arXiv:2601.03039v1 [math.CV] 6 Jan 2026

多复变数中星形映射的广义托普利茨行列式

Surya Giri[1] 和 S. Sivaprasad Kumar*

摘要

本文为单位圆盘中满足 $f(z)-z$ 在 $z=0$ 处有 $k+1$ 阶零点的星形函数 f 所对应的二阶和三阶托普利茨行列式建立了尖锐界。这些界还推广到定义在复巴拿赫空间单位球上以及 $\mathbb{C}^n$ 中有界星形圆形域上的星形映射。所得结果将若干已知界推广为特例。

关键词： 星形映射；托普利茨行列式；系数问题。美国数学学会学科分类：32H02；30C45。

1 引言

设 $\mathcal{S}$ 为开单位圆盘 $\mathbb{U}$ 上具有规范化形式的解析单叶函数 f 类

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,\quad z\in\mathbb{U}. \tag{1}$$

$\mathcal{S}$ 的一个著名子类是星形函数类，记作 $\mathcal{S}^*$。函数 $f\in\mathcal{S}$ 称为星形函数，当且仅当

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0.$$

托普利兹矩阵及其行列式在纯数学和应用数学中均有应用。Ye 和 Lim 的综述文章 [17] 全面介绍了它们在数学各个领域中的应用。Ali 等人 [2] 研究了 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$的托普利茨行列式，其定义为

$$T_{m,n}(f)=\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m-1}\\ a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n+m-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n+m-1} & a_{n+m-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

特别是，

$$T_{2,2}(f)=a_2^2-a_3^2$$

and

$$T_{3,1}(f)=\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3\\ a_2 & 1 & a_2\\ a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix}=1-a_3^2-2a_2^2+a_2^2a_3.$$

Ali 等人 [2] 为 $|T_{2,\ 1}(f)|$ 和 $|T_{3,\ 1}(f)|$ 在 $f \in \mathcal{S}^*$ 时以及其他 $\mathcal{S}$子类推导出了精确估计。受此启发，几位作者研究了解析函数 [1, 3, 7]的不同子类中相同的问题。

尽管已经建立了各种 $\mathcal{S}$ 子类的托普利茨行列式估计，但对于多复变数中的双全纯映射，目前仅有少量研究结果。将托普利茨行列式的概念推广到高维后，Giri 和 Kumar [5] 获得了单位多圆盘中的一类双全纯映射以及复巴拿赫空间中的单位球上的二阶和三阶托普利茨行列式的精确估计。Giri 和 Kumar [3]也研究了有界星形圆域上的同一问题。

设 X 是赋范数 $\|\cdot\|$ 的复巴拿赫空间，且 $\mathbb{B}$ 是 X中的单位球。从 $\mathbb{B}$ 到 X 的所有全纯映射的集合记为 $\mathcal{H}(\mathbb{B})$。如果 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$，那么对于每个整数 $k \geq 1$，存在一个有界对称线性映射

$$D^k f(z) : \prod_{j=1}^{k} X \to X,$$

称为 f 在 z处的 k^{th} 阶 Fr´echet 导数。此外，对于 z某个邻域中的每个 w，映射 f 可以表示为

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(z)((w-z)^k),$$

其中 $D^0 f(z)((w-z)^0) = f(z)$，且对于 $k \geq 1$,

$$D^k f(z)((w-z)^k) = D^k f(z) \underbrace{(w-z, w-z, \cdots, w-z)}_{\text{k -times}}.$$

在有界圆形域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上，全纯映射 $f: \Omega \to X$ 的一阶和 m^{th} Fr´echet 导数分别记为 $Df(z)$ 和 $D^m f(z)(a^{m-1}, \cdot)$。其矩阵表示为

$$Df(z) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right)_{1 \leq j,k \leq n},$$

$$D^m f(z)(a^{m-1}, \cdot) = \left(\sum_{p_1, p_2, \cdots, p_{m-1}=1}^{n} \frac{\partial^m f_j(z)}{\partial z_k \partial z_{p_1} \cdots \partial z_{p_{m-1}}} a_{p_1} \cdots a_{p_{m-1}}\right)_{1 \leq j,k \leq n},$$

