial x_n}\left(\tilde{q}\right)=\frac{\partial g}{\partial y}\left(\tilde{q}\right)=\frac{\partial g}{\partial z}\left(\tilde{q}\right)=0,\\ &\frac{\partial g}{\partial x_j}\left(\tilde{q}\right)=e_j\quad\left(1\leq j\leq i\right).\end{aligned}$$

由于 $g$ 是一般的，我们有

$$[0:e_1:\cdots:e_i:0:\cdots:0]\in P_{p'}\setminus\left(\varphi\left(\tilde{V}\right)\cap P_{p'}\right).$$

因此，对于任意 $\tilde{q}\in\left(\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_{a_i,p'}\right)\cap\tilde{X}\right)\setminus\pi^{-1}\left(B^{\mathbb{P}'}_1\right)$，我们有秩 $J\left(\tilde{f},\pi^*g\right)\left(\tilde{q}\right)=2$。因此，该断言由引理 3.10和贝尔蒂尼定理得出。 □

**推论 4.8**。 在设定 *4.5*下，进一步假设 $n\geq 3$和 $a_0=\cdots=a_{n-1}=1$。令$p':=[1:0:\cdots:0]\in\mathbb{P}'$。对于任意 $2\leq j\leq n$，令

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbb{P}}_n:=\tilde{\mathbb{P}},\quad\mathbb{E}_n:=\mathbb{E},\\ &\tilde{\mathbb{P}}_{j-1}:=\tilde{\mathbb{P}}_j\cap\pi^*\left(x_j=0\right),\quad\mathbb{E}_{j-1}:=\mathbb{E}_j|_{\tilde{\mathbb{P}}_{j-1}}\quad(3\leq j\leq n).\end{aligned}$$

根据命题 *3.24* 和例 *3.27*，对于任意 $2\leq j\leq n-1$，我们有

$$\tilde{\mathbb{P}}_j=\mathbb{P}_{\mathbb{P}^{j-1}_{x_0\cdots x_{j-1}}}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{j-1}}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{j-1}}(a_{n+1})\right)$$

˜且 $\mathbb{E}_j \subset \mathbb{P}_j$ 是负截面。于是，存在 $\varphi \in$ 自同构群$(\mathbb{P}')$ 满足 $\varphi(p') = p'$，使得将 $\tilde{X} \subset \mathbb{P}$ 替换为 $(\pi^*\varphi)\left(\tilde{X}\right) \subset \tilde{\mathbb{P}}$后，若设

$$\begin{aligned}\tilde{X}_n &:= \tilde{X} \subset \tilde{\mathbb{P}}_n,\\ \tilde{X}_{j-1} &:= \tilde{X}_j|_{\tilde{\mathbb{P}}_{j-1}} \subset \tilde{\mathbb{P}}_{j-1} \quad (3 \le j \le n),\end{aligned}$$

˜ ˜那么，对于任意 $2 \le j \le n-1$，$X_j \subset \mathbb{P}_j$ 是次数为 $(c,k)$ 的拟光滑超曲面。此外，˜如果我们进一步假设 $X|_{\mathbb{E}} \subset \mathbb{E} \simeq \mathbb{P}(1^n, a_n)$ 是次数为 $c$的拟光滑超曲面，那么对于任意 $2 \le j \le n-1$，我们还可以取上述 $\varphi$，使其进一步满足 $\tilde{X}_j|_{\mathbb{E}_j} \subset \mathbb{E}_j \simeq \mathbb{P}^j$ 是次数为 $c$ 的光滑超曲面。

证明。由引理 4.7，任意一般的 $H' \in \left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(a_n)_{p'}\right|$ 满足 $\tilde{X}|_{\pi^*H'} \subset \pi^*H'$ 是拟光滑的，因为 $\mathrm{Bs}\left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(a_n)_{p'}\right| \cap B_1^{\mathbb{P}'} = \emptyset$。此外，如果 $\tilde{X}|_{\mathbb{E}} \subset \mathbb{E}$ 是拟光滑的，那么 $\tilde{X}|_{\pi^*H' \cap \mathbb{E}} \subset H' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ 根据引理 4.6也是光滑的。通过归纳地考虑相同的步骤，我们得到所述结论。□

## 5. Covering process

**命题 5.1** (参见 [ST25，命题 3。4])。设 $(X,\Delta)$ 和 $(X',\Delta')$ 是具有有效 $\mathbb{Q}$-魏尔除子的正规射影簇对。假设存在有限态射$\tau\colon X' \to X$ 使得

$$K_{X'} + \Delta' = \tau^*\left(K_X + \Delta\right).$$

设 $\eta \in X$ 和 $\eta' \in X'$ 是概形论点，满足 $\tau(\eta') = \eta$ 且 $(X,\Delta)$ 在 $\eta$处为 *Kawamata* 对数终端。取 $X$ 上的任意大 $\mathbb{Q}$-线丛 $L$，并取 $X$ 上的任意有效 $\mathbb{Q}$-魏尔除子 $\Delta_0$，使得$\Delta_0 \le \Delta$ 且在 $\eta$处为 $K_X + \Delta_0$ $\mathbb{Q}$-*Cartier*。则有

$$\delta_{\eta'}\left(X',\Delta';\tau^*L\right) \le \delta_\eta\left(X,\Delta_0;L\right).$$

证明。与 [ST25，命题 3。4],的证明中一样，我们有

$$\delta_{\eta'}\left(X',\Delta';\tau^*L\right) \le \delta_\eta\left(X,\Delta;L\right).$$

对于任意满足 $\eta \in c_X(E)$ 的、位于 $X$ 上的素除子 $E$，我们有 $A_{X,\,\Delta}(E) \le A_{X,\,\Delta_0}(E)$。因此，不等式

$$\delta_\eta\left(X,\Delta;L\right) \le \delta_\eta\left(X,\Delta_0;L\right)$$

是平凡的，因此我们得到所述结论。□

命题 *5.2*（参见 [*ST25*，断言 *5.4*]）。设 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，且设 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0,\dots,a_{n+1})$ 是良定的。假设 $(a_1,\dots,a_{n+1})$ 也良定。令 $D_0 := (x_0 = 0) \subset \mathbb{P}$。设$X \subset \mathbb{P}$ 是拟光滑且良定的超曲面，并且 $X|_{D_0} \subset D_0 (\simeq \mathbb{P}(a_1,\dots,a_{n+1}))$ 也拟光滑。考虑态射

$$\begin{aligned}\tau\colon \mathbb{P}' := \mathbb{P}\left(1,a_1,\dots,a_{n+1}\right) &\to \mathbb{P}\\ \left[x_0 : x_1 : \cdots : x_{n+1}\right] &\mapsto \left[x_0^{a_0} : x_1 : \cdots : x_{n+1}\right]\end{aligned}$$

如命题 *3.4*中所述，并令 $X' := \tau^*X \subset \mathbb{P}'$。则 $X' \subset \mathbb{P}'$ 也是拟光滑且良定的超曲面，并且

$$\delta_{p'}\left(X';\mathcal{O}_{X'}(1)\right) \le \delta_p\left(X;\mathcal{O}_X(1)\right)$$

对任意满足 $\tau(p') = p$ 的 $p \in X$ 和 $p' \in X'$，均成立。

证明。根据 [ST25，断言 5。4], 该 $X' \subset \mathbb{P}'$ 是拟光滑且良定的。此外，我们有

$$K_{X'} = (\tau|_{X'})^*\left(K_X + \frac{a_0 - 1}{a_0}X|_{D_0}\right).$$

因此，由命题5.1。□

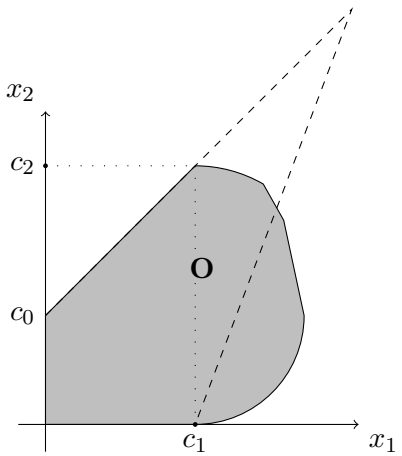



FIGURE 1. 凸子集 $\mathbf{O} \subset \mathbb{R}^2$。当$\mathbf{O}$ 的图形等于虚线区域时，$\mathbf{O}$的重心坐标达到最大值。

## 6. BARYCENTERS OF CONVEX SETS AND STABILITY THRESHOLDS ON SURFACES

下述命题给出了关于$\mathbb{R}^2$ 中凸子集重心的一些信息，如图1所示。

**命题 6.1**。 设 $V$、$c_1$、$c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ 为正实数，且 $c_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足$c_2 \geq c_0$。考虑一个紧凸集 $\mathbf{O} \subset \mathbb{R}^2$，满足 体积$_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{O}) = V$，使得

$$\begin{aligned} &\mathbf{O} \cap \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq c_1\right\} \\ = \ &\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq c_1, \ and \ 0 \leq x_2 \leq \frac{c_2 - c_0}{c_1} x_1 + c_0\right\}. \end{aligned}$$

*(*特别地，我们有 $c_1(c_0 + c_2)/2 \leq V$。*)* 设 $(b_1, b_2) \in \mathbf{O}$ 为凸集 $\mathbf{O}$的重心。设 $p_1\colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为到第一坐标的投影，令 $p_1(\mathbf{O}) =: \ [0, t_1]$，并设$g(x)$ 为任意 $x \in [0, t_1]$时$(p_1|_{\mathbf{O}})^{-1}(x)$ 的长度。

*(1)* 我们有

$$\begin{aligned} b_1 \ &\leq \ \frac{c_0^2 c_1^2 - 4c_0 c_1 V + 2c_1 c_2 V + 4V^2}{6c_2 V} \quad and \\ b_2 \ &\leq \ \frac{-c_0^3 c_1^2 + 4c_0^2 c_1 V - 4c_0 V^2 + 4c_2 V^2}{6c_1 c_2 V}. \end{aligned}$$

*(2)* 假设

$$b_1 = \frac{c_0^2 c_1^2 - 4c_0 c_1 V + 2c_1 c_2 V + 4V^2}{6c_2 V}.$$

那么我们有 $t_1 = \ (2V - c_0 c_1) \ / c_2$ 并且

$$g(x) = \begin{cases} \frac{c_2}{c_1} x + c_0 & if \ x \in [0, c_1], \\ c_2 \cdot \frac{t_1 - x}{t_1 - c_1} & if \ x \in [c_1, t_1]. \end{cases}$$

*(3)* 如果

$$b_2 = \frac{-c_0^3 c_1^2 + 4c_0^2 c_1 V - 4c_0 V^2 + 4c_2 V^2}{6c_1 c_2 V},$$

那么我们必须有

$$b_1 = \frac{c_0^2 c_1^2 - 4c_0 c_1 V + 2c_1 c_2 V + 4V^2}{6c_2 V}.$$

此外，$\mathbf{O}$ 必须是.....的凸包

$$\left\{(0, c_0), \quad (0, 0), \quad (c_1, 0), \quad \left(\frac{2V - c_0 c_1}{c_2}, \frac{2c_2 V - c_0(2V - c_0 c_1)}{c_1 c_2}\right)\right\}.$$

证明。 部分证明与 [Fuj24，命题 3.5（2）中的证明基本相同]。为方便起见，我们给出完整证明。若 $V = c_1(c_0 + c_2)/2$，则断言显然成立。因此，我们可以假设 $V > c_1(c_0 + c_2)/2$。

注意到，由于根据布伦–明可夫斯基定理，$\mathbf{O}$ 是凸的，因此 $g(x)$ 是凹的。由此以及$g(c_1) = c_2$，可得

$$g(x) \geq c_2 \cdot \frac{t_1 - x}{t_1 - c_1}$$

对于任意 $x \in [c_1, t_1]$。因此，我们有

$$V - \frac{c_1(c_0 + c_2)}{2} = \int_{c_1}^{t_1} g(x)dx \geq \int_{c_1}^{t_1} c_2 \cdot \frac{t_1 - x}{t_1 - c_1}dx = \frac{c_2(t_1 - c_1)}{2}.$$

这立 即刻推出 $t_1 \leq (2V - c_0c_1)/c_2$。令函数 $h_2 \colon [0, (2V - c_0c_1)/c_2] \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h_2(x) := \begin{cases} \frac{c_2 - c_0}{c_1}x + c_0 & \text{if } x \in [0, c_1], \\ c_2 \cdot \frac{\frac{2V - c_0c_1}{c_2} - x}{\frac{2V - c_0c_1}{c_2} - c_1} & \text{if } x \in [c_1, (2V - c_0c_1)/c_2]. \end{cases}$$

