arXiv:2601.03033v1 [physics.flu-dyn] 6 Jan 2026

基于统计态动力学的湍流埃克曼层研究

Eojin Kim†[1], Brian F. Farrell[1]

[1]哈佛大学地球与行星科学系，美国马萨诸塞州剑桥市 02138

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

流向滚涡与条带结构（RSS）是大气和海洋行星边界层（PBL）以及实验室尺度壁面剪切流中广泛存在的显著特征。尽管这些系统中的结构相似，但形成并维持 RSS 的机制仍存在争议。本研究表明，先前利用纳维–斯托克斯方程的统计态动力学（SSD）表述，在壁面剪切流中发现的同一种湍流维持机制（Farrell & Ioannou 2012；Farrell 等 2017），在埃克曼层中同样发挥作用。我们将此前用于研究壁面剪切流中滚涡形成的基于统计状态动力学的稳定性分析方法推广至埃克曼层，结果表明，壁面湍流中著名的雷诺应力驱动的不稳定性机制与拐点不稳定性共同作用，在埃克曼层中生成并维持 RSS。这些结果增进了我们对湍流埃克曼层中 RSS 形成与演化机制的理解，并在地球物理埃克曼层湍流与工程尺度剪切流湍流之间建立了基础性联系。

关键词：统计态动力学、S3T、拐点不稳定性、埃克曼层动力学

1. 引言

加深对行星边界层（PBL）中湍流的认识十分重要，因为地表与更深层大气和海洋之间的动量及示踪物交换，受行星边界层湍流动力学所驱动的输运过程支配。热带气旋（TC）的动力学，尤其是快速增强的发生，是依赖这些输运过程的现象之一；快速增强的基本机制在理论上仍难以解释。此外，气旋还会造成大范围破坏，其途径包括极端地表风、风应力驱动的风暴潮，以及洪水分布；这些都深受行星边界层内形成的大尺度相干速度结构影响。从弗兰飓风最初的多普勒雷达观测开始（Wurman & Winslow 1998），人们逐渐普遍认识到，热带气旋边界层（TCBL）包含大量相干边界层结构，其中涡卷条带结构（RSS）与平均风方向高度一致。Wurman & Winslow（1998）展示的弗兰飓风涡卷多普勒雷达观测，呈现了热带气旋边界层中的RSS，但其尺度处于观测分布中偏小的一端。这些涡卷的水平波长约为600 m，滚涡速度约为4 m s^{-1}，涡卷两侧相关的方位风速变化约为30 m s^{-1}。热带气旋边界层中更典型的RSS具有多种尺度和强度，其

† 通讯邮箱：ekim@g.harvard.edu

平均特征为：水平波长约1.4 km，深度近700 m，滚涡速度约3 ms^{-1}，涡卷两侧的方位风速变化约为14 m s^{-1}（Morrison 等 2005）。

尽管热带气旋边界层（TCBL）的观测表明，内核区和外核区均存在滚动云街（RSS），但埃克曼层中的 RSS 形成这一相关问题——在该层中，地转平衡取代了梯度风平衡——为拓展我们对行星边界层（PBL）中 RSS 形成的认识提供了一个颇具吸引力的初步框架。我们预计，两种环境中的 RSS 形成机制相似，而 TCBL 的特点是内核区存在一系列惯性不稳定。在内核区和惯性流形仍保持稳定的外核区，滚动云街介导的输送都会影响加深过程。鉴于埃克曼层湍流问题中 RSS 形成与平衡的内在重要性以及相对简单性，我们首先研究科里奥利力平衡的埃克曼边界层；该边界层的径向风廓线包含一个能够支持 RSS 不稳定性的拐点（Lilly，1966；Brown，1980）。尽管这一问题已得到广泛研究，但试图仅通过埃克曼层不稳定性解释 PBL 中观测到的 RSS，仍面临 Brown 早在 1970 年指出的困难：“……要想成功……分析，最严重的障碍或许在于，埃克曼（1905）所求得的基本平衡收支未能得到观测验证……”同一研究的图 1b 中，与滚涡形成相关的探空结果（云街观测也表明存在滚涡）显示出近乎中性的稳定性，且风向随高度变化极小。观测到的气流与层流埃克曼剖面相差甚远，因此令人质疑，基于该剖面的稳定性分析是否适用于解释平衡湍流行星边界层中观测到的滚动结构。人们早已认识到，仅在层流埃克曼解附近线性化的方程中识别出滚动型不稳定，并不足以解释湍流平衡边界层中出现的涡卷。尽管对 RSS 动力学的解析理解仍不完整，近期的大涡模拟（LES）研究（Gao 和 Ginis，2014年、2015年）表明，模拟得到的 TCBL 中 RSS 动力学与观测存在显著差异。这些发现凸显了进一步加深对 PBL 中 RSS 动力学认识的必要性。

尽管理论和模拟研究通常将中性稳定层结中的初始滚涡形成归因于拐点不稳定性（Gao 和 Ginis，2014），但这些研究并未提供任何指导，说明如何将有限振幅非线性统计平衡湍流滚动云街状态与层流埃克曼剖面的线性不稳定性联系起来，而层流埃克曼剖面本身并未被观测到。要说明滚动云街对行星边界层的影响，必须全面理解滚动云街湍流动力学，包括将其起源与平衡过程联系起来。

壁面湍流中的平衡平均剪切流与观测到的平均湍流行星边界层剪切流相似，通常都呈线性稳定。然而，流向RSS会在整个边界层内产生强烈的动量输运和混合，这与壁面剪切流湍流中的情况相似（Kline 等1967）（Smith和Metzler，1983年）。由于RSS不是层流剪切流线性化纳维–斯托克斯方程（NSE）的不稳定模态，因此，直到最优扰动分析发展之后，其在壁面湍流中的普遍存在才得到解析解释；该分析表明，RSS对应于最优瞬态增长的结构（Butler和Farrell，1992年；Reddy和Henningson，1993年）。后来，人们发现RSS在湍流剪切流中是不稳定的；当纳维–斯托克斯方程以统计态动力学（SSD）框架表示时，这一点便显而易见。这种不稳定的RSS通过一种机制产生：与微弱维持、无结构的

背景湍流场相关联的雷诺应力，被扰动 RSS 模态系统地组织起来，驱动涡卷结构，使其朝向恰当，从而维持构成SSD中RSS模态不稳定性基础的抬升机制（Farrell & Ioannou 2012；Farrell 等2017）。研究发现，这些具有RSS结构的SSD模态不稳定性会达到不动点，形成有限振幅的RSS构型；或者，视参数取值而定，转变为混沌吸引子动力学，包括自持湍流态（Farrell & Ioannou 2012）。

基于 SSD 的分析成功阐明了壁面剪切流中 RSS 的动力学及其维持机制。在此基础上，近年来，SSD 理论进一步拓展至地球物理流中的 RSS 动力学研究，包括对朗缪尔湍流（Kim & Farrell 2025a）和埃迪锋面湍流（Kim & Farrell 2025b、2025c）的应用。如上所述，传统研究将 RSS 的起源归因于线性不稳定性，却基本未能解释统计平均的湍流态如何形成并维持。Foster（2005）曾尝试填补这一空白，采用弱非线性朗道分析得到了一个非线性平衡态；然而，这一平衡态与观测到的湍流平均态存在显著差异。SSD 理论的优势在于，它自然提供了一个统一框架，既纳入传统的拐点不稳定机制，也纳入 SSD 不稳定机制，从而协同描述这两种不稳定性。重要的是，SSD 本身包含了促成这些不稳定性非线性平衡的机制，因此能够基于 SSD，对 PBL 中 RSS 的起源及其非线性统计平均平衡态进行全面分析。PBL 中观测到的湍流平均速度廓线是一种特定的非线性平衡，它是从无穷多个候选稳定廓线中选出的一个廓线。由于 SSD 方程是非线性的，它们既能捕捉不稳定性的起始，也能捕捉从这一无穷多种可能的稳定态中唯一涌现的特定统计稳态。此外，由于 SSD 平衡态包含平均廓线及其对应的脉动协方差，因此能同时确定该廓线及维持它的通量。

在本研究中，我们将 SSD 理论扩展至行星边界层的埃克曼层，以考察 RSS 动力学，包括 RSS 的初始发展、平衡平均 RSS 的建立、自维持湍流边界层状态得以持续的条件、统计平均脉动协方差的形成，以及这些协方差对输运的影响，尤其是对动量和水汽输运的影响。

2. 行星边界层的控制方程

我们使用坐标 x、y 和 z 考察湍流边界层的动力学，它们分别表示流向、横向和展向。相应的速度分量记为 u、v 和 w，单位向量分别记为 i、j 和 k。控制方程如下：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p - 2\Omega\hat{j}\times\mathbf{u} + \nu\Delta\mathbf{u} \tag{2.1}$$

其中 $\Delta := (\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz})$，$\mathbf{u} = u\hat{}i + v\hat{}j + w\hat{}k$，$\nu$ 表示运动黏度，Ω 表示给定纬度处的行星自转速率。

在行星边界层顶部恢复地转平衡

$$2\Omega\hat{y} \times \mathbf{u}_G = -\nabla p \tag{2.2}$$

ˆ其中 $\mathbf{u}_G = U_G i$。行星边界层的适当边界条件是：在下边界处速度为零，且随着高度趋于无穷大，速度趋近于地转风速 U_G。

$$\mathbf{u}(y=0) = 0, \mathbf{u}(y=\infty) = U_G\hat{i} \tag{2.3}$$

在没有背景湍流的情况下，行星边界层中的层流平衡由扩散、科里奥利力和气压梯度力之间的三方动量平衡维持：

$$2\Omega\hat{y} \times \mathbf{u}_e = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}_e \tag{2.4}$$

所得的廓线通常称为层流埃克曼层，其表达式为：

$$U_e(y) = U_G(-e^{-y/D}cos(\frac{y}{D}) + 1) \tag{2.5}$$

$$V_e(y) = 0 \tag{2.6}$$

$$W_e(y) = U_G(-e^{-y/D}sin(\frac{y}{D})) \tag{2.7}$$

其中， $D = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$ 定义了行星边界层的特征长度尺度。

无量纲数为：

$$Re = \frac{U_G D}{\nu} = \frac{U_G}{\sqrt{\nu\Omega}}, Ro = \frac{U_G}{2\Omega D} = \frac{1}{2}\frac{U_G}{\sqrt{\nu\Omega}} = \frac{1}{2}Re \tag{2.8}$$

无量纲控制方程为：

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p - \frac{2}{Re}\hat{y} \times \mathbf{u} + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u} \tag{2.9}$$

所得的平衡层流埃克曼层廓线为：

$$U_e(y) = -e^{-y}cos(y) + 1 \tag{2.10}$$

$$V_e(y) = 0 \tag{2.11}$$

$$W_e(y) = -e^{-y}sin(y) \tag{2.12}$$

我们在流向（x）和展向（z）均施加周期性边界条件。在壁法向（y）上，顶部施加无应力边界条件，底部施加无滑移边界条件。

为预期 RSS 形成，坐标系逆时针旋转 $\theta = \frac{15}{180}\pi$ (15 degrees)，与观测到的滚轴相对于地转方向的 $O(10^\circ - 30^\circ)$ 偏转一致

这一偏转见于观测（LeMone 1973；Foster 2013；Gerling 1986；Weckwтher等1999；Beluˇsi´c 等2015；Tang 等2021）和数值模拟（Lappen & Randall 2005；Dubos 等2008；Esau 2012）。除非另有明确说明，以下分析均在该旋转坐标系中进行。

旋转坐标系中的埃克曼层解为：

$$U_e(y) = cos(\theta) - e^{-y}cos(y+\theta) \tag{2.13}$$

$$V_e(y) = 0 \tag{2.14}$$

$$W_e(y) = sin(\theta) - e^{-y}sin(y+\theta) \tag{2.15}$$

3. 建立行星边界层的 SSD 方程

为推导 SSD 方程，将变量分解为平均部分和脉动部分。因此，速度场 $\mathbf{u}$可写为其平均分量与脉动分量之和：

$$\mathbf{u}(x,y,z,t) = \mathbf{U}(y,z,t) + \mathbf{u}'(x,y,z,t) \tag{3.1}$$

我们用上横线表示雷诺平均算子，并用大写字母表示雷诺平均变量。在一个坐标系中定义雷诺平均，其中 x 方向相对于地转风方向逆时针旋转 15°。

$$\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}]_x = \mathbf{U} \tag{3.2}$$

通过选择一个相对于地转风方向旋转的雷诺平均方向，我们预期 RSS不稳定性会在相应的展向上打破模型对称性，并且通过这一选择，可以将该不稳定性及其有限振幅平衡态分离到一阶累积量中。随后，对方程（2.9）进行流向平均，即可得到平均速度 $\mathbf{U}$ 的方程。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_y\Psi_z - U_z\Psi_y - \partial_y\overline{u'v'} - \partial_z\overline{u'w'} + \Delta_1\frac{U}{Re} - \frac{2}{Re}\Psi_y + \frac{2}{Re}sin(\theta) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial(\Delta_1\Psi)}{\partial t} = (\partial_{yy}-\partial_{zz})(\Psi_y\Psi_z - \overline{v'w'}) - \partial_{yz}(\Psi_y^2 - \Psi_z^2 + \overline{w'^2} - \overline{v'^2}) + \Delta_1\Delta_1\frac{\Psi}{Re} + \frac{2}{Re}U_y \tag{3.4}$$

其中 $\Delta_1 := (\partial_{yy} + \partial_{zz})$；我们利用展向/横流平面的无散性，将其表示为 我们使用流函数表示展向速度和横流速度，即 $W = \frac{\partial\Psi}{\partial y}$ 和 $V = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}$。通过表示

