arXiv:2601.03049v1 [math.RT] 6 Jan 2026

满足 Benoist-Kobayashi 的 ρ函数严格不等式的约化齐性空间的分类

前田和志

Abstract. 设 G 是一个实约化李群， H 是 G 的约化子群。Benoist-Kobayashi 研究了 $L^2(G/H)$ 何时是 G 的温和表示。他们在李代数上引入了函数 ρ，并给出了关于 ρ 上不等式的条件，该条件是 $L^2(G/H)$ 具有温和性的充要条件。在与 Y. Oshima 的合作研究中，我们考察了 $L^2(G/H)$ 何时等价于 $L^2(G)$ 的一个酉子表示，并根据 ρ 的严格不等式给出了一个充分条件。本文将对满足 ρ 严格不等式的对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 进行分类，其中 $\mathfrak{g}$ 为复约化， $\mathfrak{h}$ 为复半单。

1. Introduction

设 G 是一个实代数约化李群， H 是 G 的一个代数约化子群。商空间 G/H 上存在一个 G 不变测度 ν。于是 G 在希尔伯特空间上连续作用

$$L^2(G/H) := \left\{ f : G/H \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ is measurable}, \int_{G/H} |f(x)|^2 d\nu < \infty \right\}$$

并且我们有 G 的酉表示 $L^2(G/H)$，称为正则表示。

已知 G 的酉表示 π 可分解为不可约酉表示的直积分 $\widehat{\ }$。设 G 为 G 的酉对偶，即 $G\widehat{\ }$ 的所有不可约酉表示等价类构成的空间，并赋予 Fell 拓扑。则在 G 上存在一个博雷尔测度 μ，以及一个 $\widehat{\ }$ 可测函数 $m\colon G \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，使得

$$\pi \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \mathcal{H}_\sigma^{\oplus m(\sigma)} d\mu(\sigma).$$

我们用 supp (π) 表示对 π 的分解有贡献的不可约酉表示集合。当 π 是正则表示 $L^2(G)$ 时，我们将 supp $(L^2(G))$ 记作 $\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$。如果酉表示 π of G 满足 supp $(\pi) \subset \widehat{G}_{\mathrm{temp}}$，则称其为温和表示。将 $L^2(G/H)$ 分解为直积分的公式称为 Plancherel 公式。多年来，人们已在各种情形下对其进行了研究。下面我们给出若干结果。

Key words and phrases. 约化群、齐性空间、温和表示、平方可积表示、离散系列、Benoist-Kobayashi 的 ρ 函数。

- 当 G 是紧致拓扑群且 $H = \{e\}$时，该定理称为 Peter-Weyl 定理，而正则表示 $L^2(G)$ 分解为 G 的所有有限维不可约表示的直和。
- 当 G 是半单李群且 $H = \{e\}$时，Harish-Chandra 得到了 Plancherel 公式。
- 当 G/H 是半单对称空间时，关于 $L^2(G/H)$ 的不可约分解已有大量研究，T. Oshima、Delorme、 [5], van den Ban 和 Schlichtkrull[10]给出了 Plancherel 公式。

然而，对于许多齐性空间 G/H，一般而言这类公式仍然未知。

令 $\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{h}$ 分别表示 G、 H 的李代数。在一系列论文中，[1, 2, 3, 4], Benoist 和 Kobayashi 研究了正则表示 $L^2(G/H)$ 何时是温和的。在第一篇论文中， [1], 他们在 $\mathfrak{h}$上引入了函数 ρ，并用 ρ的不等式刻画了 $L^2(G/H)$ 的温和性。

对于有限维 $\mathfrak{h}$-模 (π, V)，他们在 $\mathfrak{h}$ 的极大分裂阿贝尔子空间 $\mathfrak{a}$ 上定义了一个取非负值的分段线性函数 ρ_V，其定义如下：

$$\rho_V(Y) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_Y} m_\lambda \, |\mathrm{Re}\, \lambda| \quad (Y \in \mathfrak{a})$$

其中， Λ_Y 是 V 的复化 $V_{\mathbb{C}}$ 中 $\pi(Y)$的所有特征值的集合，而m_λ 是特征值 λ的重数。他们证明了

$$L^2(G/H) \text{ is tempered if and only if the inequality } \rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \text{ on } \mathfrak{a}$$

其中， $V = \mathfrak{h}$ 或 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上， $\mathfrak{h}$ 以伴随作用的方式作用。

在第三篇论文 [3], 中，他们研究了 $L^2(G/H)$的温和性与 $\mathfrak{h}$-模 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$的稳定子之间的关系。他们证明，不等式$\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 意味着 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中稳定子在 $\mathfrak{h}$ 中为可平均约化的点集是稠密的。此外，他们证明，若 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中稳定子在 $\mathfrak{h}$ 中为阿贝尔的点集是稠密的，则不等式 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 成立。第二个结论的证明归结为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 为复半单李代数的情形。特别地，对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 及其复半单李子代数 $\mathfrak{h}$，不等式 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 等价于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中稳定子在 $\mathfrak{h}$ 中为阿贝尔的点集是稠密的这一条件。该结论的证明归结为 $\mathfrak{g}$ 为单李代数的情形，并通过对满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$的配对（$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$）进行分类而得以确立。

在 [9], 中，我们将平方可积（不可约）表示的概念推广到幺模李群 G 上可能可约的酉表示，并研究了 $L^2(G/H)$ 何时为平方可积表示（[9, 定义 2.2]）。平方可积酉表示酉等价于左正则表示 $L^2(G)$ 的若干份直和的一个子表示，因此它是温和的。

定理 1.1 ([9, 定理 3.2])。 设 G 是一个代数约化李群，H 是 G 的一个代数约化子群。若对于任意 $Y \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$， $\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(Y)$，则酉表示 (G/H) 是平方可积表示。

正则表示 $L^2(G/H)$的平方可积性，例如，暗示了关于 G/H的离散系列的以下结论。

推论 1.2 ([9, 推论 3.5])。 设 G 为代数约化群，H 为 G的代数约化子群。假设对于任意$Y \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$，都有 $\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(Y)$ 。那么$\mathrm{Disc}(G/H) \subset \mathrm{Disc}(G)$。特别地，若$\mathrm{Disc}(G) = \emptyset$，则$\mathrm{Disc}(G/H) = \emptyset$。

本文的主要结果是对满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 且在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$上满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 的配对（$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$）进行分类，其中 $\mathfrak{g}$ 是复约化李代数，其导出李代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是经典型单理想的直和，而 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的复半单李子代数。根据引理 3.3，此类配对（$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$）的分类可归结为 $\mathfrak{g}$ 为单的情形。以下是本文的主要结果（定理 4.1）。

定理 1.3。 设 $\mathfrak{g}$ 是经典型复单李代数，即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$ $\mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$ 或 $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^{2n})$。所有满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 且在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$的配对（$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$）恰为表 *1* 中所列的那些。

这里，$\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上意味着 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$上不成立。当一对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$时，存在一个非零向量 $Y \in \mathfrak{a}$，使得 $\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(Y) > 0$。本文将这样的向量 Y称为见证向量。对于满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$的一对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$，我们也确定了所有见证向量，并将其列于表 1 中。

粗略地说，满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 的李子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{g}$而言较小，而满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 的李子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{g}$而言较大。因此，在满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$的那些对子中，不满足 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 的对子相对较少。事实上，表 1 中仅包含十一个系列。

分类沿用 Benoist-Kobayashi [3]的思路，并对 $\rho_{\mathfrak{h}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{g}}$进行显式计算。定理 1.3 的证明主要依赖于 Dynkin 对经典单李代数中极大半单李子代数按共轭分类的结果。

令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$ $\mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$ 或 $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^{2n})$，并分别令 $V = \mathbb{C}^n$，$\mathbb{C}^n$ 或 $\mathbb{C}^{2n}$。每个半单李子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 恰好满足以下三个条件之一:

(i) $\mathfrak{h}$ 在 V上可约作用，(ii) $\mathfrak{h}$ 是非单的，且在 V上不可约作用，(iii) $\mathfrak{h}$ 是单的，且在 V上不可约作用。

满足条件 (i) 的极大半单李子代数 $\mathfrak{h}$ 已在 [6], 的表 12 和表12a 中分类，而满足条件 (ii) 的则在 [7]的定理 1.3 和定理 1.4 中分类。详情请参见定理 4.14 和 4.15。

为了证明定理 1.3，我们首先确定与 $\rho_{\mathfrak{h}} <^{\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}$ 等价的条件，针对满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 且属于三种情形 (i) – (iii) 之一的极大半单李子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 。

情形 (i) 在命题 4.2、4.9 和 4.10 中讨论。情形 (ii) 在命题 4.4 中讨论，对应于张量表示的情形。情形 (iii) 在命题 4.6 中讨论；我们证明，不等式 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的几乎所有不可约表示都成立。

利用三种情形的结果（命题4.2–4.11）和 Dynkin 的分类，我们如下证明该定理。

当极大半单李子代数 $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$ 满足 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$时，论证即告结束，因为任何半单李子代数 $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ 也满足$\rho_{\mathfrak{h}'} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'}$（见引理 3.1）。

当极大半单李子代数 $\mathfrak{h}$ 不满足 $\mathfrak{g}$ 时，我们考察半单李子代数 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$是否满足 $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$。因此，我们利用 Dynkin 分类的单李代数 $\rho_{\mathfrak{h}'} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'}$的极大半单李子代数，在此过程中从较大的 $\mathfrak{h}$ 转向较小的 $\mathfrak{h}$。

在第 5.5 节中，我们处理情形 (iii)。在这种情况下，不等式 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 与不等式 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$之间没有区别。也就是说，不满足 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$的对 ($\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$) 与不满足 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$的对完全一致。此外，正如命题 4.6 所述，这类对只有三种类型。为说明这一点，我们在 $\mathfrak{a}$上引入一个函数。下面简要概述证明。

设 $\mathfrak{h}$ 是复单李代数， $\pi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 是一个 n 维不可约表示。由于 $\mathfrak{h}$ 是半单的，像 $\pi(\mathfrak{h})$ 包含于 $\mathfrak{sl}(V) \simeq \mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$ 中。此外，如果 V 上存在一个非退化对称（分别地，反对称）双线性形式，使 $\pi(\mathfrak{h})$ 保持不变，则 $\mathfrak{h}$ 包含于 $\mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$（分别地， $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^n)$）中。我们注意到，所有满足 $\mathfrak{g}$ 为经典型的复单李代数对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$。