我们先证明（1）中的第一个不等式以及条目（2），即关于 $b_1$ 的陈述。**（情形 1）**假设 $h_2(t_1) \leq g(t_1)$。那么对所有 $x \in [c_1, t_1]$，都有 $h_2(x) \leq g(x)$。因此，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2V - c_0c_1}{c_2}} xh_2(x)dx - t_1V &= \int_0^{\frac{2V - c_0c_1}{c_2}} (x - t_1)h_2(x)dx \\ \geq \int_0^{t_1} (x - t_1)g(x)dx &= \int_0^{t_1} xg(x)dx - t_1V. \end{aligned}$$

这意味着

$$b_1 = \frac{1}{V}\int_0^{t_1} xg(x)dx \leq \frac{1}{V}\int_0^{\frac{2V - c_0c_1}{c_2}} xh_2(x)dx = \frac{c_0^2c_1^2 - 4c_0c_1V + 2c_1c_2V + 4V^2}{6c_2V}.$$

此外，如果

$$b_1 = \frac{c_0^2c_1^2 - 4c_0c_1V + 2c_1c_2V + 4V^2}{6c_2V},$$

那么必有 $t_1 = (2V - c_0c_1)/c_2$ 且对所有 $x \in [c_1, t_1]$，$g(x) = h_2(x)$。

**（情形 2）**假设剩余情形 $h_2(t_1) > g(t_1)$。如果对某个 $x \in [c_1, t_1]$，$h_2(x) \geq g(x)$ 成立，那么

$$V = \int_0^{t_1} g(x)dx < \int_0^{t_1} h_2(x)dx \leq V,$$

这就产生了矛盾。因此，存在 $s_2 \in (c_1, t_1)$ 使得

$$\begin{cases} g(s_2) = h_2(s_2), \\ g(x) > h_2(x) \text{ for all } x \in (c_1, s_2), \\ g(x) < h_2(x) \text{ for all } x \in (s_2, t_1). \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2V - c_0c_1}{c_2}} xh_2(x)dx - s_2V &= \int_0^{\frac{2V - c_0c_1}{c_2}} (x - s_2)h_2(x)dx \\ > \int_0^{t_1} (x - s_2)g(x)dx &= \int_0^{t_1} xg(x)dx - s_2V, \end{aligned}$$

我们得到不等式

$$b_1 < \frac{c_0^2c_1^2 - 4c_0c_1V + 2c_1c_2V + 4V^2}{6c_2V}.$$

因此，我们得到（1）和（2）中的第一个不等式。

现在我们证明其余部分。考虑线性变换

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c_2-c_0}{c_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \end{array}$$

并设 $\mathbf{O}' := f(\mathbf{O})$。令 $(b_1', b_2') \in \mathbf{O}'$ 为 $\mathbf{O}'$的重心。由于矩阵的行列式为 1，我们有 $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{O}') = V$并且

$$\begin{aligned} & \mathbf{O}' \cap \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \le c_1\right\} \\ = & \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y_1 \le c_1 \text{ and } -\frac{c_2 - c_0}{c_1} y_1 \le y_2 \le c_0\right\}. \end{aligned}$$

特别地，我们注意到 $\mathbf{O}' \subset \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 \le c_0\}$。

Set

$$\mathbf{O}'' := \mathbf{O}' \cap \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \ge c_1\}.$$

注意，$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{O}'') = V - c_1(c_0 + c_2)/2$。令 $p_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为到第二坐标的投影，并设 $p_2(\mathbf{O}'') =: [-c'', c_0]$。显然，我们有 $c'' \ge c_2 - c_0$。对于任意 $y \in [-c'', c_0]$，令 $h(y) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ 为 $(p_2|_{\mathbf{O}''})^{-1}(y)$ 的长度，它在 $y \in [-c'', c_0]$ 上连续且凹。特别地，对于任意 $y \in [-(c_2 - c_0), c_0]$，我们有

$$h(y) \ge \frac{y + c_2 - c_0}{c_2} h(c_0).$$

由此以及 $V - \frac{c_1(c_0+c_2)}{2} = \int_{-c''}^{c_0} h(y)dy \ge \int_{-(c_2-c_0)}^{c_0} \frac{y+c_2-c_0}{c_2} h(c_0)dy = \frac{c_2 h(c_0)}{2}$，我们得到

$$h(c_0) \le \frac{2V - c_1(c_0 + c_2)}{c_2}.$$

设

$$l(y) := \frac{2V - c_1(c_0 + c_2)}{c_2^2}(y + c_2 - c_0), \quad \tilde{h}(y) := h(y) - l(y)$$

对任意 $y \in [-c'', c_0]$。由于 $h(-(c_2 - c_0)) \ge 0$ 且 $h(c_0) \le 0$，存在 $-c_3 \in [-(c_2 - c_0), c_0]$使得

$$\begin{cases} \tilde{h}(-c_3) = 0, \\ \tilde{h}(y) \ge 0 \text{ for all } y \in [-(c_2 - c_0), -c_3], \\ \tilde{h}(y) \le 0 \text{ for all } y \in [-c_3, c_0]. \end{cases}$$

因此，由此得到 $\int_{-c''}^{c_0} yh(y)dy \le \int_{-(c_2-c_0)}^{c_0} yl(y)dy$

$$\begin{aligned} & \int_{-c''}^{c_0} yh(y)dy + c_3 \frac{2V - c_1(c_0 + c_2)}{2} = \int_{-c''}^{c_0} (y + c_3)h(y)dy \\ \le & \int_{-(c_2-c_0)}^{c_0} (y + c_3)l(y)dy = \int_{-(c_2-c_0)}^{c_0} yl(y)dy + c_3 \frac{2V - c_1(c_0 + c_2)}{2}. \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} b_2' &= \frac{1}{V}\left(\int_{-(c_2-c_0)}^{0} y\frac{c_1}{c_2 - c_0}(y + c_2 - c_0)dy + \int_0^{c_0} yc_1 dy + \int_{-c''}^{c_0} yh(y)dy\right) \\ &= \frac{1}{V}\left(\frac{1}{6}c_1\left(2c_0^2 + 2c_0c_2 - c_2^2\right) + \int_{-c''}^{c_0} yh(y)dy\right) \\ &\le \frac{1}{V}\left(\frac{1}{6}c_1\left(2c_0^2 + 2c_0c_2 - c_2^2\right) + \int_{-(c_2-c_0)}^{c_0} yl(y)dy\right) \\ &= c_0\left(1 - \frac{c_0c_1}{6V}\right) - \frac{c_2}{3}. \end{aligned}$$

此外，如果

$$b_2' = c_0\left(1 - \frac{c_0c_1}{6V}\right) - \frac{c_2}{3},$$

那么必有 $c''=c_2-c_0$，且对于所有 $y\in[-(c_2-c_0)\ c_0]$，$h(y)=l(y)$。由于 $(p_2|_{O''})^{-1}(y)=[c_1,c_1+h(y)]$, 凸集 $\mathbf{O}''$ 必为集合

$$\left\{(c_1,c_0),\quad \left(\frac{2V-c_0c_1}{c_2},c_0\right),\quad (c_1,-(c_2-c_0))\right\}.$$

因此，$\mathbf{O}$ 必定是该集合的凸包

$$\left\{(0,c_0),\quad (0,0),\quad (c_1,0),\quad \left(\frac{2V-c_0c_1}{c_2},\frac{2c_2V-c_0(2V-c_0c_1)}{c_1c_2}\right)\right\}.$$

在这种情况下，我们可以直接验证

$$b_1=\frac{c_0^2c_1^2-4c_0c_1V+2c_1c_2V+4V^2}{6c_2V}.$$

另一方面，我们知道 $b_2'=-b_1(c_2-c_0)/c_1+b_2$。因此我们有

$$\begin{aligned} b_2 &= b_2'+\frac{c_2-c_0}{c_1}b_1 \\ &\le c_0\left(1-\frac{c_0c_1}{6V}\right)-\frac{c_2}{3}+\frac{c_2-c_0}{c_1}\cdot\frac{c_0^2c_1^2-4c_0c_1V+2c_1c_2V+4V^2}{6c_2V} \\ &= \frac{-c_0^3c_1^2+4c_0^2c_1V-4c_0V^2+4c_2V^2}{6c_1c_2V}. \end{aligned}$$

因此我们得到该断言。 □

命题 6.1 尤其在 $c_0$ 等于零时很有用。以下结果是对 [AZ23，引理 3.2] 的推广，并给出了以 Seshadri常数表示的稳定性阈值下界。

**推论 6.2.** 设 $(S,\Delta)$ 是一个2维射影 *klt* 对，且 $L$ 是 $S$ 上的一个丰沛 $\mathbb{Q}$-线丛。考虑 $\sigma\colon \tilde{S}\to S$ 的 *plt* 爆破，其中心为 $(S,\Delta)$，例外除子为$C\subset\tilde{S}$；也就是说，$\tilde{S}$上的 $-C$是 $\sigma$-丰沛的，且对$(\tilde{S},\Delta_{\tilde{S}}+C)$是 *plt* 的，其中 $\Delta_{\tilde{S}}:=\sigma_*^{-1}\Delta$。设$K_C+\Delta_C:=(K_{\tilde{S}}+\Delta_{\tilde{S}}+C)|_C$并

$$\Delta_C=:\sum_{i=1}^m d_iq_i,\quad d_C:=\sum_{i=1}^m d_i,$$

其中 $d_i\in(0,\ 1)\cap\mathbb{Q}$与 $d_1\le\cdots\le d_m$和 $q_1,\ldots,q_m\in C$是互不相同的点。假设正实数 $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ 满足 $\varepsilon\le\varepsilon(L;C)$，其中

$$\varepsilon(L;C):=\max\left\{x\in\mathbb{R}_{\ge0}\mid \sigma^*L-xC\ \textit{is nef}\right\}.$$

*(1)* 我们有不等式

$$S(L;C)\le\frac{\varepsilon^2\frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)}+(L^2)}{\frac{3\varepsilon(2-d_C)}{A_{S,\Delta}(C)}},$$

其中 $S(L;C)$ 以及 $A_{S,\Delta}(C)$ 如定义 2.1所述。此外，若等式成立，则有 $\varepsilon=\varepsilon(L;C)$，

$$T(L;C)=\frac{(L^2)A_{S,\Delta}(C)}{\varepsilon(2-d_C)},$$

以及限制体积

$$\mathrm{vol}_{\tilde{S}|C}(\sigma^*L-xC)=\begin{cases}\frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)}x & \textit{if } x\in[0,\varepsilon],\\ \frac{\varepsilon(2-d_C)}{A_{S,\Delta}(C)}\cdot\frac{T(L;C)-x}{T(L;C)-\varepsilon} & \textit{if } x\in[\varepsilon,T(L;C)).\end{cases}$$

(2) 对于任意 $q \in C$，我们有不等式

$$S(L; C \triangleright q) \leq \frac{(L^2)}{3\varepsilon},$$

其中 $S(L; C \triangleright q)$ 如定义 2.3(3) 中所述。此外，若等式成立，则我们必有式（1）中的等式，即

$$S(L; C) = \frac{\varepsilon^2 \frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)} + (L^2)}{\frac{3\varepsilon(2-d_C)}{A_{S,\Delta}(C)}}.$$

(3) 令 $p \in S$ 为 $S$上 $C$ 的中心。则有

$$\delta_p(S, \Delta; L) \geq \min\left\{ \frac{3\varepsilon(2-d_C)}{\varepsilon^2 \frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)} + (L^2)}, \quad \frac{3\varepsilon(1-d_m)}{(L^2)} \right\}.$$

此外，若等式成立，则我们必有

$$S(L; C) = \frac{\varepsilon^2 \frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)} + (L^2)}{\frac{3\varepsilon(2-d_C)}{A_{S,\Delta}(C)}}.$$

特别地，（1）中等式成立时的所有性质也都成立。（我们指出，若 $2d_m \geq d_C$，则不等式

$$\frac{3\varepsilon(2-d_C)}{\varepsilon^2 \frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)} + (L^2)} \geq \frac{3\varepsilon(1-d_m)}{(L^2)}$$

成立。

证明。 我们先证明断言（1）和（2）。根据伴随公式，有

$$\deg_C(K_C + \Delta_C) = A_{S,\Delta}(C) \cdot (C^2). \tag{*}$$

因此我们有

$$(C^2) = -\frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)}.$$

对于任意 $q \in C$，序列 $C \triangleright q$ 是 $(S, \Delta)$ 上的一个完全纯对数终端旗，见定义2.3。令 $\mathbf{O} \subset \mathbb{R}^2$ 为 $L$ 关于 $C \triangleright q$ 在定义~2.3意义下的 Okounkov 体。（若 $q \in S$ 是一个光滑点，则 $\mathbf{O}$ 就是 $\sigma^* L$关于容许旗标 $C \supset \{q\}$的通常 Okounkov 体。）任取 $x \in (0, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ 以及一个充分整除的正整数 $k \gg 0$。由于 $\sigma^* L - xC$ 是丰沛的，限制同态

$$H^0(\tilde{S}, k(\sigma^* L - xC)) \to H^0\left(C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\left(kx\frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)}\right)\right)$$

