arXiv:2601.03000v1 [math.GR] 6 Jan 2026

关于 d-独立拓扑群的评述

ZHOUXIANG HUANG、DEKUI PENG*和 GAO ZHANG

Abstract. 非平凡拓扑群称为 d-独立，如果对于每个基数小于连续统的子群，都存在一个与其交集平凡的可数稠密子群。M´arquez 和 Tkachenko 引入了这一概念，并在可度量化情形中对其进行了深入研究。特别是，他们证明第二可数局部紧阿贝尔群是 d-独立的，当且仅当它在代数意义下是一个 M-群；他们还提出，对所有可分局部紧群是否也有相同结论。

本文对这个问题给出了肯定的回答。我们证明，每个可分局部紧阿贝尔 M-群都是 d-独立的，从而去除了 M´arquez 和 Tkachenko 结果中的可度量化假设。

此外，我们还探讨了 d-独立性的若干其他方面。我们研究了拓扑群的幂对其性质的影响，并将 d-独立性的概念推广到非阿贝尔情形。此外，我们证明每个可分连通紧群都是d-独立的，从而回答了 M´arquez 和 Tkachenko 提出的另一个问题。

1. Introduction

可分性无疑是一般拓扑学中最基本、研究最广泛的概念之一。然而，通常而言，可分性的表现并不理想：可分紧空间的闭子空间甚至未必可分。相比之下，在拓扑群的情形中，情况则大为改善。众所周知，可分局部紧群的每个闭子群都是可分的 [3]。这一结果最初由 Itzkowitz 在紧情形下证明 [8], ，之后 Leiderman、Morris 和 Tkachenko 将其推广，并证明可分羽化群的每个闭子群都是可分的 [9]。

受这些结果启发，Leiderman 和 Tkachenko 提出了并研究了这样一类拓扑群**CSS**：其中所有闭子群都是可分的 [10]。相关问题也曾从不同角度加以考察；例如，第二位列名作者研究了其稠密子群全都可分的拓扑群 [12]。

在后续研究中，Xiao、Sánchez 和 Tkachenko 观察到了一个引人入胜的现象。他们证明，对于某些标准拓扑群，以及每个基数小于 $\mathfrak{c}$ 的子群 $S \leq G$，都存在一个 G 的可数稠密子群 D，使得 $D \cap S = \{1\}$。Márquez 和 Tkachenko 在 [11], 中进一步系统地研究了这一性质，并将具有该性质的群称为 d-独立拓扑群。

定义 1.1。若一个非平凡的拓扑群 G 对任意满足 $|S| < \mathfrak{c}$ 的子群 $S \leq G$，都存在 G 的可数稠密子群 D 使得 $S \cap D = \{1\}$，则称其为 d-独立。

除此之外，M´arquez 和 Tkachenko 证明，第二可数拓扑群是 d-独立的，当且仅当它是极大可碎的；这一概念由 Comfort 和 Dikranjan 早先在研究拓扑群的稠密子群时提出。他们还

2020年 数学主题分类。 22D05, 54H11, 54D65, 22A05。关键词和短语。
d-独立群、拓扑群、 M-群。*通讯作者。

在第二可数局部紧阿贝尔群这一类别中，对 d-独立性作出了完整刻画。更具体地说，他们证明：

第二可数局部紧阿贝尔群是 d-独立的，当且仅当它在代数意义上是一个 M-群。

这里，如果一个阿贝尔群 G 称为 M-群，若对每个整数 n， nG 的基数要么为 1，要么至少为 $\mathfrak{c}$。Dikranjan 和 Shakhmatov 早先引入了这类群[4]，以研究 Markov 的一个长期悬而未决的问题。值得注意的是，阿贝尔拓扑群若要成为M-独立的，成为 d-群是必要条件。

在 [11], 中，已在第二可数这一假设下证明了该条件的充分性，而证明严重依赖于可数紧性空间理论中的技巧。然而，任何具有可数紧性的紧群都是可度量化的，这也解释了为什么他们的方法只适用于可度量化情形。因此，M´arquez 和 Tkachenko 提出了以下问题：

问题 1.2 . 一个可分局部紧群若为 M-群，是否必然是 d-独立的？ *?*

本文的主要结果在第 2 节中得到证明，并对这个问题给出了肯定的回答。我们的方法在很大程度上独立于 [11]中所发展的方法，而且还推广了其中若干结果。

在本文最后一节中，我们将讨论 d-独立性的另外两个方面。首先，我们考察取幂运算下 d- 独立性的表现。其次，我们通过证明每个可分连通紧群都是 d- 独立的，回答 M´arquez 和 Tkachenko 提出的另一个问题。

1.1. **记号、术语与预备知识**。 本文中，所有拓扑群均假定为豪斯多夫空间。我们用符号 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 分别表示整数加法群、有理数加法群、实数加法群和单位圆群。自然数集和正整数集分别记为 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}_+$。

对于每个 $n \in \mathbb{N}_+$，我们用 $\mathbb{Z}(n)$ 表示阶为 n 的循环群，用 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 表示 Pr¨ufer$p$-群，其中 p 是素数。 p-进整数群是$\mathbb{Z}(p^\infty)$的 Pontryagin 对偶，记作 $\mathbb{Z}_p$。

集合 A 的基数记作 $|A|$。符号 ω 和 $\mathfrak{c}$ 分别表示基数$|\mathbb{N}|$和 $|\mathbb{R}|$。

阿贝尔群采用加法记号。阿贝尔群的单位元 G记作 0_G；若不会引起混淆，也简记为 0。非阿贝尔群仅在第 3节中讨论；在这种情况下，群 G的单位元记作 1_G 或 1。对于子集 $X \subseteq G$，由 G 生成的子群 X 记作 $\langle X\rangle$。

群 G 的元素 g 称为<...>有限阶元素，或等价地称为<...>挠元，如果$g^n = 1_G$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}_+$成立。群 G 称为<...>挠群，如果其所有元素都是挠元。如果 G 除了单位元外没有其他挠元，则称 G 为<...>无挠群。如果存在一个正整数 m，使得对所有 $g \in G$都有 $g^m = 1_G$，则称挠群为<...>有界。