设 λ 是 V 的最高权， $\Lambda(\lambda) \subset \mathfrak{a}^*$ 是 V 中权的集合。对于 $Y \in \mathfrak{a}_+$，我们对权 $\lambda_i \in \Lambda(\lambda)$ 排序，使得 $\lambda_1(Y) \geq \cdots \geq \lambda_r(Y)$。我们将非负值函数 $f(\lambda; Y)$ 定义为

$$f(\lambda; Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ \lambda_i + \lambda_j \neq 0}} (\lambda_i - \lambda_j)(Y).$$

根据定义，当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$ 时，该函数在 $\mathfrak{a}$ 上的取值小于或等于 $\rho_{\mathfrak{g}}$ 的一半。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$ 或 $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^n)$ 时，该函数略小于或等于 $\rho_{\mathfrak{g}}$。无论哪种情况，我们都有 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y) \geq f(\lambda; Y)$。如果 $f(\lambda; \cdot) > 2\rho_{\mathfrak{h}}$ 在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上成立，那么无需考虑 V 上是否存在对称或反对称双线性形式，即可得到 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$；这与 $\mathfrak{g}$ 属于哪一种经典单李代数无关。

特别地，利用此函数 f 得到的函数$\rho_{\mathfrak{g}}$ 下界与支配权上的偏序 $\prec$相容。更确切地说，若 $\mu \prec \lambda$(μ, λ支配权)，则在 $\mathfrak{a}$上有 $f(\mu; \cdot) \leq f(\lambda; \cdot)$。因此，只需针对偏序 $\prec$下较小的支配权，验证不等式 $f(\lambda; \cdot) > 2\rho_{\mathfrak{h}}$ 在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上成立。

2. Square integrability of $L^2(G/H)$

设 G 是一个幺模李群。在 [9], 中，我们将 G的平方可积不可约表示的定义推广到可能可约的表示，具体如下。

定义 2.1. 设 G 是一个幺模李群，且$(\pi, \mathcal{H})$是 G的一个酉表示。若 π 满足以下等价条件，则称其为平方可积；

(1) 存在一个稠密子集 $V \subset \mathcal{H}$，使得对于任意向量 u, $v \in V$，矩阵系数 $c_{u,v}(g) = \langle \pi(g)u, v \rangle$ 都是 G 上的平方可积函数。(2) $(\pi, \mathcal{H})$ 酉等价于左正则表示 $L^2(G)$ 的若干个副本的直和的一个子表示。

根据定义，如果 π of G 的酉表示是平方可积的，那么它也是温和的。

设 G 是一个代数约化群， H 是 G 的一个代数约化子群。Benoist 和 Kobayashi 在李代数 $\mathfrak{h}$ 上引入了函数 ρ ，其中 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数，并根据 ρ 的不等式刻画了酉表示 $L^2(G/H)$ 的温和性。与此相关，我们给出了 $L^2(G/H)$ 平方可积性的一个充分条件。下面回顾 Benoist-Kobayashi [1] 引入的函数 ρ 。

设 $\mathfrak{h}$ 是一个实约化李代数， $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个极大分裂阿贝尔子空间。对于一个有限维 $\mathfrak{h}$-模（π， V），我们定义函数 $\rho_V\colon \mathfrak{a} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 如下：

$$\rho_V(Y) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_Y} m_\lambda \, |\mathrm{Re}\, \lambda| \quad (Y \in \mathfrak{a})$$

其中， Λ_Y 是 $\pi(Y)$ 在 V 的复化 $V_{\mathbb{C}}$ 中的所有特征值的集合，m_λ 是特征值 λ 的重数。

本文主要讨论以下情形： $\mathfrak{h}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$的复半单李子代数，并且 $V = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ，其中 $\mathfrak{h}$以伴随作用作用于其上。

设 $\mathfrak{h}$ 是实约化李代数。令 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{h}$ 中的极大分裂阿贝尔子空间， $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$为与 $\mathfrak{a}$相关的限制根系。我们选取一个正系 $\Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$，并将正魏尔室记为 $\mathfrak{a}_+$。由于函数 ρ_V 在根系 $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})$的魏尔群作用下保持不变，$\rho_V$ 由其在 $\mathfrak{a}_+$上的取值确定。我们注意到， ρ_V 在 $\mathfrak{h}$上并非线性函数，而是分片线性的。当$(\pi, V) = (\mathrm{ad}\ \mathfrak{h})$时，此函数 $\rho_{\mathfrak{h}}$ 在 $\mathfrak{a}_+$ 上与通常的ρ 相差两倍，即

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{a})} (\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_\alpha) \alpha(Y) \quad (Y \in \mathfrak{a}_+).$$

下面给出Benoist-Kobayashi关于 $L^2(G/H)$温和性的刻画。令 $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$。通过伴随作用， $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{q}$ 可以视为 $\mathfrak{h}$-模。

定理 2.2 ([1, 定理 4.1])。 设 G 是一个代数半单李群，H 是 G的一个代数约化子群。那么，当且仅当对任意 $Y \in \mathfrak{a}$， $L^2(G/H)$ 是温和的，$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \leq \rho_{\mathfrak{q}}(Y)$。

以下定理揭示了正则表示$L^2(G/H)$中的平方可积性、温和性与关于 ρ的不等式之间的密切关系。

定理 2.3。 设 G 是一个代数约化李群， H 是 G的一个代数约化子群。 G 在 $L^2(G/H)$ 上的酉表示是平方可积表示，如果对任意 $Y \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$， $\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{q}}(Y)$。

3. Properties of function ρ

设 $\mathfrak{g}$ 是一个复约化李代数。那么 $\mathfrak{g}$ 分解为其阿贝尔理想 $\mathfrak{z}$ 与半单理想 $\mathfrak{s}$ 的直和，即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$。设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个复半单李子代数，且 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$中的一个极大分裂阿贝尔子空间。注意到 $\rho_{\mathfrak{g}} = \rho_{\mathfrak{s}}$ 在 $\mathfrak{a}$ 上成立，因此不等式 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上成立，当且仅当 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{s}}$ 在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上成立。为此，我们可以假设 $\mathfrak{g}$ 是半单的。

设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 是复半单李代数。我们将证明关于函数 ρ_V 的两个引理。利用引理 3.3，问题 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 是否成立可以归结为 $\mathfrak{g}$ 是复单李代数的情形。

引理 3.1. 设 $\mathfrak{g}\supset\mathfrak{h}\supset\tilde{\mathfrak{h}}$ 为复半单李代数，$\tilde{\mathfrak{a}}\subset\tilde{\mathfrak{h}}$、$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}$为极大分裂阿贝尔子空间，且满足 $\tilde{\mathfrak{a}}\supset\mathfrak{a}$。若 $\rho_{\tilde{\mathfrak{h}}}<\rho_{\mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{h}}}$ 在 $\tilde{\mathfrak{a}}\setminus\{0\}$上成立，则$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 在 $\mathfrak{a}\setminus\{0\}$上成立。

证明。我们在 $\mathfrak{g}$ 中取一个 $\mathfrak{h}$-不变子空间 $\tilde{\mathfrak{q}}$，使其具有直和分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\tilde{\mathfrak{q}}$。我们可以选取一个 $\mathfrak{h}$-不变子空间 $\mathfrak{q}$，使其位于 $\mathfrak{g}$ 中并满足 $\mathfrak{q}\supset\tilde{\mathfrak{q}}$ 和$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$。由于 $\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\tilde{\mathfrak{h}}}$ 在 $\mathfrak{a}$ 上成立，且 $\rho_{\tilde{\mathfrak{q}}}\le\rho_{\mathfrak{q}}$ 在 $\mathfrak{a}$上成立，结论得证。□

下面两个引理是 [3,引理 2.14、引理 2.16]的类似结果。

引理 3.2。设 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2$ 为一个复半单李代数，它可分解为两个理想 $\mathfrak{h}$ 和 V，且 V 是 $\mathfrak{h}$的一个有限维表示。

（1）对于任意的 $Y_1\in\mathfrak{h}_1$、$Y_2\in\mathfrak{h}_2$，有

$$\rho_V(Y_1)\le\rho_V(Y_1+Y_2).$$

（2）设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个极大分裂阿贝尔子空间，且 $\mathfrak{a}_i:=\mathfrak{h}_i\cap\mathfrak{a}$ 对 i =1、2成立。假设 $V=V_1\oplus V_2$ 是 $\mathfrak{h}$的两个有限维表示的直和。若$\rho_{\mathfrak{h}_i}<\rho_{V_i}$ 在 $\mathfrak{a}_i\setminus\{0\}$ 上对 $i=1$、2成立，则 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_V$在$\mathfrak{a}\setminus\{0\}$上成立。

证明。（1）这在 [3,引理 2.14（1）]中已得到证明。
(2) 对于非零元素 $Y=Y_1+Y_2\in\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}$，我们有

$$\rho_V(Y_1+Y_2)=\rho_{V_1}(Y_1+Y_2)+\rho_{V_2}(Y_1+Y_2)\ge\rho_{V_1}(Y_1)+\rho_{V_2}(Y_2).$$

另一方面，可得 $\rho_{\mathfrak{h}}(Y_1+Y_2)=\rho_{\mathfrak{h}_1}(Y_1)+\rho_{\mathfrak{h}_2}(Y_2)$。由于 Y_1和 Y_2 中至少有一个非零，因此我们有 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_V$在 $\mathfrak{a}\setminus\{0\}$上。□

引理 3.3. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单李代数，$\mathfrak{h}$是 $\mathfrak{g}$的一个复半单李子代数，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r$是单理想 $\mathfrak{g}_i$和 $\mathfrak{q}$ 的直和：$=\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$,$\mathfrak{h}_i:=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_i$ 以及 $\mathfrak{q}_i:=\mathfrak{g}_i/\mathfrak{h}_i$，其中 $i=1$、2、.....、r。此外，设 $\mathfrak{a}$是 $\mathfrak{h}$ 中的极大分裂阿贝尔子空间，且对于 $i=1$、.....、r，$\mathfrak{a}_i:=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}_i$。那么，以下两个条件等价：

- $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$ *on* $\mathfrak{a}\setminus\{0\}$,
- $\rho_{\mathfrak{h}_i}<\rho_{\mathfrak{q}_i}$ *on* $\mathfrak{a}_i\setminus\{0\}$ *for all* $i=1,2,\dots,r$ *and the following condition does not hold:*

$$\exists i,j\in\{1,2,\dots,r\}\ \textit{such that}\ i\ne j,\mathfrak{g}_i\simeq\mathfrak{g}_j\ \textit{and}$$
$$\textit{the diagonal}\ \Delta\mathfrak{g}_i(\subset\mathfrak{g}_i\oplus\mathfrak{g}_j)\ \textit{is contained in}\ \mathfrak{h}.$$

由于本引理的证明与 [3, 引理 2.16],的证明思路相同，我们先回顾一下记号。令 $\pi_i:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}_i$为 i阶投影，其中 $i=1$、.....、r。对于非空子集 $I\subset\{1,\dots,r\}$，$\mathfrak{h}$的理想 $\mathfrak{h}_I$按如下方式递归定义：

- $\mathfrak{h}_I:=\mathfrak{h}_i=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_i$ for $I=\{i\}$ $(i=1,\dots,r)$,
- $\mathfrak{h}\cap(\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{h}_I\oplus\bigoplus_{J\subsetneq I}\mathfrak{h}_J$ for $\#I\ge2$.

