所有$\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ 轨道中鞍连接长度的均匀分布

Donald Robertson，附录由 Benjamin Dozier 撰写

arXiv:2601.02979v1 [math.DS] 6 Jan 2026

摘要

对于每个平坦曲面，其,$\mathbb{R}$轨道中几乎所有平坦曲面都具有以下性质：将其鞍连接长度按非递减顺序排列，所得序列在单位区间上均匀分布。

1. 引言

给定一个亏格至少为二的闭黎曼曲面 X，其上每个非零全纯一形式 ω至少有一个零点。若 Σ 是这样一个 ω 的零点集，则在 $X \setminus \Sigma$ 上有一个由坐标图构成的诱导图册，其所有转移映射都是平移。全纯一形式 ω的一条**鞍连接** 是任意连续映射 $v\colon [0,1] \to X$，满足 $v^{-1}(\Sigma) = \{0,1\}$，且 $v|(0,1)$ 在诱导图册中每个定义于 $X \setminus \Sigma$的坐标图内都是一条测地线段。与每条鞍连接 v 相关联的是它的全纯向量

$$\mathsf{h}(v) = \left(\int_v \mathsf{Re}(\omega), \int_v \mathsf{Im}(\omega) \right)$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中。群 SL(2，$\mathbb{R}$) 通过与图册中的坐标图复合，作用于对 (X，ω)。该作用将鞍连接映射为鞍连接，并且对于任意 g $\in$ SL(2，$\mathbb{R}$) 以及 ω 的任意鞍连接，都满足 h(gv) =gh(v)。

将 ω 的鞍连接枚举为 $n \mapsto v_n$，使得 $n \mapsto \|\mathsf{h}(v_n)\|$ 单调不减，我们可以考察该序列模一的分布。在 [CR19] 中，已证明对于任意分层 $\mathcal{H}$ 上的任意 SL(2，$\mathbb{R}$) 不变且 SL(2，$\mathbb{R}$) 遍历概率测度 μ，该序列 $n \mapsto v_n$ 对 μ 几乎处处的平坦曲面模一均匀分布。本文证明以下更精细的结果。

定理 1.1。对于每个亏格至少为二的平坦曲面 ω_0，以及几乎每个 g $\in$ SL(2，$\mathbb{R}$)，按非递减顺序排列的 gω_0 的鞍连接长度序列 $n \mapsto v_n$ 模一均匀分布。

Donald Robertson 数学系，曼彻斯特大学，英国 donald.robertson@manchester.ac.uk
Benjamin Dozier 数学系，康奈尔大学，美国 benjamin.dozier@cornell.edu

这在两个方面改进了 [CR19，定理 1] 。首先，结论更强，因为该结果适用于每个 SL(2，$\mathbb{R}$) 轨道中 Haar 几乎处处的平坦曲面，而不只是适用于相对于分层上任意一个遍历 SL(2，$\mathbb{R}$) 不变概率测度而言几乎处处的平坦曲面。其次，证明 [CR19，定理 1] 中使用的 [NRW20] 以及对分层上 SL(2，$\mathbb{R}$) 作用的谱隙结果的依赖，被一种更直接的论证所取代；该论证只用到以下关于扇区中鞍连接数量的二次上界，并将 [Doz19] 的结果加以推广。定理陈述之后将解释相关记号。

定理 1.2。 固定一个亏格至少为二的平坦曲面分层 H。存在常数 c_4 ，具有如下性质。对于每个 $\epsilon > 0$ 以及每个平坦曲面 $\omega \in H$，都存在 $C(\omega, \epsilon) > 0$ ，使得

$$R \geq \frac{C(\omega, \epsilon)}{|I|^{2+\epsilon}} \Rightarrow |\Lambda(\omega; R) \cap \mathsf{Sec}(I)| \leq c_4 |I| R^2 \tag{1.3}$$

对于每条弧 $I \subset \mathsf{S}^1$均成立。此外，对每个 $\epsilon > 0$ ，常数 $C(\omega, \epsilon)$ 关于 ω连续变化。

(1.3) 中关于 R 必须多大（以弧 I 的弧长为准）的明确描述具有独立的研究价值。定理 1.2 将在附录 A 中证明。

现在引入一些将在全文中使用的记号。给定一条弧 $I \subset \mathsf{S}^1$，用 $\mathsf{Sec}(I)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中径向投影到 I的部分。给定 $\alpha < \beta$ 且 $\beta - \alpha < 2\pi$ ，用 $\mathsf{Sec}(\alpha, \beta)$ 表示扇区 $\{u \in \mathbb{R}^2 \colon \alpha \leq \arg(u) < \beta\}$。给定 $0 \leq A < B$，用 $\mathsf{Ann}(A, B)$ 表示环带 $\{u \in \mathbb{R}^2 : A \leq \|u\| \leq B\}$。固定闭黎曼曲面 X 上的一个非零全纯一形式 ω ，其中亏格至少为二。用 $\Lambda(\omega)$ 表示 ω的鞍连接集合。对于 $R > 0$，用 $\Lambda(\omega; R)$ 表示 ω上长度至多为 R 的鞍连接集合。我们将 $\Lambda(\omega)$ 编号为$n \mapsto v_n$ ，使得 $n \mapsto \|\mathsf{h}(v_n)\|$ 非递减，并且在 $n \mapsto \|\mathsf{h}(v_n)\|$的每个水平集上， $v \mapsto \arg(v)) \in [0, 2\pi$非递减。给定 $N \in \mathbb{N}$，用 $\Xi(\omega; N)$ 表示 $\{v_n \colon n \leq N\}$，其中 $n \mapsto v_n$ 采用与前面相同的编号。最后，用 $\ell(\omega; N) = \|\mathsf{h}(v_N)\|$ 表示按照上述顺序， N个鞍连接在 ω 上的长度；用 $\ell(\omega) = \ell(\omega; 1)$ 表示 ω上最短鞍连接的长度。滥用一下记号，给定 $B \subset \mathbb{R}^2$ ，我们用 $\Lambda(\omega) \cap B$ 表示 ω 中全纯向量属于 B的鞍连接集合。我们将类似地理解 $\Lambda(\omega; R) \cap B$ 和$\Xi(\omega; N) \cap B$。

我们感谢 Jon Chaika 提出这个项目，并就此进行了许多有益的交流。我们也感谢匿名审稿人提供了非常详尽的审稿报告。Donald Robertson 获得了美国国家科学基金会 DMS 1703597 资助。

2. 开始证明定理 1.1

这里我们通过魏尔判别法和博雷尔-坎泰利论证，将其归约为定理 2.8，从而开始证明定理 1.1。在本节中，固定一个亏格至少为二的单位面积平坦曲面 ω_0 。根据 Masur 的工作 [Mas88; Mas90] ，可得常数 c_1， $c_2 > 0$ ，使得

$$(c_1 e R)^2 \leq |\Lambda(\omega; R)| \leq \left(c_2 \frac{R}{e}\right)^2 \tag{2.1}$$

对所有 $R > 0$ 均成立。（这种不寻常的表达方式是为了后文方便。）

记 μ 为 Ha ar 在 SL(2, $\mathbb{R}$) 上的测度，并记 m 为 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，记

$$\mathsf{a}^t = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \qquad \mathsf{r}^t = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

并定义 D(T) $= \{\mathsf{r}^\theta \mathsf{a}^t \mathsf{r}^\psi \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) : 0 \le \theta, \psi < 2\pi, 0 \le t \le T\}$ 对所有 $T > 0$ 均成立。我们固定缩放 μ，使得 μ(D(2)) $= 1$。对每个 $p \in \mathbb{Z}$ 及所有 $x \in \mathbb{R}$，记 $\chi_p(x) = \exp(2\pi i p x)$。

我们的第一个化简是得到以下均匀分布判据。尽管我们证明该定理对所有 $\tau > 1$ 均成立，但为证明定理 1.1，只需对一列趋于 1 的值$\tau > 1$ 证明即可。

定理 2.2。固定 $p \in \mathbb{Z}$ 和 $\tau > 1$。有

$$\lim_{J\to\infty} \frac{1}{\lceil \tau^J \rceil} \sum_{v \in \Xi(\mathsf{g}\omega_0; \lceil \tau^J \rceil)} \chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|) = 0 \tag{2.3}$$

对 μ 几乎处处的 g $\in$D(1)。

假设定理 *2.2* 成立时定理 *1.1* 的证明。利用均匀分布的韦伊判据以及[CR19, 引理 5]，要证明定理 1.1，只需构造一个序列 $\tau_1 > \tau_2 > \cdots \to 1$，使得

$$\lim_{J\to\infty} \frac{1}{\lceil \tau_i^J \rceil} \sum_{v \in \Xi(\mathsf{g}\omega_0; \lceil \tau_i^J \rceil)} \chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|) = 0 \tag{2.4}$$

对每个 $i, p \in \mathbb{N}$ 以及 μ 几乎处处的 g $\in$ SL(2, $\mathbb{R}$)，上述结论均成立。由于 ω_0 的 SL(2, $\mathbb{R}$) 轨道可由形如 D(1)gω_0 的集合可数覆盖，因此只需在 D(1) 上进行讨论。 □

接下来，我们将通过一种与 [CR19] 中类似的博雷尔-坎泰利论证来进一步化简。由于有几处重要变化，我们将给出完整细节；最值得注意的是，我们改为对 $\Xi(\mathsf{g}\omega_0; N)$ 和 D(1) 取平均，而非对 $\Lambda(\omega; N^2)$ 和分层的一个大紧子集取平均。对每个 $N \in \mathbb{N}$，定义

$$f_N(\mathsf{g}) = \frac{1}{N} \sum_{v \in \Xi(\mathsf{g}\omega_0; N)} \chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|)$$