阿贝尔群 G 的子群族 $\{H_i : i \in I\}$，其中指标集 I 是良序的，若满足独立，则称该族为独立族：

$$H_i \cap \sum_{j\in I\setminus\{i\}} H_j = \{0\} \quad \text{for every } i \in I.$$

容易验证，此条件等价于

$$H_i \cap \sum_{j<i} H_j = \{0\} \quad \text{for every } i \in I,$$

并且也等价于和 $\sum_{i\in I} H_i$ 是直和这一事实。子群族 $\{H_i\colon\ i \in I\}$称为两两独立，如果 $\{H_i, H_j\}$ 是独立的；等价地，对任意不同的 i，$j \in I$，都有 $H_i \cap H_j = \{0\}$。

对于子集 $X \subseteq G$，如果族 $\{\langle x\rangle : x \in X\}$ 是独立的，我们就说 X 由独立元素组成。

下述 初等但有用的引理讨论子群的独立族 .

引理 1.3。设 G 是阿贝尔群，H 和 K 是 G 的子群，且满足 $H \cap K =\{0\}$。设 $\mathcal{A}$ 是 H的一个独立子群族。对每个 $A \in \mathcal{A}$，固定一个同态f_A：$A \to K$，并定义

$$B_A = \{a + f_A(a) : a \in A\}.$$

于是，族 $\mathcal{B} = \{B_A\colon\ \ A \in \mathcal{A}\}$ 是独立的。

*P*证明。设 A_1，……，$A_n \in \mathcal{A}$，并为每个 $i = 1$，……，n选取 $a_i \in A_i$。假设 tha t

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i + f_{A_i}(a_i)\big) = 0.$$

由于 $a_i \in H$ 和 $f_{A_i}(a_i) \in K$，且 $H \cap K = \{0\}$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{n} f_{A_i}(a_i) = 0.$$

由于族 $\mathcal{A}$ 是独立的，第一个等式意味着对所有 $i = 1$，……，n，都有 $a_i = 0$。证明完毕。□

Und有关拓扑群的定义、概念和符号可见 [1, 2].

2. d-Independent locally compact abelian groups

我们首先给出一个简单引理，通过独立稠密子群刻画 d-独立阿贝尔群。

引理 2.1. 设 G 是可分阿贝尔拓扑群。则以下条件等价:

(1) G是 d-独立的；(2) G 含有一个族 $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$，由独立可数稠密子群构成；

(3) G 含有一个族 $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$，由两两独立的可数稠密子群构成

.

证明。(1)⇒(2)。假设 G 是 d-独立的，并固定 G的一个可数稠密子群 D_0。通过超限归纳，对每个序数 $\alpha < \mathfrak{c}$，我们选取一个可数稠密子群 $D_\alpha \leq G$，使得

$$D_\alpha \cap \sum D_\beta = \{0\}.$$

这是可行的，因为 G 是 d-独立的，且$\big|\sum_{\beta<\alpha}^{\beta<\alpha} D_\beta\big| < \mathfrak{c}.$。由此可知，$\{D_\alpha\colon\ \alpha < \mathfrak{c}\}$ 是 G的一个独立可数稠密子群族。

(2)⇒(3)。这个推论是显然的。

(3)⇒(1)。设 $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 是G的一族两两独立的可数稠密子群，并设 $S \leq G$ 满足 $|S| < \mathfrak{c}$。由于这些子群 D_α 两两独立，每个非零元素 $s \in S$ 至多属于一个 D_α。因此，存在某个 $\kappa < \mathfrak{c}$ 使得

$$D_\kappa \cap S = \{0\},$$

证明 G 是 d-独立的。 □

定理 2.2. 具有无挠 d-独立子群 G 的可分阿贝尔群，本身也是 d-独立的。

证明. 设 H 是 G 的一个无挠 d-独立子群。由于 G 可分，存在 G 的一个可数稠密子群 K。令 $S = K \cap H$，它是可数的。

由于 H 是 d-独立的，我们可以选取 H 的一个可数稠密子群 D_0，使得 $S \cap D_0 = \{0_G\}$。通过超限归纳，对于每个序数 $\alpha < \mathfrak{c}$，我们可以选取 H 的一个可数稠密子群 D_α，使得

$$D_\alpha \cap \left(S + \sum_{\beta<\alpha} D_\beta\right) = \{0_G\}.$$

因此，该族

$$A := \{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$$

是独立的，且 $A \cap K = \{0_G\}$，其中 $A = \bigoplus_{\alpha<\mathfrak{c}} D_\alpha$。

令 **LIM** 表示小于 $\mathfrak{c}$ 的所有极限序数构成的集合。对每个 $\alpha < \mathfrak{c}$，选取一个非零元素 $b_\alpha \in D_\alpha$。对每个 $\gamma \in$ **LIM**，定义

$$P_\gamma = \sum_{n\in\omega\setminus\{0\}} \langle b_{\gamma+n}\rangle.$$

由族 $\{D_\alpha$ 的构造可知：$\alpha < \mathfrak{c}\}$，该和是直和；因此 P_γ 是秩为 ω 的自由阿贝尔群。

对每个 $\gamma \in$ **LIM**，固定一个满同态 f_γ: $D_\gamma \oplus P_\gamma \to K$，使得 $D_\gamma \leq \ker f_\gamma$，并令

$$Q_\gamma = \{x + f_\gamma(x) : x \in D_\gamma \oplus P_\gamma\}.$$

我们断言，每个 Q_γ 在 G 中都是稠密的。事实上，由于 $Q_\gamma \cap H$ 包含 D_γ，它在 H 中是稠密的。因此 $H \leq Q_\gamma$，特别是 $D_\gamma \oplus P_\gamma \leq Q_\gamma$。于是，对每个 $x \in D_\gamma \oplus P_\gamma$，

$$f_\gamma(x) = (x + f_\gamma(x)) - x \in Q_\gamma + \overline{Q_\gamma} \subseteq \overline{Q_\gamma}.$$