对每个 $i \in \{1,\dots,r\}$，取 $\mathfrak{g}_i$ 的一个 $\pi_i(\mathfrak{h})$-不变子空间 $\mathfrak{s}_i$，使得 $\mathfrak{g}_i = \pi_i(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{s}_i$，并令 $\mathfrak{s} := \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_r$。

对于子空间 V in $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ 以及每个映射 $\sigma \in \mathrm{Map}(\{1,\dots,r\},\{+,-\})$，我们定义向量子空间 V^σ in $\mathfrak{g}$ 如下：

$$V^\sigma := \{(\sigma(1)v_1,\dots,\sigma(r)v_r) \in \mathfrak{g} \mid (v_1,\dots,v_r) \in V\}$$

以及子空间 $V$of $\mathfrak{g}$ 定义为 $V := \sum_\sigma V^\sigma$ 其中 σ 取遍所有 $\sigma \in \mathrm{Map}(\{1,\dots,r\},\{+,-\})$。于是有 $V = \pi_1(V) \oplus \cdots \oplus \pi_r(V)$。

对于每个非空子集 $I \subset \{1,\dots,r\}$，取一个 $\mathfrak{h}_I$-子模 $\mathfrak{q}_I$in $\mathfrak{h}_I$，使其具有直和分解 $\mathfrak{h}_I = \mathfrak{h}_I \oplus \mathfrak{q}_I$，因为 $\mathfrak{h}_I$ 是半单的。当 $\#I \geq 2$时，我们可以取 $\mathfrak{q}_I$使其包含 $\mathfrak{h}_I$-子模 $(\mathfrak{h}_I)^\sigma$，其中某个 σ满足此条件。当 $\#I \geq 3$时，我们还可以取 $\mathfrak{q}_I$使其包含两个 $\mathfrak{h}_I$-子模的直和 $(\mathfrak{h}_I)^\sigma \oplus (\mathfrak{h}_I)^\tau$，其中某些互不相同的 σ,τ满足此条件。由于对于任意 σ都有 $(\mathfrak{h}_I)^\sigma \simeq \mathfrak{h}_I$，因此有

- 当 $\#I = 1$，$\mathfrak{h}_I = \mathfrak{h}_I$ 且 $\mathfrak{q}_I = \{0\}$，
- 当 $\#I = 2$，$\rho_{\mathfrak{h}_I} = \rho_{\mathfrak{q}_I}$ 在 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I$ 上。
- 当 $\#I > 2$，$\rho_{\mathfrak{h}_I} < \rho_{\mathfrak{q}_I}$ 在 $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I) \setminus \{0\}$ 上，

我们注意到，$\mathfrak{q}_{\{i\}}$ 和 $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{g}_i/\mathfrak{h}_i$ 的定义不同。

引理 *3.3* 的证明。当 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_r$时，引理 3.3 可由引理 3.2 得出。因此，我们需要考虑这样的情形：对于某个满足 $\#I = 2$ 的 $I \subset \{1,\dots,r\}$，$\mathfrak{h}_I \neq \{0\}$。首先，对于满足 $\mathfrak{h}_I \neq \{0\}$ 的 $I = \{i,j\}$，我们证明以下等价关系

$$\begin{aligned} &\text{there exists a nonzero element } Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I \text{ such that } \rho_{\mathfrak{s}}(Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{g}_i \simeq \mathfrak{g}_j \text{ and } \Delta\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{h}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

取任意满足 $\mathfrak{h}_I \neq \{0\}$的 $I = \{i,j\}$。那么，对于一个非零元素$Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I$，我们可以看到

$$\rho_{\mathfrak{s}}(Y) = 0 \Leftrightarrow \rho_{\mathfrak{s}_i}(\pi_i(Y)) = 0 \text{ and } \rho_{\mathfrak{s}_j}(\pi_j(Y)) = 0.$$

现在假设存在一个非零元素 $Y \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}_I$，使得 $\rho_{\mathfrak{s}_i}(\pi_i(Y)) = 0$。我们定义 $f_i : \pi_i(\mathfrak{h}) \to \mathrm{End}(\mathfrak{s}_i)$为由伴随表示得到的映射，则

$$\{0\} \neq \mathbb{R}Y \subset \mathrm{Ker}\, f_i \subset \pi_i(\mathfrak{h}),$$

因此，$\mathrm{Ker} f_i$是 $\pi_i(\mathfrak{h})$的非平凡理想。当 $\pi_i(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_l$是 $\pi_i(\mathfrak{h})$的理想分解时，我们可以假设 $\mathfrak{k}_1 \subset \mathrm{Ker}\, f_i$。由分解$\mathfrak{g}_i = \pi_i(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{s}_i$，我们有

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{k}_l \oplus \mathfrak{s}_i.$$

由于 $\mathfrak{k}_1$ 与 $\mathfrak{s}_i$可交换，$\mathfrak{k}_1$ 是 $\mathfrak{g}_i$的非零理想。因此我们有 $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_1 = \pi_i(\mathfrak{h}) = \pi_i(\mathfrak{h}_I)$以及 $\mathfrak{s}_i = \{0\}$。同样的论证也适用于指标 j，于是有 $\mathfrak{g}_j = \pi_j(\mathfrak{h}_I)$。根据 $\mathfrak{h}_I$的定义，我们可以看出 $\mathfrak{g}_i \simeq \mathfrak{g}_j$和 $\Delta\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{h}$。式（3.1）的反向蕴含很容易验证，因此（3.1）得证。

因此，为了证明这个引理，只需证明以下等价关系：

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}} \text{ on } \mathfrak{a} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho_{\mathfrak{h}_i} < \rho_{\mathfrak{q}_i} \text{ on } \mathfrak{a}_i \setminus \{0\} \text{ for every } i = 1,\cdots,r \text{ and} \\ \rho_{\mathfrak{s}} > 0 \text{ on } (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I) \setminus \{0\} \text{ for every } I \text{ with } I \subset \{1,\dots,r\}, \#I = 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

假设 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$ on $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$，那么对于任意非零元素 $Y_i \in \mathfrak{a}_i$，

$$\rho_{\mathfrak{h}_i}(Y_i) \leq \rho_{\mathfrak{h}}(Y_i) < \rho_{\mathfrak{q}}(Y_i) = \rho_{\mathfrak{s}}(Y_i) + \sum_{\#I \geq 2} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_i).$$

由于 $\mathfrak{h}_i$ 在具有 $j \neq i$ 的 $\mathfrak{s}_j$ 上平凡作用，且在具有 $\#I \geq 2$ 的 $\mathfrak{q}_I$ 上平凡作用，因此我们有

$$\rho_{\mathfrak{s}}(Y_i) + \sum_{\#I \geq 2} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_i) = \rho_{\mathfrak{s}_i}(Y_i) = \rho_{\mathfrak{q}_i}(Y_i).$$

设 $I \subset \{1, \ldots, r\}$ 满足 $\#I = 2$ 和 $\mathfrak{h}_I \neq \{0\}$。对于任意非零元素 $Y_I \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}_I}(Y_I) \leq \rho_{\mathfrak{h}}(Y_I) < \rho_{\mathfrak{q}}(Y_I) = \rho_{\mathfrak{s}}(Y_I) + \sum_{\#J \geq 2} \rho_{\mathfrak{q}_J}(Y_I) = \rho_{\mathfrak{s}}(Y_I) + \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_I).$$

由于 $\rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_I) = \rho_{\mathfrak{h}_I}(Y_I)$，我们有 $\rho_{\mathfrak{s}}(Y_I) > 0$。

反过来，假设对于每个 $i = 1, \cdots, r$，$\rho_{\mathfrak{h}_i} < \rho_{\mathfrak{q}_i}$ 在 $\mathfrak{a}_i \setminus \{0\}$ 上成立；并且对于每个满足 $I \subset \{1, \ldots, r\}$ 和 $\#I = 2$ 的 I，$\rho_{\mathfrak{s}} > 0$ 在 $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I) \setminus \{0\}$ 上成立。

设 $Y \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 并写作

$$Y = \sum_{i=1}^{r} Y_i + \sum_{\#I=2} Y_I + \sum_{\#I \geq 3} Y_I \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i \oplus \bigoplus_{\#I=2} (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I) \oplus \bigoplus_{\#I \geq 3} (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I).$$

由于我们假设 $\rho_{\mathfrak{h}_i} \leq \rho_{\mathfrak{q}_i}$，因此有

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \sum_{i=1}^{r} \rho_{\mathfrak{h}_i}(Y_i) + \sum_{\#I=2} \rho_{\mathfrak{h}_I}(Y_I) + \sum_{\#I \geq 3} \rho_{\mathfrak{h}_I}(Y_I) \\
&\leq \sum_{i=1}^{r} \rho_{\mathfrak{q}_i}(Y_i) + \sum_{\#I=2} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_I) + \sum_{\#I \geq 3} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_I) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \rho_{\mathfrak{s}_i}(Y_i) + \sum_{\#I=2} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_I) + \sum_{\#I \geq 3} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_I) \\
&= \rho_{\mathfrak{s}}(\sum_{i=1}^{r} Y_i) + \sum_{\#I=2} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y) + \sum_{\#I \geq 3} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y) \\
&\leq \rho_{\mathfrak{s}}(Y) + \sum_{\#I=2} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y) + \sum_{\#I \geq 3} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y) \\
&\leq \rho_{\mathfrak{s} \oplus \sum_{\#I \geq 2} \mathfrak{q}_I}(Y) \\
&= \rho_{\mathfrak{q}}(Y).
\end{aligned}$$