流向平均速度分量关于 U 和 Ψ的形式，雷诺应力结构被限制在一阶累积量中。

脉动速度动力学以壁法向速度和壁法向涡量表示，这种表示方式天然满足速度场的无散性（Schmid & Henningson 2001）。通过逐分量地从相应的完整方程（2.9）中减去平均流方程（3.3）和（3.4），即可得到脉动速度分量 $\mathbf{u}'$ 的方程。

将脉动壁法向速度和涡量分解为流向波数分量，得

$$v'(x,y,z,t) = \sum_k v'_k(y,z,t)e^{ikx} \tag{3.5}$$

$$\eta'(x,y,z,t) = \sum_k \eta'_k(y,z,t)e^{ikx} \tag{3.6}$$

现在，我们可以将壁法向速度–涡量形式的脉动速度方程并入扰动方程，从而得到以下紧凑形式：

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} = A\phi_k + \xi_k \tag{3.7}$$

其中，脉动状态向量为：

$$\phi_k = \begin{bmatrix} v'_k \\ \eta'_k \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

并且，我们用随机噪声过程 $\xi(t)$ 对涨落–涨落非线性项进行了参数化。需要指出的是，将此模型应用于物理问题时，该随机噪声过程还包含湍流涨落的任何外部来源。

动力学矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$A_{11} = L_{OS}(U) + \Delta^{-1}(LV_{11}(V) + LW_{11}(W)) \tag{3.10}$$

$$A_{12} = L_{C1}(U) + \Delta^{-1}(LV_{12}(V) + LW_{12}(W)) - \Delta^{-1}(\frac{2}{Re}\partial_y) \tag{3.11}$$

$$A_{21} = L_{C2}(U) + LV_{21}(V) + LW_{21}(W) + \frac{2}{Re}\partial_y \tag{3.12}$$

$$A_{22} = L_{SQ}(U) + LV_{22}(V) + LW_{22}(W) \tag{3.13}$$

其中 $\Delta_2 = (\partial_{xx} + \partial_{zz})$。

$L_{OS}(U)$ 表示奥尔-索末菲算子，其中 U 是流向平均速度。有关动力学的奥尔-索末菲–斯夸尔公式的详细说明，请参见 Farrell 与 Ioannou（2012）。方程 (3.10)、(3.11)、(3.12) 和 (3.13) 的各个分量详见附录13.1。

根据 Farrell & Ioannou（2019）提出的 SSD 表述，仅使用算子 A 和具有空间协方差 Q 的时间白噪声随机强迫$=\langle\xi\xi^\dagger\rangle$，即可推导出集合平均扰动协方差 C所满足的确定性李雅普诺夫方程。

$$\frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial t} = A\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k A^\dagger + \epsilon\mathbf{Q} \tag{3.14}$$

$$\mathbf{C}_k = \phi_k \phi_k^\dagger \tag{3.15}$$

其中，$\dagger$ 表示厄米转置。我们强调，正是这一随时间变化的李雅普诺夫方程的存在，使我们能够获得确定性SSD。

平均方程 (3.3) 和 (3.4) 中出现的雷诺应力项，可通过对涨落的协方差$\mathbf{C}_k$应用线性算子$\mathbf{L}_{RS}$得到（参见 Farrell & Ioannou 2012）。考虑到这一点，平均态方程可以简洁地写为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial t} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\Gamma}) + \sum_k \mathbf{L}_{RS}\mathbf{C}_k \tag{3.16}$$

其中，$\boldsymbol{\Gamma} = [U, \Psi]^T$和 $\boldsymbol{G}$ 定义如下：

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\Gamma}) = \begin{bmatrix} (U_y)\Psi_z - U_z\Psi_y + \Delta_1\frac{U}{Re} - \frac{2}{Re}\Psi_y + \frac{2}{Re}sin(\theta) \\ \Delta_1^{-1}[(\partial_{yy} - \partial_{zz})(\Psi_y\Psi_z) - \partial_{yz}(\Psi_y^2 - \Psi_z^2) + \Delta_1\Delta_1\frac{\Psi}{Re} + \frac{2}{Re}U_y] \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

涨落应力在每个 k 处产生的强迫为：

$$\mathbf{L}_{RS}\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} -\partial_y\overline{u'v'}|_k - \partial_z\overline{u'w'}|_k \\ \Delta_1^{-1}[(\partial_{yy} - \partial_{zz})(-\overline{v'w'}|_k) - \partial_{yz}(\overline{w'^2}|_k - \overline{v'^2}|_k)] \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

其中，扰动应力算子 $\mathbf{L}_{RS}$ 由以下线性算子构成：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^k_{u'} &= [-ik\Delta_2^{-1}\partial_y, \Delta_2^{-1}\partial_z] \\ \mathbf{L}^k_{v'} &= [I, 0] \\ \mathbf{L}^k_{w'} &= [-\Delta_2^{-1}\partial_{yz}, -ik\Delta_2^{-1}]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

例如，当在 y 和 z 方向都采用基于网格的方法时：

$$\overline{u'v'}|_k = diag(\mathbf{L}^k_{u'}\mathbf{C}_k\mathbf{L}^{k\dagger}_{v'}) \tag{3.20}$$

其他应力项也以类似的方式表示。请注意，应力项$\sum_k \mathbf{L}_{RS}\mathbf{C}_k$ 关于 $\mathbf{C}_k$是线性的。

为进行 RSS 稳定性分析，我们采用一种称为 S3T 的二阶闭合 SSD 公式。该 SSD 框架包含一阶和二阶累积量，并辅以随机闭合。S3T 方程可简洁地表示为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial t} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\Gamma}) + \sum_k \mathbf{L}_{RS}\mathbf{C}_k \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial t} = \mathbf{A}\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k\mathbf{A}^\dagger + \epsilon\mathbf{Q} \tag{3.22}$$

尽管 Q有多种可能的选择，但我们的目标是尽可能少地影响动力学，因此选择使其在动能上为白噪声，即在动能上对每个自由度施加相同的激励，同时反映背景湍流随距下边界距离增加而衰减这一符合物理预期的特征。为此，选择如下的 $\mathbf{Q}$（Farrell & Ioannou 2012）：

$$\mathbf{Q} = S_D(y) \cdot \mathbf{M}^{-1} \tag{3.23}$$

$$S_D(y) = \frac{1}{2}((\tanh(y + 2\pi) - \tanh(y - 2\pi)) \tag{3.24}$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{L}^{k\dagger}_{u'}\mathbf{L}^k_{u'} + \mathbf{L}^{k\dagger}_{v'}\mathbf{L}^k_{v'} + \mathbf{L}^{k\dagger}_{w'}\mathbf{L}^k_{w'})/(2 * Ny * Nz) \tag{3.25}$$

至此，SSD 的公式构建完成。现在我们转而分析该系统的稳定性。

4. S3T稳定性公式

为研究稳定性，我们首先需要确定平衡态，使方程 (3.21) 和 (3.22) 的时间导数为零：

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{bmatrix} U_e \\ \Psi_e \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{C}_e = \sum_k \mathbf{C}_{ke} \tag{4.2}$$

通过对这些平衡态附近的（3.21）和（3.22）进行线性化，可以得到SSD平衡态 $\boldsymbol{\Gamma}_e$ 和 $\sum_k \boldsymbol{C}_{ke}$的稳定性特性。将背景湍流参数设为 $\epsilon = 0$ ，即可恢复层流埃克曼层螺旋解（2.13）、（2.14）和（2.15）。随着 ϵ 增大，平衡速度 U_e（y）和流函数 Ψ_e（y）将偏离层流埃克曼螺旋。因此，SSD平衡态（$\boldsymbol{\Gamma}_e$，$\sum_k \boldsymbol{C}_{ke}$）（$\epsilon$）

取决于背景湍流强度参数 ϵ。围绕SSD平衡态（$\boldsymbol{\Gamma}_e$, $\sum_k \boldsymbol{C}_{ke}$）线性化得到的线性扰动方程为:

$$\frac{\partial(\delta\boldsymbol{\Gamma})}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \Gamma_i}|_{\boldsymbol{\Gamma}_e}\delta\Gamma_i + \sum_k \boldsymbol{L}_{RS}\delta\boldsymbol{C}_k \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial(\delta\boldsymbol{C}_k)}{\partial t} = \boldsymbol{A}_{keq}\delta\boldsymbol{C}_k + \delta\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}^\dagger_{keq} + \delta\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{C}_{keq} + \boldsymbol{C}_{keq}\delta\boldsymbol{A}^\dagger_k \tag{4.4}$$

其中

$$\delta\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{\Gamma}_e + \delta\boldsymbol{\Gamma}) - \boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{\Gamma}_e). \tag{4.5}$$

方程 (4.3) 和 (4.4) 构成了线性扰动S3T动力学的表述。我们将行星边界层模型的雷诺数设为 $Re = 300$，使背景湍流激发强度 ϵ 成为唯一的可调参数。矩阵 Q 经过缩放，使得 $\epsilon = 1$ 对应的体积平均均方根扰动速度等于最大地转速度幅值的 1%。具体而言，Q 的选取满足 $\sqrt{2\langle E_k\rangle} = 0.01$，其中 $\langle E_k\rangle$ =trace(M_kC_k) 是扰动场的系综平均动能密度，遵循 Farrell & Ioannou (2012) 的定义。

对这一 SSD 稳定性问题的分析揭示了一种 RSS 不稳定性，其本质上不同于常见的流体动力不稳定性。尽管 S3T 框架通过其一阶累积量（即平均流）包含了层流模态不稳定性，但其核心贡献在于揭示了由平均流与涨落相互作用产生的不稳定性流形。这些不稳定性由方程 (4.3) 和 (4.4) 所支配，这两个方程定义了 S3T SSD 的一阶和二阶累积量。从机制上说，当存在流向条带时，背景湍流会受到系统性应变，由此产生的雷诺应力施加力矩，驱动与原始条带对齐的滚向环流，因而这一 RSS 模态流形变得不稳定（Farrell等 2022；Nikolaidis等 2024）。S3T SSD 表述的行星边界层稳定性问题兼顾了经典拐点不稳定性，以及由雷诺应力（RS）力矩反馈驱动的不稳定机制。若将平均方程 (3.21) 与协方差方程分开考察，便可恢复埃克曼层熟知的拐点不稳定性动力学（ Lilly, 1966；Faller & Kaylor 1966）。此前，S3T 框架已揭示 RS 不稳定性机制，并指出在无分层壁面剪切流中，仅由平均流与涨落之间的相互作用就会产生 RSS 不稳定性（Farrell & Ioannou 2012；Farrell 等 2017）。然而，要全面理解湍流行星边界层中的 RSS 动力学，就必须同时纳入平均流方程所描述的经典拐点不稳定性，以及平均流方程与涨落协方差方程耦合后产生的 RS 力矩机制。

5. 湍流行星边界层动力学的 S3T SSD 实现中的 RSS不稳定性

埃克曼层螺旋支持拐点不稳定性，这些不稳定性被认为与埃克曼边界层中RSS的形成和平衡有关。为评估这些模态的影响，我们在此将其抑制，以分离RS力矩不稳定性机制对行星边界层RSS动力学的影响。类似的策略

已用于此前多项湍流涡卷–条带动力学研究中，以抑制层流模态不稳定性（Lozano-Dur´an 等，2019,2021；Kim& Farrell2025b、2025c）。抑制层流模态不稳定性后的S3T动力学表示为：

$$\frac{\partial(\delta \boldsymbol{\Gamma})}{\partial t} = \sum_i [\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \Gamma_i}(\lambda < 0)]_{\boldsymbol{\Gamma}_e} \delta \Gamma_i + \sum_k \mathbf{L}_{RS} \delta \mathbf{C}_k \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial(\delta \mathbf{C}_k)}{\partial t} = \mathbf{A}_{ke}(\lambda < 0)\delta \mathbf{C}_k + \delta \mathbf{C}_k \mathbf{A}_{ke}(\lambda < 0)^\dagger + \delta \mathbf{A}_k \mathbf{C}_{ke} + \mathbf{C}_{ke} \delta \mathbf{A}_k^\dagger \tag{5.2}$$

其中，抑制了模态不稳定性的项分别以 $[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \Gamma_i}(\lambda <0)]_{\boldsymbol{\Gamma}_e}$、$\mathbf{A}(\lambda < 0)_{ke}$ 和 $\mathbf{A}(\lambda < 0)_{ke}^\dagger$表示。

图 1 面板（a）中的蓝线展示了湍流埃克曼层的稳定性图，该图是湍流激励参数 ϵ 的函数，采用 S3T SSD 的线性扰动形式并按照（5.1）（5.2）所示抑制拐点不稳定性而得。黑色虚线表示中性稳定线。红线表示拐点模态的增长率。该稳定性图表明，对于 $\epsilon \approx 4.0$ 所支持的适度背景湍流强度，RS S3T RSS 模态的增长率会达到与拐点模态相同的水平。并且，当 ϵ 进一步增大时，增长率会继续超过拐点模态的增长率。为了理解这两种机制之间可能的相互作用，我们现在取消对拐点不稳定性的抑制，并回到湍流行星边界层的 S3T SSD 实现，即方程（4.3）和（4.4），其中包含拐点不稳定机制和 RS 力矩机制。面板（a）中的橙线展示了湍流埃克曼层的稳定性图，该图是湍流激励参数 ϵ 的函数，采用未抑制拐点不稳定性的 S3T SSD 线性扰动形式而得。这些机制最初协同作用，使层流埃克曼剖面失稳；正如它们的合并增长率高于各自单独增长率的最大值所示。