由于 f_γ 是满射，可得 $K \leq Q_\gamma$。由于 K 在 G中稠密，我们得出 Q_γ 在 G 中稠密。

族的独立性 $\{Q_\gamma : \gamma \in$ **LIM**$\}$直接由引理 1.3得出，因为 $Q_\gamma \leq A$。因此，由引理 2.1，群 G 是 d-独立的。 □

引理 2.3。 设 G 是一个无界的全不连通紧阿贝尔群。如果 G 不含任何与 $\mathbb{Z}_p$ 拓扑同构的子群，对任意素数 p均如此，那么 G 有一个形如以下形式的闭子群

$$\prod_{i\in\omega} \mathbb{Z}(p_i),$$

其中 $\{p_i : i \in \omega\}$ 是一个由两两不同的素数组成的族。

证明。 设 X 是 G的 Pontryagin 对偶群。那么 X 是一个非有界的挠阿贝尔群。存在两种可能的情况：

(1) 存在一个素数 p，使得 X 的 p-主分量 X_p 无界
(2) 存在无穷多个素数 p，使得 X_p 是非平凡的。

;

我们首先证明情形 (1) 不可能发生。

反设 X_p 对某个素数 p无界。根据 Fuchs 的经典定理 [5, 定理 32。3], 群 X_p 有一个基本子群 B_p；也就是说， B_p 是 X_p 的纯子群，它是循环群的直和，并且 X_p/B_p 是可除群。

若 X_p/B_p 非平凡，则它包含一个同构于 Prüfer 群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 的子群。因此， X，进而 X_p，有一个同构于 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 的商群。根据 Pontryagin 对偶性，这意味着 G包含一个与 $\mathbb{Z}_p$ 拓扑同构的闭子群，这与假设矛盾。

因此， $X_p = B_p$ 本身是循环群的直和。记

$$X_p = \bigoplus_{s\in S} Y_s,$$

其中每个 Y_s 都是循环群。由于每个 Y_s 都嵌入 $\mathbb{Z}(p^\infty)$，且 X_p 是它们的直和，因此存在一个从 X_p 到 $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 的同态，延拓了所有这些嵌入。由于 X_p 无界，该同态必为满射。因此，$\mathbb{Z}(p^\infty)$又是 X_p的商群，因而也是 X的商群。

再次取对偶可得， G 包含一个与 $\mathbb{Z}_p$拓扑同构的闭子群，矛盾。

对于情形（2），选取两两不同的素数 $\{p_i : i \in \omega\}$ 使得对每个 i都有 $X_{p_i} \neq \{0\}$ 。由于情形（1）不发生，每个 X_{p_i} 都是有界的。因此，每个 X_{p_i} 都有一个与 $\mathbb{Z}(p_i)$同构的商群。由此可知， X 有一个同构于

$$\bigoplus_{i\in\omega} \mathbb{Z}(p_i).$$

根据庞特里亚金对偶， G 因此包含一个与$\prod_{i\in\omega} \mathbb{Z}(p_i)$ 拓扑同构的闭子群

. □

推论 2.4。 带有无界紧子群的可分阿贝尔群 G 本身是d-独立的。

证明。 根据定理 2.2，只需证明每个无界可分紧阿贝尔群 K 都包含一个无挠 d-独立子群（注意，G的每个紧子群必然是可分的）。

首先假设 K 不是全不连通的。根据 [11, 引理 2，37], 单位连通分支K_0 的 K 存在一个基数为 $\mathfrak{c}$的族，其中包含彼此独立的稠密循环子群，而这些子群必然是无挠的。因此，这些子群的直和是一个自由阿贝尔群，并且根据引理 d2.1，它是 -独立的。

接下来，假设 K 包含一个紧子群，该子群与某个素数 p对应的 p-进群 $\mathbb{Z}_p$ 拓扑同构。由于 $\mathbb{Z}_p$ 是无挠且 d-独立的，结论立即成立。

剩下需要考虑的是以下情形： K 是全不连通的，且不包含任何与 $\mathbb{Z}_p$ 拓扑同构的子群，其中素数 p是任意的。在这种情况下，根据引理2.3， K包含一个形如

$$N \cong \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_i),$$

其中，对每个 i， p_i 都是奇素数。因此，只需假设 $K = N$。我们证明 K包含一个无挠的 d-独立子群。

令 X 为 K的 Pontryagin 对偶群。则 X 同构于 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_i)$。对每个 i，令 X_i 表示 X 中与 $\mathbb{Z}(p_i)$同构的子群，并固定一个非零元素 $x_i \in X_i$。

令 $[\omega]^\omega$ 表示 ω的所有无限子集构成的族。众所周知， $[\omega]^\omega$ 存在一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的链 $\mathcal{C}$ ，其中任意两个不同元素之差都是无限的。事实上，将 ω 认作 $\mathbb{Q}$，对每个实数 x，可以考虑集合

$$R_x := \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}.$$

族 $\{R_x : x \in \mathbb{R}\}$ 构成这样一条链。

固定这样一条链 $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^\omega$。对每个 $E \in \mathcal{C}$，定义同态 $\chi_E\colon X \to \mathbb{T}$ ，使得 [1]

$$\chi_E(x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{p_n}, & n \in E, \\ -\dfrac{1}{p_n}, & n \notin E. \end{cases}$$

每个 χ_E 都诱导一个从 X 到 $\mathbb{T}$ 的群嵌入，其像稠密。根据庞特里亚金对偶的标准论证，当 χ_E 以典范方式视为 K 中的一个元素时，它生成 K 的一个稠密无挠子群。

To p证明 K 是 d-独立，只需根据引理 2.1证明该族 y

$$\{\chi_E : E \in \mathcal{C}\}$$

是两两独立的。事实上，我们将证明更强的结论，即该族是独立的，这一结论本身也具有独立的研究价值。

事实上，令

$$E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m$$

为 $\mathcal{C}$ 的元素，并假设

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \chi_{E_i} = 0 \qquad (k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}).$$