其中 $f(z) = (f_1(z)\ f_2(z) \cdots f_n(z))'$，且 $a = (a_1,\ a_2,\ \cdots a_n)' \in \mathbb{C}^n$.。令 $L(X,\ Y)$ 表示从 X 到复巴拿赫空间 Y 的连续线性算子集合。对于每个 $z \in X \setminus \{0\}$，令

$$T(z) = \{l_z \in L(X, \mathbb{C}) : l_z(z) = \|z\|, \|l_z\| = 1\},$$

其中 $L(X,\ Y)$ 表示从 X 到复巴拿赫空间Y 的连续线性算子集合。由哈恩–巴拿赫定理，集合 T_z 非空。

若 $f(\mathbb{B})$ 是一个域，且 f 的逆映射存在并在 $f(\mathbb{B})$ 上全纯，则称映射 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ 为双全纯映射。若 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ 的 Fr´echet 导数对每个 $z \in \mathbb{B}$ 都有有界逆，则称 f 为局部双全纯映射。与一维情形类似，若 $f(0) = 0$ 且 $Df(0) = I$，则称 f 为规范化映射，其中 I 表示从 X 到 X 的线性恒等算子。

定义。 *[8]* 设 $\mathcal{D}$ 是 X 中包含0 且 $f:\ \mathcal{D}\to X$ 为全纯函数。我们称 f在 k处有 $z=0$阶零点，若 $f(0)=Df(0)=\cdots=D^{k-1}f(0)=0$且 $D^kf(0)=0$，其中 $k\in\mathbb{N}$。

Xu [16]研究了高维星形映射 f 的 Fekete-Szeg¨o 问题，其中 $f(z)-z$在 $z=0$处有 $k+1$阶零点。Giri 和 Kumar [6] 确定了满足相同零阶条件的拟凸映射在 X 中的单位球上以及在 $\mathbb{C}^n$中的单位多圆盘上的托普利茨行列式。本文在相同的零阶条件下，建立了定义在 X 中的单位球上以及定义在 $\mathbb{C}^n$中的有界星形圆域上的星形映射关于$|T_{2,2}(f)|$ 和$|T_{3,1}(f)|$ 的精确估计，其中零点位于 $z=0$。这些结果推广了先前已知的工作，并将某些一维结果扩展到高维。

设 $\mathcal{P}$为定义在 $\mathbb{U}$ 上的解析函数 p 类，满足 $p(0)=1$ 且 $\mathrm{Re}\,p(z)>0$ 对所有 $z\in\mathbb{U}$均成立。我们使用以下引理证明主要结果。

引理 1。 *[13]* 令 $f:\ \mathbb{B}\to X$ 为一个归一化局部双全纯映射。当且仅当映射 f 在 $\mathbb{B}$上为星形映射

$$\mathrm{Re}(l_z[Df(z)]^{-1}f(z))>0,\quad x\in\mathbb{B}\setminus\{0\},\quad l_z\in T_z.$$

所有在 $\mathbb{B}$ 上的星形映射构成的类记为 $\mathcal{S}^*$（$\mathbb{B}$）。

引理 2。 *[11]* $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 被称为有界星形圆域，当且仅当存在唯一的实值连续函数 ρ: $\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$，称为 Ω 的闵可夫斯基泛函，使得

1. ρ（z） ≥ 0, $z\in\mathbb{C}^n$; ρ（z） $=0\Leftrightarrow z=0$,
2. ρ（tz） $=|t|$, ρ（z）， $t\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}^n$,
3. $\Omega=\{z\in\mathbb{C}^n:\ \rho(z)<1\}$。

此外，如果 ρ（z）、 $z\in\Omega$属于 $\mathcal{C}^1$，但在某个低维流形 $E\subset\mathbb{C}^n$上除外，则 ρ（z） 满足以下性质：

$$\begin{aligned}
&2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}z=\rho(z),\quad z\in\mathbb{C}^n\setminus E,\\
&2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\Big|_{z=z_0}=1,\quad z_0\in\partial\Omega\setminus E,\\
&\frac{\partial\rho(\lambda z)}{\partial z}=\frac{\partial\rho(z)}{\partial z},\quad \lambda\in(0,\infty),\ z\in\mathbb{C}^n\setminus E,\\
&\frac{\partial\rho(e^{i\theta}z)}{\partial z}=e^{-i\theta}\frac{\partial\rho(z)}{\partial z},\quad \theta\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}^n\setminus E,
\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}=\left(\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_n}\right)$.