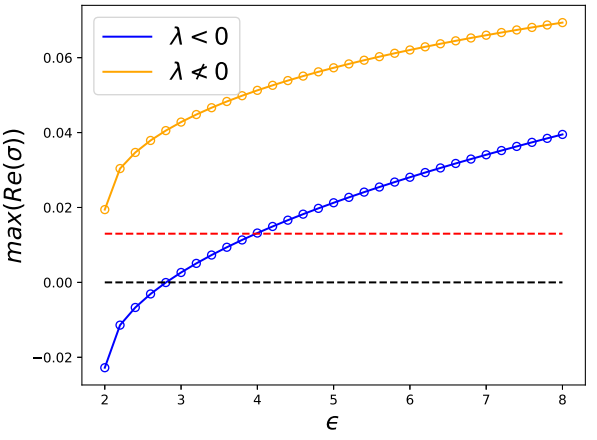
在本节中，我们采用 S3T SSD 的线性扰动分析，研究了行星边界层背景下的 RSS不稳定性。在下一节中，我们将重点转向非线性 S3T SSD 中这些不稳定性的平衡过程。

6. 湍流行星边界层动力学的 S3T SSD实现中的统计平衡态

尽管通过 RSS 形式的特征结构识别不稳定性机制，表明观测到的 RSS 可能源于该机制，但要将不稳定的扰动 RSS 与观测到的 RSS 的有限振幅结构确切联系起来，还需要将分析扩展到由完整 S3T SSD 方程（(3.21) 和 (3.22)）控制的非线性平衡过程。根据参数范围的不同，不稳定性可能平衡到不动点态、时变态或湍流态。此外，湍流态还可能是自维持的，即背景湍流激励参数 ϵ 可以设为零，而湍流仍能持续维持。为总结我们的结果并为后续展示作铺垫，图 2 给出了随 ϵ 变化的平衡结构图。

现在，我们考察该图中的几个动力学重要区域。有限振幅RSS状态区域通常通过考察涨落能量的时间序列来加以区分：

(a)



(b)

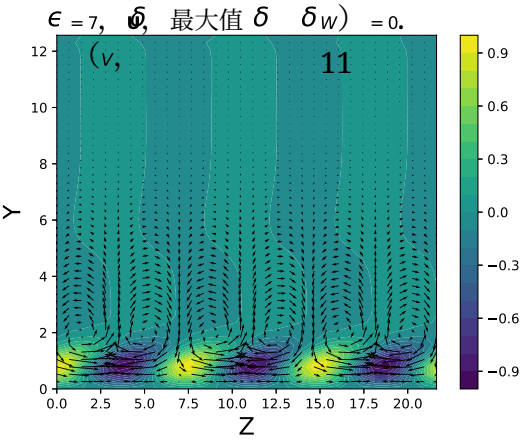


图 1: （a）稳定性图，显示最大增长率 max(Re(σ)) 随背景湍流强度参数 ϵ 的变化，分别对应受抑制（$\lambda < 0$）和未受抑制（$\lambda \geqslant 0$）的拐点模态不稳定性。黑色虚线表示稳定性边界，红色虚线表示纯拐点模态（$\epsilon = 0$）的增长率。（b）未受抑制情况下最不稳定特征模态的流向速度等值线以及展向/横流速度矢量。特征函数经过归一化，使 δU 的最大值为 1。结果显示为 $\epsilon = 7$； $Re = 300$。

$$TKE(t) = \frac{1}{2}[u'^2 + v'^2 + w'^2]_{x,y,z} \tag{6.1}$$

以及通过考察结构的瞬时快照。

固定点 S3T 统计状态动力学平衡态的特征是湍动能不随时间变化，且流动结构保持稳定；而时变平衡态和湍流平衡态的湍动能与结构都会随时间变化。固定点平衡态的快照如图所示

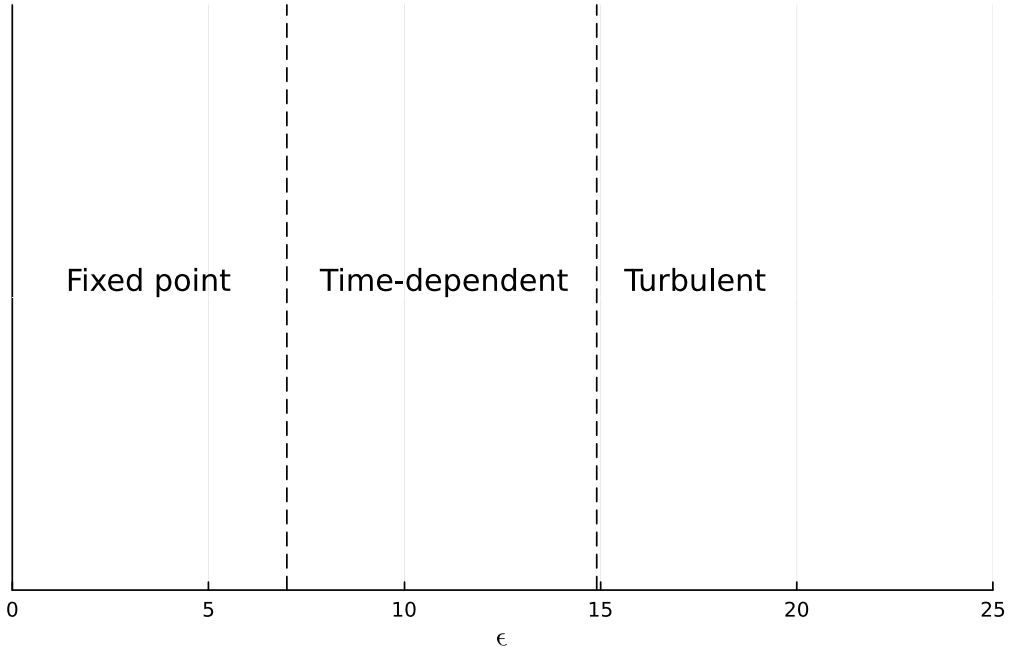


图 2：状态图展示了平衡 RSS 状态随背景湍流强度参数 ϵ 的变化，该参数控制雷诺应力力矩机制的强度。存在微弱的拐点不稳定性，使得 $0 \leqslant \epsilon \leqslant 6.9$ 时不动点得以存在。对于 $\epsilon > 6.9$，系统转变为时变行为。当参数值更高时，即 $\epsilon > 14.9$，湍流 RSS 状态出现； $Re = 300$。

于图3。图4展示了时变平衡态（$\epsilon = 8$）和湍流平衡态（$\epsilon = 16$）的湍动能时间序列。图5中展示了时变平衡态（ϵ =8）的快照，图6则展示了湍流平衡态（$\epsilon = 16$）的快照。在这些常规诊断中，时变状态与湍流状态之间的区别并不明显：湍动能时间序列和单个结构快照无法揭示两者的关键差异——即，时变状态在保持大尺度空间相干性的同时呈现时间混沌，而湍流状态在时间和空间上都呈混沌状态。通过考察这两种状态下统计状态的霍夫默勒图，可以清楚地揭示这一转变，如图7所示。

7. 解与观测结果的比较

为了将结果与观测到的埃克曼湍流剖面进行比较，我们撤销坐标系旋转，使数据比较所用的坐标系恢复为未旋转坐标系，其中变量用上标 (n) 表示，例如，coordinate x^n 与地转风方向对齐。行星边界层中具有重要动力学意义的特征之一，是埃克曼状态的时间平均、沿流向平均和展向平均速度结构，无论该状态对应的是不动点、时变状态还是湍流态。我们将埃克曼速度剖面的解析层流解与固定状态下得到的平均速度结构进行比较

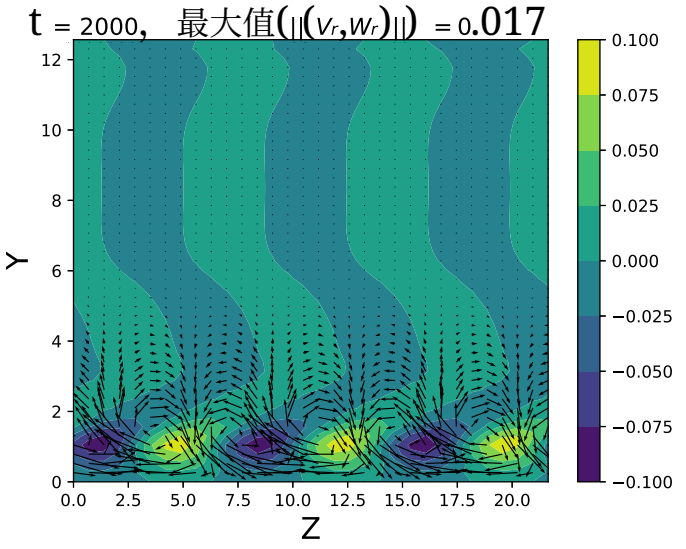


图 3：RSS系统的固定点平衡态，其中条带 U_s 和滚涡速度 (V_r, W_r) 均呈现有限振幅贡献。条带定义为 $U_s = U - [U]_z$，涡卷分量定义为 $V_r = V - [V]_z$ 和 $W_r = W - [W]_z$。条带以颜色显示，而滚涡速度以矢量表示。参数：$\epsilon = 2$； $Re = 300$。

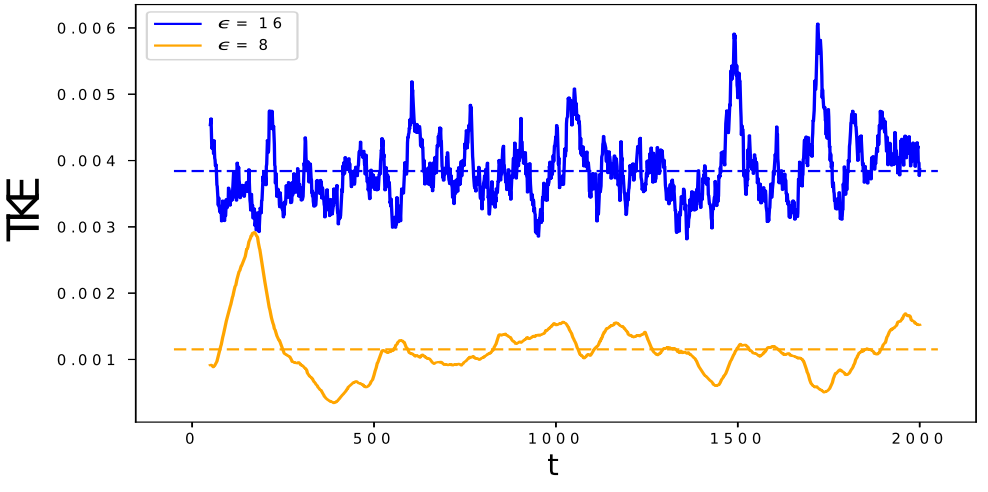


图 4：时变平衡态（橙线）和湍流平衡态（蓝线）的湍动能波动时间序列。时变平衡态位于 $\epsilon = 8$，而湍流平衡态位于 $\epsilon = 16$； $Re = 300$。

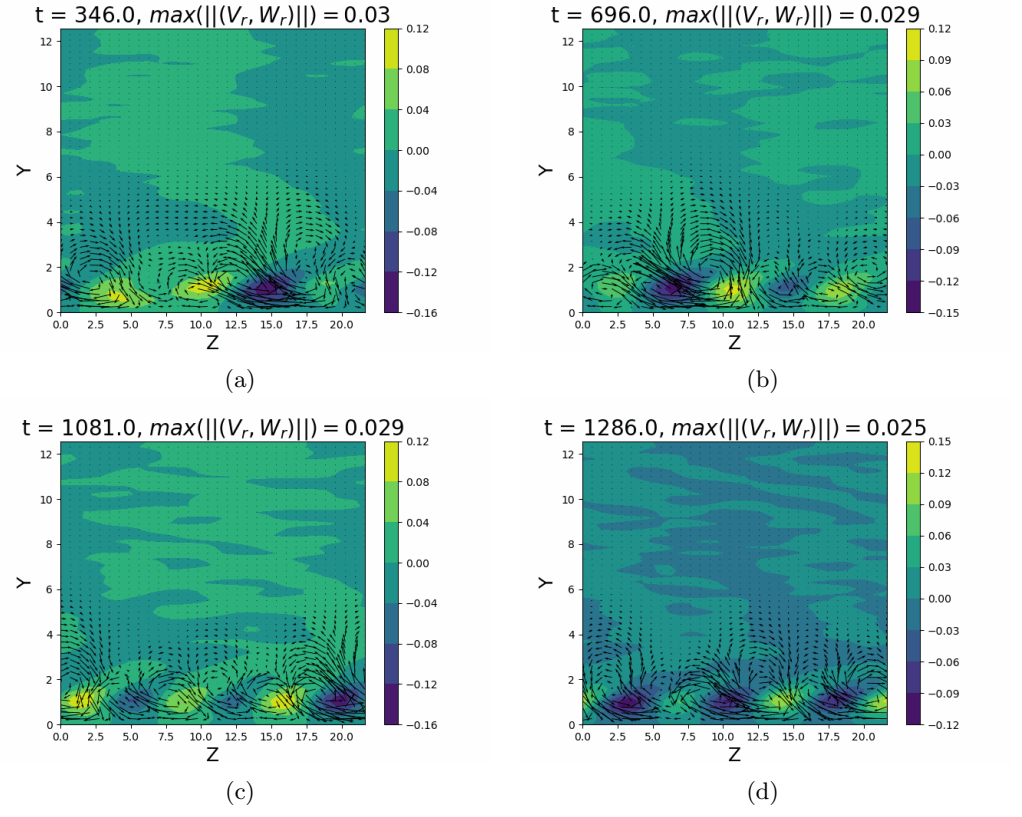


图5：时变平衡态的快照。条带以颜色表示，滚涡速度以矢量表示。参数： $\epsilon = 8$, $Re = 300$。

不动点和平衡态。图8展示了$[U^n]_{z^n}$和 $[W^n]_{z^n}$随 y 变化的结构及其矢量图。(a)和(b)图对应于 $\epsilon = 0$，其中系统仅通过不稳定拐点模态演化至不动点。这表明，通过拐点模态的平衡过程对埃克曼剖面进行微小修正，即可得到与运动方程相容的唯一平衡埃克曼剖面。我们由此得出结论：观测到的埃克曼剖面塌缩现象，无法通过拐点不稳定性依靠其自洽诱导通量的平衡过程产生。(c)和(d)图对应于 $\epsilon = 2$，它产生了较弱的背景湍流场。由此得到的平衡态与仅由拐点模态产生的平衡态有很大差异，并清楚地显示出雷诺应力力矩机制对平衡过程的影响。(d)和(e)图对应于 $\epsilon = 16$ （湍流状态），显示了更强的背景湍流对雷诺应力力矩机制的支撑如何影响平衡剖面。比较 $\epsilon = 0$、 $\epsilon = 2$和$\epsilon = 16$的平衡剖面后，我们推断，观测到的埃克曼剖面塌缩——这体现为 $\epsilon = 16$矢量图中的蓝线方向更加水平——是由雷诺应力力矩机制产生的。$[U^n]_{z^n}$和$[W^n]_{z^n}$近地表的平衡剖面进一步表明，随着 ϵ 增加，地表风的方向比经典埃克曼螺旋所预测的 $45°$ 偏转更接近地转风方向。总之，我们针对强湍流状态得到的平衡剖面与以往对湍流埃克曼层的模拟结果一致（Coleman 等 1992, 1990；Coleman