若 $\sum_{i=1}^{r} Y_i \neq 0$ 或 $\sum_{\#I \geq 3} Y_I \neq 0$，则有 $\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{q}}(Y)$。若 $Y = \sum_{I=2} Y_I \in \bigoplus_{\#I=2} \mathfrak{h}_I$，根据关于 $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_I)$ 的假设 $\rho_{\mathfrak{s}} > 0$，对每个满足 $\#I = 2$ 的 I，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{\#I=2} \rho_{\mathfrak{h}_I}(Y_I) = \sum_{\#I=2} \rho_{\mathfrak{q}_I}(Y_I) < \rho_{\mathfrak{s} \oplus \sum_{\#I \geq 2} \mathfrak{q}_I}(Y) = \rho_{\mathfrak{q}}(Y).$$

证明至此完成。 □

4. Classification

本节将对满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ and $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$ where $\mathfrak{g}$ 为经典型单李代数的复半单李代数对（$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{h}$）进行分类；也就是说，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$、$\mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$ 和 $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^{2n})$。为简便起见，本文始终将 $\mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$、$\mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$ 和 $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^{2n})$ 分别记作 $\mathfrak{sl}_n$、$\mathfrak{so}_n$ 和 $\mathfrak{sp}_n$，并将 $\mathfrak{g}_2$、$\mathfrak{f}_4$、$\mathfrak{e}_6$、$\mathfrak{e}_7$、$\mathfrak{e}_8$ 记作五个复例外单李代数。

满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$ 意味着存在非零向量 $Y \in \mathfrak{h}$，使得 $\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{q}}(Y) > 0$；我们将它们称为见证向量。

4.1. 分类列表。 我们考虑 $\mathfrak{g}$ 为复经典单李代数且 $\mathfrak{h}$ 为复半单李子代数的情形。定理 4.1 给出了满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$的配对 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ 的列表。

定理 4.1. 设 $\mathfrak{g}$ 为复经典单李代数，$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$的复半单李子代数。那么，满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$的一对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 是表 *1* 所列的某一对。

Table 1. 满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$的配对（$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$）。

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	参数	$\mathfrak{a}_+$中的见证向量
$\mathfrak{sl}_{2p}$	$\mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_p$		$a_i = b_i \quad (\forall i)$
$\mathfrak{sl}_{2p+1}$	$\mathfrak{sl}_{p+1} \oplus \mathfrak{sl}_p$		$a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq b_2 \geq \cdots$
$\mathfrak{sl}_{2p+1}$	$\mathfrak{sl}_{p+1} \oplus \mathfrak{h}_2$	$\mathfrak{h}_2 \subsetneq \mathfrak{sl}_p$	$(a_1, 0, 0, \ldots, 0)$
$\mathfrak{sl}_{2p+1}$	$\mathfrak{sp}_p$		$\mathfrak{a}_+$中的所有元素
$\mathfrak{so}_{2p+2}$	$\mathfrak{so}_{p+2} \oplus \mathfrak{h}_2$	$\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}_p$	$(a_1, 0, 0, \ldots, 0)$
$\mathfrak{so}_{2p+1}$	$\mathfrak{sl}_p$		$a_i = -a_{p-i+1} \quad (\forall i)$
$\mathfrak{so}_{7+2}$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7$	$a_1 = a_2$
$\mathfrak{so}_{8+3}$	$\mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{h}_2$	$\mathfrak{so}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_8$, $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}_3$	$a_1 = a_2 > 0 = a_3 = b_1$
$\mathfrak{sp}_{2p}$	$\mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_p \supsetneq \mathfrak{h} \supset \mathfrak{sp}_p$	$(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h}) \neq$ $(\mathfrak{sp}_4,\ \mathfrak{sp}_2 \oplus (\mathfrak{sp}_1)^{\oplus 2})$	$(a_1, 0, 0, \ldots, 0)$
$\mathfrak{sp}_4$	$\mathfrak{sp}_2 \oplus (\mathfrak{sp}_1)^{\oplus 2}$		$a_2 = b_1 = c_1$
$\mathfrak{sp}_3$	$\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1$		$a_1 = b_1 = c_1$

在表 1 中，最左列指出 $\mathfrak{g}$ 是什么。我们在从左数第二列列出所有满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$ 的极大复半单李子代数 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$。

在第七种情形中，$\mathfrak{h}$ 是例外单李代数 $\mathfrak{g}_2$。我们通过 7维不可约表示 $\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7$ 和两个 1 维平凡表示，将 $\mathfrak{g}_2$ 视为 $\mathfrak{so}_{7+2}$ 的李子代数。

在第八种情形中，$\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{so}_3$的李子代数。我们通过称为旋量表示的不可约表示 $\mathfrak{so}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_8$，将 $\mathfrak{so}_7$ 视为 $\mathfrak{so}_8$ 的李子代数。接着，我们通过 $\mathfrak{so}_7$ 的旋量表示与 $\mathfrak{so}_3$ 的标准表示的直和，将 $\mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{h}_2$ 视为 $\mathfrak{so}_{8+3}$ 的李子代数。

在第九种情形中，$\mathfrak{h} \supset \mathfrak{sp}_p$ 表示 $\mathfrak{h}$ 包含第一或第二个直和项$\mathfrak{sp}_p$。

正魏尔室 $\mathfrak{a}_+$ 中的所有见证向量都列在最右栏，其中极大分裂阿贝尔子空间 $\mathfrak{a}$ 是第5节中定义的那些子空间。见证向量的描述记号将在第5节中说明。如果 $\mathfrak{h}$ 是单李代数的直和，那么作为 $\mathfrak{h}$的极大分裂阿贝尔子空间，我们可以取各个极大阿贝尔子空间的直和。在表 1 中，(a_i)，(b_i)和(c_i)分别属于第一、第二和第三个直和项的极大分裂阿贝尔子空间。

为证明定理 4.1，我们给出若干对中 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$ 是否成立的条件（命题4.2–4.11）。这些命题对应于 [3] 的第3节中的命题。为方便起见，我们将 [3] 中研究的、满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 的充要条件补充到以下命题中。

首先，对于命题 4.2 和 4.3，我们考虑 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}))$ 为对称对时的若干例子。这里，$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中 $\mathfrak{h}$ 的正规化子。

命题 4.2。设 $p \geq q \geq 1$。

(1) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{p+q} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q$，则有如下等价关系

$$\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}} \Leftrightarrow p \leq q+1$$

并且总有 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$。当且仅当满足以下条件时，元素 $Y = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathfrak{a}_+$ 是见证向量：

$$a_i = b_i \quad (1 \leq i \leq p) \qquad (when\ p = q),$$
$$a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq b_2 \geq \cdots \quad (when\ p = q+1).$$

(2) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{p+q} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{so}_p \oplus \mathfrak{so}_q$，则有以下等价关系

$$\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}} \Leftrightarrow p \leq q+2,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}} \Leftrightarrow p \leq q+1.$$

当 $p = q+2$ 时，元素 $Y = (a_1, \ldots, a_{p'}, b_1, \ldots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $a_1 > 0$ 且 $a_2 = \cdots = a_{p'} = b_1 = \cdots = b_{q'} = 0$。这里，$p' := \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 和 $q' := \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$。

(3) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{p+q} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_q$，则总有 $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{q}}$。

命题 4.3。设 $p \geq 1$。

(1) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_p \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{so}_p$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。

(2) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2p} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_p$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{q}}$。

(3) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2p} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_p$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{q}}$。

(4) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_p \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_p$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。

接下来，令 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{sl}_n$、$\mathfrak{so}_n$ 或 $\mathfrak{sp}_n$。对于命题 4.4 和 4.6，我们考虑半单李子代数 $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 或 $\mathbb{C}^{2n}$ 上不可约作用的情形。

命题 4.4。令 $p,\ q > 1$。

(1) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{pq} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。(2) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{pq} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{so}_p \oplus \mathfrak{so}_q$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。令 $p \geq 1$ 和 $q > 1$。(3) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{4pq} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_q$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$。此外，$\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}} \Leftrightarrow pq > 2$。(4) 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{pq} \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{so}_q$，则 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。

注 4.5。在命题 4.4 (3) 中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8 \supset \mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_2 \oplus \mathfrak{sp}_1$ 的情形下，$\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{so}_5 \oplus \mathfrak{so}_3$ 同构，因此这种情形已包含在命题 4.2 (2) 中。

命题 4.6。分别设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$、$\mathfrak{so}_n$ 或 $\mathfrak{sp}_n$，以及 $V=\mathbb{C}^n$、$\mathbb{C}^n$ 或 $\mathbb{C}^{2n}$。对于 $\mathfrak{g}$ 的一个单李子代数 $\mathfrak{h}$，若其在 V 上不可约地作用，则以下三个条件等价：

- $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{p}}$
- $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{p}}$
- $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 同构于以下之一：$(\mathfrak{sl}_n,\mathfrak{sp}_p)$，其中 $n=2p$；$(\mathfrak{so}_7,\mathfrak{g}_2)$；或 $(\mathfrak{so}_8,\mathfrak{so}_7)$。

现在我们考虑 $\mathfrak{h}$ 在 V 上可约地作用的几种情形。下面的命题 4.7 是命题 4.2 的推广。

命题 4.7。设 $r\geq 1$、$n\geq n_1+\cdots+n_r$以及 $n_1\geq\cdots\geq n_r\geq 1$。

(1) 如果 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{sl}_{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{sl}_{n_r}$，则有以下等价关系

$$\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 2n_1\leq n+1,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow (2n_1\leq n \ and\ n_1+n_2\leq n-1).$$

当 $2n_1=n+1$ 和 $2n_2<n-1$ 时，元素 $Y\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，仅当 $Y=(a_1、0、\ldots\ldots、0、-a_1)\in\mathfrak{a}_+\cap\mathfrak{sl}_{n_1}$。

(2) 如果 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_n\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{so}_{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{so}_{n_r}$，则有以下等价关系

$$\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 2n_1\leq n+2,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 2n_1\leq n+1.$$

当 $2n_1=n+2$ 时，元素 $Y\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，仅当 $Y=(a_1、0、\ldots\ldots、0)\in\mathfrak{a}_+\cap\mathfrak{so}_{n_1}$。

(3) 如果 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_n\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}_{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{sp}_{n_r}$，则有以下等价关系

$$\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 2n_1\leq n \ except\ for\ (n=2n_1=2n_2),$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 2n_1\leq n-1 \ except\ for\ (n=3,\ n_1=n_2=n_3=1).$$