引理 3. *[11]* 设 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 是包含 0 的有界星形圆域，其闵可夫斯基泛函 $\rho(z)$ 除某些低维流形 $E\subset\mathbb{C}^n$ 外属于 C^1。设 $f:\Omega\to\mathbb{C}^n$是一个归一化局部双全纯映射。当且仅当 f 在Ω 上是星形映射时

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}(Df(z))^{-1}f(z)\right)>0,\quad z\in\Omega\setminus E.$$

Ω 上所有星形映射构成的类记为 $\mathcal{S}^*(\Omega)$。

2 主要结果

本节首先为满足条件 $f(z)-z$ 在 $z=0$ 处有 $k+1$ 阶零点的函数 $f\in\mathcal{S}^*$，推导 $|T_{2,2}(f)|$ 和 $|T_{3,1}(f)|$ 的精确估计。随后，我们通过推导类 $\mathcal{S}^*(\mathbb{B})$ 和 $\mathcal{S}^*(\Omega)$ 的相应估计，将这些结果推广到高维。

定理 4。若 f（z），则 $=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{nk+1}z^{nk+1}\in\mathcal{S}^*$,

$$|a_{k+1}^2-a_{2k+1}^2|\leq\frac{4}{k^2}+\frac{(k+2)^2}{k^4}.$$

该估计是精确的。

证明。由于 $f\in\mathcal{S}^*$，存在函数 $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n\in\mathcal{P}$ 使得

$$zf'(z)=f(z)p(z).$$

将函数 f 和 p 展开成级数后，对比 z 的同次幂，得到

$$a_{k+1}=\frac{p_k}{k}\ \text{ and }\ a_{2k+1}=\frac{kp_{2k}+p_k^2}{2k^2}.$$

利用 $|p_n|\leq 2$ （$n\in\mathbb{N}$）估计，对于函数 $p\in\mathcal{P}$ [14, 定理 3.1。2], 我们得到

$$|a_{k+1}|\leq\frac{2}{k}\ \text{ and }\ |a_{2k+1}|\leq\frac{k+2}{k^2}. \tag{3}$$

鉴于这些估计，我们推得

$$|a_{k+1}^2-a_{2k+1}^2|\leq|a_{k+1}|^2+|a_{2k+1}|^2|\leq\frac{4}{k^2}+\frac{(k+2)^2}{k^4}.$$

为证明尖锐性，考虑函数

$$f(z)=\frac{z}{(1-iz^k)^{1/k}}=z+\frac{2i}{k}z^{k+1}-\frac{k+2}{k^2}z^{2k+1}+\cdots. \tag{4}$$

显然，$f\in\mathcal{S}^*$ 对于映射 f，我们有

$$|a_{k+1}^2-a_{2k+1}^2|=\frac{4}{k^2}+\frac{(k+2)^2}{k^4},$$

由此完成证明。 □

定理 5. 若 $f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{nk+1}z^{nk+1}\in\mathcal{S}^*$，则

$$\left|1-a_{2k+1}^2-2a_{k+1}^2+2a_{k+1}^2a_{2k+1}\right|\leq\begin{cases}1+\dfrac{8}{k^2}+\dfrac{(k+2)(6-k)}{k^4}; & 1\leq k\leq 3,\\[2ex] 1+\dfrac{8}{k^2}+\dfrac{2+k}{k^3}; & k\geq 3,\end{cases}$$

该估计是尖锐的 $k=1$，2,3。

证明。 对于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $f \in \mathcal{S}^*$，Xu [16, 定理 3。1] 推导得

$$\left|a_{2k+1} - \lambda a_{k+1}^2\right| \leq \frac{1}{k} \max\left\{1, \frac{|2+k-4\lambda|}{k}\right\},$$

由此立即得到

$$\left|a_{2k+1} - 2a_{k+1}^2\right| \leq \frac{1}{k} \max\left\{1, \frac{|k-6|}{k}\right\}. \tag{5}$$