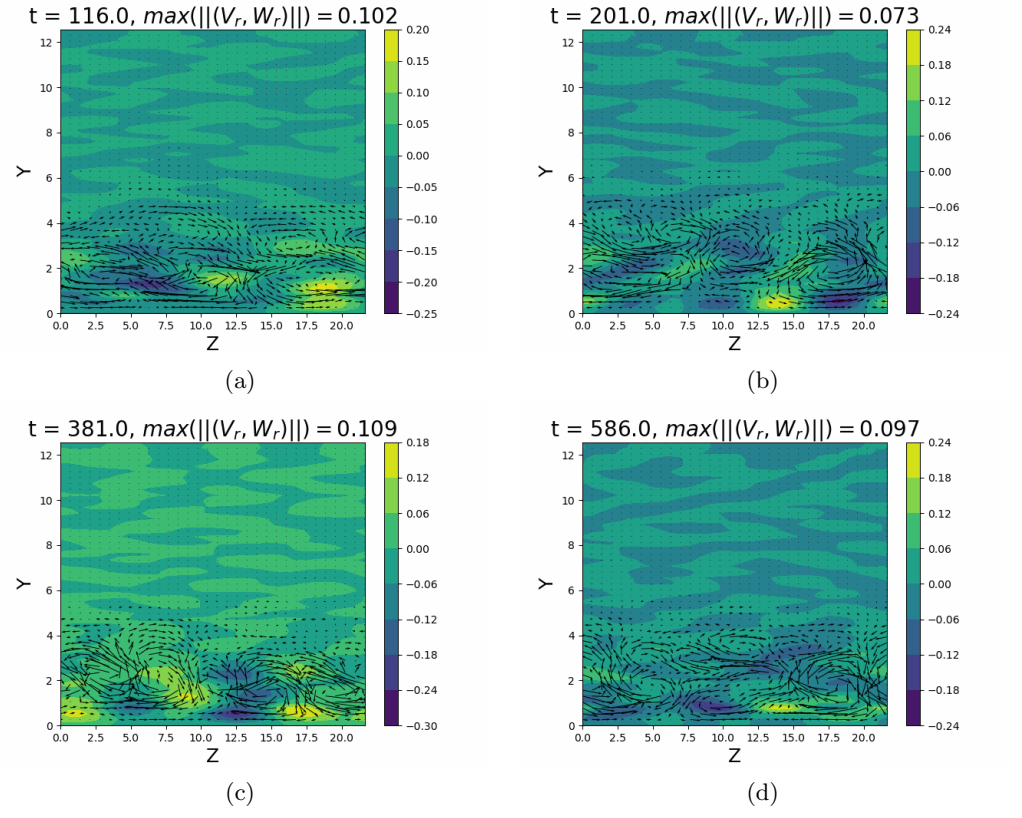


图6：湍流平衡态的快照。条带以颜色显示，滚涡速度以矢量表示。参数： $\epsilon = 16$, $Re = 300$。

1999；Marlatt 等 2012；Deusebio 等 2014），也与观测到的 PBL 廓线（Brown，1970）一致，而拐点模态产生的有限振幅平衡态则与之不符。

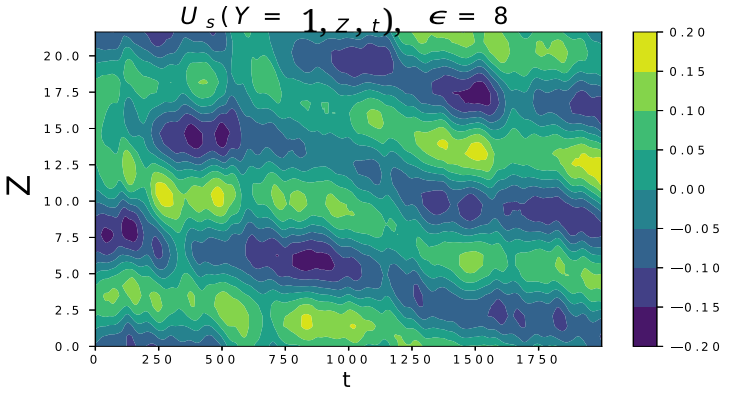
8. 平衡态机制变化对行星边界层中输运的影响

我们已经看到，埃克曼剖面可能趋于不动点，也可能演化为时变状态，后者可以是受迫湍流或自维持湍流。热带气旋增强的动力学受到径向输运的强烈影响，而径向输运由流向表面应力控制，后者又取决于参数 ϵ。为了探究在科里奥利平衡占主导的外核中，这种增强机制对输运的依赖性，我们考察了流向和展向速度方程的局部展向平均：

$$\partial_t [U]_z = -\frac{\partial [UV]_z}{\partial y} - \frac{\partial [u'v']_{x,z}}{\partial y} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 [U]_z}{\partial y^2} - \frac{2}{Re}[W]_z + \frac{2}{Re} sin(\theta) \tag{8.1}$$

$$\partial_t [W]_z = -\frac{d [WV]_z}{dy} - \frac{d [w'v']_{x,z}}{dy} + \frac{1}{Re}\frac{d^2 [W]_z}{dy^2} + \frac{2}{Re}[U]_z - \frac{2}{Re} cos(\theta), \tag{8.2}$$

(a)



(b)

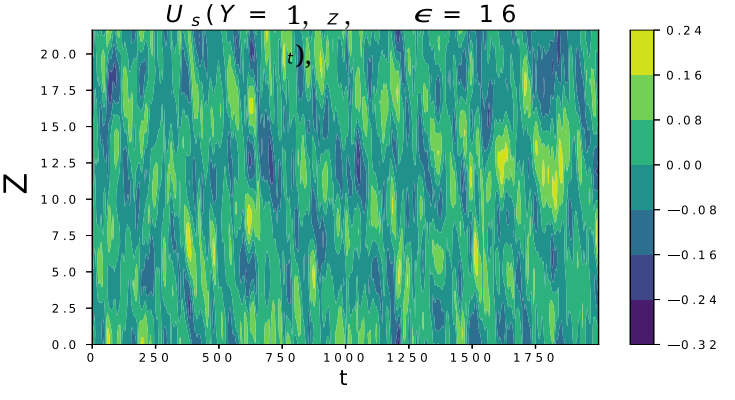


图 7：面板（b）：时变平衡态下 $U_s(y = 1, z, t)$ 的 Hovm¨oller 图。面板（c）：湍流平衡态下 $U_s(y = 1, z, t)$ 的 Hovm¨oller 图。时变平衡态位于 $\epsilon = 8$，而湍流平衡态位于 $\epsilon = 16$；$Re = 300$。

其中，项 $\frac{2}{Re}sin(\theta)$ 和 $-\frac{2}{Re}cos(\theta)$ 源自背景压力梯度。具体而言，$-[\frac{\partial P}{\partial x}]_z = \frac{2}{Re}sin(\theta)$ 和 $-[\frac{\partial P}{\partial z}]_z = -\frac{2}{Re}cos(\theta)$

在稳态下，方程 (8.1) 和 (8.2) 的左侧为零：

$$0 = -\frac{d[UV]_z}{dy} - \frac{d[u'v']_{x,z}}{dy} + \frac{1}{Re}\frac{d^2[U]_z}{dy^2} - \frac{2}{Re}[W]_z + \frac{2}{Re}sin(\theta) \tag{8.3}$$

$$0 = -\frac{d[WV]_z}{dy} - \frac{d[w'v']_{x,z}}{dy} + \frac{1}{Re}\frac{d^2[W]_z}{dy^2} + \frac{2}{Re}[U]_z - \frac{2}{Re}cos(\theta) \tag{8.4}$$

对方程 (8.3) 取 y方向平均值，得到：

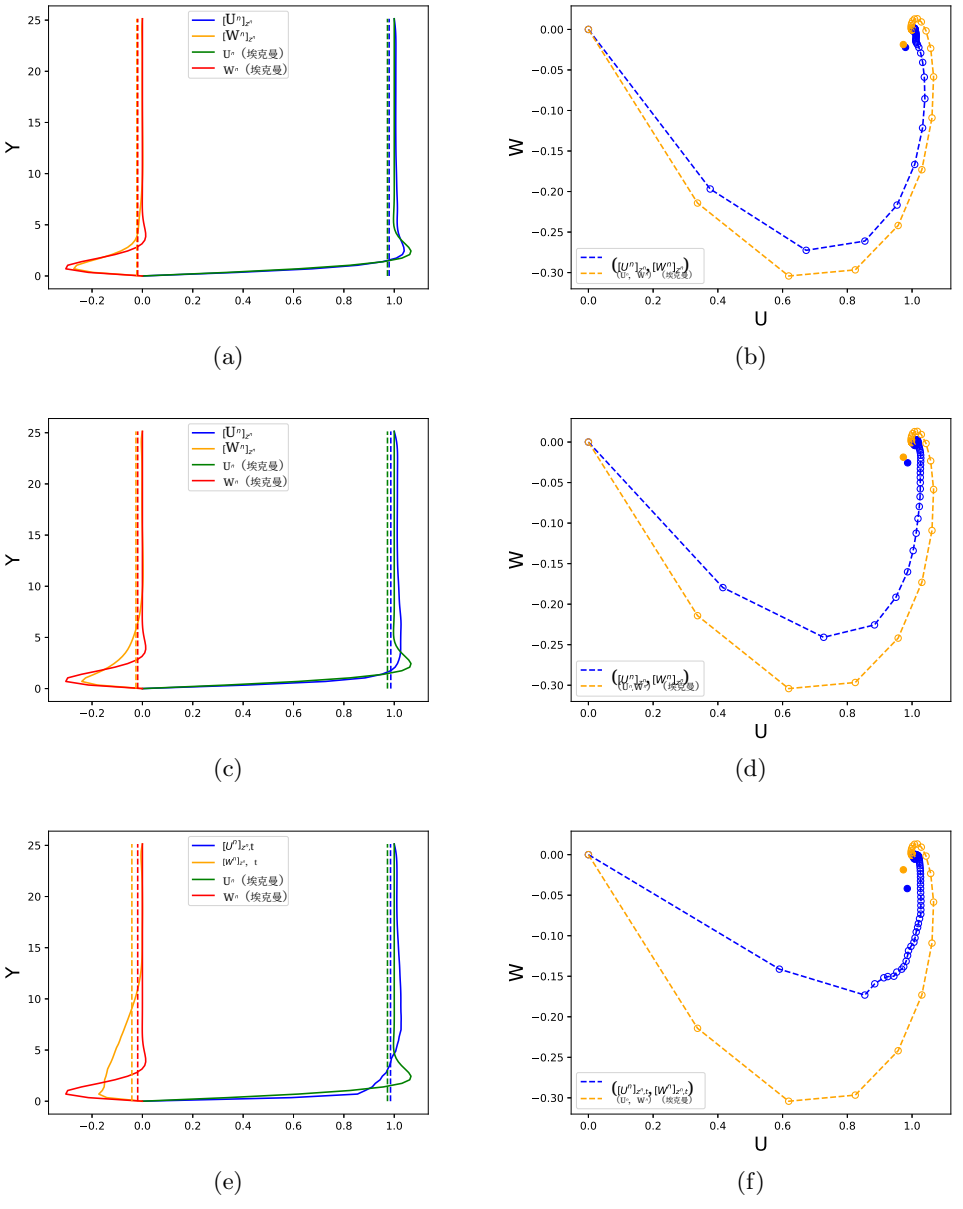


图8：为展示本图所示结果，已撤销 15° 坐标系旋转，使 x^n （以上标 n 表示）与地转风方向对齐。 $[U^n]_{z^n}$ 和 $[W^n]_{z^n}$ 随 y的变化关系，以及展示这些速度的矢量图。(a) 和 (b) 面板对应 $\epsilon = 0$，(c) 和 (d) 面板对应 $\epsilon = 2$，(e) 和 (f) 面板对应 $\epsilon = 16$。

$$0 = -\frac{1}{Re \cdot Ly}\frac{d[U]_z}{dy}(y=0) - \frac{2}{Re}[W]_{y,z} + \frac{2}{Re}sin(\theta) \tag{8.5}$$

$$0 = -\frac{1}{Re \cdot Ly}\frac{d[W]_z}{dy}(y=0) + \frac{2}{Re}[U]_{y,z} - \frac{2}{Re}cos(\theta) \tag{8.6}$$

重新整理方程（8.5）和（8.6），将$[U]_{y,\ z}$和$[W]_{y,\ z}$表示为表面应力的函数：

$$[W]_{y,z} = -\frac{1}{2 \cdot Ly}\frac{d[U]_z}{dy}(y=0) + sin(\theta) \tag{8.7}$$

$$[U]_{y,z} = \frac{1}{2 \cdot Ly}\frac{d[W]_z}{dy}(y=0) + cos(\theta) \tag{8.8}$$