对所有 g $\in$ SL(2, $\mathbb{R}$)。

引理 2.5. 对于每个 $N \in \mathbb{N}$、每个 $0 < S \le 1$ 和每个 $\sigma > 0$，估计式

$$\mu(\{\mathsf{g} \in \mathsf{D}(1) : |f_N(\mathsf{g})|^2 \ge N^{-\sigma}\})^2 \le 4 \int_{\mathsf{D}(1)} \frac{\mu(\mathsf{D}(S)\mathsf{x} \cap \{\mathsf{g} \in \mathsf{D}(1) : |f_N(\mathsf{g})|^2 \ge N^{-\sigma}\})}{\mu(\mathsf{D}(S/2))} \, \mathrm{d}\mu(\mathsf{x}) \tag{2.6}$$

成立。

证明。固定 $N \in \mathbb{N}$、$0 < S \le 1$和 $\sigma > 0$。记 $M = \{$g $\in$D(1) : $|f_N(\mathsf{g})|^2 \ge N^{-\sigma}\}$。考虑由下式定义的函数 h : SL(2, $\mathbb{R}$) $\to [0, 1]$

$$h(\mathsf{x}) = \frac{\mu(\mathsf{D}(S/2)\mathsf{x} \cap M)}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}$$

对所有 x $\in$ SL(2, $\mathbb{R}$)。

Claim. $\mu\left(\left\{\mathsf{x}\in M:\dfrac{\mu(\mathsf{D}(S)\mathsf{x}\cap M)}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}\geq\dfrac{\mu(M)}{2}\right\}\right)\geq\displaystyle\int\limits_{2h\geq\mu(M)}h\,\mathrm{d}\mu$

证明。若有 $\mathsf{y}\in\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$，使得 $h(\mathsf{y})\geq\mu(M)/2$，且 $\mathsf{x}\in D(S/2)\mathsf{y}$，则

$$\frac{\mu(\mathsf{D}(S)\mathsf{x}\cap M)}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}\geq\frac{\mu(M)}{2}$$

因为在这种情况下，$\mathsf{D}(S)\mathsf{x}\cap M\supset\mathsf{D}(S/2)\mathsf{y}\cap M$。因此

$$\bigcup_{2h(\mathsf{y})\geq\mu(M)}\mathsf{D}(S/2)\mathsf{y}\cap M\leq\left\{\mathsf{x}\in M:\frac{\mu(\mathsf{D}(S)\mathsf{x}\cap M)}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}\geq\frac{\mu(M)}{2}\right\}$$

并且结合

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\bigcup_{2h(\mathsf{y})\geq\mu(M)}\mathsf{D}(S/2)\mathsf{y}\cap M\right)\\
&=\frac{1}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}\int\limits_{\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})}\mu\left(\mathsf{D}(S/2)\mathsf{x}\cap\bigcup_{2h(\mathsf{y})\geq\mu(M)}\mathsf{D}(S/2)\mathsf{y}\cap M\right)\mathrm{d}\mu(\mathsf{x})\\
&\geq\frac{1}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}\int\limits_{2h\geq\mu(M)}\mu\left(\mathsf{D}(S/2)\mathsf{x}\cap\bigcup_{2h(\mathsf{y})\geq\mu(M)}\mathsf{D}(S/2)\mathsf{y}\cap M\right)\mathrm{d}\mu(\mathsf{x})\\
&\geq\frac{1}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}\int\limits_{2h\geq\mu(M)}\mu\left(\mathsf{D}(S/2)\mathsf{x}\cap M\right)\,\mathrm{d}\mu(\mathsf{x})
\end{aligned}$$

我们证明了该断言。 □

由于 $M\subset\mathsf{D}(1)$，我们有 $h=0$ 在 $\mathsf{D}(2)$ 之外。因此

$$\int\limits_{2h<\mu(M)}h\,\mathrm{d}\mu\leq\frac{\mu(M)}{2}\mu(\mathsf{D}(2))$$

由此推得

$$\frac{\mu(M)}{2}\leq\left(1-\frac{\mu(\mathsf{D}(2))}{2}\right)\mu(M)\leq\mu\left(\left\{\mathsf{x}\in M:\frac{\mu(\mathsf{D}(S)\mathsf{x}\cap M)}{\mu(\mathsf{D}(S/2))}\geq\frac{\mu(M)}{2}\right\}\right)$$

根据该断言以及对 μ 的缩放，由于根据菲比尼定理，h 的积分为 $\mu(M)$，我们得到这一结论。应用马尔可夫不等式即可得出 (2.6)。 □

命题 2.7. 存在 $C_1>0$，使得对于每个 $N\in\mathbb{N}$、每个 $0<S\leq1$ 和每个 $\sigma>0$，我们都有

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\{\mathsf{g}\in\mathsf{D}(1):|f_N(\mathsf{g})|^2>\frac{1}{N^\sigma}\right\}\right)\\
&\leq\left(C_1N^\sigma\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^S\frac{1}{N^2}\sum_{v,w\in\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0;N)}\chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|)\,\overline{\chi_p(\|\mathsf{h}(w)\|)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

证明。 固定 $N \in \mathbb{N}$、 $0 < S \leq 1$和 $\sigma > 0$。记 $M = \{\mathsf{g} \in \mathsf{D}(1) : |f_N(\mathsf{g})|^2 \geq N^{-\sigma}\}$。我们有

$$\mu(M)^2 \leq 4 \int_{\mathsf{D}(1)} \frac{\mu(\mathsf{D}(S)\mathsf{x} \cap M)}{\mu(\mathsf{D}(S/2))} \, \mathrm{d}\mu(x) = 4 \int_{\mathsf{D}(1)} \frac{1}{\mu(\mathsf{D}(S/2))} \int_{\mathsf{D}(S)} 1_M(\mathsf{gx}) \, \mathrm{d}\mu(\mathsf{g}) \, \mathrm{d}\mu(\mathsf{x})$$

由引理 2.5 可得。根据 M 的定义以及马尔可夫不等式，得到

$$\mu(M)^2 \leq 4N^{\sigma} \int_{\mathsf{D}(1)} \frac{1}{\mu(\mathsf{D}(S/2))} \int_{\mathsf{D}(S)} |f_N(\mathsf{gx})|^2 \, \mathrm{d}\mu(\mathsf{g}) \, \mathrm{d}\mu(\mathsf{x})$$

右侧的积分变为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\mu(\mathsf{D}(S/2))} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^S \sinh(t) \sinh(s) |f_N(\mathsf{r}^{\varphi} \mathsf{a}^s \mathsf{r}^{\theta_1} \mathsf{r}^{\theta_2} \mathsf{a}^t \mathsf{r}^{\phi})|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta_1 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\theta_2 \, \mathrm{d}\phi$$

将 μ 按照 [Kna01 命题 5.28] 中所述的 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 的卡尔坦分解来表示后。旋转 r^{φ} 不影响求和，因此可以去掉；关于 r^{θ_1} 和 r^{θ_2} 的积分共同构成一个卷积，可以合并为单项；我们可以用 2 对双曲正弦 $\sinh(t)$ 进行上界估计，并用 $\sinh(S)$ 对双曲正弦 $\sinh(s)$ 进行上界估计。对于某个常数 C_1'，有

$$\frac{\sinh(S)}{\mu(\mathsf{D}(S/2))} \sim \frac{C_1'}{S}$$

结合以上结果，存在一个绝对常数 $C_1 > 0$，使得

$$\mu(M)^2 \leq C_1 N^{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{S} \int_0^S \frac{1}{N^2} \sum_{v,w \in \Xi(\mathsf{a}^s \mathsf{r}^{\theta} \mathsf{a}^t \mathsf{r}^{\phi} \omega_0; N)} \chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|) \, \overline{\chi_p(\|\mathsf{h}(w)\|)} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\phi$$

正如所需。 □

从现在起，我们固定如下关系

$$S = \frac{1}{N^{\delta}}$$

介于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $S > 0$之间，其中 $\delta > 0$ 将根据后续需要确定。（最终，$\delta = \frac{1}{3}$ 就足够了。）现在，我们将定理 1.1 的证明归结为以下命题。

定理 2.8. 存在 $\eta > 0$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$ 以及一个常数 $C > 0$，使得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{S} \int_0^S \frac{1}{N^2} \sum_{v,w \in \Xi(\mathsf{a}^s \mathsf{r}^{\theta} \mathsf{a}^t \mathsf{r}^{\phi} \omega_0; N)} \chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|) \, \overline{\chi_p(\|\mathsf{h}(w)\|)} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\phi \leq \frac{C}{N^{\eta}} \tag{2.9}$$

对所有 $N \geq N_0$均成立。

假设定理 *2.8* 成立时定理 *1.1* 的证明。固定 $p \in \mathbb{Z}$ 和 $\tau > 0$。根据定理 2.2，只需验证对于 μ 几乎处处的 $\mathsf{g} \in \mathsf{D}(1)$，(2.3) 成立。令 $\eta > 0$、 $N_0 \in \mathbb{N}$ 和 $C > 0$ 如假设中所述。固定 $0 < \sigma < \eta$。每当 $\lceil \tau^J \rceil \geq N_0$和 $\sigma > 0$时，我们有

$$\mu\left(\left\{ \mathsf{g} \in \mathsf{D}(1) : \left| \frac{1}{\lceil \tau^J \rceil} \sum_{v \in \Xi(\mathsf{g}\omega_0; \lceil \tau^J \rceil)} \chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|) \right|^2 \geq \frac{1}{\lceil \tau^J \rceil^{\sigma}} \right\} \right) \leq \left(C_1 C \frac{\lceil \tau^J \rceil^{\sigma}}{\lceil \tau^J \rceil^{\eta}} \right)^{1/2}$$