是满射。因此，我们有

$$\mathbf{O} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq \varepsilon\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq \varepsilon \text{ and } 0 \leq x_2 \leq \frac{2-d_C}{A_{S,\Delta}(C)} x_1\right\}.$$

令 $p_1(\mathbf{O}) =: [0, T_1]$，并令 $(b_1, b_2) \in \mathbf{O}$ 为 $\mathbf{O}$的重心。于是，如同 [Fuj24中的注 4.8 和定义 4.9]，我们有

$$b_1 = S(L; C), \quad b_2 = S(L; C \triangleright q), \quad T_1 = T(L; C).$$

此外，对于任意 $x \in [0, T(L;\ C))$，$(p_1|_{\mathbf{O}})^{-1}(x)$ 的长度根据 LM09 推论 4.27] 等于 $\mathrm{vol}_{\tilde{S}|C}($ $\sigma^* L - xC)$。因此，令 $c_0 = 0, c_1 = \varepsilon, c_2 = {}^{\varepsilon}(2-d_C)\ {}_{A_S,\Delta}(C)$ 和 $V = (L^2)$ 2 后，命题 6.1 立即推出断言 (1) 和 (2)。（(1) 中的等式~~$\varepsilon = \varepsilon$~~$(L; C)$ 由 Liu18 引理 10] 得出。）

断言 (3) 由 (1)、(2) 和定理 2.5 (参见[AZ22], [Fuj24，定理 12。3]) 得出。最后一条备注由不等式 $0 \leq (\sigma^* L - \varepsilon C)^2$ 以及等式 (*) 得出。 □

作为推论 6.2的直接推论，我们得到以下结果。当 $a=1$时，该结果是 [AZ23，引理 3。2]的一部分。

**推论 6.3.** 设 $S$ 是一个射影 *klt* 曲面，设 $L$ 是一个丰沛的 $\mathbb{Q}$-线丛于 $S$上，并设 $p\in S$ 是奇点 $\mathbb{A}^2_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}/\mathbb{Z}_a$ (1,1) 处的一个点，其中 $a\in\mathbb{Z}_{>0}$ *(参见例 3.26)*。

设 $\sigma\colon S\to S$ 是以 $p\in S$ 为中心、例外除子为 $C\subset S$的普通爆破。那么有

$$\delta_p(S;L)\geq\frac{3\cdot\varepsilon(L;C)}{(L^2)},$$

其中 $\varepsilon(L;C)$ 的定义见推论 6.2。此外，若等式成立，则有以下等式

$$\begin{aligned}S(L;C)&=\frac{a\cdot\varepsilon(L;C)^2+(L^2)}{3a\cdot\varepsilon(L;C)},\\ \varepsilon(L;C)\cdot T(L;C)&=\frac{(L^2)}{a}.\end{aligned}$$

证明。 在该假设下，有 $d_C=0$ 且 $A_S(C)=2/a$。因此，直接由推论 6.2可得结论。 □

例 6.4. (1) 当 $S=\mathbb{P}(1,1,a)$、 $L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ 且 $p\in S$ 是奇点$\mathbb{A}^2_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}/\mathbb{Z}_a(1,1)$ 处的点时，我们可以容易地验证 $(L^2)=1/a$, $\delta(S;L)=3$(见 [BJ20，推论 7.16])，并且 $\varepsilon(L;C)=T(L;C)=1/a$。

(2) 任取 $a\in\mathbb{Z}_{>0}$，令 $S:=\mathbb{P}(1,a,a+1)$，取 $L:=\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$，并令 $p\in S$为奇点 $\mathbb{A}^2_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}/\mathbb{Z}_a$ (1，1) 上的一个点。若 $a\geq 2$，则 $p\in S$ 唯一确定。（若 $a=1$，则任取 $S$ 中的一个光滑点作为 $p\in S$。）注意，若 $a\geq 2$，则完全线性系 $|L|$ 仅由一个素除子 $D\subset S$ 构成。（若 $a=1$，则取满足 $p\in D$ 的元素作为 $D\in|L|$。）令 $\sigma\colon S\to S$ 为在 $p$ 处的普通爆破，并令 $C\subset S$ 为例外除子。

我们知道，存在一个双有理态射 $\nu$：$S\to\mathbb{P}^2$，其压缩 $D$ 的严格变换如下。 $S$ 对应于 $N=\mathbb{Z}^2$ 中的完备扇 $\Sigma$，其 $\Sigma(1)$ 的原始生成元集合为 $(1,0)$、$(0,1)$、$(-a,-a-1)$。爆破 $\sigma$ 对应于 $\Sigma$ 的星形细分 $\Sigma$，即加入原始生成元为 $(-1,-1)$ 的一维锥。态射 $\tilde{S}\to\mathbb{P}^2$ 实际上就是对射线 $\mathbb{R}_{\geq 0}(-a,-a-1)$ 的压缩。

由双有理态射 $\nu$，我们可以轻易计算出

$$\begin{aligned}(L^2)&=\frac{1}{a(a+1)},&\delta_p(S;L)&=\delta(S;L)=\frac{A_S(D)}{S(L;D)}=3,\\ \varepsilon(L;C)&=\frac{1}{a(a+1)},&T(L;C)&=\frac{1}{a},\quad S(L;C)=\frac{a+2}{3a(a+1)}.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\delta_p(S;L)=\frac{3\cdot\varepsilon(L;C)}{(L^2)}=3<\frac{A_S(C)}{S(L;C)}=\frac{6(a+1)}{a+2}.$$

另一方面，命题 6.1 即使在 $c_0>0$ 时也很有用。

**命题 6.5。** 设 $a$、$b\geq 1$、$k\geq 2$，并令 $d:=bk+a$。考虑

$$\tilde{\mathbb{P}}:=\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(b))\xrightarrow{\pi}\mathbb{P}^2,$$

令 $\xi\in$皮卡群 $\tilde{\mathbb{P}}$为 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(b))/\mathbb{P}^2$的典范线丛，令 $\mathbb{E}\in|\xi-\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b)|$ 上的 $\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}$为 $\pi$的负截面，令 $\psi\colon\tilde{\mathbb{P}}\to\tilde{\mathbb{P}}(1、1、1、b)$ 为 $\mathbb{E}$ 的压缩。

设 $S\subset\mathbb{P}$ 是一个光滑射影曲面，满足 $S\sim k\xi+\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)$，且 $E:=\mathbb{E}|_{\tilde{S}}$ 光滑（即，$E\subset\mathbb{E}$ 是次数为 $a$ 的光滑平面曲线）。取 $\tilde{p}\in\tilde{S}\setminus\left(\mathbb{E}\cap\tilde{S}\right)$。令 $S:=\psi\left(\tilde{S}\right)\subset\mathbb{P}(1,1,1,b)$，并令 $p:=\psi(\tilde{p})\in S$。（注意，$S$ 是次数为 $d$ 的良定加权超曲面，且 $p\in S$ 是一个光滑点。）

于是我们有如下不等式

$$\delta_p\left(S;\mathcal{O}_S(1)\right)\geq\frac{3b}{d}.$$

证明。令 $\sigma:=\psi|_{\tilde{S}}\colon S\to S$。此外，令 $l\subset\mathbb{P}$ 为经过 $\tilde{p}$ 的 $\pi$ 的纤维。我们设 $l:=\psi(l)\subset\mathbb{P}(1,\ 1,\ 1,\ b)$。

我们先考虑 $l$ 包含于 $S$ 的情形。由伴随公式，

$$-2=\left(K_{\tilde{\mathbb{P}}}+\tilde{S}\right)\cdot\tilde{l}+(\tilde{l}^2)=-2+k+(\tilde{l}^2).$$

因此 $(\tilde{l}^2)=-k$。此外，$(E^2)=\left(\mathbb{E}^2\cdot\tilde{S}\right)=-ab$。取完全线性系 $\left|\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_{\tilde{S}}-\tilde{l}\right|$ 中的一个一般元素 $C$。由于该线性系无基点，$C$ 的任一连通分支都是自交数为 0 的光滑曲线。我们还注意到，通过简单计算可得 $(E\cdot l)=1$、$(E\cdot C)=a-1$ 以及 $(C\cdot l)=k$。注意

$$\begin{aligned}\sigma^*\mathcal{O}_S(1)-x\tilde{l}&\sim_{\mathbb{R}}\frac{1}{b}E+(1-x)\tilde{l}+C,\\ \left(\sigma^*\mathcal{O}_S(1)-x\tilde{l}\right)\cdot E&=-x,\\ \left(\left(\frac{1}{b}-\frac{x}{ab}\right)E+(1-x)\tilde{l}+C\right)\cdot\tilde{l}&=\frac{1}{b}+\left(k-\frac{1}{ab}\right)x.\end{aligned}$$

因此，对于 $x\in[0,1]$，$\sigma^*\mathcal{O}_S(1)$ 的 Zariski 分解的负部分 $-xl$ 等于 $\frac{x}{ab}E$。

令 $\mathbf{O}\subset\mathbb{R}^2$ 为关于容许旗标 $p\in l\subset S$ 的 $\mathcal{O}_S(1)$ 的 Okounkov 体。$\mathbf{O}$ 等于关于容许旗标 $\tilde{p}\in l\subset S$ 的 $\sigma^*\mathcal{O}_S(1)$ 的 Okounkov 体，这是根据奥昆科夫体的定义得出的，因为 $\sigma$ 是 $\tilde{p}$ 中的一个同构。

由上述 Zariski 分解可知，由于 $\tilde{p}\notin E$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{O}\cap\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\leq 1\right\}\\ =\ &\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leq x_1\leq 1\text{ and }0\leq x_2\leq\frac{1}{b}+\left(k-\frac{1}{ab}\right)x_1\right\}.\end{aligned}$$

另一方面，利用定义 2.3(6) 中的注释以及定理 2.5 结合纯对数终端旗标 $S\triangleright l\triangleright\tilde{p}$（另见 [Fuj23，推论 11。16]），我们有

$$\delta_p\left(S;\mathcal{O}_S(1)\right)\geq\min\left\{\frac{A_S(\tilde{l})}{S(\mathcal{O}_S(1);\tilde{l})},\frac{A_{\tilde{l}}(\tilde{p})}{S(\mathcal{O}_S(1);\tilde{l}\triangleright\tilde{p})}\right\}=\min\left\{\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2}\right\},$$

其中 $(b_1,\ b_2)\in\mathbf{O}$ 是 $\mathbf{O}$ 的重心。

应用命题 6.1 以及 $c_0=\frac{1}{b}$，$c_1=1$，$c_2=\frac{1}{b}+\left(k-\frac{1}{ab}\right)$ 和 $V=\frac{d}{2b}$，我们可以计算

$$\delta_p\left(S;\mathcal{O}_S(1)\right)\geq\min\left\{\frac{3d(ad-a^2+a-1)}{2ad^2-(a^2+a+1)d+a},\frac{3bd(ad-a^2+a-1)}{ad^3-(a^2+1)d^2+2ad-a}\right\}.$$

由于

$$d^2(ad-a^2+a-1)-\left(ad^3-(a^2+1)d^2+2ad-a\right)=a(d-1)^2>0,$$

我们有

$$\frac{3bd(ad-a^2+a-1)}{ad^3-(a^2+1)d^2+2ad-a}>\frac{3b}{d}.$$

另一方面，由于 $k\geq 2$，我们有 $b\leq(d-a)/2$。注意到

$$\begin{aligned}&2d^2(ad-a^2+a-1)-(d-a)\left(2ad^2-(a^2+a+1)d+a\right)\\ =\ &(a^2+3a-1)d^2-a(a^2+a+2)d+a^2>a^2(2a-2)\geq 0,\end{aligned}$$