为了与数据进行比较，我们现在将（8.7）和（8.8）转换到未旋转坐标系$[U^n]_{z^n}$和$[W^n]_{z^n}$。这一转换在附录13.2中明确展示，并得到收敛的体输运通量：

$$[W^n]_{y,z^n} = -\frac{1}{2 \cdot Ly}\frac{d[U^n]_{z^n}}{dy}(y=0). \tag{8.9}$$

在壁面剪切流湍流中，增加 ϵ 会导致壁面应力增强的状态，$-\frac{1}{Re}\frac{d[U^n]_{z^n}}{dy}\Big|_{y=0}$（Farrell & Ioannou 2012）。因此，方程（8.9）右侧的第一项变得更负，使$[W^n]_{y,\ z^n}$的值更加负。对于热带气旋（TC），这会通过增强外核向低压中心的输运，影响其加深过程。

在埃克曼平衡态中，表面应力控制着动量和位温等示踪物的输运。此外，径向速度的垂直分布对示踪物输运起着关键作用。如图8所示，这些在动力学上至关重要的输运会随平衡状态而变化。动量输运介导的耗散，与外核高位温空气向低压中心汇聚所驱动的增强之间的竞争，在热带气旋加深过程中发挥着关键作用。随着湍流强度变化，例如从定点状态转变为湍流 RSS 状态，这种平衡可能会突然改变。如图8的面板（e）所示，转变为湍流埃克曼状态时，流入深度似乎对其突然增加尤为敏感。我们指出，流入深度的增加符合平衡要求：在黏性边界层上方的区域，曲率符号不得改变，同时体输运等于表面边界应力所要求的输运量。尽管热带气旋内核受梯度风平衡而非科里奥利平衡支配，但预计也会发生类似的状态转变。

9. RSS维持机制

现在，我们考察在湍流埃克曼动力学中维持 RSS 的机制，以及这些机制与维持壁面剪切流中 RSS 的机制之间的关系（Farrell *et al.* 2016）。从这里开始，我们再次采用旋转坐标系。可通过 RSS条带速度 $U_s = U - [U]_z$ 和滚转涡量 $\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z} - [\mathcal{Z}]_z$ 的平衡方程，分析支配 RSS动力学及其平衡过程的机制，其中流向涡量分量定义为 $\mathcal{Z} = -\partial V/\partial z + \partial W/\partial y$。条带分量 U_s 的平衡由下式描述：

:

$$\partial_t U_s = -(\partial_y(UV)-\partial_y[UV]_z)-\partial_z(UW)-(\partial_y[u'v']_x-\partial_y[u'v']_{x,z})-\partial_z[u'w']_x+\Delta_1\frac{U_s}{Re}-\frac{2}{Re}(W-[W]_z), \tag{9.1}$$

鉴于正负两种条带均会出现，为了获得条带强迫的线性度量，每一项都乘以 $sign($ $U_s)$。维持 U_s 的动力学中各个具有不同物理意义项的方程为:

$$I_A = sign(U_s)\cdot(-(V\frac{\partial U}{\partial y}-[V\frac{\partial U}{\partial y}]_z)-(W\frac{\partial U}{\partial z}-[W\frac{\partial U}{\partial z}]_z)) \tag{9.2}$$

$$I_B = sign(U_s)\cdot(-([v'\frac{\partial u'}{\partial y}]_x-[v'\frac{\partial u'}{\partial y}]_{x,z})-([w'\frac{\partial u'}{\partial z}]_x-[w'\frac{\partial u'}{\partial z}]_{x,z})) \tag{9.3}$$

$$I_C = sign(U_s)\cdot(\frac{1}{Re}\Delta_1 U_{st}) \tag{9.4}$$

$$I_D = sign(U_s)\cdot(-\frac{2}{Re}(W-[W]_z)) \tag{9.5}$$

这些条带强迫分量分别为抬升效应(I_A)、脉动雷诺应力（I_B）、黏性阻尼（I_C）和科里奥利力（I_D）。

滚转涡量的平衡方程为:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{Z}_r = &-(V_r\partial_y\mathcal{Z}_r+(W_r+[W]_z)\partial_z\mathcal{Z}_r-[V_r\partial_y\mathcal{Z}_r]_z-[W_r\partial_z\mathcal{Z}_r]_z)-V_r\partial_{yy}[W]_z\\ &+(\partial_{zz}-\partial_{yy})(\overline{v'w'})-\partial_{yz}(\overline{w'^2}-\overline{v'^2})+\Delta_1\frac{\mathcal{Z}_r}{Re}+\frac{2}{Re}\partial_y U_s\end{aligned} \tag{9.6}$$

维持 $\partial_t\mathcal{Z}_r$ 的动力学中各个具有不同物理意义项的方程为:

$$I_E = sign(\mathcal{Z}_r)\cdot(-(V_r\partial_y\mathcal{Z}_r+(W_r+[W]_z)\partial_z\mathcal{Z}_r-[V_r\partial_y\mathcal{Z}_r]_z-[W_r\partial_z\mathcal{Z}_r]_z)) \tag{9.7}$$

$$I_F = sign(\mathcal{Z}_r)\cdot(-V_r\partial_{yy}[W]_z) \tag{9.8}$$

$$I_G = sign(\mathcal{Z}_r)\cdot((\partial_{zz}-\partial_{yy})(\overline{v'w'})-\partial_{yz}(\overline{w'^2}-\overline{v'^2})) \tag{9.9}$$

$$I_H = sign(\mathcal{Z}_r)\cdot\Delta_1\frac{\mathcal{Z}_r}{Re} \tag{9.10}$$

$$I_I = sign(\mathcal{Z}_r)\cdot\frac{2}{Re}\partial_y U_s \tag{9.11}$$

术语 I_E、I_F、I_G、I_H、I_I分别表示对滚转涡量的各项贡献

产生。具体而言， I_E 源于滚转涡量的平流， I_F 源于与背景流向涡量梯度（ $\partial_y[\mathcal{Z}]_z = \partial_{yy}[W]_z$）的相互作用； I_G源于雷诺应力散度； I_H 源于扩散； I_I 源于行星涡度的倾斜。图9展示了维持行星边界层 RSS 湍流中条带和涡卷的各分量时间序列。行星边界层 RSS 湍流中的条带维持机制与壁面剪切流湍流的机制非常相似：在后者中，抬升效应对条带的强迫与解析脉动雷诺应力以及黏性耗散从条带中传递能量相平衡。解析雷诺应力从条带中传递能量，既有助于维持涨落，也能对条带振幅施加反馈调节，

维持涡卷涡量的机制 $\mathcal{Z}_r$，与壁面剪切流湍流中维持涡卷涡量的机制相同；在后者中，雷诺应力涡量源项与耗散相平衡。我们的结果表明，由 $\frac{\partial^2[W]_z}{\partial y^2}$ (Lilly，1966) 引起并包含在 I_F 中的拐点不稳定机制，与行星边界层中平衡态下维持涡卷涡量 $\mathcal{Z}_r$ 无关。相反，平衡态下的 $\mathcal{Z}_r$ 通过与脉动雷诺应力项 I_G 相关的涡量强迫，抵消耗散 I_H 得以维持。总之，对行星边界层中平衡态下维持条带速度 U_s 和涡卷涡量 $\mathcal{Z}_r$ 的机制进行分析后发现，行星边界层 RSS 湍流中维持 U_s 和 $\mathcal{Z}_r$ 的过程与壁面剪切流中的过程相同。此外，与 $\frac{\partial^2[W]_z}{\partial y^2}$ 相关的拐点不稳定机制并不参与 RSS 的维持。值得注意的是，科里奥利力项对维持 U_s 和 $\mathcal{Z}_r$ 的贡献可以忽略不计，这与此前的研究结果一致（Gao 和 Ginis, 2014年、2015年）。

10. 脉动涡量维持机制

现在我们考察湍流平衡态下维持涡量平方的机制。总涡量矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在 x、 y 和 z 方向上的分量记为（ζ, η, χ）。总涡量可分解为流向平均分量和脉动分量：

$$\boldsymbol{\omega}(x,y,z,t) = \boldsymbol{\Theta}(y,z,t) + \boldsymbol{\omega'}(x,y,z,t) \tag{10.1}$$

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Theta} \tag{10.2}$$

$$\zeta(x,y,z,t) = \mathcal{Z}(y,z,t) + \zeta'(x,y,z,t) \tag{10.3}$$

$$\eta(x,y,z,t) = \mathcal{H}(y,z,t) + \eta'(x,y,z,t) \tag{10.4}$$

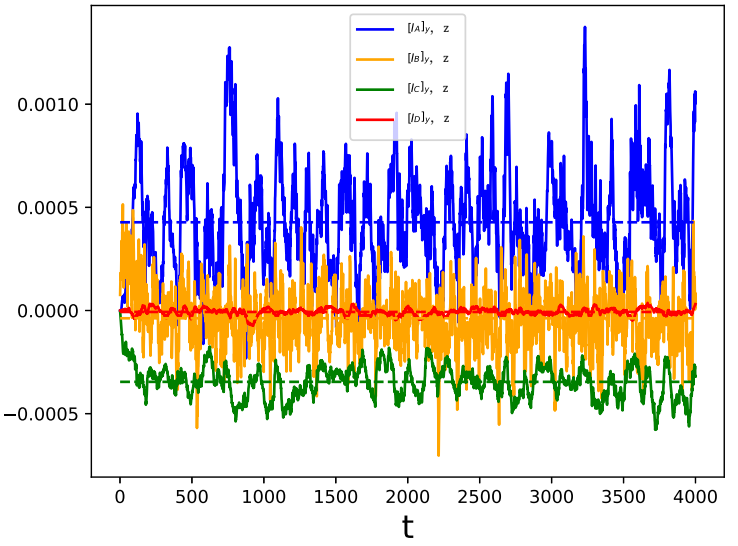
$$\chi(x,y,z,t) = \mathcal{X}(y,z,t) + \chi'(x,y,z,t) \tag{10.5}$$

$$\overline{(\zeta,\eta,\chi)} = (\mathcal{Z},\mathcal{H},\mathcal{X}) \tag{10.6}$$

我们首先考察维持流向脉动涡量的机制，记为 ζ'。脉动流向涡量分量的平衡控制方程为：

$$\partial_t\zeta' = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\zeta' - (\boldsymbol{u'}\cdot\nabla)([\mathcal{Z}]_z + (\mathcal{Z}-[\mathcal{Z}]_z) + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla)u' + (\boldsymbol{\omega'}\cdot\nabla)U + \frac{\Delta\zeta'}{Re} + \frac{2}{Re}\frac{\partial u'}{\partial y} \tag{10.7}$$

(a)



(b)

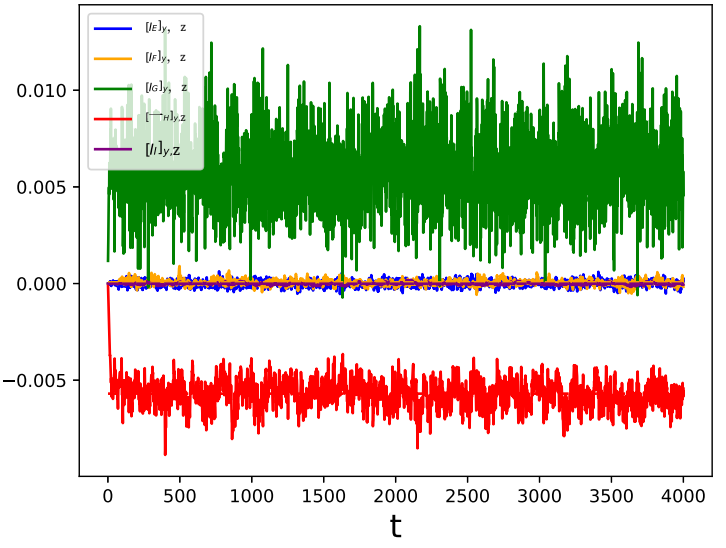


图9：对时变RSS湍流中的强迫进行平衡收支分析，并沿y和z方向取平均。面板（a）显示条带 U_s 的维持，并将其分解为抬升贡献 I_A、雷诺应力贡献 I_B、扩散贡献 I_C 和科里奥利贡献 I_D。面板（b）显示滚转涡量 ζ_r 的维持，并将其分解为平流贡献 I_E、背景流向涡量梯度贡献 I_F、雷诺应力贡献 I_G、扩散贡献 I_H 和科里奥利贡献 I_I。

将脉动流向涡量分量的涡量平方方程乘以 ζ'，然后取平均，可得:

$$\partial_t \frac{\overline{\zeta'^2}}{2} = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\frac{\overline{\zeta'^2}}{2} - (\overline{\zeta'\boldsymbol{u'}}\cdot\nabla)([\mathcal{Z}]_z + (\mathcal{Z}-[\mathcal{Z}]_z) + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\overline{(\nabla u')\zeta'}) + (\overline{\zeta'\boldsymbol{\omega'}}\cdot\nabla)U - \frac{\overline{\nabla\zeta'\cdot\nabla\zeta'}}{Re} + \frac{2}{Re}\overline{\zeta'\frac{\partial u'}{\partial y}} \tag{10.8}$$

$$I_{\zeta' A} = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\frac{\overline{\zeta'^2}}{2} \tag{10.9}$$

$$I_{\zeta' B} = -(\overline{\zeta'\boldsymbol{u'}}\cdot\nabla)[\mathcal{Z}]_z = -\overline{\zeta' v'}\frac{\partial^2[W]_z}{\partial y^2} \tag{10.10}$$

$$I_{\zeta' C} = -(\overline{\zeta'\boldsymbol{u'}}\cdot\nabla)(\mathcal{Z}-[\mathcal{Z}]_z) \tag{10.11}$$

$$I_{\zeta' D} = (\boldsymbol{\Theta}\cdot\overline{(\nabla u')\zeta'}) \tag{10.12}$$

$$I_{\zeta' E} = (\overline{\zeta'\boldsymbol{\omega'}}\cdot\nabla)U \tag{10.13}$$

$$I_{\zeta' F} = -\frac{\overline{\nabla\zeta'\cdot\nabla\zeta'}}{Re} \tag{10.14}$$

$$I_{\zeta' G} = \frac{2}{Re}\overline{\zeta'\frac{\partial u'}{\partial y}} \tag{10.15}$$