应用命题 2.7，然后应用 (2.9) 即得。右端对 $J \in \mathbb{N}$ 可求和，博雷尔–坎泰利引理便完成了证明。

□

定理 2.8 的证明分为两个主要步骤。我们在此概述这两个步骤，并分别在第 3 节和第 4 节中完成详细论证。随后将在第 5 节中结合这两个步骤，证明定理 1.1。

步骤 1：环带估计。 我们希望将作用 a^s 移入 (2.9) 中出现的求和符号内。这并不直接，因为 $\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0;\, N)$ 与 $\mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0;\, N)$ 未必相等。事实上，如果对于 $\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0$，已知 v_N 接近水平而 v_{N+1} 接近竖直，那么 $\mathsf{a}^s v_{N+1}$ 可能比 $\mathsf{a}^s v_N$更短。为解决这一问题，只需找到 $\zeta > 0$使得

$$\left|\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0; N) \triangle \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0; N)\right| \ll N^{1-\zeta}$$

对所有 s, θ, t, ϕ均成立。利用有效计数 [NRW20] 可以证明这样的估计：长度至多为 R 的鞍连接数量为 $R \to \infty$，但我们的目标是避免使用谱隙结果。作为替代，我们将找到常数 $\zeta > 0$ 和 $\lambda > 0$ 使得

$$\mu\left(\left\{0 \le t \le 1 : \begin{array}{c} |\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0; N) \triangle \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0; N)| > N^{1-\zeta} \\ \text{for some } (s,\theta) \in [0,S]\times[0,2\pi) \end{array}\right\}\right) \ll \frac{1}{N^\lambda}$$

对所有 $0 \le \phi < 2\pi$ 都成立。我们将在第 3 节中利用定理 1.2 来完成这一步。

尽管在这种情况下，$\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0;\, N)$ 和 $\mathsf{r}^\theta\Xi(\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0;\, N)$ 也可能作为鞍连接集合而不相同（因为我们决定按角度递增的顺序排列长度相同的鞍连接），但对这两个集合求和的结果相同，因为被加数只取决于鞍连接的长度。因此，在（2.9）中将 a^s 移到里面时，也可以将作用 r^θ 一并移到里面，不会有问题。

环带估计的目的是将验证（2.9）化为构造某个 $\eta > 0$，使得

$$\int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^S \frac{1}{N^2} \sum_{v,w\in\Xi(\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0;N)} \chi_p(\|\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)\|)\,\overline{\chi_p(\|\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)\|)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{N^\eta} \tag{2.10}$$

对每个 $0 \le \phi < 2\pi$ 都成立。

步骤 2：控制对。 为构造满足（2.10）的 $\eta > 0$，我们进行线性化，从而得到以下量

$$\int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^S \frac{1}{N^2} \sum_{v,w\in\Xi(\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0;N)} \chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)))\,\overline{\chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)))}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t$$

我们需要对每个 $0 \le \phi < 2\pi$ 控制这一点。根据 [CR19 的证明，引理 12]，只需给出下界

$$\|\mathsf{h}(v)\|\,|\sin(2\theta_{v,w})|$$

使其大于某个 N 的幂。这里，$\theta_{v,\ w}$ 是鞍连接 v 的全纯向量与 w之间的夹角。这个问题将在第 4 节中处理。

3. 环带估计

本节将证明以下定理。

定理 3.1. 存在 $\lambda > 0$ 和 $\zeta > 0$ 和 $N_1 > 0$，使得

$$\mathsf{m}\left(\left\{0 \le t \le 1 : \begin{matrix} |\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0; N) \triangle \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\phi\omega_0; N)| > N^{1-\zeta} \\ \text{for some } (s,\theta) \in [0,S]\times[0,2\pi) \end{matrix}\right\}\right) \ll \frac{1}{N^\lambda}$$

对所有 $N \ge N_1$ 和所有 $0 \le \phi < 2\pi$，均成立。

定理 3.1 的证明将占据本节余下的篇幅。回忆一下，$\delta > 0$ 定义了$S = N^{-\delta}$。下文中，所有要求 N 足够大的条件都只取决于 ω_0，而与 ω无关。本节中固定 $0 \le \phi < 2\pi$，并记 $\omega = \mathbf{r}^\phi\omega_0$。

我们先介绍两个引理，用来建立.....之间的联系

$$|\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N) \triangle \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N)| > N^{1-\zeta}$$

并给出了某些环带中鞍连接数量的估计。

引理 3.2. 对于每个$\mathsf{g} \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$，有

$$\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{g}\omega; N) \subset \mathsf{a}^s\Lambda(\mathsf{g}\omega; e^{2s}\ell(\mathsf{g}\omega; N))$$

对每个 $s > 0$ 以及每个 $N \in \mathbb{N}$。

证明。若 $\mathsf{g}\omega$ 的一个鞍连接 v长度大于 $e^{2s}\ell(\mathsf{g}\omega;\ N)$，则 $\mathsf{a}^s v$ 的长度大于 $e^s\ell(\mathsf{g}\omega;\ N)$。因此，鞍连接 $\mathsf{a}^s v$ 不可能属于 $\mathsf{a}^s\mathsf{g}\omega$ 的前 N 个鞍连接，因为 $\mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{g}\omega;\ N)$ 的基数恰为 N，且其中所有元素都是 $\mathsf{a}^s\mathsf{g}\omega$ 中长度至多为 $e^s\ell(\mathsf{g}\omega;\ N)$ 的鞍连接。

□

引理 3.3. 对于每个$\mathsf{g} \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$，有

$$\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{g}\omega; N) \supset \mathsf{a}^s\Lambda(\mathsf{g}\omega; e^{-2s}\ell(\mathsf{g}\omega; N))$$

对每个 $s > 0$ 以及每个 $N \in \mathbb{N}$。

证明。$\mathsf{a}^s\Lambda(\mathsf{g}\omega;\ e^{-2s}\ell(\mathsf{g}\omega;\ N))$ 中的每条鞍连接，都是 $\mathsf{a}^s\mathsf{g}\omega$ 的一条鞍连接，其长度至多为 $e^{-s}\ell(\mathsf{g}\omega;\ N)$。此外，长度大于 $\ell(\mathsf{g}\omega;\ N)$ 的 $\mathsf{g}\omega$ 的任何鞍连接，在 a^s 的映射下，都不会比 $\mathsf{a}^s\Lambda(\mathsf{g}\omega;\ e^{-2s}\ell(\mathsf{g}\omega;\ N))$ 的任何鞍连接更短。因此，$\mathsf{a}^s\Lambda(\mathsf{g}\omega;\ e^{-2s}\ell(\mathsf{g}\omega;\ N))$ 中的所有鞍连接，都属于 $\mathsf{a}^s\mathsf{g}\omega$ 的前 N 条鞍连接。 □

如果集合

$$\{0 \le t \le 1 : |\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N) \triangle \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N)| > N^{1-\zeta} \text{ for some } (s,\theta) \in [0,S]\times[0,2\pi)\} \tag{3.4}$$

对于某个 $N \in \mathbb{N}$，若为空，则无需对该 N 证明任何内容。假设对于某个 $N \in \mathbb{N}$， t 属于 (3.4)。我们得到依赖于 t 的 $0 \le s \le S$ 和 $0 \le \theta < 2\pi$，使得

$$\left|\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\psi\omega; N) \triangle \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\psi\omega; N)\right| \ge N^{1-\zeta} \tag{3.5}$$

成立。根据 (3.5)，我们估计

$$\begin{aligned}
&\left|\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N) \triangle \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N)\right| \\
\le\ &\left|\mathsf{a}^s\Lambda(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; e^{2s}\ell(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N)) \setminus \mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N)\right| + \left|\mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N) \setminus \mathsf{a}^s\Lambda(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; e^{-2s}\ell(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N))\right| \\
\le\ &\left|\Lambda(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega) \cap \mathsf{Ann}(e^{-2S}\ell(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N), e^{2S}\ell(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N))\right|
\end{aligned}$$

由引理 3.2 和引理 3.3 得出，其中在推导最后一个不等式时，我们使用了 $s \le S$。因此，每当对于某个 $N \in \mathbb{N}$， t 属于 (3.4) 时，我们有

$$\begin{aligned}
N^{1-\zeta} &\le \left|\Lambda(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega) \cap \mathsf{Ann}(e^{-2S}\ell(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N), e^{2S}\ell(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega; N))\right| \\
&= \left|\Lambda(\mathsf{a}^t\omega) \cap \mathsf{Ann}(e^{-2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N), e^{2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N))\right|
\end{aligned}$$

因为 $\Lambda(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega) = \mathsf{r}^\theta\Lambda(\mathsf{a}^t\omega)$，并且 r^θ 不改变第 N 个鞍连接的长度。因此我们需要考虑以下量

$$E_N(v;t) = \begin{cases} 1 & \mathsf{a}^t v \in \mathsf{Ann}(e^{-2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N), e^{2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.6}$$

对所有 $0 \le t \le 1$、所有 $v \in \Lambda(\omega)$ 以及所有 $N \in \mathbb{N}$ 均有定义。由其定义可知

$$N^{1-\zeta} \le \left|\Lambda(\mathsf{a}^t\omega) \cap \mathsf{Ann}(e^{-2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N), e^{2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N))\right| \le \sum_{v\in\Lambda(\omega)} E_N(v;t)$$

每当 t 属于 (3.4) 时。因此

$$(3.4) \subset \left\{0 \le t \le 1 : \sum_{v\in\Lambda(\omega)} E_N(v;t) \ge N^{1-\zeta}\right\}$$