当 $2n_1=n$（除 $n=4,\ n_1=2,\ n_2=n_3=1$ 外）时，一个元素 $Y\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $Y=(a_1,0,\ldots,0)\in\mathfrak{a}_+\cap\mathfrak{sp}_{n_1}$。
当 $n=4$、$n_1=2$ 和 $n_2=n_3=1$ 时，一个元素 $Y=(a_1,a_2,b,c)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $a_2=b=c$。
当 $n=3$ 和 $n_1=n_2=n_3=1$ 时，一个元素 $Y=(a,b,c)\in\mathfrak{a}_+$ 是一个见证向量当且仅当 $a=b=c$。

注 4.8. 在命题 4.7 (1) 中，声称在假设$\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{q}}$下，存在见证向量等价于 $2n_1=n+1$ 或 $2n_1=2n_2=n$ 成立。当 $2n_1=n+1=n_2-2$ 或 $2n_1=2n_2=n$ 成立时，满足命题 4.2 的假设，因此包含在命题 4.2 中。

命题 4.9. 令 $p,q\geq 1$。

(1) 若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{2p+q}\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{sl}_q$，则

$$\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow q\leq 2p+1,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 1<q\leq 2p.$$

若 $q=1$，则 $\mathfrak{a}_+$ 中的每个元素都是见证向量，即 $\rho_{\mathfrak{h}}\equiv\rho_{\mathfrak{q}}$ 在$\mathfrak{a}_+$上。

若 $q=2p+1$，则元素 $Y=(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_{2p+1})\in\mathfrak{a}_+$是见证向量，当且仅当 $b_1=-b_{2p+1}>0$且 $a_1=\cdots=a_p=b_2=\cdots=b_{2p}=0$。

(2) 若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2p+q}\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{sl}_p\oplus\mathfrak{so}_q$，则

$$\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow q\le 2p+2,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 1<q\le 2p+1.$$

当 $q=1$ 时，元素 $Y=(a_1,\dots,a_p)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $a_i=-a_{p-i+1}$ $(1\le i\le\frac{p}{2})$。

当 $q=2p+2$ 时，元素 $Y=(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_{q'})\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $b_1>0$ 且 $a_1=\cdots=a_p=b_2=\cdots=b_{q'}=0$。

(3) 若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{p+q}\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{sl}_p\oplus\mathfrak{sp}_q$，则

$$\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow q\le p,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 1\le q\le p-1.$$

当 $p=q$ 时，元素 $Y=(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_q)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $b_1>0$ 且 $a_1=\cdots=a_p=b_2=\cdots=b_q=0$。

(4) 如果 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{4p}\supset\mathfrak{h}'=\mathfrak{sl}_{2p}\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}_p$ 和 $p\ge 2$，则 $\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}$ 成立。此外，

$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow p\ge 3.$$

当 $p=2$时，元素 $Y=(a_1,a_2)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $a_1=a_2$。此情形包含在命题 *4.7* (2)中。

命题 4.10。设 $q\ge 1$。

(1) 令 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{so}_{7+q},\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{so}_q)$ 为由 $\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{so}_q\subset\mathfrak{so}_7\oplus\mathfrak{so}_q\subset\mathfrak{so}_{7+q}$定义的这一对，其中 $\mathfrak{g}_2\hookrightarrow\mathfrak{so}_7$ 是$\mathfrak{g}_2$的 7 维不可约表示。于是

$$\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 2\le q\le 9,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 3\le q\le 8.$$

当 $q=2$时，元素 $Y=(a_1,a_2,a_3)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $a_1=a_2$。

当 $q=9$ 时，元素 $Y=(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,b_4)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $b_1>0$ 且 $a_1=a_2=a_3=b_2=b_3=b_4=0$。

(2) 令 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{so}_{8+q},\mathfrak{so}_7\oplus\mathfrak{so}_q)$ 为由 $\mathfrak{so}_7\oplus\mathfrak{so}_q\subset\mathfrak{so}_8\oplus\mathfrak{so}_q\subset\mathfrak{so}_{8+q}$ 定义的一对，其中 $\mathfrak{so}_7\hookrightarrow\mathfrak{so}_8$ 是 $\mathfrak{so}_7$ 的 *8* 维不可约表示，称为旋量表示。于是

$$\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 3\le q\le 10,$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow 4\le q\le 9.$$

当 $q=3$ 时，元素 $Y=(a_1,a_2,a_3,b_1)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $a_1=a_2$ 且 $a_3=b_1=0$。

当 $q=10$ 时，元素 $Y=(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in\mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $b_1>0$ 且 $a_1=a_2=a_3=b_2=b_3=b_4=b_5=0$。

最后，我们考虑 $\mathfrak{h}$ 在 $V=\mathbb{C}^n$ 上可约地作用的特殊情形。

命题 4.11. 设 $p\ge q\ge 1$。

(1) 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{p+q}\supset\mathfrak{sl}_p\oplus\mathfrak{sl}_q\supset\mathfrak{h}$，并假设 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^p$ 上不可约地作用。则

(a) $\rho_{\mathfrak{h}}\not\le\rho_{\mathfrak{q}}\Leftrightarrow p\ge q+2$ 和 $\mathfrak{h}\supseteq\mathfrak{sl}_p$。 (b) $(\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{q}})\Leftrightarrow$ 或者

- $p=q+1$ 和 $\mathfrak{h}\supset\mathfrak{sl}_p$；或

- $p = q$ 和 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q$；或
- p 为偶数， $q = 1$ 和 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_{\frac{p}{2}}$。

(2) 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{p+q} \supset \mathfrak{so}_p \oplus \mathfrak{so}_q \supset \mathfrak{h}$ ，并假设 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^p$上不可约地作用。则

(a) $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{q}} \Leftrightarrow$ 或者

- $p \geq q+$和 $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{so}_p$；或者
- $p = 7$、 $q = 1$ 和 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$；或者
- $p = 8$、 $q \leq 2$ 和 $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_7$。

(b) $(\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not\prec \rho_{\mathfrak{q}}) \Leftrightarrow$ 任一

- $p = q + 2$ 和 $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{so}_p$；或者
- $p = 7$、 $q = 2$ 和 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$；或者
- $p = 8$、 $q = 3$ 和 $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{so}_7$。

在第二种情形（a）和（b）中，态射 $\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{so}_q$ 由 $\mathfrak{g}_2$的7维不可约表示 $\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7$ 以及 q 个平凡1维表示构成。

在(a)的第三种情形中，态射 $\mathfrak{so}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_{8+q}$ 由 $\mathfrak{so}_7$ 的8维不可约表示 $\mathfrak{so}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_8$ 定义，该表示称为旋量表示；此外还有 q 个平凡的1维表示。

在(b)的第三种情形中， $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{so}_7$ 表示 $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{h}_2$ ，其中 $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{so}_3$。态射 $\mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{h}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{so}_3$ 由旋量表示$\mathfrak{so}_7 \hookrightarrow \mathfrak{so}_8$ 和包含映射 $\mathfrak{h}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}_3$定义。

(3) 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{p+q} \supset \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_q \supset \mathfrak{h}$ ，并假设 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^{2p}$ 上不可约地作用。那么

(a) $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{q}} \Leftrightarrow$ 或者

- $p \geq q + 1$ 和 $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{sp}_p$；或
- $p = q$ 和 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_p$。 (b) $(\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not\prec \rho_{\mathfrak{q}}) \Leftrightarrow p = q$ 和 $\mathfrak{sp}_p \oplus 0 \subset \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_p$。这里， $\mathfrak{sp}_p \oplus 0 \subset \mathfrak{h}$ 表示 $\mathfrak{h}$ 包含第一或第二个直和项 $\mathfrak{sp}_p$。

我们陈述两个将在命题 4.11 的证明中用到的引理。以下引理是引理3.10在 [3] 中的类比，并由引理 3.2 得出。

引理 4.12. 设 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数， $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ 为半单李子代数， $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$为 $\mathfrak{k}$的理想分解，且 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$为 $\mathfrak{h}$ 的理想分解，其中 $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{k}_1$。若 $\rho_{\mathfrak{h}_1} < \rho_{\mathfrak{k}_1/\mathfrak{h}_1}$在$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_1) \setminus \{0\}$ 上成立，且 $\rho_{\mathfrak{k}_2} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$在$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}_2) \setminus \{0\}$上成立，则 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。

在下面的引理中，我们考虑这样的情形： $\mathfrak{k}$和 $\mathfrak{h}$ 是$\mathfrak{g}$ 的李子代数，而 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{k}$的第二个直和项。

引理 4.13. 设 $p \geq q \geq 1$。

- 若 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}_{p+q}, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q, \mathfrak{sl}_q)$，则 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$上的 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$。
- 若 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}_{p+q}, \mathfrak{so}_p \oplus \mathfrak{so}_q, \mathfrak{so}_q)$，则 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$上的 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$。
- 若 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_{p+q}, \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_q, \mathfrak{sp}_q)$，则 $\mathfrak{a}$上的 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$。此外，当且仅当 $p \geq q + 1$时， $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上成立$\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$。

引理 *4.13* 的证明。 前两个陈述可通过显式计算得出。我们证明最后一个陈述。注意到 $\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} = \rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 在 $\mathfrak{a}$上。设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_{p+q}, \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{sp}_q, \mathfrak{sp}_q)$。对于一个非零元素 $Y = (a_1, \ldots, a_q) \in \mathfrak{a}_+$，我们

have

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y)-2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)&=\sum_{i=1}^{q}2(p+q-i+1)a_i-\sum_{i=1}^{q}4(q-i+1)a_i\\&=\sum_{i=1}^{q}2(p-q+i-1)a_i\geq 0.\end{aligned}$$

那么，当且仅当 $p\geq q+1$ 时，$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)<\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(Y)$ 在 $\mathfrak{a}\setminus\{0\}$ 上成立。 □