流向涡量平方强迫的各项贡献分类如下：平流，($I_{\zeta' A}$)；$\frac{\partial^2[W]_z}{\partial y^2}$ 引起的脉动流向涡量平方生成，($I_{\zeta' B}$)；平均涡量其余分量引起的生成，($I_{\zeta' C}$)；脉动应变对脉动流向涡量的拉伸与倾斜，($I_{\zeta' D}$)；平均应变对脉动流向涡量的拉伸与倾斜，($I_{\zeta' E}$)；黏性耗散，($I_{\zeta' F}$)；以及行星涡度的拉伸与倾斜，($I_{\zeta' G}$)。

空间平均诊断量 $I_{\zeta' A}$、$I_{\zeta' B}$、$I_{\zeta' C}$、$I_{\zeta' D}$、$I_{\zeta' E}$、$I_{\zeta' F}$、$I_{\zeta' G}$的时间序列如图10所示。主导平衡由脉动应变拉伸产生的正贡献 $I_{\zeta' D}$和耗散产生的负贡献$I_{\zeta' F}$构成。

现在，我们来考察维持脉动壁法向涡量分量的机制。该脉动壁法向涡量分量的平衡控制方程为:

$$\partial_t \eta' = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\eta' - (\boldsymbol{u'}\cdot\nabla)\mathcal{H} + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla)v' + (\boldsymbol{\omega'}\cdot\nabla)V + \frac{\Delta\eta'}{Re} + \frac{2}{Re}\frac{\partial v'}{\partial y} \tag{10.16}$$

通过乘以 η' 并进行流向平均，可以得到与壁法向脉动涡量分量相关的涡量平方方程。

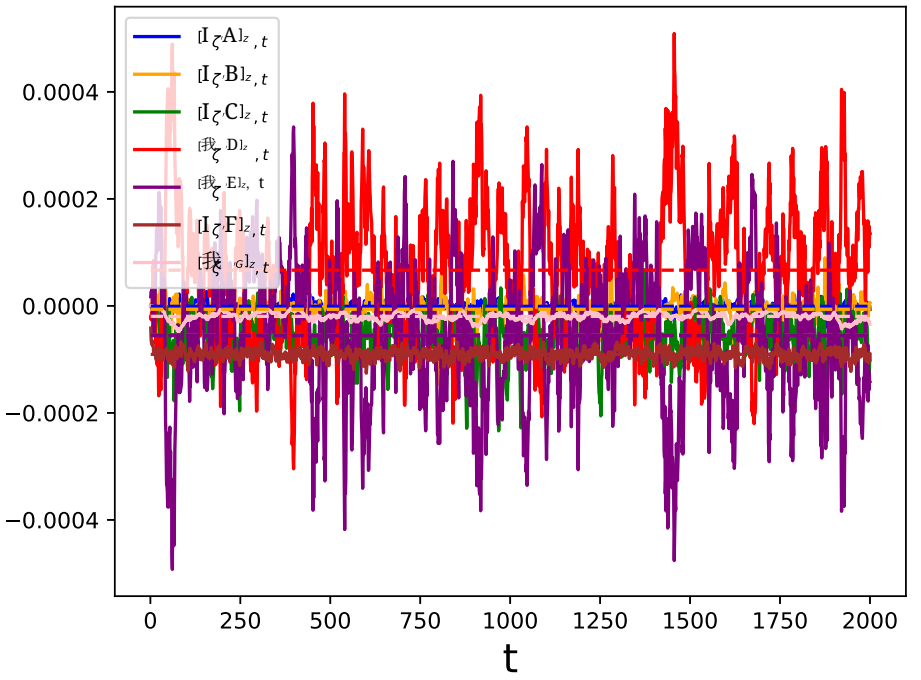


图10：在参数 $\epsilon = 16$ 和 $Re = 300$下，湍流平衡态中流向脉动涡量平方 $\zeta'^2/2$ 平衡关系各项的组成。所有项均沿展向 z 和壁法向 y取平均。

$$\partial_t \frac{\overline{\eta'^2}}{2} = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\overline{\eta'^2} - (\overline{\eta'\boldsymbol{u}'}\cdot\nabla)\mathcal{H} + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\overline{(\nabla v')\eta'}) + (\overline{\eta'\boldsymbol{\omega}'}\cdot\nabla)V - \frac{\overline{\nabla\eta'\cdot\nabla\eta'}}{Re} + \frac{2}{Re}\eta'\overline{\frac{\partial v'}{\partial y}} \tag{10.17}$$

$$I_{\eta' A} = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\overline{\eta'^2} \tag{10.18}$$

$$I_{\eta' C} = -(\overline{\eta'\boldsymbol{u}'}\cdot\nabla)\mathcal{H} \tag{10.19}$$

$$I_{\eta' D} = (\boldsymbol{\Theta}\cdot\overline{(\nabla v')\eta'}) \tag{10.20}$$

$$I_{\eta' E} = (\overline{\eta'\boldsymbol{\omega}'}\cdot\nabla)V \tag{10.21}$$

$$I_{\eta' F} = -\frac{\overline{\nabla\eta'\cdot\nabla\eta'}}{Re} \tag{10.22}$$

$$I_{\eta' G} = \frac{2}{Re}\eta'\overline{\frac{\partial v'}{\partial y}} \tag{10.23}$$

壁法向脉动涡量平方强迫的各分量分类如下：平流，($I_{\eta' A}$)；由平均壁法向涡量引起的壁法向脉动涡量平方产生，($I_{\eta' C}$)；壁法向脉动涡量的拉伸/倾斜，由

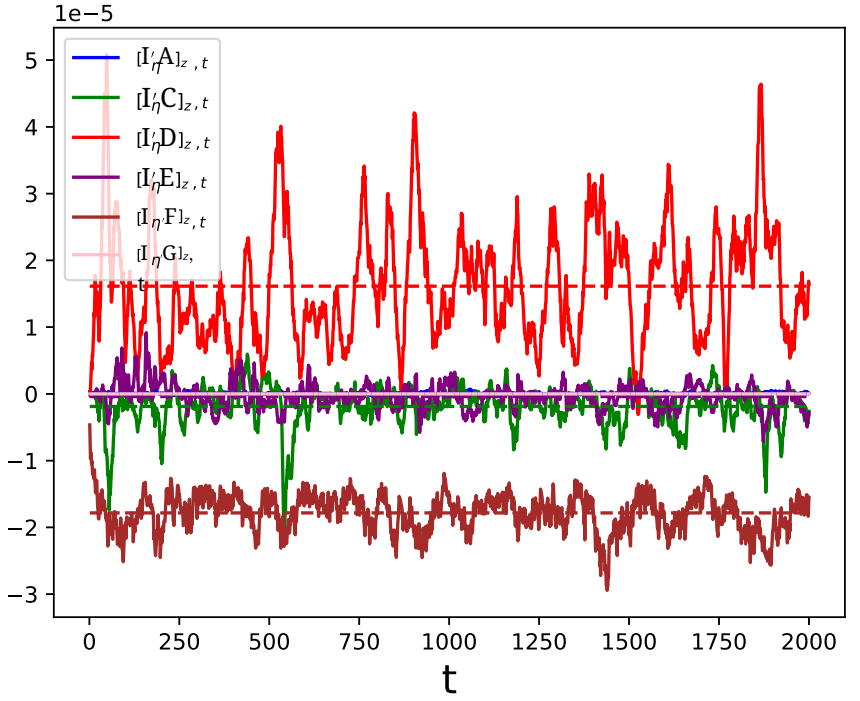


图11：在参数为 $\epsilon = 16$ 和 $Re = 300$ 时，湍流平衡态下维持壁法向脉动涡量平方 $\overline{\eta'^2}/2$ 的平衡各项。所示各项均沿展向（z）和壁法向（y）进行平均。

脉动应变（$I_{\eta' D}$）；平均应变对脉动壁法向涡度的拉伸/倾斜（$I_{\eta' E}$）；黏性阻尼（$I_{\eta' F}$）；以及行星涡度的拉伸/倾斜（$I_{\eta' G}$）。空间平均诊断量 $I_{\eta' A} I_{\eta' C}$，$I_{\eta' D}$，$I_{\eta' E}$，$I_{\eta' F}$，$I_{\eta' G}$的时间序列如图11所示。主导平衡由脉动应变产生的正贡献 $I_{\eta' D}$ 和耗散产生的负贡献 $I_{\zeta' F}$ 构成。

最后，我们考察维持脉动展向涡量分量的机制。该脉动展向涡量平衡的控制方程为：

$$\partial_t \chi' = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\chi' - (\boldsymbol{u'}\cdot\nabla)([\mathcal{X}]_z + (\mathcal{X} - [\mathcal{X}]_z)) + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\nabla)w' + (\boldsymbol{\omega'}\cdot\nabla)W + \frac{\Delta\chi'}{Re} + \frac{2}{Re}\frac{\partial w'}{\partial y} \tag{10.24}$$

将 χ' 相乘并取流向平均，可得到与脉动展向涡量分量相关的涡量平方方程

$$\partial_t \frac{\overline{\chi'^2}}{2} = -(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\frac{\overline{\chi'^2}}{2} - (\overline{\chi'\boldsymbol{u'}}\cdot\nabla)([\mathcal{X}]_z + (\mathcal{X} - [\mathcal{X}]_z) + (\boldsymbol{\Theta}\cdot\overline{(\nabla w')\chi'}) + (\overline{\chi'\boldsymbol{\omega'}}\cdot\nabla)W - \frac{\overline{\nabla\chi'\cdot\nabla\chi'}}{Re} + \frac{2}{Re}\chi'\overline{\frac{\partial w'}{\partial y}} \tag{10.25}$$

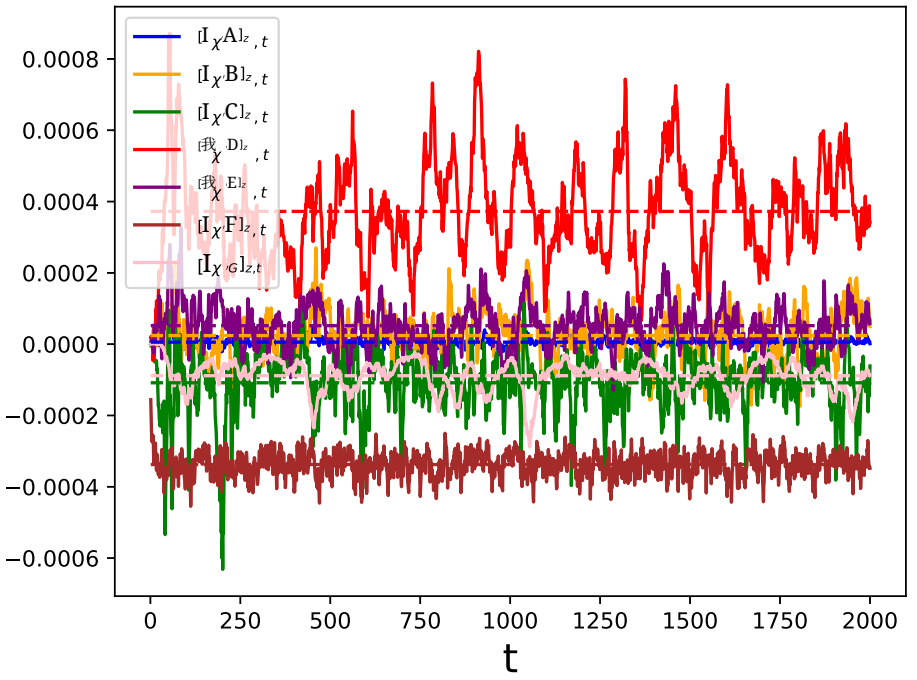


图 12：在参数 $\epsilon = 16$； $Re = 300$ 下，维持湍流平衡态中脉动展向涡量平方的平衡组成部分$\overline{\chi'^2}/2$ 。所示各项均沿展向 z 和壁法向 y 进行平均

$$I_{\chi' A} = -(\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\frac{\overline{\chi'^2}}{2} \tag{10.26}$$

$$I_{\chi' B} = -(\overline{\chi' \boldsymbol{u'}} \cdot \nabla)[\mathcal{X}]_z = \overline{\chi' v'}\frac{\partial^2 [U]_z}{\partial y^2} \tag{10.27}$$

$$I_{\chi' C} = -(\overline{\chi' \boldsymbol{u'}} \cdot \nabla)(\mathcal{X} - [\mathcal{X}]_z) \tag{10.28}$$

$$I_{\chi' D} = (\boldsymbol{\Theta} \cdot \overline{(\nabla w')\chi'}) \tag{10.29}$$

$$I_{\chi' E} = (\overline{\chi' \boldsymbol{\omega'}} \cdot \nabla)W \tag{10.30}$$

$$I_{\chi' F} = -\frac{\overline{\nabla \chi' \cdot \nabla \chi'}}{Re} \tag{10.31}$$

$$I_{\chi' G} = \frac{2}{Re}\overline{\chi' \frac{\partial w'}{\partial y}} \tag{10.32}$$

脉动展向涡量平方强迫的各分量分类如下：平流，($I_{\chi' A}$)；由 $-\frac{\partial^2 [U]_z}{\partial y^2}$ 产生的脉动展向涡量平方，($I_{\chi' B}$)；由平均展向涡量其余分量产生的脉动展向涡量平方，($I_{\chi' C}$)；脉动应变对脉动展向涡量的拉伸/倾斜，