其中，严格不等式是由函数

$$(a^2+3a-1)x^2-a(a^2+a+2)x+a^2$$

在 $x > a$ 时严格递增以及事实 $d > a$ 得出的。这也意味着

$$\frac{3d(ad - a^2 + a - 1)}{2ad^2 - (a^2 + a + 1)d + a} > \frac{3b}{d}.$$

因此，当 $l \subset S$ 时，我们得到严格不等式

$$\delta_p(S; \mathcal{O}_S(1)) > \frac{3b}{d}.$$

我们考虑剩余情形 $l \not\subset S$。令 $C' \subset S$ 为 $|\mathcal{O}_S(1)|$ 中经过 $p$的子线性系中的一般元素。根据 [ST25，引理 3.1(2)]，，曲线 $C'$ 不可约，并且在点 $\psi(\mathbb{E})$之外拟光滑。（特别地，$C' \sim \mathcal{O}_S(1)$ 且 $p \in C'$ 是光滑点。）令 O′ 为关于容许旗标 $p \in C' \subset S$的 $\mathcal{O}_S(1)$ 的 Okounkov 体。由于 $C' \sim \mathcal{O}_S(1)$ 且 $(\mathcal{O}_S(1)^2) = d/b$，Okounkov 体 O′ 是以下各点的凸包

$$\left\{(0,0),\quad (1,0),\quad \left(0, \frac{d}{b}\right)\right\}.$$

因此，O′ 的重心 $(b_1',\ b_2')$ 满足

$$(b_1', b_2') = \left(\frac{1}{3},\quad \frac{d}{3b}\right).$$

再次由定理 2.5 (另见 [Fuj23，推论 11。16])，可得

$$\delta_p(S; \mathcal{O}_S(1)) \geq \frac{3b}{d}.$$

由此便得到了所述结论。 □

**注记 6.6**。 设 $S \subset \mathbb{P}(1,\ 1,\ 1,\ b)$ 是一个次数为 $d = kb + 1$的拟光滑曲面。那么，由命题 6.5可得

$$\delta_p(S; \mathcal{O}_S(1)) \geq \frac{3b}{d}$$

对于任意 $p \in S$满足 $p \neq [0:0:0:1]$。事实上，取 $\mathbb{P} \to \mathbb{P}(1,\ 1,\ 1,\ b)$ 以及 $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}$，如命题 6.5 中所述，并令 $\tilde{S} := \psi_*^{-1} S \subset \tilde{\mathbb{P}}$。由于 $S$ 是拟光滑的，由命题 3.36，除子 $S \subset \mathbb{P}$ 是光滑的，且 $S \cap \mathbb{E}$ 是 $\mathbb{E}$中的一条直线。

以下给出了如定理 1.1中所述，拟光滑超曲面在光滑点处的稳定性阈值下界

**推论 6.7**。 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，且 $X \subset \mathbb{P}\left(1^{n+1},\ b\right)$ 是次数为$d > 1$的拟光滑超曲面。假设 $P_{n+1} := [0:\cdots:0:1] \in X$。那么，对于任意满足 $p \neq P_{n+1}$的 $p \in X$，有

$$\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{(n+1)b}{d}.$$

证明。 由于 $P_{n+1} \in X$，我们有 $d = kb+1$对于某个 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$。反复应用定理 2.5、引理4.1 和 4.2，我们可以假设 $n = 2$，因为我们有 $\dim B^{\mathbb{P}}_{1,\ p} \leq 1 = 3 - 2$。然后由备注6.6可得结论。 □

## 7. Bounds on local stability thresholds of singular points

本节中，我们固定如下设定。

**设定 7.1.** 令 $n \geq 2$, $a, k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{P} := \mathbb{P}(1^{n+1}, a)$ 的坐标为 $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$，并令$X = X_{ak+1} \subset \mathbb{P}$ 为一个由以下方程定义的次数为 $d = ak + 1$ 的拟光滑超曲面

$$f := x_{n+1}^k x_0 + x_{n+1}^{k-1} f_{a+1}(x_0, \ldots, x_n) + \cdots + f_{ak+1}(x_0, \ldots, x_n),$$

并令

$$m := \min\{t \in \mathbb{Z} \cap [1,k] \mid f_{at+1} \text{ is not divisible by } x_0\}.$$

~ ~令 $\psi$:
$\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ 为沿 $P = [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{P}$ 的普通爆破，并令 $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}$ 为例外除子。换言之， $\psi$ 是沿着 $\mathbb{P}(a)$ 对 $\mathbb{P}$ 进行的标准加权爆破。与例 3.27 一样，我们知道 $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a)) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n_{x_0 \cdots x_n}$。令 $\mathbb{H} := \pi^*(x_0 = 0) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{n-1}_{x_1 \ldots x_n}}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a))$。令 $x_0, \ldots, x_n, y := y_{n+1}, z$ 为 $\mathbb{P}$ 的多齐次坐标，其中~的次数为 (1, 0)， $y =$ 的次数为 (0, 1)， 而 $z =$ 的次数为 $(-a, 1)$。（因此， $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}$ 由方程~$z = 0$定义。）令 $\xi \in \operatorname{Pic} \mathbb{P}$ 为关于 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a)) / \mathbb{P}^n$的典范线丛。注意到

$$\psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \sim_{\mathbb{Q}} \frac{1}{a}\xi \quad \text{and} \quad \mathbb{E} \sim \xi - \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a).$$

取 $\tilde{X} := \psi_*^{-1} X \subset \tilde{\mathbb{P}}$， 令 $\sigma := \psi|_{\tilde{X}} \colon \tilde{X} \to X$, $g := \pi|_{\tilde{X}} \colon \tilde{X} \to \mathbb{P}^n$， 并令 $E := \mathbb{E}|_{\tilde{X}}$ .

除子 $E$ 是 $\mathbb{E}$ 中的一个约化超平面，由 $x_0 = 0$定义，即 $E = \mathbb{E}|_{\mathbb{H}}$。除子~ ~$X \subset \mathbb{P}$ 是由方程定义的光滑超曲面

$$\tilde{f} := y^k x_0 + y^{k-1} z f_{a+1}(x_0, \ldots, x_n) + \cdots + z^k f_{ak+1}(x_0, \ldots, x_n)$$

根据命题 3.34。特别地，我们有

$$\tilde{X} \sim k\xi + \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \quad \psi^* X = \tilde{X} + \frac{1}{a}\mathbb{E}.$$

注意到 $g$ 是一个次数为 $k$ 的泛有限态射，并且

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)|_E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-a), \quad A_X(E) = \frac{n}{a}$$

因为

$$\left(E|_E \cdot \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_E^{n-2}\right) = \left(\mathbb{E}^2 \cdot \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n-2} \cdot \tilde{X}\right) = -a.$$

~根据 $m$的定义， $\mathbb{H}$ 上的有效除子 $X|_{\mathbb{H}}$ 沿着 $E$的阶为 $m$ 。我们令$G := \mathbb{H}|_{\tilde{X}} - mE$。注意

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}}(G) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(-m\xi)\,|_{\tilde{X}} \otimes g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(am + 1). \tag{2}$$

~引理 7.2. </style}若 $n \geq 3$， 则 $X$ 上的有效除子 $G$ 是素除子。

证明。 推前 $\sigma_* G$ 在 $X$ 上是 $X$ 由 $(x_0 = 0)|_X$定义的魏尔除子。由于我们有如例 $X = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X$3.32 (1) 所示的 Cl(1)，除子 $\sigma_* G \in |\mathcal{O}_X(1)|$必定是 $X$上的素除子。因此 $G = \sigma_*^{-1}(\sigma_* G)$ 也是 $\tilde{X}$上的素除子。 □

**7.1. 非埃卡特情形。** 在本小节中，我们考虑情形 $m \leq k - 1$。

~**引理 7.3. </style}假设 且。那么， 上任意素除子 都满足 维数** $g(G') = n - 1$。换言之， $g$ 的 *Stein* 分解是一个小双有理态射。

~证明。 假设存在一个素除子 $G_0 \subset X$ 使得 $\dim g(G_0) \leq n - 2$。那么必有 $G_0 \subset \mathbb{H}$。（事实上，任意纤维 $f$ of $g|_{G_0} = \pi|_{G_0}$ 都具有正维数，而 ~of $\pi$，因此可知 $f \cap \mathbb{E}$ 是 $X$ 上的一个点，且 $f \cap \mathbb{E} \subset X \cap \mathbb{E} = E$。这意味着$f \subset \pi^{-1}(\pi(E)) = \mathbb{H}$。结合引理 7.2，必有 $G_0 = G$。然而，

$$0 = \left(G \cdot g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\cdot n-1}\right) = k - m,$$

矛盾。 □

~**推论 7.4**。 假设 $n \geq 3$ 且 $m \leq k - 1$。取一个一般的 $S \in |g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$。那么~$G|_{\tilde{S}}$ 是 $S$ 上的一个素除子，且

$$G|_{\tilde{S}} \sim_{\mathbb{Q}} \sigma^* \mathcal{O}_X(1)|_{\tilde{S}} - \frac{am + 1}{a} E|_{\tilde{S}}.$$

~证明。 该 $S$ 是光滑的。此外，应用不可约性贝尔蒂尼定理（参见[Laz04，定理 3.3。1]）于态射 $g|_G \colon G \to \mathbb{P}^n$，可知除子 $G|_{\tilde{S}}$是一个素~除子，位于 $S$上。其余断言由线性等价（2）得出。 □

**引理 7.5**。 假设 $n=3$ 和 $m \leq k-1$。那么，对于任意满足 维数 $g\left(\tilde{C}\right)=1$ 的不可约曲线 $C \subset X$，有

$$\left(\xi-\left(1+\frac{a}{am+1}\right)\mathbb{E}\right)\cdot\tilde{C}\geq 0. \tag{3}$$

证明。 任取不可约曲线 $\tilde{C}\subset\tilde{X}$ 满足 $C_0 := g\left(\tilde{C}\right)$ 一条曲线。由于 $\mathbb{Q}$线丛 $\left(\xi-\left(1+\frac{a}{am+1}\right)\mathbb{E}\right)|_{\mathbb{E}}$ 在 $\mathbb{E}\simeq\mathbb{P}^n$上是丰沛的，我们可以假设 $\tilde{C}\not\subset\mathbb{E}$ 以证明不等式（3）。令

$$b_H := \left(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\cdot\tilde{C}\right)\in\mathbb{Z}_{>0},\quad b_E := \left(\mathbb{E}\cdot\tilde{C}\right)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

注意到 $\xi\cdot C = b_E + ab_H$ 以及

$$\left(\xi-\left(1+\frac{a}{am+1}\right)\mathbb{E}\right)\cdot\tilde{C}=\frac{a}{am+1}\left((am+1)b_H-b_E\right).$$

令 $\nu\colon\ C\to C_0$ 为正规化，设 $\mathcal{L}:=\nu^*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_{C_0}\right)$，并设 $b_0:=$的次数为 $\mathcal{L}\in\mathbb{Z}_{>0}$。此外，令

$$\begin{array}{ccc}\tilde{T} & \xrightarrow{\nu'} & \tilde{\mathbb{P}}\\ {\scriptstyle\pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ C & \xrightarrow[\nu]{} & \mathbb{P}^3\end{array}$$

为纤维积。注意到 $\tilde{T}=\mathbb{P}_C\left(\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}^{\otimes a}\right)$，$\xi_{\tilde{T}}:=(\nu')^*\xi$ 为典范线丛，而 $E_{\tilde{T}}:=(\nu')^*\mathbb{E}$ 为负截面，即 $E_{\tilde{T}}\sim\xi_{\tilde{T}}-(\pi')^*\mathcal{L}^{\otimes a}$。我们可以唯一地取满足 $\nu'_*C_{\tilde{T}}=C$的不可约曲线 $C_{\tilde{T}}\subset T$。令我们表示

$$C_{\tilde{T}}\sim b_1\xi_{\tilde{T}}+(\pi')^*\mathcal{M}$$

对于某些 $b_1\in\mathbb{Z}$ 和 $\mathcal{M}\in$ 皮卡群$C$。于是我们有

$$b_H=\left((\pi')^*\mathcal{L}\cdot C_{\tilde{T}}\right)=b_0b_1,\quad b_E=\left(E_{\tilde{T}}\cdot C_{\tilde{T}}\right)=\deg\mathcal{M}.$$

特别地，我们有 $b_0,\ b_1\in\mathbb{Z}_{>0}$。另一方面，根据引理 7.3，

$$X_{\tilde{T}}:=(\nu')^*\tilde{X}\sim k\xi_{\tilde{T}}+(\pi')^*\mathcal{L}$$

是 $T$上的一个包含 $C_{\tilde{T}}$的有效除子。令

$$m_0:=\begin{cases}0 & \text{if } C_0\not\subset(x_0=0),\\ m & \text{if } C_0\subset(x_0=0).\end{cases}$$

由于有效除子 $X|_{\mathbb{H}}$在 $\mathbb{H}$上沿 $E$的阶为 $m$，因此 $X_{\tilde{T}}$沿 $E_{\tilde{T}}$的阶恰好等于 $m_0$。于是除子 $X_{\tilde{T}}-m_0E_{\tilde{T}}-C_{\tilde{T}}$是有效的，且其支集不包含 $E_{\tilde{T}}$。这意味着

$$0\leq\left(X_{\tilde{T}}-m_0E_{\tilde{T}}-C_{\tilde{T}}\right)\cdot E_{\tilde{T}}=(am_0+1)b_0-b_E.$$