令 $E_0 = \emptyset$。由于每个差 $E_j \setminus E_{j-1}$ 都是无限的，对于每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$，我们都可以选取

$$s_j \in E_j \setminus E_{j-1} \quad \text{such that} \quad p_{s_j} > \sum_{i=1}^{m} |k_i|.$$

Then

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^{m} k_i \chi_{E_i}\Big)(x_{s_j}) = \sum_{i=1}^{m} k_i\, \chi_{E_i}(x_{s_j}) = \frac{-\sum_{i=1}^{j-1} k_i + \sum_{i=j}^{m} k_i}{p_{s_j}}.$$

根据 s_j 的选取，分子的绝对值严格小于 p_{s_j}。因此，当且仅当满足以下条件时，该元素在 $\mathbb{T}$ 中等于 0:

$$-\sum_{i=1}^{j-1} k_i + \sum_{i=j}^{m} k_i = 0.$$

令 j 遍历 $\{1, \ldots, m\}$，我们得到一个 m 线性方程组，其唯一解为

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0.$$

因此，族 $\{\chi_E : E \in \mathcal{C}\}$ 是独立的。

[1]这里我们将 $\mathbb{T}$ 视为区间 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 在自然映射 ψ 下的连续像；对于每个 $x \in \mathbb{T}$，我们将其与满足 $\psi(y) = x$ 的唯一实数 $y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 相对应。 - -

最后，由于 $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$，引理 2.1 可知

$$S := \bigoplus_{E\in\mathcal{C}} \langle \chi_E \rangle \leq K$$

是 d-独立的。 □

接下来我们给出定理 2.2的一个有界对应版本。尽管证明非常相似，为求完整起见，我们仍将其列出。回顾一下，对于有界阿贝尔群 G，其指数 G 是满足 $nG = \{0\}$ n 的最小正整数。

定理 2.5。设 G是一个指数为 n的有界可分拓扑阿贝尔群。若 G含有一个指数为 n的 d-独立子群 H，则 G 是 d-独立的。

证明。设 K 是 G的一个可数稠密子群。按照定理 2.2的证明进行推理，可以构造一个族 $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 由 H 构成的独立可数稠密子群，使得

$$\Big(\bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} D_\alpha\Big) \cap K = \{0\}.$$

对于每个 $\alpha < \mathfrak{c}$，选取一个阶为 n的元素 $b_\alpha \in D_\alpha$。由于 K 是可数的且指数为n，对于每个极限序数 $\gamma < \mathfrak{c}$，群

$$\bigoplus_{m\in\omega\setminus\{0\}} \langle b_{\gamma+m} \rangle$$

存在一个到 K 的满同态。因此，存在一个满同态

$$f_\gamma \colon D_\gamma \oplus \Big(\bigoplus_{m\in\omega\setminus\{0\}} \langle b_{\gamma+m}\rangle\Big) \longrightarrow K$$

其核包含 D_γ。

与定理 2.2的证明一样，考虑这些映射的图，并定义

$$Q_\gamma := \{x + f_\gamma(x) : x \in D_\gamma \oplus (\bigoplus_{m\in\omega\setminus\{0\}} \langle b_{\gamma+m}\rangle)\}, \qquad \gamma \in \mathbf{LIM}.$$

于是，族 $\{Q_\gamma : \gamma \in \mathbf{LIM}\}$ 由 G的独立可数稠密子群构成。由引理2.1可知，这意味着 G是 d-独立的。 □

现在我们可以给出主要结果的最终证明了。

定理 2.6。设 G 是一个可分局部紧阿贝尔群。那么， G 是 d-独立的，当且仅当 G 是一个 M-群。

证明。只需验证“如果”方向，因为 d-独立阿贝尔群是 M-群 [11, 命题 2。1]。根据局部紧阿贝尔群结构定理， G拓扑同构于 $\mathbb{R}^m \times H$ 某个 $m \in \omega$，其中 H 具有一个开紧子群 K。

如果 $m > 0$ 或者如果 K 无界，则定理 2.2 或推论 2.4 表明 G是 d-独立的。因此只需考虑 $m = 0$的情形，即 $G = H$，且 K 是有界的。

令 k 为正整数。则 $kK \leq kG$，并且

$$kG/kK \cong k(G/K) \leq G/K.$$

由于 G 是可分的，且 K 在 G中是开集，因此商群 G/K 是可数的。所以 kG/kK 也可数。根据 M-群的定义，群 kG 的基数要么为 1，要么至少为$\mathfrak{c}$；因此 kK也同样如此。特别地， K 本身是一个 M-群。

设 n 为 K的指数，并取 $k = n$。那么 kG 是可数的，因而是平凡的。由此可知， G 和 K 的指数相同。

回顾一下，每个有界紧阿贝尔群都可以分解为有限阿贝尔 p群的直积。固定一个整除 n 的素数 p，并令 s为满足 p^s整除 n的最大整数。在 K的直积分解中，有无穷多个因子同构于 $\mathbb{Z}(p^s)$。事实上，群 $\frac{n}{p}K$ 非平凡，因而是无限群，而在同态

$$K \to \tfrac{n}{p}K, \qquad x \mapsto \tfrac{n}{p}x,$$

所有其他主分量均为零。因此， K 含有一个同构于 $\mathbb{Z}(p^s)^\omega$的闭子群。

令 p 遍历 n的所有素因子，由此得到的子群之和同构于 $\mathbb{Z}(n)^\omega$，根据 d-独立性 [11, 定理 37]。应用推论 2.5，我们得出 G 是 d-独立的。 □

3. Further remarks

本节讨论若干与 d-独立性相关的补充问题和观察。

3.1. d-独立群的幂。

命题 3.1. 设 G 是一个非平凡可分拓扑阿贝尔群，且 κ 是一个满足 $\kappa \leq \mathfrak{c}$ 的无限基数。那么 G^κ 是 d-独立的。

证明。设 H 是 G 的一个可数稠密子群。根据 d-独立性的定义，如果一个拓扑群包含一个稠密的 d-独立子群，那么它本身就是 d-独立的。由于 H^κ 在 G^κ 中稠密，只需证明 H^κ 是 d-独立的。