（$I_{\chi' D}$）；平均应变对脉动展向涡量的拉伸/倾斜（$I_{\chi' E}$）；黏性阻尼（$I_{\chi' F}$）；以及对行星涡度的拉伸/倾斜（$I_{\chi' G}$）。

图12展示了空间平均诊断量 $I_{\chi' A}$、 $I_{\chi' B}$、 $I_{\chi' C}$、 $I_{\chi' D}$、 $I_{\chi' E}$、 $I_{\chi' F}$、 $I_{\chi' G}$的时间序列。主要平衡关系存在于脉动应变拉伸产生的正贡献 $I_{\chi' D}$与扩散产生的负贡献$I_{\chi' F}$之间。

总之，我们对维持脉动涡量三个分量 $\boldsymbol{\omega}' = （\zeta'、\ \eta'、\ \chi'）$的机制进行分析后发现，每个分量主要由脉动应变对脉动涡量的拉伸与倾斜 $I_{\zeta' D}$、 $I_{\eta' D}$、 $I_{\chi' D}$维持，以抵消耗散 $I_{\zeta' F}$、 $I_{\eta' F}$、 $I_{\chi' F}$。这一行为与强烈发挥作用的自维持湍流机制相一致（Farrell & Ioannou 2012）。

此外，结果表明，与 $\frac{\partial^2 [W]_z}{\partial y^2}$ 和 $-\frac{\partial^2 [U]_z}{\partial y^2}$ 相关的涡量梯度并未对维持脉动流向涡量—或展向涡量作出贡献。这进而意味着，与 $\frac{\partial^2 [W]_z}{\partial y^2}$ 和 $-\frac{\partial^2 [U]_z}{\partial y^2}$ 相关的拐点不稳定性并未在湍流状态下维持脉动涡量 $\boldsymbol{\omega}' = （\zeta',\ \eta',\ \chi'）$方面发挥作用。根据前文第 9 节和本节第 10 节，我们得出结论：涉及平均流中滚转涡量 $\mathbf{U}$ 和扰动协方差 $\mathbf{C}$ 的湍流平衡态，主要由雷诺应力力矩机制维持（Farrell & Ioannou 2012；Farrell 等2016）。此外，与拐点不稳定机制相关的涡量梯度 $\partial^2 [U]_z/\partial y^2$和 $\partial^2 [W]_z/\partial y^2$，对于维持平均流$\mathbf{U}$或扰动协方差$\mathbf{C}$的贡献都微乎其微。对大气边界层的观测研究表明，测得的湍流强度（以均方根速度脉动量化）通常约为地转风速的 10% 至 30%。（Friedrich 等 2012；Watkins, 2012；Duncan等2019；Barthelmie 等2014）在我们的平衡状态图中，这一范围对应于强湍流状态。因此我们推断，拐点不稳定性并非支配观测到的行星边界层动力学的主要机制，因为该湍流状态主要由 RS 力矩机制维持。

11. 行星边界层湍流中的自维持过程

我们已经看到，行星边界层中的湍流机制本质上与壁面剪切流中的相同。壁面剪切流即使在触发向湍流态转变的初始激励消失后，仍能维持湍流——这种现象称为湍流转捩。因此，行星边界层 RSS 湍流是否同样能够自维持，是一个合理的问题。建立湍流态后，通过设置 $\epsilon = 0$ 即可对此进行诊断性检验。当$\epsilon = 0$时，S3T 方程可简化为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial t} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\Gamma}) + \sum_k \mathbf{L}_{RS} \mathbf{C}_k \tag{11.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial t} = \mathbf{A}\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{A}^\dagger \tag{11.2}$$

我们发现，模拟中的所有湍流平衡态都是自维持的。图 13 展示了自维持湍流的代表性瞬态图像。这一结果与我们对 RSS 和脉动涡量平方维持机制的分析一致，表明维持行星边界层 RSS 湍流的潜在机制是

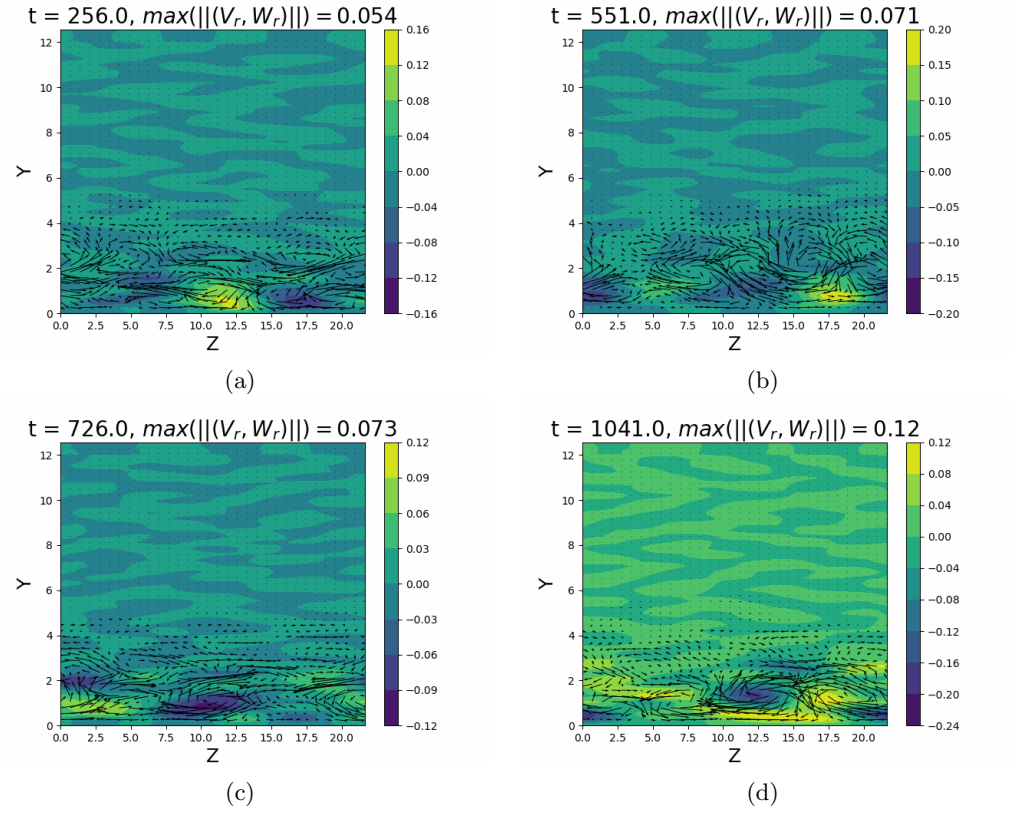


图 13：自维持湍流的代表性快照。颜色表示条带，矢量表示滚涡速度。参数： $\epsilon = 0$; $Re = 300$

在壁面约束剪切流湍流动力学背景下所熟知的相同自维持过程（SSP）（Farrell & Ioannou 2012）。例如， $\epsilon = 16$ 处的 S3T SSD 行星边界层 RSS动力学会达到湍流态。通过设置 $\epsilon = 0$ 移除随机强迫后，经比较图 14 所示这些湍流状态的涨落能量和湍动能（TKE）时间序列，证实该湍流态仍然存在。涨落能量定义为：

$$TKE(t) = \frac{1}{2}[u'^2 + v'^2 + w'^2]_{x,y,z}. \tag{11.3}$$

当 $\epsilon = 16$ 时，脉动湍动能大于当 $\epsilon = 0$ 时，但两者主要都由同一自维持过程（SSP）维持，该过程也维持壁面约束剪切流中的湍流。采用随机强迫时，预计湍动能更高，因为 ϵ 会直接向扰动协方差 $\boldsymbol{C}$ 注入能量

12. 结论

本研究通过确认 RS 力矩不稳定性是 RSS 形成和湍流维持的关键机制，深化了对 PBL 中埃克曼湍流的认识。我们采用 S3T SSD 框架，将湍流埃克曼模型改写为 SSD 系统。这一重新表述从分析角度统一了传统的拐点不稳定性与新近发现的 RS 力矩不稳定性，并阐明了它们各自

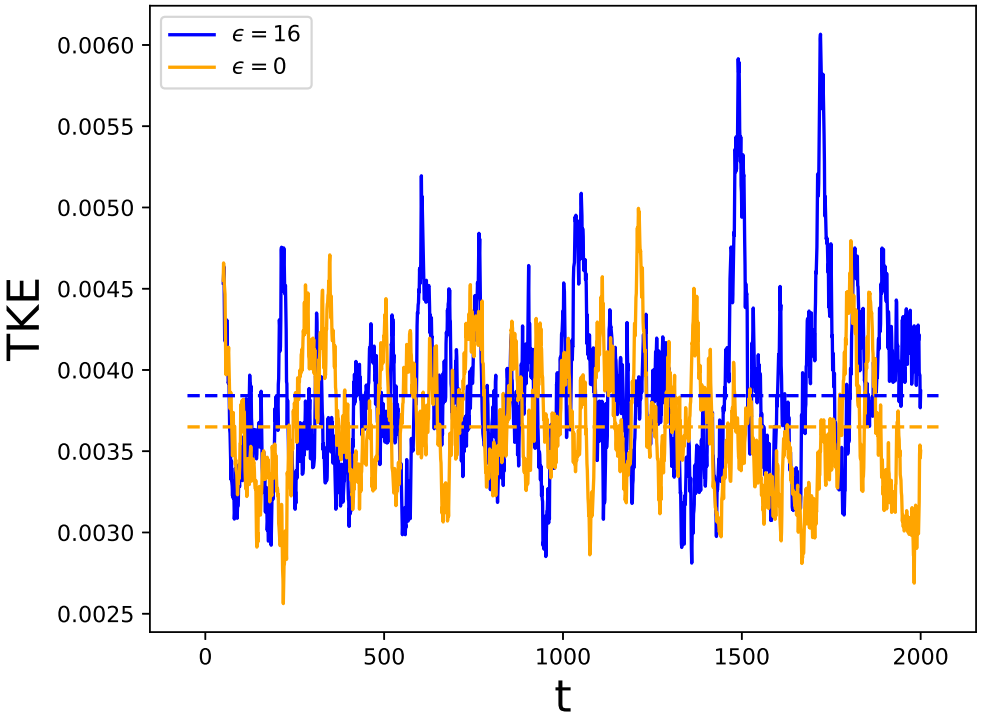


图 14：两种情况下作为湍流诊断指标的湍动能时间序列：保留用于触发转变为湍流态的背景湍流激励时的湍流（$\epsilon = 16$，蓝色），以及移除初始激励后的自持湍流（$\epsilon = 0$，橙色）； $Re = 300$。

在湍流埃克曼动力学中的作用。在 S3T SSD 中，拐点不稳定性由一阶累积量表征，而 RS 力矩不稳定性则源于一阶和二阶累积量之间的相互作用。因此，可以分别研究这两种不稳定性。例如，我们发现，即使拐点不稳定性受到抑制，PBL 中的 RSS 湍流仍可仅由 RS 力矩机制激发并维持。PBL 动力学的 S3T SSD 表述有一项重要优势：非线性 S3T SSD 不仅能在简化情境下识别引发 RSS 结构形成的不稳定性，也在同一简化情境中包含了使这些特征模态达到平衡的基本机制。我们发现，随着背景湍流强度参数 ϵ 的变化，S3T SSD 中的 RSS 会趋于不动点、复杂度有限的时变状态，或湍流态。研究发现，这种湍流态具有自维持性：一旦它通过不稳定的 S3T SSD 平衡态发生分岔而建立，便可移除使其失稳的背景湍流激发参数 ϵ，此后湍流仍能通过与壁面剪切流中熟知的自维持过程（SSP）基本相同的过程维持自身。在 S3T SSD 中，可以将 RSS 平衡态的动力学分解为相应的物理机制，这些机制负责维持孤立的条带、涡卷和扰动分量的统计平均平衡。对于湍流 RSS 平衡态，我们发现维持条带的主导平衡是涡卷诱导的抬升过程所带来的增长

其作用受到下梯度脉动雷诺应力和黏性耗散共同抵消。维持涡卷的主导平衡由雷诺应力力矩与耗散构成。我们发现，在维持条带和涡卷的平衡中，科里奥利力项可以忽略不计。鉴于观测到的行星边界层速度廓线与埃克曼螺旋预测的经典 45° 偏转存在显著差异，而且单靠拐点不稳定性无法解释这一差异，我们采用 S3T SSD 框架研究其成因。S3T SSD 提供了更全面的理论描述，因为它同时纳入了拐点不稳定机制和非线性 S3T SSD 雷诺应力（RS）力矩机制。

我们发现，仅由拐点模态驱动的平衡化只会轻微改变埃克曼螺旋。相比之下，提高 ϵ 会增强 RS 力矩机制的影响，而最终促使行星边界层进入自维持湍流态，则会进一步减小偏转角，使地面风向更接近地转风，也更符合观测结果。此外，我们发现，随着 ϵ 增大，内部埃克曼边界层廓线的塌缩情况与观测结果更加吻合。重要的是，我们的研究结果表明，观测到的行星边界层速度廓线对应于状态图中的强湍流平衡态。与此一致，根据观测结果预测的湍流强度（Friedrich等2012；Watkins，2012；Duncan 等 2019；Barthelmie等 2014年）也对应于强湍流状态。在许多物理现象中，行星边界层的动量和示踪物通量都十分重要。在热带气旋快速加深的情况下，内核中会出现一个与惯性不稳定相关的重要 RSS 不稳定流形。我们在此应用于埃克曼问题的方法可以直接扩展至梯度风平衡流，并可用于考察与拐点、惯性和雷诺应力相关的 RSS 增长机制所产生的三方动力学。这是正在开展的研究课题。总之，同时纳入拐点不稳定机制和 RS 力矩机制的 S3T SSD 湍流模型，为理解行星边界层湍流提供了更全面的方法，也能更好地符合观测结果。