由于 $b_H\geq b_0$ 和 $m\geq m_0$，我们得到所需的不等式（3）。 □

**推论 7.6**。 在引理 7.5中的假设下，对于一个一般元素 $S\in|g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$，该 $\mathbb{Q}$-除子

$$\xi|_{\tilde{S}}-\left(1+\frac{a}{am+1}\right)\mathbb{E}|_{\tilde{S}}$$

是数值有效的。

证明。 由引理 7.3 和 7.5 可立即得出。 □

**命题 7.7**。 假设 $n=3$ 和 $m \leq k-1$。令 $S$ 为 $|\mathcal{O}_X(1)|$ 和$p=[0:0:0:\ 1] \in S$中的一般元素。则

$$\delta_p(S;\mathcal{O}_S(1)) \geq 3\frac{(m+1)a+1}{(ma+1)d}.$$

~ ~ ~证明。 令 $S$ 为 $S$ 在 $X$中的严格变换，因此 $\psi:\ S \to S$ 是 $S$ 在$p$中的普通爆破。由推论 7.6可知，除子

$$\psi^*\mathcal{O}_S(ma+1) - \frac{(m+1)a+1}{a}E|_{\tilde{S}}$$

~在 $S$上数值有效，即

$$\varepsilon\left(\mathcal{O}_S(1); E|_{\tilde{S}}\right) \geq \frac{(m+1)a+1}{(ma+1)a}.$$

于是我们可以应用推论 6.3。 □

对于特殊情形，我们有一个更好的界：

**命题 7.8**。 假设 $n=3$ 和 $d \geq (ma+1)^2$。令 $S$ 为$|\mathcal{O}_X(1)|$ 中的一般元素，且 $p=[0:0:0:1] \in S$。那么

$$\delta_p\left(S;\mathcal{O}_S(1)\right) \geq \frac{3(ma+1)}{d}.$$

~ ~证明。 根据假设，我们有 $m \leq k-1$。令 $S$ 为 $S$ 在 $X$中的严格变换。由推论 7.4可知，曲线 $G|_{\tilde{S}}$ 是一个素除子，并且

$$\left(G|_{\tilde{S}}^{\cdot 2}\right) = \frac{d-(ma+1)^2}{a} \geq 0.$$

因此我们有 $\varepsilon\left(\mathcal{O}_S(1);\ E|_{\tilde{S}}\right) \geq \frac{ma+1}{a}$。然后我们可以再次应用推论 6.3。 □

7.2. **埃克哈特情形**。在 §7.2 中，我们考虑情形 $m=k$，即 $X$ 在 $P$ 处有一个广义 Eckardt 点。本节的结果类似于 [AZ22，§4.4]。

Un在设定 7.1 的假设下，进一步假设 $m=k$。那么我们可以写成

$$\begin{aligned} f &= x_{n+1}x_0 g + f_{ak+1}(x_0,\ldots,x_n) \text{ with} \\ g &:= x_{n+1}^{k-1} + x_{n+1}^{k-2}g_a(x_0,\ldots,x_n) + \cdots + g_{a(k-1)}(x_0,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

其中 $g_{aj}$ $(1 \leq j \leq k-1)$（分别为 $f_{ak+1}$）是次数为 $aj$ （分别为 $ak+1$）的齐次多项式。我们记

$$f_{ak+1}(x_0,\ldots,x_n) = x_0 f_{ak}(x_0,\ldots,x_n) + g_{ak+1}(x_1,\ldots,x_n).$$

**例 7.9.** 这样的拟光滑超曲面 $X \subset \mathbb{P}$ 有很多。例如，假设

$$f = x_{n+1}^k x_0 + \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^{ak+1}$$

其中 $c_0$，……， $c_n \in \mathbb{C}^*$。（换句话说，我们的 $f$ 满足 $g = x_{n+1}^{k-1}$、 $f_{ak}(x_0$，……， $x_n) = c_0 x_0^{ak}$以及 $g_{ak+1}(x_1$，……， $x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{ak+1}$。）那么我们可以直接验证该超曲面$X \subset \mathbb{P}$ 是拟光滑的。

在上面的例子中， $g_{ak+1}(x_1$，……， $x_n)$ 在 $\mathbb{P}^{n=1}_{x_1\cdots x_n}$ 中定义了一个（光滑的）费马超曲面。事实上，一般而言，以下结论成立。

**引理 7.10** （参见 [AZ22，引理 4。9]）。 超曲面 $W:=(g_{ak+1}=0) \subset \mathbb{P}^{n-1}_{x_1\cdots x_n}$ 是光滑的。

证明。 假设 $[c_1:\cdots:c_n] \in W$ 是一个奇点。我们可以取 $y_0 \in \mathbb{C}$ 使得

$$y_0 g(0,c_1,\ldots,c_n,y_0) + f_{ak}(0,c_1,\ldots,c_n) = 0$$

因为多项式 $g(0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n,\ y)$ 在 $y$ 中不是常数。因此 $\vec{c}:=[0:\ c_1:\cdots:\ c_n:\ y_0] \in X$。然而，我们可以验证 $X$ 在 $\vec{c}$ 处并非拟光滑，这与假设矛盾。□

令 $V \subset X$ 为由方程 $x_0 = 0$ 定义的素除子，并令 $\tilde{V} := \sigma_*^{-1}V \subset \tilde{X}$。$\tilde{X}$ 上的卡蒂埃除子 $\mathbb{H}|_{\tilde{X}}$ 就是 $\tilde{V} + kE$。此外，$\tilde{V}$ 在 $\tilde{\mathbb{P}}$ 中的定义方程为 $g_{ak+1}(x_1, \ldots, x_n) = x_0 = 0$。特别地，$\tilde{V} \xrightarrow{\pi|_{\tilde{V}}} \pi(\tilde{V}) = W \subset \mathbb{P}^{n-1}_{x_1 \cdots x_n}$ 是一个在 $W$ 上的 $\mathbb{P}^1$-丛。注意，对于 $\pi|_{\tilde{V}}$ 的一般纤维 $\ell \subset \tilde{V}$，有 $(\tilde{V} \cdot \ell) = -k$。

从现在起，设 $Y_0 := X, Y_1 := E$ 和 $W_1 := V|_E (\simeq W)$。任取一个闭点 $q \in E$。考虑一列一般线性子空间 $Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_n$，满足 $Y_n = \{q\}$。那么，

$$Y_\bullet : Y_0 \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_n$$

是 $X$ 上的完全 plt 旗。对于任意 $2 \leq j \leq n-1$，令 $W_j := W_{j-1}|_{Y_j}$ 递归定义。那么每个 $W_j \subset Y_j$ 都是光滑超曲面。

**命题 7.11.** 对于任意 $1 \leq j \leq n$，我们有

$$S\left(\mathcal{O}_X(1); Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j\right) = \begin{cases} \frac{ak+n}{a(n+1)} & \text{if } j = 1, \\ \frac{2ak+1}{(ak+1)(n+1)} & \text{if } j = n \text{ and } q \in W_1, \\ \frac{1}{n+1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。旗 $Y_\bullet$ 本身是 $Y_\bullet$ 意义下的光滑支配，见 [Fuj24，定义 7。1]（在所引定义中取 $\gamma_k =$ 为恒等映射）。那么，对于任意 $1 \leq j < l \leq n$，$d_{jl}$ 和 $g_{jl}$ 在[Fuj24，定义 7。2] 中满足 $d_{jl} = g_{jl} = 0$。该 $\mathbb{R}$-除子

$$\sigma^*\mathcal{O}_X(1) - x_1 E \sim_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{1}{a} - x_1\right)\xi + \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(ax_1)\right)\Big|_{\tilde{X}} \tag{4}$$

在 $x_1 \in [0, 1/a]$ 时数值有效。另一方面，$\pi|_{\tilde{V}}$ 的一般纤维 $\ell \subset V$ 满足

$$(\sigma^*\mathcal{O}_X(1) - x_1 E \cdot \ell) = \frac{1}{a} - x_1$$

and

$$\sigma^*\mathcal{O}_X(1) - x_1 E - \frac{1}{k}\left(x_1 - \frac{1}{a}\right)\tilde{V} \sim_{\mathbb{R}} g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{ak+1}{a} - x_1\right)\right) \tag{5}$$

当 $x_1 \in [1/a, (ak+1)/a]$ 时是半丰沛的。特别地，我们有 $\sigma^*\mathcal{O}_X(1) - \frac{ak+1}{a}E \sim_{\mathbb{R}} \tilde{V}$，并且可见

$$T(\mathcal{O}_X(1); E) = \frac{ak+1}{a}.$$

此外，我们看到，对于任意 $x_1 \in [0, (ak+1)/a]$，分解

$$\sigma^*\mathcal{O}_X(1) - x_1 E = N_{0,0}(x_1) + P_0(x_1)$$

在强意义下是 Zariski 分解，正如 [Fuj24，定义 69]，中所述，其中

$$N_{0,0}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_1 \in \left[0, \frac{1}{a}\right], \\ \frac{1}{k}\left(x_1 - \frac{1}{a}\right)\tilde{V} & \text{if } x_1 \in \left[\frac{1}{a}, \frac{ak+1}{a}\right] \end{cases}.$$

特别地，$Y_\bullet$ 本身是 $Y_\bullet$ 关于 $\mathcal{O}_X$ 的光滑且适当支配，按照 [Fuj24，定义 85] 的意义。

对于 $l = 1, \ldots\ldots, n$，令 $\mathbb{D}_l \subset \mathbb{R}^l_{>0}$ 为如下区域：它由纯对数终端旗（以及光滑支配）$Y_\bullet$ 和 $L = \mathcal{O}_X(1)$ 按照 $P_0(x_1)|_E \simeq \mathcal{O}_E(ax_1)$ 若 $x_1 \in [0, \frac{1}{a}]$ 由（4）可得，而若 $x_1 \in [\frac{1}{a}, \frac{ak+1}{a}]$ 则由（5）可得 $P_0(x_1)|_E \simeq \mathcal{O}_E\left(\frac{1}{k}\left(\frac{ak+1}{a} - x_1\right)\right)$，因此我们可以直接验证，对于 $\mathbb{D}_n = \overline{\mathbb{D}_{n,1}} \cup \mathbb{D}_{n,2}$

$$\mathbb{D}_{n,1} := \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{>0} \;\middle|\; x_1 \leq \frac{1}{a} \text{ and } x_2 + \cdots + x_n < ax_1\right\},$$

$$\mathbb{D}_{n,2} := \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{>0} \;\middle|\; \frac{1}{a} < x_1 < \frac{ak+1}{a} \text{ and } x_2 + \cdots + x_n < \frac{1}{k}\left(\frac{ak+1}{a} - x_1\right)\right\}.$$

沿用相同的术语，我们得到以下数：

$u_{l,j}(x_1, \ldots\ldots, x_l) = \mathrm{ord}_{Y_j}(N_{l-1,j-2}(x_1, \ldots\ldots, x_l)|_{Y_{j-1}}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 当 $1 \leq l < j$ 且 $(x_1, \ldots\ldots, x_l) \in \mathbb{D}_l$，并且

$$v_j(x_1,\dots,x_{j-1}) := \sum_{l=1}^{j-1} u_{l,j}(x_1,\dots,x_l) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ for } 2 \leq j \leq n \text{ and } (x_1,\dots,x_{j-1}) \in \mathbb{D}_{j-1}.$$

我们看到 $u_{l,\ j} = 0$ 当 $2 \leq j \leq n-1$ 时，因为 $Y_j \simeq \mathbb{P}^{n-j}$ 且 $N_{i-1,\ i-1}(x_1,\ \dots\dots,\ x_i) = 0$ 当$2 \leq i \leq n$ 且 $(x_1,\ \dots\dots,\ x_i) \in \mathbb{D}_i$。由此以及线性子空间 $Y_i$ 的一般性，我们还可以看到

$$\begin{aligned} v_j &\equiv 0 \text{ if } 2 \leq j \leq n-1, \\ v_n(x_1,\dots,x_{n-1}) &= \begin{cases} \frac{1}{k}\left(x_1 - \frac{1}{a}\right) & \text{if } \frac{1}{a} < x_1 < \frac{ak+1}{a} \text{ and } q \in W_1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}.$$

根据 [Fuj24、定理 8.8 和注 8.9(1)] 以及 $g_{jl} = 0$，我们知道

$$S\left(\mathcal{O}_X(1); Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j\right) = \frac{n!a}{ak+1} \int_{\vec{x} \in \mathbb{D}_n} \left(x_j + v_j(x_1,\dots,x_{j-1})\right) d\vec{x}$$

对任意 $1 \leq j \leq n$ 均成立。（注意，令 $v_1 := 0$，当 $j = 1$ 时也成立。）因此，通过直接计算即可得到该断言。

□

**推论 7.12**。我们有

$$\delta_P\left(X; \mathcal{O}_X(1)\right) \geq \min\left\{\frac{n(n+1)}{ak+n},\ \frac{(ak+1)(n+1)}{2ak+1}\right\}.$$

此外，若 $d = ak+1 \geq n$，则有

$$\delta_P\left(X; \mathcal{O}_X(1)\right) = \frac{n(n+1)}{ak+n}.$$

证明。由定理2.5，我们有

$$\delta_P(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \min\left\{\frac{A_X(Y_1)}{S(\mathcal{O}_X(1); Y_1)},\ \inf_{q \in Y_1} \delta_q(X \triangleright Y_1; \mathcal{O}_X(1))\right\}.$$