4.2. **定理 4.1 的证明**。本节假设命题4.2–4.11、引理4.12和4.13成立，证明定理 4.1。

在给出定理 4.1 的证明之前，我们描述 Dynkin 关于单李代数的极大半单李子代数的分类。

定理 4.14 ([6,§5])。设 $\mathfrak{g}$ 是经典型复单李代数。

(1) 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$。$\mathfrak{g}$ 的每个在 $\mathbb{C}^n$ 上可约作用的极大复半单李子代数都共轭于 $\mathfrak{sl}_{n-1}$，或共轭于带有某个 $k\,(2\leq k\leq n-2)$ 的 $\mathfrak{sl}_k\oplus\mathfrak{sl}_{n-k}$。*(2)* 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n+1}$。$\mathfrak{g}$ 的每个在 $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上可约作用的极大复半单李子代数都共轭于 $\mathfrak{so}_{2n-1}$，或共轭于带有某个 $k\,(2\leq k\leq n)$ 的 $\mathfrak{so}_{2k}\oplus\mathfrak{so}_{2(n-k)+1}$。*(3)* 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_n$。$\mathfrak{g}$ 的每个在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上可约作用的极大复半单李子代数都共轭于 $\mathfrak{sl}_n$，或共轭于带有某个 $k\,(1\leq k\leq n-1)$ 的 $\mathfrak{sp}_k\oplus\mathfrak{sp}_{n-k}$。*(4)* 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n}$。$\mathfrak{g}$ 的每个在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上可约作用的极大复半单李子代数都共轭于 $\mathfrak{so}_{2n-2}$、$\mathfrak{sl}_n$ 或带有某个 $k\,(2\leq k\leq n-2)$ 的 $\mathfrak{so}_{2k}\oplus\mathfrak{so}_{2(n-k)}$。

定理 4.15 ([7, 定理1.3, 1.4])**.** 设 $\mathfrak{g}$ 是一个经典型复半单李代数。

(1) 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$。$\mathfrak{g}$ 的每个极大复半单李子代数，若它是非单的且在 $\mathbb{C}^n$ 上不可约地作用，则与某个 $\mathfrak{sl}_p\oplus\mathfrak{sl}_q$ 共轭，其中 p、$q\,(pq=n, p\geq 2, q\geq 2)$。*(2)* 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_n$。$\mathfrak{g}$ 的每个极大复半单李子代数，若它是非单的且在 $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上不可约地作用，则与某个 $\mathfrak{so}_p\oplus\mathfrak{so}_q$ 共轭，其中 p、$q\,(pq=n, p\geq 3, q\geq 3)$；或与某个 $\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{sp}_q$ 共轭，其中 p、$q\,(4pq=n, p\geq 2, q\geq 2)$。*(3)* 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_n$。$\mathfrak{g}$ 的每个极大复半单李子代数，若它是非单的且在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上不可约地作用，则与某个 $\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{so}_q$ 共轭，其中 p、$q\,(pq=n, p\geq 2, q\geq 3)$。

定理 *4.1* 的证明。(1) 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ 和 $\mathfrak{h}$ 为复半单李子代数，且满足 $\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$。若 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^n$上不可约地作用，根据定理 4.15、命题 4.4 和 4.6，我们可以看出每个子代数 $\mathfrak{h}$ 都满足 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$。

现在假设 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^n$上可约地作用。存在一个不可约分解$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{sl}_{n_r}$，其中 $n=\sum_{i=1}^{r}n_i$、$n_1\geq\cdots\geq n_r\geq 1$。若 $2n_1\leq n$且$n_1+n_2\leq n-1$，则根据命题 4.7 有 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$。对于其余情况，可归结为命题 4.11。

总之，满足 $\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{q}}$和 $\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{q}}$ 的 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ 的所有半单李子代数 $\mathfrak{h}$，正是命题 4.11 中出现的那些。

（2）令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_n$ 和 $\mathfrak{h}$ 为一个复半单李子代数。如果 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上不可约地作用，则不存在满足 $\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{q}}$ 的 $\mathfrak{h}$。事实上，如果 $\mathfrak{h}$ 是单的，这由命题 4.6 得出。如果 $\mathfrak{h}$ 是非单的，则由定理 4.15 和命题 4.4 得出。

$\mathfrak{h}\subset\bigoplus^{r}\mathfrak{so}_{n_i}\oplus\bigoplus^{s}\mathfrak{sl}_{m_j}$ 且 $n=\sum_{i=1}^{r}n_i+2\sum_{j=1}^{s}m_j$、$n_1\ge\cdots\ge n_r\ge 1$、$m_1\ge\cdots\ge m_s\ge 1$、$r,\ s\ge 0$。在此情形下，我们假设 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上可约地作用，以下条件至少有一个成立：

(i) $1<\sum_{i=1}^{r}n_i\le 2\sum_{j=1}^{s}m_j+1$,
(ii) $2\max\{n_1,2m_1\}\le n+1$,
(iii) $n_1\ge\sum_{i=2}^{r}n_i+2\sum_{j=1}^{s}m_j$,
(iv) $r=1,\ n_1=1,\ n=2\sum_{j=1}^{s}m_j+1$,
(v) $r=0,\ n=2\sum_{j=1}^{s}m_j$.

在情形 (i) 中，我们有 $\mathfrak{h}\subset\bigoplus^{r}\mathfrak{so}_{n_i}\oplus\bigoplus^{s}\mathfrak{sl}_{m_j}\subset\widetilde{\mathfrak{h}}:=\mathfrak{so}_{\sum_{i=1}^{r}n_i}\oplus\mathfrak{sl}_{\sum_{j=1}^{s}m_j}$。命题 4.9 蕴含 $\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}}<\rho_{\widetilde{\mathfrak{q}}}$，因此 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$。

在情形 (ii) 中，我们有 $\mathfrak{h}\subset\bigoplus^{r}\mathfrak{so}_{n_i}\oplus\bigoplus^{s}\mathfrak{sl}_{m_j}\subset\widetilde{\mathfrak{h}}:=\bigoplus^{r}\mathfrak{so}_{n_i}\oplus\bigoplus^{s}\mathfrak{so}_{2m_j}$。命题 4.7 蕴含 $\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}}<\rho_{\widetilde{\mathfrak{q}}}$，因此 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$。

在情形 (iii) 中，我们有 $\mathfrak{h}\subset\bigoplus^{r}\mathfrak{so}_{n_i}\oplus\bigoplus^{s}\mathfrak{sl}_{m_j}\subset\mathfrak{so}_{n_1}\oplus\mathfrak{so}_{n-n_1}$。由于 $n_1\ge\sum_{i=1}^{r}n_i+2\sum_{j=1}^{s}m_j=n-n_1\ge 1$ 成立，$\mathfrak{h}$ 满足命题 4.11 的假设。每个满足 $\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{q}}$ 的 $\mathfrak{h}$ 都出现在命题 4.11 中。

在情形 (iv) 中，我们有 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{sl}_{m_s}\subset\mathfrak{sl}_p\subset\mathfrak{so}_{2p+1}$，其中 $p:=\sum_{j=1}^{s}m_j$。若 $\mathfrak{h}\supset\mathfrak{sl}_p$，则由命题 4.9 得 $\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{q}}$。若 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_{p_1}\oplus\mathfrak{sl}_{p_2}$ 且 $p_1+p_2=p$，$p_1\ge p_2\ge 1$，则令 $\mathfrak{h}:=\mathfrak{sl}_{p_1}\oplus\mathfrak{so}_{2p_2+1}$。由命题 4.9 可得 $\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}}<\rho_{\widetilde{\mathfrak{q}}}$，因此 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$。

在情形 (v) 中，我们有 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{sl}_{m_s}\subset\mathfrak{sl}_p\subset\mathfrak{so}_{2p}$，其中 $p:=\sum_{j=1}^{s}m_j$。无需考虑情形 $\mathfrak{h}\supset\mathfrak{sl}_p$，因为 $\rho_{\mathfrak{h}}\not\le\rho_{\mathfrak{q}}$；在该情形下，我们可以假设 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{sl}_{p_1}\oplus\mathfrak{sl}_{p_2}$。与情形 (iv) 同理，我们有 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$。

总之，满足 $\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{q}}$ 的 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_n$ 的所有半单李子代数 $\mathfrak{h}$ 都是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2p+1}\supset\mathfrak{h}=\mathfrak{sl}_p$ 以及命题 4.11 中出现的那些。

(3) 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_n$ 和 $\mathfrak{h}$ 为复半单李子代数。若 $\mathfrak{h}$ 在$\mathbb{C}^{2n}$上不可约地作用，根据定理 4.15、命题 4.4 和 4.6，可知不存在满足 $\rho_{\mathfrak{h}}\not\le\rho_{\mathfrak{q}}$ 的复半单李子代数 $\mathfrak{h}$。

我们假设 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^{2n}$上可约地作用。存在一个不可约分解 $\mathfrak{h} \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{sp}_{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} \mathfrak{sl}_{m_j}$，其中 $n = \sum_{i=1}^{r} n_i + \sum_{j=1}^{s} m_j$、$n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 1$、$m_1 \geq \cdots \geq m_s \geq 1$、$r,\ s \geq 0$。我们考虑以下四种情况：

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i \leq \sum_{j=1}^{s} m_j - 1$,
(ii) $2\max\{n_1, m_1\} \leq n - 1$,
(iii) $\displaystyle n_1 \geq \sum_{i=2}^{r} n_i + \sum_{j=1}^{s} m_j$,
(iv) none of (i), (ii), or (iii) holds.

在情形 (i) 中，我们有 $\mathfrak{h} \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{sp}_{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} \mathfrak{sl}_{m_j} \subset \widetilde{\mathfrak{h}} := \mathfrak{sp}_{\sum_{i=1}^{r} n_i} \oplus \mathfrak{sl}_{\sum_{j=1}^{s} m_j}$. 由命题 4.9 可知 $\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}} < \rho_{\widetilde{\mathfrak{q}}}$，因此 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。

在情形 (ii) 中，我们有 $\mathfrak{h} \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{sp}_{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} \mathfrak{sl}_{m_j} \subset \widetilde{\mathfrak{h}} := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{sp}_{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} \mathfrak{sp}_{m_j}$。首先考虑 $n = 3$ 的情形，即 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1$。当 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1$ 时，$\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$ 可由命题 4.7 得出。另一方面，当 $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1$ 时，$\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$ 可通过直接计算得到。接下来，当 $n \neq 3$ 时，$\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}} < \rho_{\widetilde{\mathfrak{q}}}$ 由命题 4.9 得出。因此我们有 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。

在情形 (iii) 中，我们有 $\mathfrak{h} \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{sp}_{n_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} \mathfrak{sl}_{m_j} \subset \mathfrak{sp}_{n_1} \oplus \mathfrak{sp}_{n-n_1}$。由于 $n_1 \geq \sum_{i=1}^{r} n_i + \sum_{j=1}^{s} m_j$ 成立，$\mathfrak{h}$ 满足命题 4.11 的假设。任何满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$ 的 $\mathfrak{h}$ 都出现在命题 4.11 中。