13. 附录

13.1. 方程 (3.10)、(3.11)、(3.12) 和 (3.13) 的各个组成部分

L_{OS}（U）、L_{C1}（U）、L_{C2}（U）和 L_{SQ}（U）的详细说明可参见 Farrell 与 Ioannou（2012）。方程 (3.10)、(3.11)、(3.12) 和 (3.13) 的其余部分为

$$\begin{aligned} LV_{11}(V) = (k^2V_y - V_{yzz} + k^2V\partial_y - V_{zz}\partial_y - 2V_{yz}\partial_z - V_y\partial_{zz} - 2V_z\partial_{yz} - V\partial_{yzz}) \\ +[(ik)(V_y\partial_y + V\partial_{yy})](-ik\Delta_2^{-1}\partial_y) \\ +(k^2V_z - V_{zzz} + V_{yz}\partial_y + V_z\partial_{yy} + V_y\partial_{yz} + V\partial_{yyz} - 2V_{zz}\partial_z - V_z\partial_{zz})(-\Delta_2^{-1}\partial_{yz}) \end{aligned} \tag{13.1}$$

$$\begin{aligned} LW_{11}(W) = (k^2W\partial_z + W_{yy}\partial_z + W_y\partial_{yz} + W_{yyz} + W_{yz}\partial_y - W_{zz}\partial_z - 2W_z\partial_{zz} - W\partial_{zzz}) \\ +(ikW_y\partial_z + ikW\partial_{yz})(-ik\Delta_2^{-1}\partial_y) \\ +(2W_{yz}\partial_z + 2W_z\partial_{yz} + W_{zzy} + W_{zz}\partial_y + W_y\partial_{zz} + W\partial_{zzy})(-\Delta_2^{-1}\partial_{yz}) \end{aligned} \tag{13.2}$$

$$\begin{aligned} LV_{12}(V) = (ik)\big(V_y\,\partial_y + V\,\partial_{yy}\big)\big(\Delta_2^{-1}\partial_z\big) \\ -(ik)\big(k^2V_z - V_{zzz} + V_{yz}\partial_y + V_z\partial_{yy} + V_y\partial_{yz} + V\partial_{yyz} - 2V_{zz}\partial_z - V_z\partial_{zz}\big)\Delta_2^{-1} \end{aligned} \tag{13.3}$$

$$LW_{12}(W) = (ikW_y\partial_z + ikW\partial_{yz})(\Delta_2^{-1}\partial_z) \\ +(2W_{yz}\partial_z + 2W_z\partial_{yz} + W_{zzy} + W_{zz}\partial_y + W_y\partial_{zz} + W\partial_{zzy})(-ik\Delta_2^{-1}) \tag{13.4}$$

$$LV_{21}(V) = -(V_z\partial_y + V\partial_{yz})(-ik\Delta_2^{-1}\partial_y) + (ikV\partial_y)(-\Delta_2^{-1}\partial_{yz}) \tag{13.5}$$

$$LW_{21}(W) = (ikW_y) - (W_z\partial_z + W\partial_{zz})(-ik\Delta_2^{-1}\partial_y) + (ik)(W_z + W\partial_z)(-\Delta_2^{-1}\partial_{yz}) \tag{13.6}$$

$$LV_{22}(V) = -(V_z\partial_y + V\partial_{yz})(\Delta_2^{-1}\partial_z) + (ikV\partial_y)(-ik\Delta_2^{-1}) \tag{13.7}$$

$$LW_{22}(W) = -(W_z\partial_z + W\partial_{zz})(\Delta_2^{-1}\partial_z) + (ik)(W_z + W\partial_z)(-ik\Delta_2^{-1}) \tag{13.8}$$

13.2. 撤销方程的坐标变换(8.7) 和(8.8)$[U]_z$和 $[W]_z$可用 $[U^n]_{z^n}$和 $[W^n]_{z^n}$表示为:

$$[U]_z = cos(\theta)[U^n]_{z^n} - sin(\theta)[W^n]_{z^n} \tag{13.9}$$

$$[W]_z = sin(\theta)[U^n]_{z^n} + cos(\theta)[W^n]_{z^n}. \tag{13.10}$$

利用 (13.9) 和 (13.10) 将方程 (8.7) 和 (8.8) 改写为:

$$sin(\theta)[U^n]_{y,z^n} + cos(\theta)[W^n]_{y,z^n} = -\frac{1}{2\cdot Ly}cos(\theta)\frac{d[U^n]_{z^n}}{dy}(y=0) + \frac{1}{2\cdot Ly}sin(\theta)\frac{d[W^n]_{z^n}}{dy}(y=0) \\ +sin(\theta) \tag{13.11}$$

$$cos(\theta)[U^n]_{y,z^n} - sin(\theta)[W^n]_{y,z^n} = \frac{1}{2\cdot Ly}sin(\theta)\frac{d[U^n]_{z^n}}{dy}(y=0) + \frac{1}{2\cdot Ly}cos(\theta)\frac{d[W^n]_{z^n}}{dy}(y=0) \\ +cos(\theta)。 \tag{13.12}$$

$cos(\theta)\cdot$(13.11) 与 $-sin(\theta)\cdot$(13.12) 相加得:

$$[W^n]_{y,z^n} = -\frac{1}{2\cdot Ly}\frac{d[U^n]_{z^n}}{dy}(y=0) \tag{13.13}$$

REFERENCES

Barthelmie, R. J., Crippa, P., Wang, H., Smith, C. M., Krishnamurthy, R., Choukulkar Calhoun Valyou Marzocca Matthiesen , A., , R., , D., , P., , D., Brown , G. & Pryor, S. C. 2014 3D 大气边界层的风与湍流特征。 *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **95**, 743–756. Belušić, D., Večenaj, Ž. & LeMone, M. A. 2015 布拉风期间亚得里亚海上空水平滚涡的可能观测。 *Front. Earth Sci.* **3**, 23. Brown, R. A. 1970 *J. Atmos.* 行星边界层次级流动模型。 , – . *Sci.* **27** 742 757

Brown, R. A. 1980 行星边界层中的纵向不稳定性与次级流：综述。 *Rev. Geophys. Space Phys.* **18**, 683–697. Butler, K. M. & Farrell, B. F. 1992 黏性剪切流中的三维最优扰动。 *Phys. Fluids* **4**, 1637–1650. Coleman, G. N., Ferziger, J. H. & Spalart, P. R. 1990 湍流埃克曼层的数值研究。 *J. Fluid Mech.* **213**, 313–348. Coleman, G. N., Ferziger, J. H. & Spalart, P. R. 1992 稳定分层湍流埃克曼层的直接模拟。 *J. Fluid Mech.* **244**, 677–712. Coleman, G. N. 1999 中性分层行星边界层直接数值模拟的相似性统计。 *J. Atmos. Sci.* **56**, 891–900. Deusebio, E., Brethouwer, G., Mishra, P. & Philip, J. 2014 非分层与分层埃克曼层的数值研究。 *J. Fluid Mech.* **755**, 672–704. Dubos, T., Barthlott, C. & Drobinski, P. 2008 埃克曼层涡卷的出现与次级不稳定性。 *J. Atmos. Sci.* **65**, 2326–2342. Duncan, J. B., Jr, Hirth, B. D. & Schroeder, J. L. 2019 多普勒雷达对大气边界层空间湍流强度的测量。 *J. Appl. Meteor. Climatol.* , – . **58** 1535 1555
Ellingsen, T. & Palm, E. 1975 线性流的稳定性。 *Phys. Fluids* **18**, 487–488. Esau, I. 2012 埃克曼边界层中最大相干涡（涡卷）的模拟。 *J. Vortex Sci. Technol.* **1**, 235591. Faller, A. J. & Kaylor, R. E. 1966 层流埃克曼边界层不稳定性的数值研究。 *J. Atmos. Sci.* **23**, 466–480. Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 2012 湍流壁面剪切流中流向涡卷与条带的动力学。 *J. Fluid Mech.* **708**, 149–196. Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 2016 平面库埃特流自维持湍流的二阶统计态动力学模型中的结构与机制。 *arXiv preprint* arXiv:1607.05020.Farrell, B. F. Ioannou P. J. Jimenez J. Constantinou N. C. Lozano-Duran A. , , , , , , & Nikolaidis M. A. 2016 , , , 基于统计态动力学的平面泊肃叶流大尺度运动结构与机制研究。 *J. Fluid Mech.* **809**, 290–315.Farrell, B. F., Ioannou, P. J. & Nikolaidis, M. A. 2017 转捩前库埃特流中自由来流湍流诱发的涡卷/条带结构不稳定性。 *Phys. Rev. Fluids* **2** 104605
Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 2019 统计态动力学：剪切流湍流的新视角。载于 *Zonal Jets: Phenomenology, Genesis, and Physics*（编者：B. Galperin 和 P. L. Read），第 380–406 页。剑桥大学出版社。Farrell, B. F., Ioannou, P. J. & Nikolaidis, M. A. 2022湍流剪切流中涡卷-条带结构的形成与维持机制。 *arXiv preprint* arXiv:2205.07469.Foster, R. C. 2005 *J. Atmos. Sci.* 涡卷 **62** 2647 2661
为何常见于飓风边界层。 , – .Foster, R. C. 2013 热带气旋合成孔径雷达图像中的大纵横比涡卷特征。 *Oceanography* **26** (2), 58–67. Friedrich, K., Aitken, M. L., Lundquist, J. K., Kalina, E. A. & Marshall, R. F. 2012大气边界层的稳定性与湍流：遥感与塔架观测的比较。 *Geophys. Res. Lett.* **39**, L03801. Gao, K. & Ginis, I. 2014 飓风边界层流动拐点不稳定性导致涡卷生成的研究。 *J. Atmos. Sci.* **71**, 4292–4307. Gao, K. & Ginis, I. 2015 飓风边界层中平衡态涡卷及其影响。 *J. Atmos. Sci.* **73**, 1205–1222. Gao, K. & Ginis, I. 2018 移动飓风边界层下线性相位涡卷的特征。 *J. Atmos. Sci.* **75**, 2589–2598.Gerling, T. W. 1986 利用散射计和合成孔径雷达遥感海面风场。 *Johns Hopkins APL Tech. Dig.* **6** (4), 320–329. Gustavsson, L. H. 1991 平面泊肃叶流中三维扰动的能量增长。 *J. Fluid Mech.* **224**, 241–260.Holland, G. J. 1980 *Mon. Weath. Rev.* 飓风 **108** 1212 1218
风速和气压廓线的解析模型。 , – .

Kim, E. & Farrell, B. F. 2025a 基于统计态动力学的朗缪尔湍流研究。*arXiv preprint* arXiv:2509.00234。Kim, E. & Farrell, B. F. 2025b 基于统计态动力学的埃迪锋湍流研究。第一部分：不稳定性。 *arXiv preprint* arXiv:2506.11993。Kim, E. & Farrell, B. F. 2025c 湍流埃迪锋的统计态动力学研究。第二部分：有限振幅平衡态。 *arXiv preprint* arXiv:2507.15134。Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. & Runstadler, P. W. 1967 湍流边界层的结构。 *J. Fluid Mech.* **30**, 741–773。Lappen, C.-L. & Randall, D. A. 2005 利用理想化相干结构对行星边界层质量通量模型中的动量通量进行参数化。 *J. Atmos. Sci.* **62**, 2829 2846– 。LeMone, M. A. 1973 行星边界层中水平滚涡的结构与动力学。 *J. Atmos. Sci.* **30**, 1077–1091。Lilly, D. K. 1966 关于埃克曼边界流的不稳定性。 *J. Atmos. Sci.* **23**, 481–494。Lozano-Durán, A., Nikolaidis, M.-A., Constantinou, N. C. & Karp, M. 2019 条带无模态不稳定性的壁面湍流。 *arXiv preprint* **1909**.05490。Lozano-Durán, A., Constantinou, N. C., Nikolaidis, M.-A. & Karp, M. 2021 维持壁面湍流的线性机制之因果关系。 *J. Fluid Mech.* **914**, A8。Marlatt, S., Waggy, S. & Biringen, S. 2012 湍流埃克曼层的直接数值模拟：闭合模型评估。 *J. Atmos. Sci.* **69**, 1106–1117。Morrison, I., Businger, S., Marks, F., Dodge, P. & Businger, J. A. 2005 飓风边界层中涡卷普遍存在的观测证据。 *J. Atmos. Sci.* **62**, 2662 2673– 。Nikolaidis, M. A., Ioannou, P. J. & Farrell, B. F. 2024 基于扰动协方差的泊肃叶流湍流滚轴涡旋-条带动力学研究。 *J. Fluid Mech.* **988**, A14。Reddy,

S. C. & Henningson D. S. 1993 *J. Fluid* 黏性 *Mech.* **252** 209 238
通道流中的能量增长。 , –。Schmid, P. J. & Henningson,

D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*。施普林格，纽约。Smith, C. R. & Metzler, S. P. 1983 湍流边界层近壁区低速条带的特征。 *J. Fluid Mech.* **129**, 27–54。Tang, J., Zhang, J. A., Chan, P., Hon, K., Lei, X. & Wang, Y. 2021 热带气旋边界层中螺旋滚轴的飞机直接观测。 *Sci. Rep.* **11**, 18771。Watkins, S. 2012 大气边界层湍流特征及其飞机模拟的可能性。 *Third Symposium "Simulation of Wing and Nacelle Stall"*。Weckwerth, T. M., Wilson, J. W., Wakimoto, R. M. & Crook, N. A. 1999 水平对流滚轴演变的观测研究。

Mon. Weath. Rev. , –。 **127** 2160 2179
Wurman, J. & Winslow, J. 1998 弗兰飓风中观测到的强烈亚公里尺度边界层滚轴。 *Science* **280**, 555–557。Gustavsson, L. H. 1991 平面泊肃叶流中三维扰动的能量增长。 *J. Fluid Mech.* **224**, 241–260。