结合马尔可夫不等式，得到

$$\mathsf{m}((3.4)) \le \frac{1}{N^{2(1-\zeta)}} \int_0^1 \left|\sum_{v\in\Lambda(\omega)} E_N(v;t)\right|^2 \mathrm{d}\mathsf{m}(t) \tag{3.7}$$

因此，我们现在的重点是对其进行界定

$$\int_0^1 \sum_{v\in\Lambda(\omega)} \sum_{w\in\Lambda(\omega)} E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(t) \tag{3.8}$$

当 N 足够大时。我们先给出以下引理，它们将使我们能够把式 (3.8) 中的求和范围限制在薄环带内。

引理 3.9。 存在常数 c_1、 $c_2 > 0$ ， 使得对所有 $0 \le t \le 1$ ， 都有

$$\frac{1}{c_2}\frac{N^{0.5}}{\log N} \le \ell(\mathsf{a}^t\omega; N) \le \frac{1}{c_1}N^{0.5}$$

对所有 $N \ge 2$。

证明。 首先，注意到

$$|\Lambda(\mathsf{a}^t\omega) \cap \mathsf{B}(0,R)| = |\mathsf{a}^t\Lambda(\omega) \cap \mathsf{B}(0,R)| = |\Lambda(\omega) \cap \mathsf{a}^{-t}\mathsf{B}(0,R)|$$

并且 $\mathsf{B}(0,\frac{1}{e}R) \subset \mathsf{a}^{-t}\mathsf{B}(0,R) \subset \mathsf{B}(0,eR)$ 根据 (2.1) 得出界 $(c_1R)^2 \le |\Lambda(\mathsf{a}^t\omega;\ R)| \le (c_2R)^2$对所有 $0 \le t \le 1$以及所有 $R > 0$成立。取 $R = N^{0.5}/c_1$得出 $N \le |\Lambda(\mathsf{a}^t\omega;\ N^{0.5}/c_1)|$由此$\ell(\mathsf{a}^t\omega;\ N) \le N^{0.5}/c_1$。取 $R = N^{0.5}/c_2$的对数得出 $N^{0.5}/c_2\log\ N \le \ell(\mathsf{a}^t\omega;\ N)$。 □

引理3.10. 若 $N^\delta \ge 2$ 且 $v \in \Lambda(\omega)$ 位于环带之外

$$\mathsf{Ann}\left(\frac{1}{2ec_2}\frac{N^{0.5}}{\log N}, \frac{2e}{c_1}N^{0.5}\right) \tag{3.11}$$

则 $E_N(v;\ t) = 0$ 对所有 $0 \le t \le 1$成立。

证明。 固定 $N \in \mathbb{N}$，使其满足 $N^\delta \ge 2$，并假设对某个 $0 \le t \le 1$，有 $E_N(v;\ t) = 1$。由引理 3.9 可得

$$\frac{1}{e^{2S}c_2}\frac{N^{0.5}}{\log N} \le e^{-2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N) \le e^{2S}\ell(\mathsf{a}^t\omega; N) \le \frac{e^{2S}}{c_1}N^{0.5}$$

由此可知

$$\mathsf{a}^t v \in \mathsf{Ann}\left(\frac{1}{2c_2}\frac{N^{0.5}}{\log N}, \frac{2}{c_1}N^{0.5}\right)$$

因为 $e^{2S} \le 2$。因此

$$v \in \mathsf{Ann}\left(\frac{1}{2ec_2}\frac{N^{0.5}}{\log N}, \frac{2e}{c_1}N^{0.5}\right)$$

因为 a^t 可以延长则将向量放大至多 e 倍，并将其缩短至多 $1/$ 倍 e. □

因此，对于 $N^\delta \ge 2$，只有全纯位于 (3.11) 内的 ω 鞍连接会对 (3.8) 中的求和有贡献。接下来，我们按如下方式将环带 (3.11) 划分为若干扇区。首先定义

$$\overline{Z} = \mathsf{Sec}(-\psi,\psi) \cup \mathsf{Sec}(\tfrac{\pi}{2}-\psi, \tfrac{\pi}{2}+\psi) \cup \mathsf{Sec}(\pi-\psi,\pi+\psi) \cup \mathsf{Sec}(\tfrac{3\pi}{2}-\psi, \tfrac{3\pi}{2}+\psi)$$

and

$$Z = \overline{Z} \cap \Lambda\left(\omega; \frac{2e}{c_1}N^{0.5}\right)$$

其中 $\psi = 2N^{-\gamma}$，某个尚待确定的 $\gamma > 0$。（事实上，$\gamma = \frac{1}{300}$ 就足够了。）令

$$\kappa = \left\lfloor (\tfrac{\pi}{2} - 2\psi)\ell(\omega; N)^\alpha \right\rfloor \tag{3.12}$$

某个尚待确定的 $\alpha > 0$。（事实上，$\alpha = \frac{1}{100}$ 就足够了。）分解

$$W = \Lambda(\omega) \cap \mathsf{Ann}\left(\frac{1}{2ec_2}\frac{N^{0.5}}{\log N}, \frac{2e}{c_1}N^{0.5}\right) \setminus Z$$

分成 4κ 个子集 $W(1), \dots, W(4\kappa)$，每个子集都是由 W 与大小为 $(\frac{\pi}{2} - 2\psi)/\kappa$ 的环形弧 $W(1)\dots,\overline{W}(4\kappa)$ 相交得到的。给定 $1 \le k \le 4\kappa$，设 $\overline{V}(k)$ 为 $W(k)$、其在其他象限中的镜像，以及与这些镜像中任意一个相邻的任何 $W(i)$ 的并集。（示意图见图1。）最后，令 $V(k) = V(k) \cap \Lambda(\omega)$。

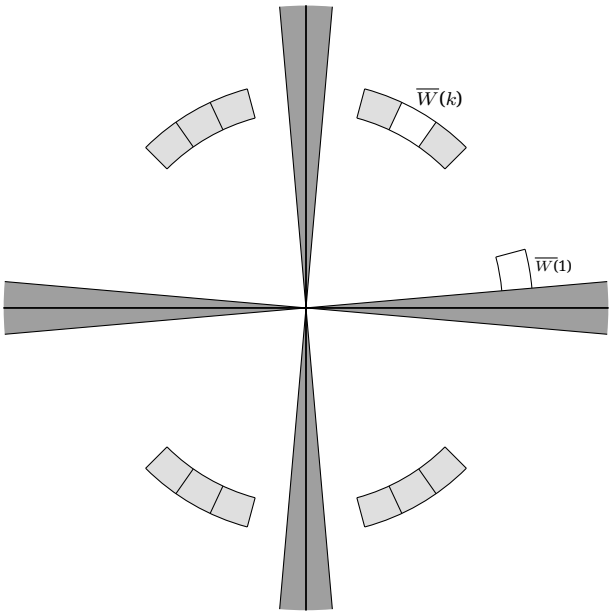

图1：对于某个 $1 < k < \kappa$，环形扇区 $W(1)$ 和 $W(k)$ 以白色显示。集合 $V(k)$ 由十二个环形扇区组成：十一个浅灰色扇区以及 $W(k)$。集合 Z 以深灰色显示。注意，$V(1)$ 只包含八个区域，因为 Z 不被视为与我们的任何区域相邻。

根据引理3.1　右侧的 (3.8) 可由以下各项之和估计 .

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4\kappa}\sum_{v\in W(k)}\sum_{w\in V(k)}\int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\sum_{v\in Z}\sum_{w\in\Lambda(\omega)}\int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t + \sum_{v\in\Lambda(\omega)}\sum_{w\in Z}\int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4\kappa}\sum_{v\in W(k)}\sum_{\substack{w\in W\\ w\notin V(k)}}\int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t$

现在我们的目标是为它们分别建立幂次界。接下来的两个小节将完成这项工作：前两个表达式将通过扇区计数来界定，第三个则通过分离论证来界定。两者都会用到定理 1.2。

3.1. 扇区计数 我们的目标是为这些和建立界

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4\kappa}\sum_{v\in W(k)}\sum_{w\in V(k)}\int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\sum_{v\in Z}\sum_{w\in\Lambda(\omega)}\int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t$

以 N 的幂为底。

设 $C(\omega,\ \epsilon)$ 如定理 1.2 所述。参数 $\epsilon>0$ 将在后面确定。（事实上，$\epsilon=\frac{1}{100}$ 已足够。）固定 $1\le k\le 4\kappa$。令 I 为长度为 $3(\frac{\pi}{2}-2\psi)$ 的适当扇区 $/\kappa$，则有

$$|\Lambda(\omega)\cap V(k)|\le 4|\Lambda(\omega;\tfrac{2e}{c_1}N^{0.5})\cap \mathsf{Sec}(I)|\le 4\cdot c_4\cdot\frac{3(\frac{\pi}{2}-2\psi)}{\kappa}\cdot\left(\frac{2e}{c_1}N^{0.5}\right)^2$$

每当

$$\frac{2e}{c_1}N^{0.5}\ge C(\omega,\epsilon)\left(\frac{\kappa}{3(\frac{\pi}{2}-2\psi)}\right)^{2+\epsilon}\tag{3.13}$$

成立。

先验地，(3.13) 中出现 ω 意味着，后续所有要求 N 足够大的陈述都将依赖于 ω。然而，由于 $\epsilon>0$ 将固定，且此时 $\omega\mapsto C(\omega,\ \epsilon)$ 连续，关系 $\omega=\mathbf{r}^{\psi}\omega_0$ 表明，对 ω 的表面依赖实际上仅仅是对 ω_0 的依赖。