将（3）和（5）中的界代入不等式

$$|1 - a_{2k+1}^2 - 2a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}^2 a_{2k+1}| \leq 1 + 2|a_{k+1}|^2 + |a_{2k+1}||a_{2k+1} - 2a_{k+1}^2|,$$

即可得到所需结果。

The 当函数 f 由（4）定义时，等号成立。对于此映射，我们有 e

$$|1 - a_{2k+1}^2 - 2a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}^2 a_{2k+1}| = 1 + \frac{8}{k^2} + \frac{(k+2)(6-k)}{k^4},$$

这表明，对于 $k = 1$，2，3，所得界是尖锐的。 □

注。对于 $k = 1$，定理5 可化为 *[2, 定理 2.1(ii)]*。

定理 6。 设 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}, \mathbb{C})$ 且 $F(z) = zf(z) \in \mathcal{S}^*(\mathbb{B})$。若 $F(z) - z$ 在 $z = 0$ 处有 $k+1$ 阶零点，则

$$\left|\left(\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}}\right)^2 - \left(\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|^{k+1}}\right)^2\right| \leq \frac{(k+2)^2}{k^4} + \frac{4}{k^2}.$$

该界是尖锐的。

证明。 设 $z_0 = \frac{z}{\|z\|}$，固定 $z \in X \setminus \{0\}$。定义 q： $\mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 使得

$$q(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\zeta}{l_z((DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0))}, & \zeta \neq 0, \\ 1, & \zeta = 0. \end{cases}$$

那么 $q \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ 且 $q(0) = 1$。此外，我们有

$$\begin{aligned} q(\zeta) =& \frac{\zeta}{l_z((DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0))} \\ =& \frac{\zeta}{l_{z_0}((DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0))} \\ =& \frac{\|\zeta z_0\|}{l_{\zeta z_0}((DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0))}, \quad \zeta \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Re}((DF(z))^{-1}F(z)) > 0$，我们得到

$$\mathrm{Re}\, q(\zeta) > 0. \tag{6}$$

采用与 [12], 相同的方法论，我们得到

$$(DF(z))^{-1}F(z) = z\left(\frac{1}{1+\frac{Df(z)z}{f(z)}}\right) = \frac{zf(z)}{f(z)+Df(z)z}, \quad z \in \mathbb{B},$$

由此进一步得到

$$\frac{\|z\|}{l_z((DF(z))^{-1}F(z))} = 1 + \frac{Df(z)z}{f(z)}. \tag{7}$$

由（7）可知

$$q(\zeta) = \frac{\|\zeta z_0\|}{l_{\zeta z_0}((DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0))} = 1 + \frac{Df(\zeta z_0)\zeta z_0}{f(\zeta z_0)}. \tag{8}$$

将 $q(\zeta)$ 和 $f(\zeta z_0)$ 的泰勒级数展开代入上式，得

$$\begin{aligned}
&\left(1+q'(0)\zeta+\frac{q''(0)}{2}\zeta^2+\cdots\right)\left(1+\frac{D^kf(0)(z_0^k)}{k!}\zeta^k+\frac{D^{k+1}f(0)(z_0^{k+1})}{(k+1)!}\zeta^k+\cdots\right)\\
&\quad=\left(1+\frac{D^kf(0)(z_0^k)}{k!}\zeta^k+\frac{D^{k+1}f(0)(z_0^{k+1})}{(k+1)!}\zeta^k+\cdots\right)+\left(\frac{D^kf(0)(z_0^k)}{(k-1)!}\zeta^k\right.\\
&\qquad\left.+\frac{D^{k+1}f(0)(z_0^{k+1})}{k!}\zeta^{k+1}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

比较等式两边次数相同的齐次项，得

$$\frac{q^{(k)}(0)}{k!} = \frac{kD^kf(0)(z_0^k)}{k!}, \quad \frac{q^{(2k)}(0)}{(2k)!} = 2k\frac{D^{2k}f(0)(z_0^{2k})}{(2k)!} - k\left(\frac{D^kf(0)(z_0^k)}{k!}\right)^2.$$

即

$$\frac{q^{(k)}(0)\|z\|^k}{k!} = \frac{kD^kf(0)(z)}{k!}, \ \frac{q^{(2k)}(0)\|z\|^{2k}}{(2k)!} = 2k\frac{D^{2k}f(0)(z^{2k})}{(2k)!} - k\left(\frac{D^kf(0)(z^k)}{k!}\right)^2. \tag{9}$$