由于 H 是可数的，因此它具有可数网络。于是我们可以应用 [11, 定理 3。7],该定理断言，对于每个具有可数网络的非平凡拓扑阿贝尔群 X， X^κ 都是 d-独立的。 □

命题 3.2. 设 G 是一个可分拓扑阿贝尔群，且对于某个正整数 n， G^n 是 d-独立的。那么 G^{n+1} 也是 d- 独立的。

证明。 根据引理 2.1，群 G^n 有一个由以下独立可数稠密子群构成的族 $\{H_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 。令 $p\colon\ G^n \to G$ 表示到第一坐标的投影。于是，对每个 $p(H_\alpha)$， G 在 $\alpha < \mathfrak{c}$中稠密。

令 **LIM** 表示所有小于 $\mathfrak{c}$ 的极限序数构成的集合。对于每个 $\gamma \in$**LIM**，定义同态 f_γ: $H_\gamma \oplus H_{\gamma+1} \to G$ ，令

$$f_\gamma|_{H_\gamma} = p|_{H_\gamma} \quad \text{and} \quad f_\gamma(H_{\gamma+1}) = \{0\}.$$

考虑群 $P = P_0 \oplus G \cong P_0 \times G$，其中 P_0是 G^n的一个副本，并赋予积拓扑。显然， $P_0 \cap G = \{0\}$。因此，根据引理 1.3，族

$$D_\gamma := \{x + f_\gamma(x) : x \in H_\gamma \oplus H_{\gamma+1}\}, \qquad \gamma \in \mathbf{LIM},$$

是独立的。

由于每个 D_γ 都是可数的，根据引理 2.1 ，只需证明 D_γ 在 P 中对每个$\gamma \in$ **LIM**都稠密。论证类似于定理2.2证明中的论证。事实上，D_γ 包含$H_{\gamma+1}$，而它在 P_0中稠密。因此，D_γ 包含 P_0。

此外，对于每个 $x \in H_\gamma$，我们有 $f_\gamma(x) \in \overline{D_\gamma}$。由于

$$f_\gamma(H_\gamma) = p(H_\gamma)$$

G 在.....中稠密，因此可知 $\overline{D_\gamma}$ 也包含 G。因此，

$$P = P_0 \oplus G \subseteq \overline{D_\gamma},$$

因此， D_γ 在 P中稠密。证明完毕。 □

备注 3.3. 根据上述命题，可以定义一个函数 φ，它将所有可分拓扑阿贝尔群构成的类映到 $\omega+1 = \omega \cup \{\omega\}$ 中：令 $\varphi(G)$ 为使得 G^κ 是 d-独立的最小基数κ。特别地， G 是 d-独立的，当且仅当 $\varphi(G) = 1$。

然而，目前尚不清楚这个函数是否真正有意义。更确切地说，仍然未知的是，对于某个 $n \geq 1$， G^n 的 d-独立性是否蕴含 G本身的 d-独立性。如果确实如此，那么对于每个 $n \geq 1$, G 是 d-独立的，当且仅当 G^n 是 d-独立的；因此，函数 φ 将仅取两个可能值，即 1 和 ω。

由此引出以下问题。

问题 3.4. 设 G 是一个拓扑阿贝尔群，且 $G \times G$ 是 d-独立的。 G是否必然是 d-独立的?

如果这个问题的答案是肯定的，那么 φ 也只取两个值。事实上，设 $\varphi(G) = n < \omega$, 并令 m 为满足 $2m \geq n$的最小整数。于是 $m < n$ 只要$n > 1$。由于 G^n 是 d-独立的， G^{2m}根据命题3.2也具有独立性。若上述问题的答案为肯定，则可推出 G^m 是 d-独立的。根据 φ的定义，可得$\varphi(G) \leq m < n$，除非 $n = 1$，否则就会导出矛盾。

3.2. **d-非阿贝尔群的独立性**。 独立子群在阿贝尔 d-独立群的研究中发挥着中心作用。因此，将这一概念推广到非阿贝尔情形是很自然的。

设 G 是一个群，且 $(H_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ 是 G的子群链。如果该链由独立子群 组成，则称

$$H_\alpha \cap \langle \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \rangle = \{1\} \quad \text{for every } \alpha < \kappa,$$

其中，1 表示 G的单位元。

容易验证，这一定义与阿贝尔情形下通常所说的独立性一致。非阿贝尔情形的主要区别在于链的顺序至关重要：与阿贝尔情形不同，独立性在子群置换下并不保持不变。

例如，设

$$G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}(2),$$

其中， $\mathbb{Z}(2)$ 的非平凡元素通过交换坐标作用于 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ，也就是说，将 (x, y) 映射为 (y, x)。分别用 R_1 和 R_2 表示 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的第一和第二坐标子群，并令 R_3 表示 G 中唯一一个与 $\mathbb{Z}$ (2) 同构的子群。那么，链 (R_1, R_2, R_3) 是独立的，而 (R_1, R_3, R_2) 则不是。

成对独立性可以用类似的方式定义；不过请注意，成对独立性不受子群顺序的影响。

现在我们给出引理2.1的非阿贝尔类比，尽管本文其他地方不会用到它。

引理 3.5. 设 G 是一个可分拓扑群。那么下列条件等价：

(1) G是 d-独立的；(2) G 拥有一条由独立可数稠密子群构成的链$(D_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}}$；

(3) G 拥有一个由两两独立的可数稠密子群构成的族 $\{D_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 。

证明。 证明与引理 2.1的证明类似，其中独立性按非阿贝尔意义来理解。 □

根据庞特里亚金对偶，一个简单的推论是，每个可分连通紧阿贝尔群都存在一个基数为 $\mathfrak{c}$的独立稠密循环子群族；这一事实已在 [11]中使用。我们将证明，这样的族可以选取为具有额外性质。