将引理 3.9 和 $\frac{1}{2}x\le\lfloor x\rfloor\le x$ 应用于 (3.12) 中的 $[1,\infty)$，可得 κ 的上界为

$$\frac{\pi}{8c_2^{\alpha}}\frac{N^{\frac{\alpha}{2}}}{(\log N)^{\alpha}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\psi\right)\left(\frac{1}{c_2}\frac{N^{0.5}}{\log N}\right)^{\alpha}\le\kappa\le\left(\frac{\pi}{2}-2\psi\right)\left(\frac{1}{c_1}N^{0.5}\right)^{\alpha}\le\frac{\pi}{2c_1^{\alpha}}N^{\frac{\alpha}{2}}$$

只要满足 $N^{\gamma}\ge 16/\pi$，因此存在一个绝对常数 $c_6>0$，使得

$$|\Lambda(\omega)\cap V(k)|\le 4c_4\cdot\frac{3\pi}{2}\frac{8c_2^{\alpha}}{\pi}\frac{(\log N)^{\alpha}}{N^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{4e^2}{c_1^2}N\le c_6N^{1-\frac{\alpha}{2}}(\log N)^{\alpha}\le c_6N^{1-\frac{\alpha}{4}}$$

只要满足

$$N^{0.5}\ge\frac{c_1}{2e}\cdot\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{2+\epsilon}\cdot\left(\frac{\pi}{8c_2}\frac{N^{\frac{\alpha}{2}}}{(\log N)^{\alpha}}\right)^{2+\epsilon}\cdot C(\omega,\epsilon)$$

成立；只要满足下述条件，当 N 足够大时便会如此

$$\alpha(2+\epsilon)<1\tag{R}$$

已就位。因此，我们可以利用引理 3.10 和（2.1）对前两个求和项进行估计，并将积分上界取为 1，从而得到

$$\sum_{k=1}^{4\kappa}\sum_{v\in W(k)}\sum_{w\in V(k)}\int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t\ll N^{1-\frac{\alpha}{4}}\sum_{k=1}^{4\kappa}\sum_{v\in W(k)}\int_0^1 E_N(v;t)\,\mathrm{d}\mathsf{m}(t)\ll N^{2-\frac{\alpha}{4}}\tag{3.14}$$

当 N 足够大时成立。

对于第二个求和，我们再次应用定理 1.2，此时取 $\epsilon' > 0$ （待定，取$\epsilon' = \frac{1}{100}$ 即可），并令 I 为一个大小为 2ψ 的适当弧，从而得到常数 $C(\omega,\ \epsilon')$，使得

$$|\Lambda(\omega) \cap Z| \le 4c_4 \cdot 4N^{-\gamma} \cdot \left(\frac{2e}{c_1} N^{0.5}\right)^2$$

每当

$$\frac{2e}{c_1} N^{0.5} \ge \left(\frac{N^\gamma}{4}\right)^{2+\epsilon'} C(\omega, \epsilon')$$

成立。因此

$$|\Lambda(\omega) \cap Z| \ll N^{1-\gamma}$$

成立，只要提供了

$$\frac{1}{2} > \gamma(2+\epsilon') \tag{R}$$

is t这种情况。利用引理 3.10 和 (2.1) 对第二个求和进行估计，我们可以说 hat

$$\sum_{v\in Z} \sum_{w\in\Lambda(\omega)} \int_0^1 E_N(v;t) E_N(w;t)\,\mathrm{d}t \ll N^{2-\gamma} \tag{3.15}$$

当 N 足够大时成立。

3.2. 分离 在本小节中，我们将该和控制在

$$\sum_{k=1}^{4\kappa} \sum_{v\in W(k)} \sum_{\substack{w\in W \\ w\notin V(k)}} \int_0^1 E_N(v;t) E_N(w;t)\,\mathrm{d}t$$

N的某个幂以内。

固定 $1 \le k \le 4\kappa$，并固定 ω 的鞍连接 v, w，满足 $v \in W(k)$，以及 $w \in W \setminus V(k)$。由于当 u 关于水平轴或竖直轴反射时，$E_N(u;\ t)$ 保持不变，我们不妨假设 v 和 w 位于第一象限。记 $\theta_u = \arg(u)$。我们假设 $\theta_v > \theta_w$，因为另一种情况的论证完全相同。以下性质是这一假设的直接推论： $v \in W(k)$ 和 $w \in W \setminus V(k)$。

S1. $\dfrac{1}{2ec_2} \dfrac{N^{0.5}}{\log N} \le \|v\|, \|w\| \le \dfrac{2e}{c_1} N^{0.5}$

S2. $\dfrac{2}{N^\gamma} \le \theta_w < \theta_v \le \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{N^\gamma}$

S3. $\theta_v - \theta_w > \dfrac{1}{\ell(\omega;N)^\alpha}$

事实上，**S1** 由引理 3.10推出，**S2** 由 ψ 和 W的定义推出，而**S3** 则由(3.12)以及 N 足够大推出。

有了这些性质，本小节的目标是求集合的勒贝格测度上界

$$\{0 \le t \le 1 : E_N(v;t)E_N(w;t) = 1\} \tag{3.16}$$

关于 N 的负次幂。

引理 3.17。 对于所有 $t > 0$，$\mathsf{a}^t v$ 与 $\mathsf{a}^t w$ 之间的夹角至少为 $\frac{1}{e^{2t}}(\theta_v - \theta_w)$。

证明。 柯西中值定理给出

$$\arctan\left(\frac{1}{e^{2t}}\frac{v_2}{v_1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{e^{2t}}\frac{w_2}{w_1}\right) \ge \frac{1}{e^{2t}}\left(\arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right) - \arctan\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right) = \frac{1}{e^{2t}}(\theta_v - \theta_w)$$

如所要求的。 □

我们经常使用以下估计

$$\frac{1}{e^s}\|u\| \le \|\mathsf{a}^s u\| \le e^s\|u\| \qquad\qquad \theta_{\mathsf{a}^s u} \le \frac{1}{e^{2s}}\theta_u$$

该估计对第一象限中的所有 $s \ge 0$ 和所有 u 均成立。

如果 $E_N(v;\, t)E_N(w;\, t) = 0$对所有 $0 \le t \le 1$均成立，则无需给出界，因为 (3.16) 将具有零测度。因此，我们还假设存在某个时刻 $0 \le r \le 1$，使得 $E_N(v;\, r)E_N(w;\, r) = 1$。由 E_N 的定义和引理 3.9 可得

$$\Big|\|\mathsf{a}^r v\| - \|\mathsf{a}^r w\|\Big| \le 2\ell(\mathsf{a}^t\omega; N)\sinh(2S) \le \frac{8}{c_1}N^{0.5-\delta} \tag{3.18}$$

由于 $\sinh(S) \sim S$ 当 $N \to \infty$时成立。此外，**S3** 以及引理 3.9、3.17 给出

$$\theta_{\mathsf{a}^r v} - \theta_{\mathsf{a}^r w} \ge \frac{1}{e^{2r}}(\theta_v - \theta_w) \ge \frac{c_1^\alpha}{e^2}N^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{3.19}$$

我们的第一个目标是由此推出，$\mathsf{a}^r v$与 $\mathsf{a}^r w$之间存在水平和垂直分离。记 χ为角度间隔 $\theta_{\mathsf{a}^r v} - \theta_{\mathsf{a}^r w}$，并将 $Q = |\|\mathsf{a}^r v\| - \|\mathsf{a}^r w\||$ 记为长度差。

引理 3.20。 存在常数 $K > 0$ 和 $\xi > 0$，使得 $(\mathsf{a}^r w)_1 - (\mathsf{a}^r v)_1 \ge KN^{0.5-\xi}$ 以及$(\mathsf{a}^r v)_2 - (\mathsf{a}^r w)_2 \ge KN^{0.5-\xi}$ 对所有足够大的 N均成立。

证明。 坐标 $(\mathsf{a}^r w)_1$ 不可能（参见图 2）小于 $(\|\mathsf{a}^r v\| - Q)\cos(\theta_{\mathsf{a}^r v} - \chi)$，因此由

$$\cos(\theta_{\mathsf{a}^r v} - \chi) - \cos(\theta_{\mathsf{a}^r v}) = \sin(\theta_{\mathsf{a}^r v})\sin(\chi) - (1 - \cos(\chi))\cos(\theta_{\mathsf{a}^r v}) \ge \frac{\theta_{\mathsf{a}^r v}}{2}\frac{\chi}{2} - \frac{\chi^2}{2}$$

由 (3.18)、(3.19) 和引理 3.10 可得

$$\begin{aligned}(\mathsf{a}^r w)_1 - (\mathsf{a}^r v)_1 &\ge \|\mathsf{a}^r v\|\frac{\chi}{2}\left(\frac{\theta_{\mathsf{a}^r v}}{2} - \chi\right) - Q \\ &\ge \frac{1}{2e^2 c_2}\frac{N^{0.5}}{\log N}\cdot\frac{c_1^\alpha}{2e^2}N^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{e^2}N^{-\gamma} - \frac{c_1^\alpha}{e^2}N^{-\frac{\alpha}{2}}\right) - \frac{8}{c_1}N^{0.5-\delta}\end{aligned}$$