由关系式 $F(z) = zf(z)$，可得

$$\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!} = \frac{D^kf(0)(z^k)}{k!}z, \ \frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!} = \frac{D^{2k}f(0)(z^{2k})}{(2k)!}z,$$

从而立即得到

$$\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|} = \frac{D^kf(0)(z^k)}{k!}, \ \frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!\|z\|} = \frac{D^{2k}f(0)(z^{2k})}{(2k)!}. \tag{10}$$

由（9）和（10），可得

$$\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|^{k+1}} = \frac{1}{k}\frac{q^{(k)}(0)}{k!}.$$

应用 [14, 定理 3.1。2] 对 $q \in \mathcal{P}$的界，我们得到

$$\left|\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|^{k+1}}\right| \leq \frac{2}{k}. \tag{11}$$

对于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $z \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$，Xu [16] 证明了

$$\left|\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}} - \lambda\Big(\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!||z||^{k+1}}\Big)^2\right| \leq \frac{1}{k}\max\Big\{1, \frac{|2+k-4\lambda|}{k}\Big\}. \tag{12}$$

由（12）可直接推出

$$\left|\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}}\right| \leq \frac{2+k}{k^2}. \tag{13}$$

将（11）和（13）中给出的界代入不等式

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}}\right)^2 - \left(\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|^{k+1}}\right)^2\right| \\ &\qquad \leq \left|\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}}\right|^2 + \left|\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|^{k+1}}\right|^2,\end{aligned}$$

所述界立即成立。

对于映射，该界是尖锐的

$$F(z) = \frac{z}{(1-i(l_u(z))^k)^{2/k}}, \quad z \in \mathbb{B}, \quad \|u\| = 1. \tag{14}$$

由 [9], 可知 $F \in \mathcal{S}^*$（$\mathbb{B}$）和 F（z） $-z$ 在 $z = 0$处有 $k+1$ 阶零点。此外，经过简单计算可得

$$\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!} = \frac{2i(l_u(z))^k}{k}z \text{ and } \frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!} = -\frac{(k+2)(l_u(z))^{2k}}{k^2}z.$$

鉴于这些方程，我们有

$$\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!} = \frac{2i(l_u(z))^k}{k}\|z\|$$

and

$$\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!} = -\frac{(k+2)(l_u(z))^{2k}}{k^2}\|z\|,$$

分别。取 $z = ru$，我们得到

$$\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!} = \frac{2i}{k} \text{ and } \frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!} = -\frac{(k+2)}{k^2}. \tag{15}$$

利用这些值，我们得到

$$\left|\left(\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}}\right)^2 - \left(\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|^{k+1}}\right)^2\right| = \frac{(k+2)^2}{k^4} + \frac{4}{k^2},$$

这证实了该结果的尖锐性。 □

注。 当 $X=\mathbb{C}$ 且 $\mathbb{B}=\mathbb{U}$时，定理 6 等价于定理 4。

定理 7. 设 $f\in\mathcal{H}(\mathbb{B},\mathbb{C})$和 $F(z)=zf(z)\in\mathcal{S}^*(\mathbb{B})$。若 $F(z)-z$在$z=0$处有 $k+1$阶零点，则

$$\left|1-a_{2k+1}^2-2a_{k+1}^2+2a_{k+1}^2a_{2k+1}\right|\leq\begin{cases}1+\dfrac{8}{k^2}+\dfrac{(k+2)(6-k)}{k^4}; & 1\leq k\leq 3,\\ 1+\dfrac{8}{k^2}+\dfrac{2+k}{k^3}; & k\geq 3,\end{cases}$$

其中

$$a_{2k+1}=\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}}\ \ and\ \ a_{k+1}=\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!\|z\|^{k+1}}. \tag{16}$$

当 $k=1$取2、3时，该界是锐的。

证明。 由（12），可直接得到

$$\left|\frac{l_z(D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1}))}{(2k+1)!||z||^{2k+1}}-2\Big(\frac{l_z(D^{k+1}F(0)(z^{k+1}))}{(k+1)!||z||^{k+1}}\Big)^2\right|\leq\frac{1}{k}\max\Big\{1,\frac{|k-6|}{k}\Big\}. \tag{17}$$