在情形 (iv) 中，我们有 $n = \sum_{i=1}^{r} n_i + m_1$ 为偶数，$\sum_{i=1}^{r} n_i = m_1 = \dfrac{n}{2}$ 和 $r \geq 2$。对于带有 $\mathfrak{h} \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{sp}_{n_i} \oplus \mathfrak{sl}_{n/2} = \mathfrak{sp}_{n_1} \oplus \mathfrak{sp}_{n_2} \oplus \bigoplus_{i=3}^{r} \mathfrak{sp}_{n_i} \oplus \mathfrak{sl}_{n/2}$ 的 r子代数 $\mathfrak{h}$，我们想要证明 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$ 成立。由于情形 $r \geq 3$ 可化归为情形 $r = 2$，我们可以假设 $r = 2$ 和 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}_{n_1} \oplus \mathfrak{sp}_{n_2} \oplus \mathfrak{sl}_{n/2}$。令 $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{sp}_{n_1} \oplus \mathfrak{sp}_{n_2} \oplus \mathfrak{sl}_{n/2}$，并 $\mathfrak{h}_2 := \mathfrak{sp}_{n/2} \oplus \mathfrak{sl}_{n/2}$，取阿贝尔子空间 $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{h}_1$、$\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{h}_2$，使得 $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2$。根据 $\mathfrak{h}_1$、$\mathfrak{h}_2$ 的定义以及命题 4.9，我们得到以下不等式

$$\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}_1} \leq \rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}_2} \text{ on } \mathfrak{a}_1, \quad 2\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}_2} \leq \rho_{\mathfrak{g}} \text{ on } \mathfrak{a}_2.$$

对于第二个不等式，命题 4.9 表明，$\mathfrak{a}_2$ 中的每个见证向量都属于 $\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{sp}_{n/2}$。于是，对于非零元素 $Y \in \mathfrak{a}_1$，若 $Y \notin \mathfrak{sp}_{n/2}$，则有 $2\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}_2}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。另一方面，我们可以看到，$\rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}_1} < \rho_{\widetilde{\mathfrak{h}}_2}$ 在 $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{sp}_{n/2})$ 上 $\setminus \{0\}$。由这些观察可得 $\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$。

总而言之，所有满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{q}}$ 的 $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n$ 半单李子代数均为 $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_3$，以及命题 4.11 中出现的那些。□

5. Proofs of propositions

本节将通过计算 $\mathfrak{h}$ 上的函数 $\rho_{\mathfrak{g}}$、 $\rho_{\mathfrak{h}}$ 或 $\rho_{\mathfrak{q}}$，证明上一节中的八个命题，其中 $\mathfrak{q}\colon=\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$。

5.1. 设定。 如第 2 节所述，这些函数由其在相对于某个正系的正魏尔室上的取值决定。首先，我们列出以下经典型或例外型复单李代数的极大分裂阿贝尔子空间 $\mathfrak{a}$、相对于 $\mathfrak{h}$ 中的 $\mathfrak{a}$ 的限制根系 $\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$、单根集合 $\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$、正魏尔室 $\mathfrak{a}_+$ 以及如 [8] 中所示的基本支配权 $\varpi_k\in\mathfrak{a}^*$。我们将 $\mathfrak{a}$ 实现为欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 或其子空间。我们用 $\{\varepsilon_i\}\subset(\mathbb{R}^N)^*$ 表示与 $\mathbb{R}^N$ 的标准正交基相对应的对偶基。本文中，我们采用下文定义的记号。

A_{n-1}： $\mathfrak{h}=\mathfrak{sl}_n$。

$$\mathfrak{a}=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\mid\textstyle\sum_{i=1}^n a_i=0\},$$
$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a})=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\ (1\le i\ne j\le n)\},$$
$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a})=\{\alpha_i:=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\ (1\le i\le n-1)\},$$
$$\mathfrak{a}_+=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathfrak{a}\mid a_1\ge\cdots\ge a_n\},$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{\alpha\in\Phi^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a})}\alpha(Y)=\sum_{i=1}^n(n-2i+1)a_i\quad\text{for } Y=(a_1,\dots,a_n)\in\mathfrak{a}_+,$$
$$\varpi_k:=\sum_{i=1}^k\varepsilon_i\quad(1\le k\le n-1).$$

B_n： $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}_{2n+1}$。

$$\mathfrak{a}=\mathbb{R}^n,$$
$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a})=\{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j),\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)\ (1\le i<j\le n)\}\cup\{\pm\varepsilon_i\ (1\le i\le n)\},$$
$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a})=\{\alpha_i:=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\ (1\le i\le n-1),\alpha_n:=\varepsilon_n\},$$
$$\mathfrak{a}_+=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathfrak{a}\mid a_1\ge\cdots\ge a_n\ge0\},$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{i=1}^n(2n+1-2i)a_i\quad\text{for } Y=(a_1,\dots,a_n)\in\mathfrak{a}_+,$$
$$\varpi_k:=\sum_{i=1}^k\varepsilon_i\quad(1\le k\le n-1),\quad\varpi_n:=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\varepsilon_i.$$

C_n： $\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}_n$。

$$\mathfrak{a}=\mathbb{R}^n,$$
$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a})=\{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j),\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)\ (1\le i<j\le n)\}\cup\{\pm2\varepsilon_i\ (1\le i\le n)\},$$
$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a})=\{\alpha_i:=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\ (1\le i\le n-1),\alpha_n:=2\varepsilon_n\},$$
$$\mathfrak{a}_+=\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathfrak{a}\mid a_1\ge\cdots\ge a_n\ge0\},$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{i=1}^n2(n+1-i)a_i\quad\text{for } Y=(a_1,\dots,a_n)\in\mathfrak{a}_+,$$

$$\varpi_k := \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \quad (1 \le k \le n).$$

D_n : $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{2n\circ}$

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n,$$
$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\ (1 \le i < j \le n)\},$$
$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}\ (1 \le i \le n-1), \alpha_n := \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\},$$
$$\mathfrak{a}_+ = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathfrak{a} \mid a_1 \ge \cdots \ge a_{n-1} \ge |a_n|\},$$
$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{n} 2(n-i)a_i \quad \text{for } Y = (a_1,\dots,a_n) \in \mathfrak{a}_+,$$
$$\varpi_k := \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \quad (1 \le k \le n-2),$$
$$\varpi_{n-1} := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i, \quad \varpi_n := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - \varepsilon_n.$$

G_2 : $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{2\circ}$

$$\mathfrak{a} = \left\{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \textstyle\sum_{i=1}^{3} a_i = 0\right\},$$
$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)\ (1 \le i < j \le 3)\}$$
$$\cup \{\pm(2\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k) \mid \{i,j,k\} = \{1,2,3\}\},$$
$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\alpha_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 := -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\},$$
$$\mathfrak{a}_+ = \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathfrak{a} \mid a_3 \ge 0 \ge a_1 \ge a_2\},$$
$$\rho_{\mathfrak{h}} = 10\alpha_1 + 6\alpha_2 \quad \text{on } \mathfrak{a}_+,$$
$$\varpi_1 := 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \varpi_2 := 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

F_4 : $\mathfrak{h} = \mathfrak{f}_{4\circ}$

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}^4,$$
$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ (1 \le i < j \le 4)\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \le i \le 4\}$$
$$\cup \left\{\tfrac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)\right\},$$
$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \left\{\begin{matrix}\alpha_1 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 := \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 := \varepsilon_4, \\ \alpha_4 := \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\end{matrix}\right\},$$
$$\mathfrak{a}_+ = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathfrak{a} \mid a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge 0, a_1 \ge a_2 + a_3 + a_4\},$$
$$\rho_{\mathfrak{h}} = 16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4 \quad \text{on } \mathfrak{a}_+,$$
$$\varpi_1 := 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \quad \varpi_2 := 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4,$$
$$\varpi_3 := 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4, \quad \varpi_4 := \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

E_6 : $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{6\circ}$

$$\mathfrak{a} = \left\{Y \in \mathbb{R}^8 \mid (\varepsilon_7 - \varepsilon_6)(Y) = (\varepsilon_6 - \varepsilon_5)(Y) = 0\right\},$$
$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ (1 \le i < j \le 5)\}$$
$$\cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \textstyle\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i) \mid \textstyle\sum_{i=1}^{5} \nu_i = 0 \mod 2\},$$

$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8 - \sum_{i=2}^{7} \varepsilon_i), \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2} \ (3 \le i \le 6) \end{matrix} \right\},$$

$$\mathfrak{a}_+ = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_8) \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 + a_8 \ge \sum_{i=2}^{7} a_i \ge 0, \\ a_5 \ge a_4 \ge a_3 \ge a_2 \ge |a_1| \end{matrix} \right\},$$

$$\varpi_1 := \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6),$$

$$\varpi_2 := \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6,$$

$$\varpi_3 := \frac{1}{3}(5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 10\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6),$$

$$\varpi_4 := 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6,$$

$$\varpi_5 := \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 5\alpha_6),$$

$$\varpi_6 := \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6).$$

E_7 : $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{7\circ}$

$$\mathfrak{a} = \left\{ Y \in \mathbb{R}^8 \mid (\varepsilon_7 - \varepsilon_6)(Y) = 0 \right\},$$

$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \le i < j \le 6)\} \cup \{\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)\}$$
$$\cup \{\pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \textstyle\sum_{i=1}^{6}(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i) \mid \sum_{i=1}^{6} \nu_i = 1 \mod 2\},$$

$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8 - \sum_{i=2}^{7} \varepsilon_i), \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2} \ (3 \le i \le 7) \end{matrix} \right\},$$

$$\mathfrak{a}_+ = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_8) \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 + a_8 \ge \sum_{i=2}^{7} a_i \ge 0, \\ a_6 \ge a_5 \ge a_4 \ge a_3 \ge a_2 \ge |a_1| \end{matrix} \right\},$$

$$\varpi_1 := 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7,$$

$$\varpi_2 := \frac{1}{2}(4\alpha_1 + 7\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7),$$

$$\varpi_3 := 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7,$$

$$\varpi_4 := 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7,$$

$$\varpi_5 := \frac{1}{2}(6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7),$$

$$\varpi_6 := 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7,$$

$$\varpi_7 := \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7).$$

E_8 : $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{8\circ}$

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}^8,$$

$$\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \le i < j \le 8)\}$$
$$\cup \left\{ \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^{8} \nu_i = 0 \mod 2 \right\},$$

$$\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 := \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8 - \sum_{i=2}^{7} \varepsilon_i), \alpha_2 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2} \ (3 \le i \le 8) \end{matrix} \right\},$$

$$\mathfrak{a}_+ = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_8) \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{array}{c} a_1 + a_8 \geq \sum_{i=2}^{7} a_i \geq 0, \\ a_8 \geq a_7 \geq a_6 \geq a_5 \geq a_4 \geq a_3 \geq a_2 \geq |a_1| \end{array} \right\},$$
$$\varpi_1 := 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 10\alpha_4 + 8\alpha_5 + 6\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8,$$
$$\varpi_2 := 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3 + 15\alpha_4 + 12\alpha_5 + 9\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$
$$\varpi_3 := 7\alpha_1 + 10\alpha_2 + 14\alpha_3 + 20\alpha_4 + 16\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$
$$\varpi_4 := 10\alpha_1 + 15\alpha_2 + 20\alpha_3 + 30\alpha_4 + 24\alpha_5 + 18\alpha_6 + 12\alpha_7 + 6\alpha_8,$$
$$\varpi_5 := 8\alpha_1 + 12\alpha_2 + 16\alpha_3 + 24\alpha_4 + 20\alpha_5 + 15\alpha_6 + 10\alpha_7 + 5\alpha_8,$$
$$\varpi_6 := 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8,$$
$$\varpi_7 := 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 8\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8,$$
$$\varpi_8 := 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8.$$