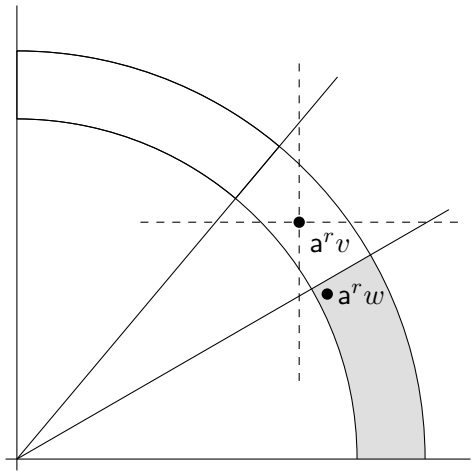

图 2：如果 $\mathsf{a}^r w$ 与 $\mathsf{a}^r v$ 的夹角满足 (3.19) 中的分离条件，但 $|\|\mathsf{a}^r v\| - \|\mathsf{a}^r w\||$ 又不像 (3.18) 中那样过大（因此 $\mathsf{a}^r w$ 属于灰色区域），那么我们就能对 $\mathsf{a}^r v$ 与 $\mathsf{a}^r w$ 的水平和垂直分离作出一些判断。

因为

$$\frac{\theta_{\mathsf{a}^r v}}{2} - \chi \geq \frac{1}{2e^2}\theta_v - \chi \geq \frac{1}{e^2}\frac{1}{N^\gamma} - \frac{c_1^\alpha}{e^2}\frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} > 0$$

当 N 足够大时。以上结论成立的前提是满足以下不等式

$$\gamma + \alpha < \delta \qquad\qquad \gamma < \frac{\alpha}{2} \tag{R}$$

但只要这些不等式成立，我们就可以得出存在一个常数 $K_1 > 0$，使得

$$(\mathsf{a}^r w)_1 - (\mathsf{a}^r v)_1 \geq \frac{K_1}{\log N} N^{0.5-(\gamma+\alpha)}$$

对所有足够大的 N 均成立。

类似地，$(\mathsf{a}^r w)_2$ 的最大值为 $(\|\mathsf{a}^r v\| + Q)\sin(\theta_{\mathsf{a}^r v} - \chi)$，因此由

$$\sin(\theta_{\mathsf{a}^r v}) - \sin(\theta_{\mathsf{a}^r v} - \chi) = (1 - \cos(\chi))\sin(\theta_{\mathsf{a}^r v}) + \cos(\theta_{\mathsf{a}^r v})\sin(\chi) \geq \frac{\chi^2}{8}\frac{\theta_{\mathsf{a}^r v}}{2}$$

我们得到

$$\begin{aligned}(\mathsf{a}^r v)_2 - (\mathsf{a}^r w)_2 &\geq \|\mathsf{a}^r v\|\frac{\chi^2}{8}\frac{\theta_{\mathsf{a}^r v}}{2} - Q \\ &\geq \frac{1}{2e^2 c_2}\frac{N^{0.5}}{\log N} \cdot \frac{c_1^{2\alpha}}{8e^4} N^{-\alpha} \cdot \frac{1}{e^2} N^{-\gamma} - \frac{8}{c_1} N^{0.5-\delta}\end{aligned}$$

如上所述。假设

$$\gamma + \alpha < \delta \tag{R}$$

我们得出结论，存在一个常数 $K_2 > 0$，使得

$$(\mathsf{a}^r v)_2 - (\mathsf{a}^r w)_2 \geq \frac{K_2}{\log N} N^{0.5-(\gamma+\alpha)}$$

对所有充分大的 N，均成立。

总之　　取　　e $K = \min\{K_1,\ K_2\}$ 和 $\xi = \gamma + 2\alpha$ 以及 $N_2 \geq \max\{M_1,\ M_2\}$ 足够大。　□

定义 $f_{v,\,w}(t) = \|\mathsf{a}^t v\| - \|\mathsf{a}^t w\|$ 对于 $t \in \mathbb{R}$。显然，$f_{v,\,w}$ 是连续的。控制满足 $|f_{v,\,w}(t)|$ 较小的那些 $0 \le t \le 1$ 的集合大小，就足以对 (3.16) 的勒贝格测度给出上界。由引理 3.20 以及附录 B 中的事实 B.4、B.5，我们得出 $f_{v,\,w}$ 递减且有唯一零点。由于 $f_{v,\,w}$ 连续且递减，(3.18) 给出了满足 $|f_{v,\,w}(r_0)| \le \frac{8}{c_1} N^{0.5-\delta}$ 的最小 $0 \le r_0 \le 1$。

引理 3.21。有

$$|f_{v,w}(r_0 + N^{-\varpi})| \ge \frac{8}{c_1} N^{0.5-\delta}$$

对于某个待确定的 $\varpi > 0$。（事实上，可以取 $\varpi = \frac{1}{100}$。）

证明。假设结论不成立。那么

$$\left| \|\mathsf{a}^{r_0+t} v\| - \|\mathsf{a}^{r_0+t} w\| \right| = |f_{v,w}(r_0 + t)| \le \frac{8}{c_1} N^{0.5-\delta}$$

对于所有 $0 \le t \le N^{-\varpi}$ 均成立。我们还有

$$\frac{|\cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v}) - \cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}w})|}{|2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v} - 2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}w}|} = \sin(2\xi) \ge \min\{\sin(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}w}), \sin(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v})\}$$

对于某个 $\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}w} < \xi < \theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v}$。当 N 足够大时，$r_0 + t$ 至多为2。因此，两个角都至少为 $\frac{2}{e^4} N^{-\gamma}$ 且至多为 $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{e^4} N^{-\gamma}$。这意味着

$$|\cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v}) - \cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}w})| \ge \frac{2}{e^4} N^{-\gamma} \cdot 2(\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v} - \theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}w}) \ge \frac{2}{e^4} N^{-\gamma} \cdot \frac{2c_1^{\alpha}}{e^4} N^{-\frac{\alpha}{2}}$$

应用引理 3.17、**S3**、引理 3.9，以及当 N 足够大时 $r_0 + t \le 2$ 这一事实之后。

综合起来，对所有 $0 \le t \le N^{-\varpi}$，我们得到

$$\left| \|\mathsf{a}^{r_0+t} v\| \cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v}) - \|\mathsf{a}^{r_0+t} w\| \cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v}) \right| \le \frac{8}{c_1} N^{0.5-\delta}$$

并结合 **S1** 以及膨胀控制

$$\|\mathsf{a}^{r_0+t} w\| \left| \cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}v}) - \cos(2\theta_{\mathsf{a}^{r_0+t}w}) \right| \ge \frac{1}{2e^3 c_2} \frac{N^{0.5}}{\log N} \cdot \frac{4c_1^{\alpha}}{e^8} N^{-\gamma-\frac{\alpha}{2}}$$

从而由 (B.2) 得到

$$|f'_{v,w}(r_0 + t)| \gg N^{0.5-\gamma-\alpha}$$

对所有 $0 \le t \le N^{-\varpi}$，只要

$$\gamma + \alpha < \delta \tag{R}$$

成立。但此时中值定理推出

$$|f_{v,w}(r_0 + N^{-\varpi}) - f_{v,w}(r_0)| \gg N^{0.5-\gamma-\alpha-\varpi}$$

若有

$$0.5 - \gamma - \alpha - \varpi > 0.5 - \delta \tag{R}$$

蕴含 $|f_{v,\,w}(r_0 + N^{-\varpi})| > \frac{8}{c_1} N^{0.5-\delta}$ 当 N 足够大时，从而得到所需的矛盾。 □

由于 $f_{v,\ w}$ 严格递减，因此有包含关系

$$\{0 \le t \le 1 : E_N(v;t)E_N(w;t) = 1\} \subset \left\{0 \le t \le 1 : |f_{v,w}(t)| \le \frac{8}{c_1} N^{0.5-\delta}\right\} \subset [r_0, r_0 + N^{-\varpi}]$$

使我们可以得出结论：

$$\sum_{k=1}^{4\kappa} \sum_{v \in W(k)} \sum_{\substack{w \in W \\ w \notin V(k)}} \int_0^1 E_N(v;t)E_N(w;t)\,\mathrm{d}t \ll N^{2-\varpi} \tag{3.22}$$

利用 (2.1) 对各项求和作平凡估计即可。

3.3. 定理 3.1 的证明 如果——正如它们可能的那样——参数 $\alpha,\ \gamma,\ \delta,\ \epsilon,\ \epsilon',\ \zeta,\ \varpi$ 的选取满足上述所有要求 (R)，那么存在足够大的 N_1，使得 (3.7)、(3.14)、(3.15)、(3.22) 合起来给出

$$\mathsf{m}((3.4)) \le \frac{1}{N^{2(1-\zeta)}} \int_0^1 \left| \sum_{v \in \Lambda(\omega)} E_N(v;t) \right|^2 \mathrm{d}\mathsf{m}(t) \ll \frac{1}{N^{2(1-\zeta)}} \left(N^{2-\frac{\alpha}{4}} + N^{2-\gamma} + N^{2-\varpi} \right)$$

且所有 $0 \le \phi < 2\pi$。对于所有 $N \ge N_1$。如果

$$\zeta < \min\left\{\tfrac{1}{8}\alpha, \tfrac{1}{2}\gamma, \tfrac{1}{2}\varpi\right\} \tag{R}$$

满足，则我们可以找到满足该假设的 $\lambda > 0$。

4. 控制对

本节中，我们希望对所有 $0 \le \phi < 2\pi$ 证明 (2.10)。在本节中，固定 $0 \le \phi < 2\pi$，并记 $\omega = \mathbf{r}^{\phi}\omega_0$。对于量

$$\int_0^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{S} \int_0^S \frac{1}{N^2} \sum_{v,w \in \Xi(\mathsf{a}^t\omega;N)} \chi_p(\|\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)\|)\, \overline{\chi_p(\|\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)\|)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

我们希望得到 $\eta > 0$，使得

$$(4.1) \ll \frac{1}{N^\eta} \tag{4.2}$$

对所有充分大的 N 都成立。

记

$$\alpha(u) = \frac{u_1^2 - u_2^2}{\|u\|} \qquad \beta(u) = \frac{2u_1u_2}{\|u\|}$$