三角不等式结合（1）可得

$$|T_{3,1}(F)|\leq 1+2|a_{k+1}|^2+|a_{2k+1}||a_{2k+1}-2a_{k+1}^2|,$$

其中 a_{2k+1} 和 a_{k+1} 如（16）所示。将（11）、（13）和（17）中的估计代入上述不等式，即得所需的界。

当 $1\leq k\leq 3$时，对于由 F （14）定义的映射，由（15）可知

$$a_{k+1}=\frac{2i}{k}\ \text{ and }\ a_{2k+1}=-\frac{(k+2)}{k^2}.$$

因此，直接计算可得

$$1-a_{2k+1}^2-2a_{k+1}^2+2a_{k+1}^2a_{2k+1}=1+\frac{8}{k^2}+\frac{(k+2)(6-k)}{k^4},$$

从而证明了 $k=1$、2、3 的尖锐性。 □

注。 当 $X=\mathbb{C}$ 且 $\mathbb{B}=\mathbb{U}$时，定理 7 化为定理 5。

定理 8。 设 $f\in\mathcal{H}(\Omega\ \mathbb{C})$和 $F(z)=zf(z)\in\mathcal{S}^*(\Omega)$。若 $F(z)-z$在$z=0$处有 $k+1$阶零点，则

$$\left|\left(2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}\right)^2-\left(2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}\right)^2\right|\leq\frac{(k+2)^2}{k^4}+\frac{4}{k^2}.$$

该估计是精确的。

证明。对于 $z \in \Omega \setminus E$，令 $z_0 = \frac{z}{\rho(z)}$。考虑由下式定义的函数 $h: \mathbb{U} \to \mathbb{C}$

$$h(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\zeta}{2\frac{\partial \rho(z_0)}{\partial z}(DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0)}, & \zeta \neq 0, \\ 1, & \zeta = 0. \end{cases}$$

于是 $h \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ 且 $h(0) = 1$。由于 $F \in \mathcal{S}^*(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(h(\zeta)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta}{2\frac{\partial \rho(z_0)}{\partial z}(DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\rho(\zeta z_0)}{2\frac{\partial \rho(\zeta z_0)}{\partial z}(DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0)}\right) > 0, \quad \zeta \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

按照定理 7 的证明方法，我们得到

$$(DF(z))^{-1}F(z) = z\left(\frac{1}{1+\frac{Df(z)z}{f(z)}}\right) = \frac{zf(z)}{f(z)+Df(z)z}, \quad z \in \Omega \setminus \{0\},$$

这意味着

$$\frac{\rho(z)}{2\frac{\partial \rho(z)}{\partial z}(DF(z))^{-1}F(z)} = 1 + \frac{Df(z)z}{f(z)}, \quad z \in \Omega \setminus E.$$

由（2），我们有

$$h(\zeta) = \frac{\rho(\zeta z_0)}{2\frac{\partial \rho(\zeta z_0)}{\partial z}(DF(\zeta z_0))^{-1}F(\zeta z_0)} = 1 + \frac{Df(\zeta z_0)\zeta z_0}{f(\zeta z_0)}.$$

C比较按 ζ 的幂展开的相同齐次展开项，可得

$$\frac{h^{(k)}(0)}{k!} = \frac{kD^k f(0)(z_0^k)}{k!},$$

进一步得到

$$\frac{D^k f(0)(z^k)}{k!} = \frac{1}{k}\frac{h^{(k)}(0)\rho^k(z)}{k!}. \tag{18}$$

此外，由关系 $F(z) = zf(z)$ 可得

$$\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!} = \frac{D^k f(0)(z^k)}{k!}z. \tag{19}$$

由（2）和（19），可得

$$2\frac{\partial \rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!} = \frac{D^k f(0)(z^k)\rho(z)}{k!}. \tag{20}$$

将（18）与（20）结合起来，可得

$$2\frac{\partial \rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)} = \frac{1}{k}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}. \tag{21}$$

利用 [14,定理 3.1。2]对 Carath´eodory 函数 h的界，我们得到

$$\left|2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}\right|\leq\frac{2}{k}. \tag{22}$$