引理 3.6。 设 G是一个可分连通紧阿贝尔群。那么 G 存在一个族$\{H_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$，由独立稠密循环子群组成，使得每个非零元素

$$0 \neq h \in \bigoplus_{\alpha<\mathfrak{c}} H_\alpha$$

都生成 G的一个稠密子群。

*Pr*证明。 设 X 是 G的Pontryagin对偶。那么 X 是无挠的，并且 $|X| < \mathfrak{c}$。

将圆群 $\mathbb{T}$ 分解为

$$\mathbb{T} = t(\mathbb{T}) \oplus \bigoplus_{\alpha<\mathfrak{c}} Q_\alpha,$$

其中 $t(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 的挠子群，并且每个 Q_α 都是一个 $\mathfrak{c}$维 $\mathbb{Q}$-向量空间。对每个 $\alpha < \mathfrak{c}$，固定一个群嵌入

$$b_\alpha : X \longrightarrow Q_\alpha \leq \mathbb{T}.$$

每个 b_α 都可以视为 G中的一个元素。由于 b_α 是单射，循环子群

$$H_\alpha := \langle b_\alpha \rangle$$

在 G中稠密，并且不难验证，族 $\{H_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 是独立的 .

现在令

$$0 \neq h = n_1 b_{\alpha_1} + n_2 b_{\alpha_2} + \cdots + n_k b_{\alpha_k} \in \bigoplus_{\alpha<\mathfrak{c}} H_\alpha.$$

要证明 $\langle h \rangle$在 G中稠密，只需验证 h作为同态 $h : X \to \mathbb{T}$具有平凡核。

令 $x \in \ker h$。于是

$$0 = h(x) = \sum_{i=1}^{k} n_i b_{\alpha_i}(x).$$

由于 $b_{\alpha_i}(x) \in Q_{\alpha_i}$ 且子空间 Q_α 线性无关，这个等式蕴含 $x = 0$。因此$\ker h = \{0\}$，证明完毕。□

注记 3.7. 上述引理立即表明，对于每个真闭子群 K（属于 G），族 $\{H_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{K\}$ 仍然独立。令 $\pi : G \to G/K$ 为典范投影。则族 $\{\pi(H_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 仍然独立。

因此，对于任意满足 $|P| < \mathfrak{c}$的子群 $P \leq G/K$，存在 $\alpha < \mathfrak{c}$ 使得

$$\pi(H_\alpha) \cap P = \{0\}.$$

等价地，

$$H_\alpha \cap \pi^{-1}(P) \subseteq K.$$

由于 $K \cap H_\alpha = \{0\}$，这意味着

$$H_\alpha \cap \pi^{-1}(P) = \{0\}.$$

现在我们考虑 [11] 中提出的以下问题。

问题 3.8. 每个可分连通紧群都是 d-独立的吗？

我们的下一个目标是肯定地回答这个问题。证明分两步进行。首先，我们将问题化归到李群的情形。其次，我们在这一情形下证明所需结论。

这里，单连通李群 指没有非平凡真连通闭正规子群的连通实李群。这样的群未必是拓扑单群，因为它们可能有非平凡（但离散的）中心。全文中， $Z(G)$ 表示群 G 的中心。

命题3.9. 如果每个单连通紧李群都是 d-独立的，那么每个可分连通紧群都是 d-独立的。

证明。 设 H 是具有 $|H| < \mathfrak{c}$ 的可分连通紧群 G 的一个子群。根据连通紧群的一个众所周知的结构定理 [6, 定理 9。24],

$$G = AG',$$

其中 A 是 t G、 G' 的中心的单位连通分支是 G 的导出子群，一个 d

$$\Delta := A \cap G'$$

是全不连通的。

此外，存在一族 $\{S_i : i \in I\}$ 单连通紧李群，其$|I| \leq w(G) \leq \mathfrak{c}$，以及一个商同态

$$\pi : \prod_{i\in I} S_i \longrightarrow G'$$

使得

$$\ker \pi \leq \pi^{-1}(\Delta) \leq \prod_{i\in I} Z(S_i) =: Z.$$

Let

$$P = \pi^{-1}(AH \cap G'),$$

并对每个 $i \in I$，令 P_i 为 P到 S_i的投影。我们声称，对每个 $i \in I$，都有 $|P_i| < \mathfrak{c}$。事实上，

$$P/Z \cong (AH \cap G')/\pi(Z)$$

是.....的商群

$$(AH \cap G')/\Delta \cong AH/A,$$

的商群，其基数为 $< \mathfrak{c}$。由于每个 $Z(S_i)$ 都是有限的，因此

$$P/\prod_{j\in I\setminus\{i\}} Z(S_j)$$

的基数也为 $< \mathfrak{c}$。由于投影 $P \to P_i$ 的核包含 $\prod_{j\in I\setminus\{i\}} Z(S_j)$，故得证。因此，对所有 i，都有 $|P_i| < \mathfrak{c}$。

根据假 对于每个 $i \in I$，存在一个可数稠密子群 $D_i \leq S_i$，使得 t

$$D_i \cap P_i Z(S_i) = \{1_{S_i}\}.$$

Let

$$D = \prod_{i\in I} D_i.$$

则 D 是可分的，并且

$$D \cap PZ \leq D \cap \prod_{i \in I} P_i Z(S_i) = \{1\}.$$

由于

$$\pi(D) \cap AH = \pi\big(D \cap \pi^{-1}(AH \cap G')\big) \leq \pi(D \cap PZ),$$

我们得到

$$\pi(D) \cap AH = \{1_G\}.$$

取 $\pi(D)$ 的一个可数稠密子群 E。若 A 是平凡的，则 $H = AH$，结论立即成立。此后，我们假设 A 非平凡。

接下来，考虑商同态

$$\psi : G \to G/G' \cong A/\Delta,$$

其中，当 $x = ag$ 满足 $a \in A$ 且 $g \in G'$ 时，同构由 $xG' = a\Delta$ 给出。于是

$$(HG' \cap A)/\Delta \cong HG'/G'$$

基数为 $< \mathfrak{c}$。根据备注 3.7，群 A 有一个稠密循环子群 B 使得 t

$$B \cap HG' = \{1_G\}.$$

最后，令

$$L = BE.$$

那么 L 是可数的，且在 G 中稠密。

取满足 $a \in B \leq A$ 和 $g \in E \leq G'$ 的 $x = ag \in H \cap L$。那么

$$a = xg^{-1} \in HG' \cap B = \{1_G\}, \quad g = a^{-1}x \in AH \cap E = \{1_G\}.$$