对于任意非零的 $u \in \mathbb{R}^2$，我们首先应用以下线性化。

引理 4.3。每当 $\|u\| \le N^{0.5}$ 时，我们有

$$\left| \|u\| + \alpha(u)s - \|\mathsf{a}^s u\| \right| \ll N^{0.5-2\delta}$$

对所有 $0 \le s \le S$。

证明。 利用 (B.1)，有如下界

$$\left|\frac{f_u''(s)}{2}s^2\right| < 42s^2\|u\| \ll N^{0.5-2\delta}$$

通过泰勒定理的拉格朗日余项形式即可得到所需结果。 □

这一要求

$$\delta > 0.25 \tag{R}$$

对于引理 4.3 发挥作用是必要的。当 $\delta > 0.25$ 时，只需使 (4.2) 产生一个 $\eta > 0$，令该量

$$\int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^S \frac{1}{N^2}\sum_{v,w\in\Xi(\mathsf{a}^t\omega;N)} \chi_p(\|\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)\| + s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)))\,\overline{\chi_p(\|\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)\| + s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)))}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

满足

$$(4.4) \ll \frac{1}{N^\eta} \tag{4.5}$$

对所有充分大的 N 均成立。

利用 χ_p 的 Lipshitz连续性，可将问题归结为 (4.5)。事实上，由此可得

$$|\chi_p(\|\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)\| + s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v))) - \chi_p(\|\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)\|)| \ll \frac{1}{N^{2\delta-0.5}}$$

对于所有足够大的 N，从而

$$|(4.1) - (4.4)| \ll \frac{1}{N^{2\delta-0.5}} \tag{4.6}$$

对于所有足够大的 N。

现在我们着手处理 (4.5)。固定 $0 \le t \le 1$，并固定一个稍后选取的参数 $\nu > 0$（$\nu = \frac{1}{100}$ 即足够），我们可以将求和限制在满足以下条件的那些鞍连接 v，w：$\|\mathsf{h}(v)\|$，$\|\mathsf{h}(w)\| \ge N^{0.5-\nu}$ 两者均成立。

我们还可以通过类似于第 5 节中对定理 1.2 的应用，舍弃那些 w 与 v 和 w 之间的夹角至多为 $N^{-\frac{\alpha}{2}}$ 的情形；若 $C''(\omega,\ \epsilon'')$ 是相应的常数（$\epsilon'' = \frac{1}{100}$ 即足够），那么条件

—

$$\frac{1}{2} > \frac{\alpha}{2}(\epsilon'' + 2) \tag{R}$$

将允许我们按需要舍弃这些情形。

固定满足这两个判据的 v，w，量

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^S \chi_p(\|\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)\| + s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)))\,\overline{\chi_p(\|\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)\| + s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)))}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta$$

绝对值等于

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^S \chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(v)))\,\overline{\chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^\theta\mathsf{h}(w)))}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\right|$$

因为旋转不会改变全纯向量的长度。

定义 $A(v,\ w)\ \geq 0$ 为 $A(v,\ w)^2 = (\alpha(\mathsf{h}(v))\ -\ \|\mathsf{h}(w)\|)^2 + \beta(\mathsf{h}(v))^2$。接下来，我们引用 CR19 中的以下估计。

引理 4.7. 我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^{S}\chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^{\theta}\mathsf{h}(v)))\,\overline{\chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^{\theta}\mathsf{h}(w)))}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \frac{4}{\pi N^{0.5}} + \frac{N^{\delta}}{\pi A(v,w)}\left(\log N + \log\frac{\pi}{4}\right)$$

对所有足够大的 N，

证明。该估计可通过重复 CR19 的证明（使用 $R\ =\ N^{0.5}$ 和 $\epsilon\ =\ 1$），直至 CR19 的公式 (24)] 以及 CR19 的公式 (24)] 之后紧接着的估计而得出。这部分证明不需要用到假设。

□

我们关于 $\|\mathsf{h}(v)\|$、$\|\mathsf{h}(w)\|$ 以及 v 与 w 之间夹角的假设给出

$$A(v,w) \geq \|\mathsf{h}(v)\|\,|\sin(2(\theta_v - \theta_w))| \geq N^{0.5-\nu}\cdot c_1^{\alpha}N^{-\frac{\alpha}{2}}$$

因此，总体而言

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^{S}\chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^{\theta}\mathsf{h}(v)))\,\overline{\chi_p(s\alpha(\mathsf{r}^{\theta}\mathsf{h}(w)))}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\right| \ll N^{-0.5} + N^{\delta+\nu+\frac{\alpha}{2}-0.5}\log N$$

对于我们的向量 v，w。只要满足

$$\delta + \nu + \frac{\alpha}{2} < 0.5 \tag{R}$$

成立，因为这样我们就可以取 $\eta = \delta + \nu + \frac{\alpha}{2} - 0.5$ 来证明 (4.5)。

5. 主定理的证明

在第 2 节中，我们借助定理 2.8 将定理 1.1 的证明归结为证明以下命题：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^{S}\frac{1}{N^2}\sum_{v,w\in\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^{\theta}\mathsf{a}^t\mathsf{r}^{\phi}\omega_0;N)}\chi_p(\|\mathsf{h}(v)\|)\,\overline{\chi_p(\|\mathsf{h}(w)\|)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{N^{\eta}} \tag{5.1}$$

对某个 $\eta > 0$ 成立。我们将在此通过证明 (5.1) 完成定理 1.1 的证明。

引理 5.2. 为了证明 (5.1)，只需证明

$$\int_0^{1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{S}\int_0^{S}\frac{1}{N^2}\sum_{v,w\in\Xi(\mathsf{a}^t\omega;N)}\chi_p(\|\mathsf{h}(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^{\theta}v)\|)\,\overline{\chi_p(\|\mathsf{h}(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^{\theta}w)\|)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{N^{\eta}} \tag{5.3}$$

对于某个 $\eta > 0$。

证明。 设 Ω 为集合 (3.4)。定理 3.1 的结论是 m(Ω) $\ll N^{-\lambda}$。当 t 不属于 Ω 时，我们有

$$\left|\Xi(\mathsf{a}^s\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega;N)\triangle\mathsf{a}^s\Xi(\mathsf{r}^\theta\mathsf{a}^t\omega;N)\right|\le N^{1-\zeta}$$

对所有 $0\le s\le S$以及所有 $0\le\theta<2\pi$，均成立。因此， $N^{-\zeta}+N^{-\lambda}$控制着 (5.1) 与 (5.3) 之间的差异。 □

为了应用第 3 节的内容——该节证明了定理 3.1——以及第 4 节的内容——该节证明了 (5.3)——我们需要确保能够同时满足上述要求 (R)。这些选择

$$\delta=\frac{1}{3}\qquad\alpha=\epsilon=\epsilon'=\epsilon''=\nu=\varpi=\frac{1}{100}\qquad\gamma=\frac{1}{300}\qquad\zeta=\frac{1}{1000}$$

表明这是可能的，由此完成定理 1.1 的证明。

A. Benjamin Dozier 关于扇区计数的定理 1.2 证明

定理 1.2 是 [Doz19 中定理 1.8] 的一个更明确的版本。要得到这个明确版本，只需仔细追踪该文各项证明中的常数。第一步是为 [Doz19 中的命题 2.1（第 94] 页）给出明确的常数。

命题 A.1。 固定 H 和 $0<\delta<1/2$。定义 $\alpha:\ H\to\mathbb{R}$ 为 $\alpha(\omega)=1/\ell(\omega)^{1+\delta}$。存在一个常数 b，使得对于任意区间 $I\subset\mathsf{S}^1$，存在一个常数 $c_I=O\left(\frac{1}{|I|^{1-2\delta}}\right)$，使得对于任意$\omega\in H$

$$\int_I\frac{1}{\ell(\mathsf{a}^t\mathsf{r}^\theta\omega)^{1+\delta}}\,\mathrm{d}\theta<c_I\cdot e^{-(1-2\delta)T}\alpha(\omega)+b\cdot|I|$$

对所有 $T\ge0$。

命题 A.1 的证明位于附录末尾。我们先假设命题 A.1 成立，证明定理 1.2。

假设命题 *A.1* 成立时定理 *1.2* 的证明。 见 [Doz19，定理 1.8]。那里没有讨论c_I 的显式界，但其论证实际上可以给出界，下面我们将对此进行讨论。由命题 A.1，我们得到 $c_{I'}=c_I=O\left(\frac{1}{|I|^{1-2\delta}}\right)$，其中隐含常数仅依赖于曲面的亏格。我们还将使用 $\alpha(X)=1/\ell(X)^{1+\delta}$。因此，对于 R的下界，我们可以取

$$R_0=O\left(\frac{1}{|I|^{(2-2\delta)/(1-2\delta)}}\cdot\frac{1}{\ell(X)^{(1+\delta)/(1-2\delta)}}\right).$$

由于我们可以任意选取小的 δ （特别是可以取 $\delta=\epsilon/(2+2\epsilon)$），因此对每个 $\epsilon>0$，都有

$$R_0=\frac{C(X,\epsilon)}{|I|^{2+\epsilon}},$$

其中

$$C(X,\epsilon)=O\left(\frac{1}{\ell(X)^{(1+(\epsilon/(2+2\epsilon))/(1-2\epsilon/(2+2\epsilon))}}\right).$$