对于 $\lambda\in\mathbb{C}$，Xu [16, 定理 3.4] 证明了

$$\left.\begin{aligned}\left|2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}\right.&\left.-\lambda\left(2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}\right)^2\right|\\&\leq\frac{1}{k}\max\left\{1,\frac{|2+k-4\lambda|}{k}\right\},\quad z\in\Omega\setminus E.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

作为直接推论，上述不等式立即给出

$$\left|2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}\right|\leq\frac{k+2}{k^2}. \tag{24}$$

（22）和（24）中给出的界，以及不等式

$$\begin{aligned}&\left|\left(2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}\right)^2-\left(2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}\right)^2\right|\\&\qquad\leq\left|2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}\right|^2+\left|2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}\right|^2,\end{aligned}$$

导出所需结果。

为完成尖锐性部分，我们考虑映射

$$F(z)=\frac{z}{\left(1-i\left(\frac{z_1}{r}\right)^k\right)^{\frac{2}{k}}},\quad z\in\Omega, \tag{25}$$

其中 $r=$上确界$\{|z_1|:\ z=(z_1,\ 0,\ \cdots,\ 0)'\in\Omega\}$。根据 [10]，（25）给出的映射属于 $\mathcal{S}^*$（Ω），且 $z=0$ 是 $k+1$ 的阶零点 $F(z)-z$。对于此映射，我们有

$$\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!}=i\left(\frac{2}{k}\right)\left(\frac{z_1}{r}\right)^k z\ \text{ and }\ \frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!}=-\left(\frac{k+2}{k^2}\right)\left(\frac{z_1}{r}\right)^{2k}z.$$

将（2）代入上述方程，得到

$$2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!}=i\left(\frac{2}{k}\right)\left(\frac{z_1}{r}\right)^k\rho(z)$$

and

$$2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!}=-\left(\frac{k+2}{k^2}\right)\left(\frac{z_1}{r}\right)^{2k}\rho(z),$$

分别。取 $z=Ru\,(0<R<1)$，其中 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'\in\partial\Omega$ 且 $u_1=r$，我们得到

$$2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}=i\left(\frac{2}{k}\right) \tag{26}$$

and

$$2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}=-\Big(\frac{k+2}{k^2}\Big). \tag{27}$$

因此，由于（26）和（27），我们有

$$\left|\left(2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}\right)^2-\left(2\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}\right)^2\right|=\frac{(k+2)^2}{k^4}+\frac{4}{k^2},$$

这证明了该界的尖锐性。 □

注： 当 $n=1$ 且 $\Omega=\mathbb{U}$时，定理 *8* 等价于定理 *4*。

定理 9。 设 $f\in\mathcal{H}(\Omega\ \mathbb{C})$和 $F(z)=zf(z)\in\mathcal{S}^*(\Omega)$。若 $F(z)-z$在$z=0$处有 $k+1$阶零点，则

$$\left|1-a_{2k+1}^2-2a_{k+1}^2+2a_{k+1}^2a_{2k+1}\right|\leq\begin{cases}1+\dfrac{8}{k^2}+\dfrac{(k+2)(6-k)}{k^4}; & 1\leq k\leq 3,\\[2ex] 1+\dfrac{8}{k^2}+\dfrac{2+k}{k^3}; & k\geq 3,\end{cases}$$

其中

$$a_{2k+1}=2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{2k+1}F(0)(z^{2k+1})}{(2k+1)!\rho^{2k+1}(z)}\ \ and\ \ a_{k+1}=2\frac{\partial\rho(z)}{\partial z}\frac{D^{k+1}F(0)(z^{k+1})}{(k+1)!\rho^{k+1}(z)}. \tag{28}$$

对于 $k=1$、2、3，该界是尖锐的。

证明。 根据（23）和（28），立即得到

$$\left|a_{2k+1}-2a_{k+1}^2\right|\leq\frac{1}{k}\max\left\{1,\frac{|k-6|}{k}\right\}. \tag{29}$$

将（22）、（24）和（29）中的界代入不等式

$$\left|1-a_{2k+1}^2-2a_{k+1}^2+2a_{k+1}^2a_{2k+1}\right|\leq 1+2\left|a_{k+1}\right|^2+\left|a_{2k+1}\right|\left|a_{2k+1}-2a_{k+1}^2\right|,$$