M此外，对任意 $q \in Y_1$ 以及对任意 $2 \leq j \leq n-1$，再次由定理 2.5 可得

$$\delta_q(X \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_{j-1}; \mathcal{O}_X(1)) \geq \min\left\{\frac{A_{Y_{j-1}}(Y_j)}{S(\mathcal{O}_X(1); Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j)}, \delta_q(X \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_j; \mathcal{O}_X(1))\right\}$$

与 $q = Y_n$。结合这些，命题 7.11 和

$$\delta_q(X \triangleright Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_{n-1}; \mathcal{O}_X(1)) = \frac{A_{Y_{n-1}}(Y_n)}{S(\mathcal{O}_X(1); Y_1 \triangleright \cdots \triangleright Y_n)},$$

我们得到不等式

$$\delta_P\left(X; \mathcal{O}_X(1)\right) \geq \min\left\{\frac{n(n+1)}{ak+n},\ n+1,\ \frac{(ak+1)(n+1)}{2ak+1}\right\}.$$

此外，我们知道

$$\delta_P\left(X; \mathcal{O}_X(1)\right) \leq \frac{A_X(E)}{S(\mathcal{O}_X(1); E)} = \frac{n(n+1)}{ak+n}.$$

因此，断言得证。 □

**推论 7.13**。假设 $a \geq 2$ 和 $n > {}^{a^2k}_{(k-1)\ a-1}$。那么 $X$ 是一个 *K*-不稳定的 *Kawamata* 对数终端 *klt Fano* 簇。

证明。注意到，根据假设有 $-K_X \sim \mathcal{O}_X(n+a-ak)$ 和 $n+a-ak > 0$。此外

$$\delta(X) = \frac{1}{n+a-ak} \cdot \delta\left(X; \mathcal{O}_X(1)\right) \leq \frac{n(n+1)}{(n+a-ak)(ak+n)},$$

由命题 7.11。因此，由于我们有

$$(n+a-ak)(n+ak) - n(n+1) = (n^2 - a^2k^2 + an + a^2k) - (n^2+n) = (a-1)n - a^2k(k-1).$$

□

**例 7.14**。 设 $X_{ak+1} \subset \mathbb{P}(1^{n+1}, a)$ 是一个具有广义 Eckard 点的超曲面，如推论 7.13 (参见例 7.9)。注意，Fano 指数 $r = r_X$ 属于 $X$ 为

$$r = n + 1 + a - (ak + 1) = n - (k - 1)a.$$

那么，推论 $n > {}^{a^2k}{}_{(k-1)\,a-1}$ 中的条件 7.13 意味着

$$r > \frac{a^2k(k-1)}{a-1} - (k-1)a = \frac{((k-1)a+1)\,(k-1)a}{a-1}.$$

例如，若 $k = 2$，则有 $r > {}^{a}{}_{(a+1)\,a-1} \geq 6$. 因此，对于任意 $a \geq 2$ 以及任意 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $n > \frac{2a^2}{a-1}$的，推论 $X_{2a+1} \subset \mathbb{P}(1^{n+1}, a)$ 中的 Fano 超曲面 7.13 指标为 $r = n - a$，且是 K-不稳定的。若取 $n = \lfloor \frac{2a^2}{a-1} + 1 \rfloor$，并且 $a$ 趋于无穷大，则比值 $r/n$ 趋于 $1/2$。

## 8. Proof of Theorem 1.1

我们先给出以下命题:

**命题 8.1.** 设 $n \geq 3$ 并设 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ 是良定的，且 $a_0 \leq \cdots \leq a_{n+1}$。设 $X \subset \mathbb{P}$ 是次数为 $d > a_{n+1} + 1$ 的拟光滑超曲面。假设 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$ *(参见定义 3.9)*。那么有

$$\delta(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{n+1}{d - a_{n+1}}.$$

更确切地说，对于任意 $p \in X$，我们有如下结论:

*(1)* 若 $p \neq P_{n+1} : = [0 : \cdots : 0 : 1],$，则有

$$\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{(n+1)a_{n+1}}{d}.$$

*(2)* 若 $p = P_{n+1}$，则有

$$\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \max\left\{\frac{(n+1)a_n}{d}, \frac{n+1}{d - a_{n+1}}\right\}.$$

我们指出，若 $a_n \geq 2$，则总有如下不等式

$$\frac{(n+1)a_n}{d} > \frac{n+1}{d - a_{n+1}}.$$

证明。 (1) 多次应用命题 4.4 和 5.2，再通过自同构群 Aut (ℙ) 中的一个元素进行扭转后，态射

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{P}' := \mathbb{P}\left(1^{n+1}, a_{n+1}\right) & \to & \mathbb{P} \\ [x_0 : \cdots : x_n : x_{n+1}] & \mapsto & [x_0^{a_0} : \cdots : x_n^{a_n} : x_{n+1}] \end{array}$$

满足: $X' := \tau^* X \subset \mathbb{P}'$ 是次数为 $d$ 的拟光滑对象，且

$$\delta_{p'}\left(X'; \mathcal{O}_{X'}(1)\right) \leq \delta_p(X; \mathcal{O}_X(1))$$

对于任意 $p' \in X'$，满足 $\tau(p') = p$。因此，对于任意 $p \neq P_{n+1}$，由于 $\{P_{n+1}\} \subset X'$，我们有

$$\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{(n+1)a_{n+1}}{d}$$

根据推论 6.7。
（2）通过使用该态射的上述论证

$$\mathbb{P}(1^n, a_n, 1) \to \mathbb{P}; \quad [x_0 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto [x_0^{a_0} : \cdots : x_{n-1}^{a_{n-1}} : x_n : x_{n+1}^{a_{n+1}}],$$

我们还有

$$\delta_{P_{n+1}}(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{(n+1)a_n}{d}.$$

因此，我们可以假设 $p = P_{n+1}$ 且 $a_0 = \cdots = a_n = 1$。由于 $\{P_{n+1}\} \subset X'$ 且$d > a_{n+1}+1$，存在 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 使得 $d = ka_{n+1}+1$。由命题7.7 和推论7.12，可得

$$\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \min\left\{ \frac{(n+1)}{(k-1)a_{n+1}+1}, \frac{n(n+1)}{a_{n+1}k+n}, \frac{(a_{n+1}k+1)(n+1)}{2a_{n+1}k+1} \right\}.$$

我们看到，第 2 项比第 1 项大 $k \geq 2$ 且

$$n((k-1)a_{n+1}+1) - (a_{n+1}k+n) = a_{n+1}(n(k-1)-k) \geq a_{n+1}(3(k-1)-k) > 0.$$

由于第 3 项为 $\frac{d}{2d-1}(n+1) > \frac{n+1}{2}$，因此得到断言 (2)。

如果 $a_n \geq 2$，那么我们有

$$d(a_n - 1) \geq (2a_{n+1}+1)(a_n-1) > 2a_{n+1}(a_n-1) \geq a_n a_{n+1}.$$

因此我们也得到了最后一条评论。 □

我们简要分析条件 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$。

**引理 8.2.** 设 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ 是良定的，并且

$$1 = a_0 = \cdots = a_{c_1-1} < a_{c_1} \leq \cdots \leq a_{n+1}.$$

设 $X \subset \mathbb{P}$ 是次数为 $d > 1$ 的拟光滑超曲面。

*(1)* 若 维数 $B_1^{\mathbb{P}} > \frac{n}{2}$（即，若 $n+1 \geq 2c_1$），则 $B_1^{\mathbb{P}} \not\subset X$。

*(2)* 若

$$d \notin \sum_{j=c_1}^{n+1} \mathbb{Z}_{\geq 0} a_j,$$

则 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$。

*(3)* 若 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$，则对任意 $c_1 \leq j \leq n+1$，有 $d \equiv 1$ 模 $a_j$。

证明。设 $f$ 是定义 $X$ 的齐次多项式。若 $d \notin \sum_{j=c_1}^{n+1} \mathbb{Z}_{\geq 0} a_j$，则 $f$ 不含任何形如 $x_{c_1}^{j_{c_1}} \cdots x_{n+1}^{j_{n+1}}$ 的单项式。因此，断言 (2) 显然成立。断言 (3) 也显然成立，因为 $X$ 在第 $j$ 个坐标点处拟光滑。

考虑 (1)。假设 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$。由于 $n+1-c_1 \geq c_1$ 和 $d > 1$，存在一点 $p = [0 : \cdots : 0 : p_{c_1} : \cdots : p_{n+1}] \in B_1^{\mathbb{P}}$，使得

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_{c_1-1}}(p) = 0.$$

由于 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$，我们还有

$$\frac{\partial f}{\partial x_{c_1}}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p) = 0.$$

这导致矛盾，因为 $X$ 是拟光滑的。 □

我们分析命题 8.1中的估计有多么精确。

**引理 8.3。** 设 $n \geq 3$，且令 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ 为良定的，其中 $a_0 \leq \cdots \leq a_{n+1}$。假设 $a_n \geq 2$。令 $X \subset \mathbb{P}$ 为指标为1的拟光滑 *Fano* 超曲面。假设$B_1^{\mathbb{P}} \subset X$ 并记 $d = ka_{n+1}+1$。那么

$$\frac{(n+1)a_n}{d} > 1,$$

在以下情形中：

*(1)* $k \geq 4$，*(2)* $k \geq 3$

和 $a_n \geq 3$。

证明。令 $h:=\#\{0\le i\le n+1\mid a_i>1\}$。由于 $B_1^{\mathbb{P}}\subset X$，我们由 $2h\le n+2$ 引理8.2(1) 得到。由于 $X$ 的指标为 1，我们有

$$d+1=\sum_{i=0}^{n+1}a_i\le h+(h-1)a_n+a_{n+1},$$

也就是说

$$h\ge\frac{(k-1)a_{n+1}+2+a_n}{a_n+1},$$

由此得到

$$n+1\ge 2h-1\ge 2\frac{(k-1)a_{n+1}+2+a_n}{a_n+1}-1=\frac{2(k-1)a_{n+1}+3+a_n}{a_n+1}.$$

我们有

$$(2(k-1)a_{n+1}+3+a_n)a_n-(ka_{n+1}+1)(a_n+1)=(k-2)$$

$a_{n+1}a_n+a_n^2-1-ka_{n+1}+2a_n$，当 $(k-2)a_n\ge k$，即 $a_n\ge k/(k-2)$ 时，该式严格大于 0。若 $k\ge 4$ 或$k=3$ 且 $a_n\ge 3$，则此条件成立，这正是我们所需要的。□

下面是命题 8.1 的一个直接推论。

**推论 8.4**。设 $a\ge 2$, $n\ge 3$ 和 $X\subset\mathbb{P}\left(1^{n+1},a\right)$ 是次数为 $d\ge a+2$ 的拟光滑超曲面。那么我们有

$$\delta\left(X;\mathcal{O}_X(1)\right)\ge\frac{n+1}{d-a}.$$

证明。由命题 8.1，不妨设 $B_1^{\mathbb{P}}\not\subset X$。在此情况下，$a\mid d$ 成立。由 [ST25、定理 1.1], 可得

$$\delta\left(X;\mathcal{O}_X(1)\right)\ge\frac{(n+1)a}{d}\ge\frac{n+1}{d-a}.$$

因此，断言得证。□

定理 *1.1* 的证明。这直接由推论 8.4 得到，因为根据 $d=n+a$ 假设。

□

## 9. Proof of Theorem 1.3

**命题 9.1**。设 $X\subset\mathbb{P}(1^n,a_n,a_{n+1})$ 是一个次数为$d\ge a_{n+1}+2$ 且维数为 $n\ge 2$的拟光滑加权超曲面。假设 $a_n\le a_{n+1}$。则

$$\delta\left(X;\mathcal{O}_X(1)\right)\ge\frac{(n+1)a_n}{d}.$$

证明。由命题 8.1，不妨设 $B_1^{\mathbb{P}}\not\subset X$。对于 $2\le j\le n$，令

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_n:=\mathbb{P}(1^n,a_n,a_{n+1}),\\&\mathbb{P}_{j-1}:=\mathbb{P}_j\cap(x_{j-1}=0)\left(\simeq\mathbb{P}(1^{j-1},a_n,a_{n+1})\right)\quad(2\le j\le n).\end{aligned}$$

由于 $B_1^{\mathbb{P}}\not\subset X$，我们可以应用引理 4.2 （1）：存在 $\varphi\in$ 自同构群（$\mathbb{P}$），使得在将$X\subset\mathbb{P}$ 替换为 $\varphi$（$X$）$\subset\mathbb{P}$之后，我们有 $X_j\subset\mathbb{P}_j$ 对任意 $1\le j\le n-1$均为拟光滑，其中

$$X_n:=X\subset\mathbb{P}_n,\quad X_{j-1}:=X_j|_{\mathbb{P}_{j-1}}\subset\mathbb{P}_{j-1}\quad(2\le j\le n).$$