我们声称，可以令 $C(X,\ \epsilon)$ 连续地依赖于 X。只需证明 $\ell(X)$，即最短鞍连接的长度，连续地依赖于 X。我们声称，ℓ 等于“平坦短周期函数” f，其定义为：不与一点同伦的最短曲线或弧的长度（弧的起点和终点为零点；对于弧而言，同伦是相对于零点的）。显然，$f \le \ell$，因为任何鞍连接都是这样的弧。为说明 $\ell \le f$，注意任何这样的曲线或弧都可以收紧为以下两种情况之一：(i) 鞍连接的并，或 (ii) 闭测地线，其平行副本构成一个圆柱。在情况 (i) 中，从该并中任选一条鞍连接，其长度不超过原曲线或弧的长度。在情况 (ii) 中，圆柱边界上有一条鞍连接，其长度不超过原曲线或弧的长度。最后，平坦短周期函数显然连续变化，因此 ℓ 也如此。

□

命题 *A.1* 的证明。该结果可通过对 [Doz19] 作如下修改得出。

- **Doz19，命题 5.5，第 111] 页中的显式常数：**我们可以取 $c_I = c_{(k)\ I} = O_k\left(\frac{1}{|I|^{1-2\delta}}\right)$。

- **对 [Doz19 的补遗：假设命题 5.5，命题 2.1 的证明，第111]：**注意，根据 α_i 的定义，对于每个 i 以及每个 X，我们有 $\alpha_1(X) \ge \alpha_i(X)$（这是因为 $\alpha_i(X)$ 是根据复杂度为 i 的复形边界上的鞍连接来定义的；任何这样的鞍连接都会构成复杂度为 1 的复形，因此包含在 α_1 的定义中）。因此，我们可以将从 Doz19 的命题 5.5] 得到的和 $\sum_{j\ge k}\alpha_j(X)$ 替换为 $M\cdot\alpha_1(X) = M/\ell(X)^{1+\delta}$，其中 M 是 X 的复杂度（然后我们可以将常数 M 吸收到常数 c_I 中）。

- **显式 常数见 [Doz19, 引理 5.8, 第114]页：**我们可以取 $t_0 \approx \tau + \log\frac{1}{|I|}$ ⊤.

- **Doz19 的补遗，命题 5.5 的证明，第 116-118]页：**

  – 我们可以取 $m \approx t_0(\tau,|I|)/\tau \approx \frac{1}{\tau}\log\frac{1}{|I|}$. – 我们可以取 $w_{\tau}^{(k)}{}_{,I} = c_I^{(k+1)}c_2 w_\tau$. – 我们可以取 $c_{\tau,m} = \left(e^{-\tau(1-2\delta)}\right)^{-m+1} + w_{\tau,I}\cdot e^{\tau(1-2\delta)}$. 由上可得 $w_{\tau}^{(k)}{}_{,I} = c_I^{(k+1)}c_2 w_\tau$。对于可能的最大 k，不存在来自更高复杂度的项，即所有更高的 α_i 均为 0，因此，对于这个 k，我们得到

$$c_{\tau,I}^{(k)} = O_k\left(\left(e^{-\tau(1-2\delta)}\right)^{-m+1}\right) = O_k\left(e^{\tau(1-2\delta)\frac{1}{\tau}\log\frac{1}{|I|}}\right) = O_k\left(\frac{1}{|I|^{1-2\delta}}\right).$$

  然后按复杂度递降归纳，我们便得到对所有 k 都成立的相同结果（O_k中的隐含常数可能不同）。 □

B. 长度函数

在本附录中，我们汇集了关于函数 $f_v(t) = \|\mathsf{a}^t v\|$ 的若干简单结果。该函数对任意具有正分量的向量 $v \in \mathbb{R}^2$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，其相对$f_{v,\ w} = f_v - f_w$。我们有

$$f_v(t) = \sqrt{e^{2t}v_1^2 + e^{-2t}v_2^2} = f_{\mathsf{a}^t v}(0)$$

并定义

$$h_v(t) = e^{2t}v_1^2 - e^{-2t}v_2^2 = h_{\mathsf{a}^t v}(0)$$

为方便起见。首先注意到

$$f_v'(t) = \frac{h_v(t)}{f_v(t)} \qquad h_v'(t) = 2f_v(t)^2$$

由此

$$f_v''(t) = \frac{2f_v(t)^4 - h_v(t)^2}{f_v(t)^3} = f_v(t) + \frac{4v_1^2v_2^2}{f_v(t)^3} \tag{B.1}$$

可得。

将 $V = \mathsf{a}^t v$ 和 θ_V 写作其自变量，我们可以写成

$$f_v'(t) = \frac{V_1^2 - V_2^2}{\|V\|} = \|V\|\Big((\cos\theta_V)^2 - (\sin\theta_V)^2\Big) = \|V\|\cos 2\theta_V \tag{B.2}$$

and

$$f_v''(t) = \frac{2(V_1^2+V_2^2)^2 - (V_1^2-V_2^2)^2}{\|V\|^3} = \frac{\|V\|^4 + 4V_1^2V_2^2}{\|V\|^3} = \|V\| + \frac{4V_1^2V_2^2}{\|V\|^3} = \|V\|\Big(1 + (\sin 2\theta_V)^2\Big)$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$，从 $2V_1V_2 = \|V\|^2 \sin 2\theta_V$。这些计算表明，$f_v$ 处处为凹函数，且在以下位置取得全局最小值

$$m(v) = \frac{1}{2}\log\frac{v_2}{v_1}$$

其中 $\theta_V = \frac{\pi}{4}$。

现在我们转向 $f_{v,\ w}$，假设 $v \neq w$。不失一般性，我们假设 v 和 w 位于第一象限。若$f_{v,\ w}$ 有零点，则该零点必定为

$$r(v,w) = \frac{1}{4}\log\frac{v_2^2 - w_2^2}{w_1^2 - v_1^2} \tag{B.3}$$

由此得到以下事实。

事实 B.4。

- 若 $w_1 > v_1$ 且 $v_2 > w_2$，则函数 $f_{v,\ w}$ 有唯一零点。
- 如果 $v_1 > w_1$ 且 $w_2 > v_2$ 函数 $f_{v,w}$ 有唯一的零点。
- 在其他任何情况下，$f_{v,\ w}$ 都没有零点。

事实 B.5。 如果 $f_{v,\ w}$ 有一个零点，那么它要么严格递增，要么严格递减。换句话说，如果 $f_{v,\ w}$ 有一个零点，那么 $f'_{v,\ w}$ 就没有零点。

证明。 如有必要，交换 v 和 w 的角色，我们可以假设 $w_1 > v_1$ 和 $v_2 > w_2$。于是我们有

$$m(w) = \frac{1}{2}\log\frac{w_2}{w_1} < \frac{1}{2}\log\frac{v_2}{v_1} = m(v)$$

并且在区间 $(m(w)\ m(v)]$ 上，函数 f_w 严格递增；而在 $[m(w)\ m(v))$ 上，函数 f_v 严格递减。因此，$f_{v,\ w}$ 在 $[m(w)\ m(v)]$上严格递减。

接下来注意到，由于 $v_2 > w_2$，我们有 $f_{v,\ w}(t) > 0$，当 $t < r(v,\ w)$ 时；并且 $f_{v,\ w}(t) < 0$，当 $t > r(v,\ w)$ 时。

考虑 $m(w) \le r(v,\ w)$ 的情形。因此，对于所有$t \le m(w)$，我们有 $\|W\| \le \|V\|$ 和 $-\theta_V > \theta_W \ge \frac{\pi}{4}$。相应地

$$f'_v(t) = \|V\|\cos(2\theta_V) < \|W\|\cos(2\theta_W) = f'_w(t)$$

并且 $f_{v,\ w}$ 在 $(-\infty,\ m(w)]$ 上为负，因此 $f_{v,\ w}$ 在 $(-\infty,\ m(v)]$ 上严格递减].

在 $r(v,w) < m(w)$ 的情况下，上述论证只能说明 $f'_{v,w}$ 在 $(-\infty, r(v,w)]$ 上为负。在区间 $(r(v,\ w)\ m(w))$ 上，我们有 $\|W\| > \|V\|$ 和 $\theta_V > \theta_W > \frac{\pi}{4}$，从而 $f''_v < f''_w$ 在该区间上成立。因此，我们可以将 $f'_{v,w}$ 的负性延伸到 $(-\infty, m(w)]$，而且 $f_{v,w}$ 在整个 $(-\infty, m(v)]$ 上再次严格递减。

情形 $r(v,w) \le m(v)$ 和 $m(v) < r(v,w)$ 与上述情况类似，总之，$f_{v,w}$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上严格递减。□

参考文献

[CR19] J. Chaika 和 D. Robertson. “鞍连接长度的均匀分布”。载于：《现代动力系统杂志》15 (2019)。附录由 Daniel El-Baz 和 Bingrong Huang 撰写，第 329–343 页。ISSN：1930-5311。[Doz19] B. Dozier。“平移曲面上鞍连接的均匀分布”。载于：《现代动力系统杂志》14 (2019)，第 87–120 页。ISSN：1930-5311。[Kna01] A. W. Knapp. 半单群表示论。普林斯顿数学经典丛书。基于实例的概述，1986 年原版重印。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2001 年，第 xx+773 页。ISBN：0-691-09089-0。[Mas88] H. Masur. “二次微分的鞍连接数与闭轨道数的下界”。载于：《全纯函数与模空间》，第一卷（伯克利，加利福尼亚州，*1986*）。第 10 卷。数学科学研究所出版物。施普林格，纽约，1988 年，第 215–228 页。[Mas90] H. Masur. “二次微分轨道的增长率”。载于：《遍历理论与动力系统》10.1 (1990)，第 151–176 页。ISSN：0143-3857。[NRW20] A. Nevo、R. Rühr 和 B. Weiss. “平移曲面上的有效计数”。载于：《数学进展》360 (2020)，第 106890 号，29 页。ISSN：0001-8708。