因此 $H \cap L = \{1_G\}$。 □

注意，每个 S_i 实际上都是单连通的。因此，上述命题将问题3.8 归结为以下问题。

问题 3.10。 每个单连通紧单李群 d都是独立的吗 $t?$

首先回顾一些本节中会用到的李群基本事实。连通紧李群的一个极大环面是一个极大的子群，它与圆群 $\mathbb{T}$ 的有限次幂拓扑同构。众所周知，连通紧李群的每个元素都属于某个极大环面，并且所有极大环面彼此共轭。

我们先证明一个线性代数引理，稍后将用它来排除由“过少”的真子群构成的覆盖。

引理 3.11。 设 V 是一个维数为 n 的实向量空间，其中 $1 \leq n \in \mathbb{N}$。那么，V 不能被少于 $\mathfrak{c}$ 个维数至多为 $n-1$ 的子空间覆盖。

证明。 我们对 $n = \dim V$ 进行归纳法论证。当 $n = 1$ 时，结论是平凡的。

假设该断言对维数至多为 $n-1$ 的所有向量空间都成立，并令 $\dim V = n$。反设存在一个由 V 的子空间组成的族 $\{V_i : i \in I\}$，使得 $|I| < \mathfrak{c}$，且对每个 $i \in I$，$\dim V_i \leq n-1$，并且

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i.$$

任取 V 的一个 $(n-1)$ 维子空间 U，并定义 $U_i = V_i \cap U$。那么

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

B由归纳假设，存在 $i \in I$ 使得 $U \subseteq U_i$，因此 $U \subseteq V_i$。

由于 V 中有 $\mathfrak{c}$ 个两两不同的 $(n-1)$ 维子空间，因此某个 V_i 至少包含两个不同的 $(n-1)$ 维子空间。这意味着 $\dim V_i \geq n$，矛盾。□

接下来，我们记录一个关于陪集的交的简单群论观察。

引理 3.12. 设 G 是一个群，A、B 是 G 的子群。对于任意 $g \in G$，若 $A \cap gB \neq \emptyset$，则

$$A \cap gB = a(A \cap B)$$

对于某个 $a \in A$。

证明。取 $a \in A \cap gB$。于是 $aB = gB$，因此

$$A \cap gB = A \cap aB = aA \cap aB = a(A \cap B).$$ □

结合前两个引理，我们得到关于连通李群的以下覆盖结果。

推论 3.13。设 G 是一个连通李群。若 $\{H_i : i \in I\}$ 是真闭子群的一个族（指标不必是单射的），并且存在元素 $g_i \in G$ 使得

$$G = \bigcup_{i\in I} g_i H_i,$$

则 $|I| \geq \mathfrak{c}$。

证明。假设 $|I| < \mathfrak{c}$。令 $\mathfrak{g}$ 为 G的李代数，并将 $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ 记为指数映射。

对每个 $i \in I$，令

$$\mathfrak{h}_i = \{X \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}X) \subseteq H_i\}.$$

于是 $\mathfrak{h}_i$ 是 H_i 的李代数（参见 [7, 第 8 节3]）。由于 H_i 是真子群，$\mathfrak{h}_i \neq \mathfrak{g}$。

取一个非零元素 $X \in \mathfrak{g}$。由于

$$\exp_G(\mathbb{R}X) \subseteq \bigcup_{i\in I} g_i H_i$$

且 $|I| < \mathfrak{c}$，存在 $i \in I$，使得 $\exp_G(\mathbb{R}X) \cap g_i H_i$ 是不可数的。

由引理 3.12，

$$\exp_G(\mathbb{R}X) \cap g_i H_i = \exp_G((t + D)X)$$

对某个 $t \in \mathbb{R}$ 及某个不可数子群 $D \leq \mathbb{R}$ 成立。由于 $t + D$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，且 $g_i H_i$ 是闭的，我们得出

$$\exp_G(\mathbb{R}X) \subseteq g_i H_i,$$

因此 $g_i H_i = H_i$ 且 $X \in \mathfrak{h}_i$。

因此，

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{h}_i,$$

与引理3.11矛盾。 □

现在我们将前面的结果应用于紧李群中元素的共轭类。

引理 3.14。 设 G 是一个连通紧李群。若 $x \in G$ 不是中心的，且 T 是 G的极大环面，则

$$X := \{g \in G : \ gxg^{-1} \in T\}$$

是某个 G 的真闭子群的有限个陪集的并。

证明。 我们先讨论 $x \in T$ 的情形。

Let

$$N_G(T) = \{g \in G : \ gT = Tg\}$$

是 G 中 T 的正规化子，并令

$$W(G,T) := N_G(T)/T$$

表示相对于 T 的 G（解析）Weyl 群。众所周知， $W(G,\ T)$ 是有限的（参见 [13, 定理 6.36(e)]）。因此，存在一个有限子集 $F \subseteq N_G(T)$，使得

$$N_G(T) = FT.$$

令 $g \in X$。由于 gxg^{-1} 和 x 都属于 T，由 [13, 定理 6.36(f)] 可知，存在 $h \in F$，使得

$$hxh^{-1} = gxg^{-1}.$$

等价地，

$$h^{-1}gx = xh^{-1}g,$$

这意味着

$$h^{-1}g \in Z_G(x) := \{y \in G : \ xy = yx\}.$$

由于 x 非中心的，其中心化子 $Z_G(x)$ 是 G 的真闭子群。因此，

$$X = \bigcup_{h \in F} hZ_G(x)$$

是真闭子群 $Z_G(a)$ 的有限个陪集的并。

现在考虑一般情形。选取 $h \in G$ 使得 $x \in hTh^{-1} =: S$，它仍然是 G 的一个极大环面。于是

$$gxg^{-1} \in T \quad \text{if and only if} \quad (hg)x(hg)^{-1} \in S.$$

将上述论证应用于极大环面 S，可知集合 hX 是真闭子群 $Z_G(x)$ 的有限个陪集的并。因此， X 本身也具有相同性质。□

现在我们可以证明本节的主要结果，表明所有连通紧致非阿贝尔李群都具有 d-独立性。

命题 3.15。 每个连通紧致非阿贝尔李群都是 d-独立的。

证明。 设 G 是一个连通紧致非阿贝尔李群，且 T是 G的一个极大环面。根据 [6, 推论 6.87], ，群 G 存在一个由两个元素生成的稠密自由子群 F。显然，对每个 $g \in G$，共轭子群 gFg^{-1} 仍是 G的一个稠密自由子群。