注意，奇点集的维数 $X_j=0$ 由 $B_1^{\mathbb{P}}\not\subset X$给出。根据 [CO24，引理 2.9 和 2.10], 对于任意 $2\le j\le n$, 对偶 $(X_j,X_{j-1})$ 是纯对数终端的，且

$$\left(K_{X_j}+X_{j-1}\right)|_{X_{j-1}}=\begin{cases}K_{X_{j-1}} & \text{if } 3\le j\le n,\\ K_{X_1}+\Delta_1 & \text{if } j=2\end{cases}$$

with

$$\Delta_1 = \sum_{p \in B_1^{\mathbb{P}} \cap X} \left(1 - \frac{1}{r_p}\right) p,$$

其中

$$r_p := \begin{cases} a_{n+1} & \text{if } p = [0 : \cdots : 0 : 0 : 1], \\ a_n & \text{if } p = [0 : \cdots : 0 : 1 : 0], \\ \gcd(a_n, a_{n+1}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于任意 $p \in B_1^{\mathbb{P}} \cap X$，由引理 4.1，可得

$$\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \min\left\{n+1, \quad \frac{n+1}{2}\delta_p(X_1, \Delta_1; \mathcal{O}_X(1)|_{X_1})\right\} \geq \frac{(n+1)a_n}{d},$$

其中我们使用了 $\delta_p(X_1, \Delta_1; \mathcal{O}_X(1)|_{X_1}) = \frac{1/r_p}{d/2a_n a_{n+1}}$。因此，我们可以进一步假设 $p \notin B_1^{\mathbb{P}} \cap X$。

我们考虑情形 $[0 : \cdots : 0 : 1] \notin X$。在此情形下，我们有 $a_{n+1} \mid d$。因此，由 [ST25，定理 1，断言显然成立。1]。因此，我们可以进一步假设 $[0 : \cdots : 0 : 1] \in X$。

令 $\mathbb{P}(a_n, a_{n+1})$ 是 $\tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}(1^n, a_n, a_{n+1})$ 的严格变换，由命题 3.36 作的标准加权爆破，并设 $\tilde{X} \subset \tilde{\mathbb{P}}$ 是 $X$ 的严格变换。由命题 3.36，$\tilde{X}$ 是拟光滑超曲面，且 $X|_{\mathbb{E}} \subset \tilde{\mathbb{E}}$ 也拟光滑。应用推论 4.8 和命题 6.5，并结合引理 4.1，可得

$$\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \min\left\{n+1, \quad \frac{n+1}{3} \cdot \frac{3a_{n+1}}{d}\right\} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{d}.$$

因此，断言得证。 □

**引理 9.2.** 设 $X = X_d \subset \mathbb{P}(1^n, a_n, a_{n+1})$ 是次数为 $d$、维数为 $n \geq 3$ 且指标为 1 的拟光滑 *Fano* 加权超曲面。假设 $1 < a_n \leq a_{n+1}$。则有

$$\frac{(n+1)a_n}{d} \geq 1,$$

并且等式仅在 $X = X_{2n+2} \subset \mathbb{P}(1^n, 2, n+1)$ 时成立。

更准确地说，若 $a_{n+1} \nmid d$，则有

$$\frac{(n+1)a_n}{d} \geq \frac{n+1}{n + \frac{1}{a_n}}.$$

证明。设 $d = ka_{n+1} + r$ 满足 $0 \leq r \leq d-1$。由拟光滑性可知$r \in \{0, 1, a_n\}$，又由于 $X$ 的指标为 1，得到 $k \geq 2$。

注意到 $n + 1 = d - a_{n+1} - a_n + 2$，我们需要证明

$$(ka_{n+1} + r + 2 - a_n - a_{n+1})a_n \geq ka_{n+1} + r.$$

如果 $a_n = 2$，那么我们得到

$$((k-1)a_{n+1} + r)2 \geq ka_{n+1} + r.$$

这显然成立，并且当 $k = 2$ 和 $r = 0$时等式成立。在这种情况下，我们有 $n + 2 + a_{n+1} = d + 1 = 2a_{n+1} + 1$，从而得到 $a_{n+1} = n + 1$。因此，我们看到$X = X_{2n+2} \subset \mathbb{P}(1^n, 2, n+1)$。

因此，我们可以假设 $a_n \geq 3$。如果 $k \geq 3$，利用 $a_{n+1} \geq a_n$ 后，我们只需考虑

$$((k-2)a_{n+1} + r + 2)a_n \geq ka_{n+1} + r$$

由于 $a_n \geq 3$，这始终是一个严格不等式。因此，我们只需考虑情形 $k = 2$ 和$a_n \geq 3$。于是得到

$$(a_{n+1} + r + 2 - a_n)a_n \geq 2a_{n+1} + r,$$

可表述为

$$(a_{n+1} - a_n)(a_n - 2) + r(a_n - 1) \geq 0.$$

后者始终成立，且只有当 $r=0$ 和 $a_{n+1}=a_n$时才可能取等号。于是我们得到 $d=a_{n+1}+a_n$ 和 $n+1=2$，因此在这种情况下等式不成立。

后一个不等式类似。根据假设，我们有 $r\geq 1$ 和 $k\geq 2$。只需证明

$$1+a_n\left((k-1)a_{n+1}-a_n+r+1\right)\geq ka_{n+1}+r.$$

由于 $r\geq 1$，只需证明

$$a_{n+1}\left((k-2)a_n-k\right)+a_n(2+a_{n+1}-a_n)\geq 0.$$

如果 $k\geq 3$，那么除非 $k=3$ 和 $a_n=2$，否则该不等式显然成立。当 $k=3$ 和 $a_n=2$，我们得到

$$a_{n+1}(2-3)+a_n(a_{n+1})=a_{n+1}(a_n-1)>0,$$

因此我们得到一个（严格）不等式。如果 $k=2$，那么该不等式等价于 $(a_n-2)(a_{n+1}-a_n)\geq 0$，这显然成立。□

定理 *1.3* 的证明。 如果 $b\mid d$，那么存在 $k\geq 2$ 满足 $d=kb$。由 [ST25，定理 2.4] 可得

$$\delta\left(X;\mathcal{O}_X(1)\right)\geq\frac{n+1}{k}\geq\frac{n+1}{(k-1)b+\frac{1}{a}+1-a}=\frac{n+1}{n+\frac{1}{a}},$$

其中，最后一个不等式由不等式 $(k-1)(b-1)\geq a-\frac{1}{a}$ 得出。（事实上，如果 $k>2$或 $b>a$，那么该不等式显然成立。我们还可以看出，$k=2$ 和 $b=a$ 不可能同时发生；否则我们有 $2b+n=a+b+n=d+1=2b+1$，这与 $n\geq 3$ 矛盾。）

如果 $b\nmid d$，那么这直接由命题 9.1 和引理 9.2得出。 □

## 10. Proof of Corollary 1.4

**引理 10.1.** 设 $n\geq 3$ 且 $\mathbb{P}:=\mathbb{P}(1,a_1,\ldots,a_{n+1})$ 是良定的，且满足 $a_1\leq\ldots\leq a_{n+1}$和 $1<a_{n+1}$。设 $X\subset\mathbb{P}$ 是指标 *1* 的良定拟光滑 *Fano* 超曲面。那么

$$\frac{(n+1)a_{n+1}}{d}>1.$$

证明。 写作 $d=ka_{n+1}+r$，其中 $r<a_{n+1}$ 且 $k\in\mathbb{N}$。根据指标 1 的假设，

$$ka_{n+1}+r+1=\sum_{i=0}^{n+1}a_i<1+(n+1)a_{n+1},$$

这意味着 $k\leq n$ （第二个严格不等式用到了良形性），因此

$$\frac{(n+1)a_{n+1}}{ka_{n+1}+r}>1.$$

□

**引理 10.2.** 假设 $n\geq 3$。设 $X\subset\mathbb{P}=\mathbb{P}(1^{c_1},a_{c_1},\ldots,a_{n+1})$ 是次数为 $d$ 的指标 1 拟光滑 *Fano* 超曲面，满足 $B_1^{\mathbb{P}}\subset X$、$c_1\leq n$ 和 $2\leq a_{c_1}\leq\cdots\leq a_{n+1}$。那么，$d<(n+1)a_n$ 或 $d<n^2$ 成立。

证明。 由引理 8.2 (1)，可得 $c_1\geq\frac{n+2}{2}$。注意到 $d=c_1+\sum_{i=c_1}^{n+1}a_i-1$。此外，由引理 8.2 (3)，存在 $k\geq 2$ 使得 $d=ka_{n+1}+1$ 成立。由引理 8.3，我们可以假设 either $(k,a_n)=(3,2)$ or $k=2$。

首先假设情形 $(k,a_n)=(3,2)$。由于 $a_{c_1}=\cdots=a_n=2$ 和 $d=3a_{n+1}+1$，我们得到 $d=2n+1-c_1+\frac{d-1}{3}$。因此，根据 $n\geq 3$，我们有

$$d=3n+1-\frac{3}{2}c_1\leq\frac{9}{4}n-\frac{1}{2}<n^2.$$

我们假设情形 $k=2$。我们还假设 $d \geq (n+1)a_n$。只需证明不等式 $d < n^2$。由于

$$\begin{aligned} d &\leq c_1 + \sum_{i=c_1}^{n} a_n + a_{n+1} - 1 \leq c_1 + \frac{d}{n+1}(n+1-c_1) + \frac{d-1}{2} - 1 \\ &\leq d - \left(\frac{d}{n+1} - 1\right)\frac{n+2}{2} + \frac{d-3}{2}, \end{aligned}$$

我们得到所需的不等式 $d \leq n^2 - 1 < n^2$。 □

**命题 10.3**。任取 $n \geq 3$、任意满足 $\frac{n+2}{2} \leq c_1 \leq n+1$ 的 $c_1 \in \mathbb{Z}$，以及任意满足如下条件的 $2 \leq a_{c_1} \leq \cdots \leq a_{n+1}$：数值 $d := c_1 + \sum_{i=c_1}^{n+1} a_i - 1$ 满足存在 $k_i \geq 2$，使得对于任意 $c_1 \leq i \leq n+1$，$d = k_i a_i + 1$ 成立。考虑次数为 $d$、由下式定义的加权超曲面 $X = (f=0) \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(1^{c_1}, a_{c_1}, \ldots, a_{n+1})$

$$f = \sum_{i=0}^{c_1-1} x_i^d + \sum_{j=0}^{n+1-c_1} x_j x_{c_1+j}^{k_{c_1+j}}.$$

那么，$X$ 是一个指标为 1、拟光滑且良定的 *Fano* 超曲面，满足 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$，并且 $\delta(X; \mathcal{O}_X(1)) > 1$ 成立。

证明。$X \subset \mathbb{P}$ 显然是拟光滑且良定的，并且具有 $B_1^{\mathbb{P}} \subset X$。根据定理 1.1，不妨设 $c_1 \leq n$。任取一点 $p \in X$。根据命题 8.1，若 $p \neq P := [0 : \cdots : 0 : 1]$，则有 $\delta_p(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{(n+1)^{a_{n+1}}}{d} > 1$。假设 $p = P$。根据命题 8.1，若 $d < (n+1)a_n$，则有 $\delta_P(X; \mathcal{O}_X(1)) > 1$。因此不妨设 $d \geq (n+1)a_n$。根据引理 10.2，必有 $d < n^2$。考虑阿贝尔覆盖

$$\begin{aligned} \tau \colon \mathbb{P}' := \mathbb{P}\left(1^{c_1}, 1^{n+1-c_1}, a_{n+1}\right) &\to \mathbb{P} = \mathbb{P}\left(1^{c_1}, a_{c_1}, \ldots, a_n, a_{n+1}\right) \\ \left[x_0' : \cdots : x_{c_1-1}' : x_{c_1}' : \cdots : x_n' : x_{n+1}'\right] &\mapsto \left[x_0' : \cdots : x_{c_1-1}' : (x_{c_1}')^{a_{c_1}} : \cdots : (x_n')^{a_n} : x_{n+1}'\right] \end{aligned}$$

并令我们取 $X' := \tau^* X \subset \mathbb{P}'$。我们注意到，$X' \subset \mathbb{P}'$ 由方程定义

$$f' := \sum_{i=0}^{c_1-1} (x_i')^d + \sum_{j=0}^{n+1-c_1} x_j' (x_{c_1+j}')^{d-1},$$

它仍然是拟光滑的，且点 $P' := [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{P}'$ 映射 $\tau$ 到 $P$。由命题5.2，我们有 $\delta_P(X; \mathcal{O}_X(1)) \geq \delta_{P'}(X'; \mathcal{O}_{X'}(1))$。此外，点 $P' \in X' \subset \mathbb{P}'$是一个广义 Eckardt 点。因此，由推论7.12，我们有

$$\delta_{P'}\left(X'; \mathcal{O}_{X'}(1)\right) \geq \min\left\{\frac{n(n+1)}{d+n-1}, \frac{d(n+1)}{2d-1}\right\}.$$