即可得到所述的界。

由（26）和（27），对于由（25）定义的映射 F，显然有

$$\left|1-a_{2k+1}^2-2a_{k+1}^2+2a_{k+1}^2a_{2k+1}\right|=1+\frac{8}{k^2}+\frac{(k+2)(6-k)}{k^4}.$$

因此，对于 $1\leq k\leq 3.$，该界是尖锐的 □

备注。 当 $n=1$ 且 $\Omega=\mathbb{U}$时，定理 *9* 等价于定理 *5*。

声明

利益冲突

作者声明，他们不存在利益冲突。

作者贡献

每位作者对本研究及稿件的撰写贡献均等。

数据可用性

不适用。

参考文献

[1] O. P. Ahuja、K. Khatter 和 V. Ravichandran，Ma-Minda 星形函数与凸函数类相关的托普利茨行列式，《伊朗科学技术学报：A辑科学》**45** （2021年），第6期，2021–2027页。[2] M. F. Ali、D. K. Thomas 和 A. Vasudevarao，元素为解析单叶函数系数的托普利茨行列式，《澳大利亚数学会通报》**97** （2018年），第2期，253–264页。[3] S. Giri 和 S. S. Kumar，某些单叶函数的厄米特-托普利茨行列式，《分析数学与物理》**13**（2023年），第2期，论文编号37，共19页。[4] S. Giri 和 S. S. Kumar，$\mathbb{C}^n$上的有界星形圆形域的托普利茨行列式，《数学科学学报B辑》（英文版）（2025年），arXiv:2211.14532（2022年）（即将发表）。[5] S. Giri 和 S. S. Kumar，一维及高维中的托普利茨行列式，《数学科学学报B辑》（英文版）**44**（2024年），第5期，1931–1944页。[6] S. Giri 和 S. S. Kumar，高维中一类拟凸映射子类的托普利茨行列式，《分析学杂志》**32** （2024年），第4期，2099–2112页。[7] A. Lecko、Y. J. Sim 和 B. Śmiarowska，凸函数的四阶厄米特托普利茨行列式，《分析数学与物理》**10**（2020年），第3期，论文编号39，共11页。[8] Y. Y. Lin 和 Y. Hong，巴拿赫空间中全纯映射的一些性质，《数学学报》**38** （1995年），第2期，234–241页。[9] T. S. Liu 和 X. S.Liu，关于正规化双全纯映射的精确增长、覆盖及畸变定理，《数学分析及其应用杂志》**295** （2004年），第2期，404–417页。[10] X. S. Liu 和 T. S. Liu，关于 $\mathbb{C}^n$中正规化双全纯映射的尖锐增长与覆盖定理，《数学科学学报B辑》（英文版）**27** （2007年），第4期，803–812页。[11] T. S. Liu 和 G. Ren，有界星形圆域上星形映射的增长定理，《中国数学年刊B辑》**19** （1998年），第4期，401–408页。[12] J. A. Pfaltzgraff 和 T. J. Suffridge，由星形映射生成的延拓定理与线性不变族，《玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学年刊》A辑**53** （1999年），193–207页。[13] T. J. Suffridge，巴拿赫空间中的星形映射与凸映射，《太平洋数学杂志》**46** （1973年），575–589页。

[14] D. K. Thomas、N. Tuneski 和 A. Vasudevarao，《单叶函数》，De Gruyter 数学研究丛书，第69卷，De Gruyter，柏林，2018年。[15] Q. H. Xu，多复变数中一类星形映射子类的系数不等式的一种改进，Results Math. **74** （2019年），第4期，论文编号156，共17页。[16] Q. H. Xu，多复变数中一类星形映射子类的系数不等式的一种改进，Results Math. **74** （2019年），第4期，论文编号156，共17页。[17] K. Ye 和 L.-H. Lim，每个矩阵都是托普利茨矩阵的乘积，Found. Comput. Math.**16**（2016年），第3期，577–598页。

[1]School of Computing, Dehradun Institute of Technology, Dehradun, 248009, India
E-mail address: suryagiri456@gmail.com

*Department of Applied Mathematics, Delhi Technological University, Delhi–110042, India
E-mail address: spkumar@dtu.ac.in