关键在于证明，可以选取这样的一个共轭子群，使其避开 G的任意给定“较小”子集。

断言1。 对于每个满足 $|C| < \mathfrak{c}$的子集 $C \subseteq G$ ， 集合

$$\left\{g \in G : \ gFg^{-1} \cap \bigcup_{c \in C} cTc^{-1} \neq \{1\}\right\}$$

是 G 的真子集。

断言的证明 *1.* 我们可以写成

$$\Big\{g\in G:\ gFg^{-1}\cap\bigcup_{c\in C}cTc^{-1}\neq\{1\}\Big\}=\bigcup_{a\in F\setminus\{1\}}\bigcup_{c\in C}\{g\in G:\ gag^{-1}\in cTc^{-1}\}.$$

设定 $a\in F\setminus\{1\}$ 和 $c\in C$。由引理 3.14，集合

$$\{g\in G:\ gag^{-1}\in cTc^{-1}\}$$

是某个真闭子群的陪集的有限并，其中该真闭子群是 G 的子群。因此，所讨论的整个集合是少于 $\mathfrak{c}$ 个陪集的并，这些陪集属于（可能不同的） G 的真闭子群。

注意 F 是无中心的，因此没有 $a\in F\setminus\{1\}$ 能在 G中成为中心的。由推论 3.13，这样的并不可能覆盖 G。因此，如所声称的，上述集合是 G的真子集。□

现在令 H 为 G 的任意子群，且满足 $|H|<\mathfrak{c}$。由于 G 中的每个元素都包含在某个极大环面中，且所有极大环面都共轭，因此存在一个子集 $C\subseteq G$，满足$|C|<\mathfrak{c}$，使得

$$H\subseteq\bigcup_{c\in C}cTc^{-1}.$$

由断言 1，集合

$$\Big\{g\in G:\ gFg^{-1}\cap\bigcup_{c\in C}cTc^{-1}\neq\{1\}\Big\}$$

是 G 的真子集。因此，我们可以选择 $g\in G$，使得

$$gFg^{-1}\cap\bigcup_{c\in C}cTc^{-1}=\{1\}.$$

由于 H 包含于 $\bigcup_{c\in C}cTc^{-1}$，因此

$$gFg^{-1}\cap H=\{1\}.$$

最后，注意到 gFg^{-1} 是可数的，且在 G 中稠密。这表明 G 是 d-独立的。 □

结合命题3.9 和3.15，我们得到主要结果：

定理3.16. 每个可分连通紧群都是 d-独立的。

Acknowledgements

作者谨向 He Wei教授 致以诚挚谢意，感谢他进行富有见地的讨论。本研究得到国家自然科学基金委员会资助，项目编号为12301089和12271258。

References

[1] L. Außenhofer、D. Dikranjan 和 A. Giordano Bruno，拓扑群与 *Pontryagin–van Kampen* 对偶——导论，De Gruyter 数学研究丛书，第 83 卷，De Gruyter，柏林，2022年。[2] A.V. Arhangel'skiĭ 和 M.G. Tkachenko，拓扑群与相关结构，Atlantis 数学研究丛书，第 1 卷，Atlantis 出版社，巴黎 / 世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克，2008年。[3] W.W. Comfort 和 G.L. Itzkowitz，拓扑群中的稠密度特征，《数学年刊》，**226** (1977年)，223–227。[4] D. Dikranjan 和 D.Shakhmatov，关于连通群拓扑的 Markov 问题的完整解答，《数学进展》，**286**(2016年)，286–307。[5] L. Fuchs，无限阿贝尔群，第 I 卷，纯粹与应用数学，第 36 卷，学术出版社，纽约—伦敦，1970年。[6] K.H. Hofmann 和 S.A. Morris，紧群的结构，第 4 版（修订并增补），Walter de Gruyter 出版公司，柏林，2020年。

[7] J. Hilgert 和 K.-H.Neeb，李群的结构与几何，Springer 数学专著，纽约，2012年。[8] G.L. Itzkowitz，关于紧拓扑群的稠密度特征，*Fundam. Math.*，**75**(1972年)，201–203。[9] A.G. Leiderman、S.A. Morris 和 M.G. Tkachenko，拓扑群子群的稠密度特征，*Trans. Amer. Math. Soc.*，**369**(2017年)，第 8 期，5645–5664。[10] A.G. Leiderman 和 M.G. Tkachenko，所有闭子群均可分的拓扑群的乘积，*Topology Appl.*，**241** (2018年)，89–101。[11] R. M´arquez 和 M.G. Tkachenko， D-独立拓扑群，*Topology Appl.*，**300** (2021年)，论文编号 107761。[12] D. Peng，所有稠密子群均可分的局部紧群，*Forum Math.*，**37** (2025年)，第 6 期，1715–1726。[13] M.R. Sepanski，紧李群，Grad. Texts in Math. 235，Springer，纽约，2007年。[14] Z. Xiao、I. S´anchez 和 M.G. Tkachenko，闭子群可分且乘积运算具有相应性质的拓扑群，*Topology Appl.*，**259** (2019年)，365–377。。

Institute of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210024, China电子邮箱地址：2715383574@qq.com

Institute of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210024, China电子邮箱地址：pengdk10@lzu.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Jiangsu Second Normal University, 211222, China电子邮箱地址：gaozhang0810@hotmail.com