显然，我们有 $\frac{d(n+1)}{2d-1} > 1$。此外，由于 $d < n^2$，我们还有 $\frac{n(n+1)}{d+n-1} > 1$。因此，我们得到不等式 $\delta(X; \mathcal{O}_X(1)) > 1$。□

推论 *1.4* 的证明。这由命题 10.3 以及（统一）K-稳定性的开性得出（参见 [BL22、BLX22、LXZ22]）。□

## References


[ACC+23] C. Araujo、A.-M. Castravet、I. Cheltsov、K. Fujita、A.-S. Kaloghiros、J. Martinez-Garcia、C. Shramov、H. Süß 和 N. Viswanathan，*The Calabi problem for Fano threefolds*，伦敦数学学会讲义系列，第 485，2023 4590444 1 卷，剑桥大学出版社，剑桥，。MR AGP C. Arezzo、A. Ghigi 和 G. P. Pirola，，，《纯粹与应用数学杂志》**591** 2006 177 200 2212883 3 ( )，–。MR Ara C. Araujo，

[ 06] *Symmetries quotients and Kähler-Einstein metrics*

[ 02] *Kähler-Einstein metrics for some quasi-smooth log del Pezzo surfaces*，《美国数学会汇刊》**354** (2002)，第11期，4303–4312。MR 1926877 3 H. Abban 和 Z. Zhuang，*K-stability of Fano varieties via admissible flags*，《Forum Math. Pi》**10** ( 2022 15, 43 4448177 2, 3, 4, 6, 25, 34, 40 )，论文编号 e 。MR AZ , ，《杜克数学杂志》**172** 6，

[AZ22]

[ 23] *Seshadri constants and K-stability of Fano manifolds*

1109202311444576239 2, 3, 33, 35( )，第 – 期。MR

[BC94] V. V. Batyrev 和 D. A. Cox, *On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties*, 《杜克数学杂志》 **75** 1994 2, 293 338 1290195 20 ( ), 第 – 期。MR BFJ S. Boucksom、C. Favre 和 M. Jonsson, [ 09] *Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier* **18** 2009 2, 279 308 , 《代数几何杂志》( ), 第 – 期。MR 2475816 24 [ 20] *Thresholds valuations and K-stability* BJ H. Blum 和 M. Jonsson, , , , 《Adv. Math.》 365 107062, 57 2020 4067358 1, 4, 6, 35 ( ), 。MR [BL22] H. Blum 和 Y. Liu, *Openness of uniform K-stability in families of $\mathbb{Q}$-Fano varieties*, 《法国高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup ´ 4 **55** 2022 1, 1 41 4411858 3, 48 er. ( ) ( ), 第 – 期。MR BLX H. Blum、Y. Liu 和 C. Xu, [ 22] *Openness of K-semistability for Fano varieties*, 《杜克数学杂志》171 ( 2022 13, 2753 2797 4505846 3, 48 ), 第 – 期。MR CCC J.-J. Chen、J. A. Chen 和 M. Chen, [ 11] *On quasismooth weighted complete intersections*, 《代数几何杂志》 **20** 2011 2, 239 262 2762991 3 ( ), 第 – 期。MR CDS a X. Chen、S. Donaldson 和 S. Sun, [ 15 ] *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation* , 《美国数学会杂志》( ), 第 – 期。*of metrics with cone singularities* **28** 2015 1, 183 197 3264766 1 MR [ 15 ] ——— *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than $2\pi$* CDS b , , 《美国数学会杂志》 **28** 2015 1, 199 234 3264767 1 ( ), 第 – 期。MR CDS c , [ 15 ] *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches $2\pi$ and* , 《美国数学会杂志》( ), 第 – 期。*completion of the main proof* **28** 2015 1, 235 278 3264768 1 MR [ 01] *Log canonical thresholds on hypersurfaces* **192** 2001 8, 155 172 Che I. Cheltsov, , 《数学文集》( ), 第 – 期。[ 08] *Fano varieties with many selfmaps* **217** 2008 1, 97 124 Che I. Cheltsov, , 《Adv. Math.》( ), 第 – 期。MR 2357324 3[Che09] I. A. Cheltsov, *Extremal metrics on two Fano manifolds*, 《数学文集》200 (2009), 第1期, 97–136。MR 2499678 3[CLS11] D. A. Cox、J. B. Little 和 H.K. Schenck, *Toric varieties*, 《数学研究生教材》第124卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2011年。MR 2810322 6, 7, 8, 9, 12, 13, 18, 19, 20 [ 24] *K-stablity of Fano threefold hypersurfaces of index 1* 2024 3, 45 CO L. Campo 和 T. Okada, , 。[ 10] *Exceptional del Pezzo hypersurfaces* CPS I. Cheltsov、J. Park 和 C. Shramov, , 《几何分析杂志》20 ( 2010 4, 787 816 2683768 3 ), 第 – 期。MR CPS , [ 21] *Delta invariants of singular del Pezzo surfaces*, 《几何分析杂志》31 (2021), 第3期, 2354–2382。MR 4225810 3[Dol82] I. Dolgachev, *Weighted projective varieties*, 《群作用与向量场》（温哥华, B.C., 1981）, 《数学讲义》, 第 956, 1982, 34 71 704986 85 14060 1 卷, 施普林格出版社, 柏林, 第 – 页。MR ( g: ) FO K. Fujita 和 Y. Odaka, [ 18] *On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors* 《东北数学杂志》 ( 2 **70** 2018 4, 511 521 3896135 1, 4, 6 ) ( ), 第 – 期。MR FS O. Fujino 和 H. Sato, [ 20] *Notes on toric varieties from Mori theoretic viewpoint, II*, 《名古屋数学杂志》 **239** 2020 42 75 4138895 9 ( ), –。MR Fuj a K. Fujita, [ 19 ] *K-stability of Fano manifolds with not small alpha invariants*, 《筑波大学数学研究所杂志》18 ( 2019 3, 519 530 3936640 3 ), 第 – 期。MR Fuj b , [ 19 ] *A valuative criterion for uniform K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties*, 《纯粹与应用数学杂志》 **751** 2019 309 338 3956698 1, 6 ( ), –。MR Fuj , [ 23] *On K-stability for Fano threefolds of rank 3 and degree 28*, 《国际数学研究通报》~~IMRN~~ ( 2023 15, 12601 12784 4621852 3, 4, 5, 6, 36, 37 ), 第 – 期。MR Fuj , , [ 24] *On the coupled stability thresholds of graded linear series* 2024 4, 5, 6, 25, 31, 34, 41, 42 。Ful W. Fulton, , 普林斯 [ 93] ——— *Introduction to toric varieties* 1993 9 顿大学出版社, 。[ 00] *Working with weighted complete intersections* IF A. R. Iano-Fletcher, , 《三维簇的显式双有理几何》, 伦敦数学学会讲义系列, 第281卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2000年, 第 101 173 1, 3, 7, 9, 14, 21 –页。JK a J. M. Johnson 和 J. Kollar, [ 01 ] *Fano hypersurfaces in weighted projective 4-spaces*, 《实验数学》 **10** 2001 1, 151 158 1822861 3 ( ), 第 – 期。MR JK b J. M. Johnson 和 J. Kollar, [ 01 ] *Kähler-Einstein metrics on log del Pezzo surfaces in weighted projective 3-spaces* **51** 2001 1, 69 79 , 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》( ), 第 – 期。MR [ 24] 1821068 3 *Complex algebraic threefolds* Kaw M. Kawakita, , 《剑桥高等数学研究丛书》第209卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2024 4653048 19 。MR Kol J. Kollar, [ 97] *Singularities of pairs* 《代数几何——圣克鲁斯 1995》, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1997, 221 287 26 第 – 页。KOW I.-K. Kim、T. Okada 和 J. Won, [ 18] *Alpha invariants of birationally rigid Fano three-folds*, 《国际数学研究通报》IMRN ( 2018 9, 2745 2800 3801495 3 ), 第 – 期。MR KOW , [ 23] *K-stability of birationally superrigid Fano 3-fold weighted hypersurfaces*, 《Forum Math. Sigma》 **11** 2023 93, 114 4653768 3, 9, 24 ( ), 论文编号 e 。MR KW I.-K. Kim 和 J. Won, [ 21] *Unstable sing~~ular del~~ Pezzo hypersurfaces with lower index*, 《代数通讯》49 (2021), 第6期, 2679–2688。MR 4255036 2, 3

[Laz04] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry. I*, 《数学及其边界领域成果丛书》, 第 48, 2004 38 卷,
[ 17] *K-semistability is equivariant volume minimization* **166** 2017 16, 施普林格出版社, 柏林, 。Li 3147 3218 3715806 1, 6
C. Li, [ 18] , 《杜克数学杂志》 (), 第–期。MR
*The volume of singular Kähler-Einstein Fano varieties* **154** 2018 6, Liu Y. Liu, [, 《组合数学》
1131 1158 3797604 34
(), 第–期。MR 22] Liu *K-stability of cubic fourfolds*, [, 《纯粹与应用数学杂志》786（2022年）, 55–77。MR 4434748 309]
LM¸R. Lazarsfeld 和 M. Mustat *Convex bodies associated to linear series*a, ´, 《数学年刊》 (), 第–期。LST Y. Liu、T. Sa
no 和 L. Tasin, ´, 《微分几何杂志》 4 **42** 2009 5, 783 835 6, 34 (), 第–期。MR LXZ Y. Liu、C. Xu 和 Z.
[ 25]
Zhuang, *Infinitely many families of Sasaki-Einstein metrics on spheres*, 《数学年刊》 () (), 第–期。MR
**130** 2025 1, 1 26 4904495 4 Mor S. Mori, , 《京都大学数学杂志》 (), 第3期, 619
[ 22]
646 0393054 52 13865 –。MR (#) *Finite generation for valuations computing stability thresholds and*
*applications to K-stability* 2 **196** 2022 2, 507 566 PST M. Pizzato、T. Sano 和
4445441 1, 6, 48
L. Tasin, [ 75] *On a generalization of complete intersections* **15** 1975 , 《代数与
1
数论》[ 17] (), 第–期。Puk Aleksandr V. Pukhlikov,
*Effective nonvanishing for Fano weighted complete intersections*, 《数学创刊》134（1998年）, 第
**11** 2017 10, 2369 2395 22 –期。ST T. Sano 和 L. Tasin,
[ 98]
*Birational automorphisms of Fano hypersurfaces*, 《代数几何》11（2024年）, 第 2, 401 426 3 –期。MR ST,
[ 24]
*On K-stability of Fano weighted hypersurfaces*, 《数学进展》482（2025年）, 110644。
2, 296 317 4713339 2, 4 SZ C. Stibitz 和 Z. Zhuang, *Delta invariants of weighted hypersurfaces*, 《组合数学》
[ 25] 3, 4, 20, 24, 29, 37, 45, 46, 47
155 ([ 19] ), 第–期。MR Tia G. Tian, *K-stability of birationally superrigid Fano varieties*
( 2019 9, 1845 1852 3993805 3 ) *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1$*, 《数
[ 87]
学创刊》*M* (), 第–期。MR Tia, $> 0$, 《数学创刊》101（1990年）, 第1期, 101–172。MR 1055713 1
**89** 1987 2, 225 246 894378 3 Tia
[ 90]
*On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class*, [, 《苏黎世联邦理工学院数学讲座》, 巴塞尔
Birkhäuser出版社, 00] 。笔记由Meike Akveld整理。MR Tia, , 《纯粹与应用数学通讯》68 7, 1085 2015 1156 3352459 1 (),
第–期。MR *Canonical metrics in Kähler geometry*Xu¨Chenyang Xu, ¨, 《新数学专著》第50卷, 剑桥大学出版社, 剑桥,
2000, 1787650 3 。MR Zhu Z. Zhuang, , 《数学精选》（新系列）
[ 15] *K-stability and Kähler-Einstein metrics*
26（2020年）, 第1期, 论文编号11, 20。MR 4056840 3[Zhu25] , *K-stability of Fano varieties*, 《数学创刊》 (), 第–期。
MR 2025 4893062 1, 25
[ 20] *Birational superrigidity is not a locally closed property*

, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Austria
*Email address*: livia.campo@univie.ac.at

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan
*Email address*: fujita@math.sci.osaka-u.ac.jp

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kobe university, 1-1, Rokkodai, Nada-ku, Kobe 657-8501, Japan
*Email address*: tarosano@math.kobe-u.ac.jp

Dipartimento di Matematica F. Enriques, Università degli Studi di Milano, Via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italy
*Email address*: luca.tasin@unimi.it