5.2. **命题 4.2 的证明**。

证明。 (1) 设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}_{p+q}, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q)$。设 $Y = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) \in \mathfrak{a}_+$，即 $(a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{sl}_p$，$(b_1, \dots, b_q) \in \mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{sl}_q$，$a_1 \geq \cdots \geq a_p$ 以及 $b_1 \geq \cdots \geq b_q$。我们将实数 $c_i (1 \leq i \leq p+q)$ 定义为将 a_j $(1 \leq j \leq p)$ 和 b_k $(1 \leq k \leq q)$ 按降序排列后得到的序列。我们还将 λ_i $(1 \leq i \leq p+q)$ 定义为将 $p - 2j + 1$ $(1 \leq j \leq p)$ 和 $q - 2k + 1$ $(1 \leq k \leq q)$ 按降序排列后得到的序列。于是有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p} (p - 2i + 1) a_i + \sum_{i=1}^{q} (q - 2i + 1) b_i \leq \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i c_i,$$
$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{p+q} (p + q - 2i + 1) c_i = \sum_{i=1}^{p+q} \mu_i c_i$$

其中 $\mu_i = p + q - 2i + 1$ $(1 \leq i \leq p+q)$。

假设 $q \leq p \leq q+1$。首先，我们证明，当 $p = q$ 时，见证向量均为形如 $(a_1, \dots, a_p, a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{a}_+$ 的元素。

当 $p = q$ 时，由于对于任意 i $(1 \leq i \leq p)$，$2\lambda_{2i-1} = \mu_{2i-1} - 1 < \mu_{2i-1}$ 且 $2\lambda_{2i} = \mu_{2i} + 1 > \mu_{2i}$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \geq \sum_{i=1}^{2p} (\mu_i - 2\lambda_i) c_i = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^{i-1} c_i.$$

条件 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 等价于 $\{a_i, b_i\} = \{c_{2i-1}, c_{2i}\}$，且对每个 $i = 1, \dots, p$ 都有 $c_{2i-1} = c_{2i}$。因此，Y 是见证向量，当且仅当对每个 $i = 1, \dots, p$ 都有 $a_i = b_i$。

接下来，我们证明当 $p = q+1$ 时，元素 $Y = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) \in \mathfrak{a}_+$ 是见证向量，当且仅当 $a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq b_2 \geq \cdots \geq a_{p-1} \geq b_{p-1} \geq a_p$ 成立。当 $p = q+1$ 时，我们有 $2\lambda_i = 2(p - i) = \mu_i$ $(1 \leq i \leq 2p-1)$。于是可见，$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 当且仅当 $c_{2i-1} = a_i$，对每个 $i = 1, \dots, q$ 都成立；这蕴含 $a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq b_2 \geq \cdots \geq a_{p-1} \geq b_{p-1} \geq a_p$。

(2) 设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}_{p+q}, \mathfrak{so}_p \oplus \mathfrak{so}_q)$。关于等价关系 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}} \Leftrightarrow p \leq q+1$ 的证明可分为以下两种情况：(i) $p = q+1$，(ii) $p = q$。令 $p' := \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 以及 $q' := \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$。

(i) 设 $Y=(a_1,\dots,a_{p'},b_1,\dots,b_{q'})\in\mathfrak{a}_+$，即 $(a_1,\dots,a_{p'})\in\mathfrak{a}_+\cap\mathfrak{so}_p$, $a_1\geq\cdots\geq a_{p'}\geq 0$（$p$奇数）或 $a_1\geq\cdots\geq a_{p'-1}\geq|a_{p'}|\geq 0$（$p$偶数），以及（$b_1$，……，$b_{q'}$）$\in\mathfrak{a}_+\cap\mathfrak{so}_{p-1}$、$b_1\geq\cdots\geq b_{q'}\geq 0$（$q$奇数）或 $b_1\geq\cdots\geq b_{q'-1}\geq|b_{q'}|\geq 0$（$q$偶数）。我们按（1）定义 $\{c_i\}$，并定义 $\lambda_{2i-1}:=p-2i$ （$1\leq i\leq p'$） $\lambda_{2i}:=p-2i-1$ （$1\leq i\leq q'$）。于是有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{i=1}^{p'}(p-2i)a_i+\sum_{i=1}^{q'}(p-2i-1)b_i\leq\sum_{i=1}^{p'+q'}\lambda_i c_i,$$
$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=\sum_{i=1}^{p'+q'}(2p-2i-1)c_i=\sum_{i=1}^{p'+q'}\mu_i c_i$$

其中 $\mu_i=2p-2i-1$ （$1\leq i\leq p'+q'$）。由于 $\mu_{2i-1}-2\lambda_{2i-1}=\mu_{2i}-2\lambda_{2i}=1$，我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

(ii) 设 $Y=(a_1、\dots\dots、a_{p'}、b_1、\dots\dots、b_{p'})\in\mathfrak{a}_+$，即 $(a_1、\dots\dots、a_{p'})\in\mathfrak{a}_+\cap\mathfrak{so}_p$、$(b_1、\dots\dots、b_{p'})\in\mathfrak{a}_+\cap\mathfrak{so}_p$，并且 $a_1\geq\cdots\geq a_{p'}\geq 0$、$b_1\geq\cdots\geq b_{p'}\geq 0$ (p 奇) 或 $a_1\geq\cdots\geq a_{p'-1}\geq|a_{p'}|\geq 0$ (p 偶)，$b_1\geq\cdots\geq b_{p'-1}\geq|b_{p'}|\geq 0$ (p 偶)。我们按照 (1) 定义 $\{c_i\}$，并令 $\lambda_{2i-1}=\lambda_{2i}:=p-2i$ ($1\leq i\leq p'$)。于是有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{i=1}^{p'}(p-2i)a_i+\sum_{i=1}^{p'}(p-2i)b_i\leq\sum_{i=1}^{2p'}\lambda_i c_i,$$
$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=\sum_{i=1}^{2p'}2(p-i)c_i=\sum_{i=1}^{2p'}\mu_i c_i$$

其中 $\mu_i=2(p-i)$ ($1\leq i\leq 2p'$)。由于 $\mu_{2i-1}-2\lambda_{2i-1}=2$ 和 $\mu_{2i}=2\lambda_{2i}$，我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

若 $p=q+2$，我们定义 $\lambda_{2i-1}:=p-2i$ ($1\leq i\leq p'$) $\lambda_{2i}:=p-2i-2$ ($1\leq i\leq p'-1$) 和 $\mu_i:=2(p-i-1)$（$1\leq i\leq 2p'$）。于是我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{i=1}^{p'}(p-2i)a_i+\sum_{i=1}^{p'}(p-2i-2)b_i\leq\sum_{i=1}^{2p'}\lambda_i c_i,$$
$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=\sum_{i=1}^{2p'}2(p-i-1)c_i=\sum_{i=1}^{2p'}\mu_i c_i.$$

由于 $2\lambda_{2i-1}=2(p-2i)=\mu_{2i-1}$ 且 $2\lambda_{2i}=2(p-2i-2)=\mu_{2i}-2$，因此 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 成立，当且仅当 $c_1=a_1>0$ 且 $c_i=0$ ($i>1$)。于是，非零元素 $Y=(a_1,\dots\dots,a_{p'},b_1,\dots\dots,b_{q'})\in\mathfrak{a}_+$ 是一个见证向量，当且仅当 $a_1>0$ 且 $a_2=\cdots=a_{p'}=b_1=\cdots=b_{q'}=0$。由于 $\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{q}}$ 成立当且仅当 $p\leq q+2$，证明完毕。□

5.3. **命题 4.3 的证明**。

命题 *4.3* 的证明。 (1) 令 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{sl}_p,\mathfrak{so}_p)$。令 $p':=\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor$ 且 $Y=(a_1,\dots,a_{p'})\in\mathfrak{a}_+$，也就是说，。经计算，我们得到如下结果

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{i=1}^{p'}(p-2i)a_i,\quad\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=\sum_{i=1}^{p'}2(p-2i+1)a_i.$$

于是我们有 $\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$。

(2), (3) 由于 $\rho_{\mathfrak{h}}\not\leq\rho_{\mathfrak{q}}$ 可由 [3, 命题 3.3] 得出，因此 $\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{q}}$ 也成立。

(4) 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_p, \mathfrak{sl}_p)$ 且 $p' := \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$。取一个非零元素 $Y = (a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{a}_+$，并将 $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_p|$ 按降序排列，定义所得序列为 $\widetilde{a_i} (1 \le i \le p)$。于是有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \sum_{i=1}^{p} (p-2i+1)a_i \\ &\le \sum_{i=1}^{p'} (p-2i+1)(\widetilde{a_{2i-1}} + \widetilde{a_{2i}}).\end{aligned}$$

由于 Y 在 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群作用下与 $(\widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_p})$ 共轭，因此我们有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{p} 2(p-i+1)\widetilde{a_i}.$$

设 $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} := p-2i+1 \, (1 \le i \le p')$ 且 $\mu_i = 2(p-i+1) \, (1 \le i \le p)$，则

$$\mu_{2i-1} - 2\lambda_{2i-1} = 2, \quad \mu_{2i} - 2\lambda_{2i} = 0.$$

因此可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。 □

5.4. **命题 4.4 的证明**。

命题 *4.4* 的证明。(1) 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}_{pq}, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{so}_q)$。对于一个非零元素 $Y = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) \in \mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{1 \le i < j \le p} (a_i - a_j) + \sum_{1 \le i < j \le q} (b_i - b_j).$$

将实数 $c_i (i = 1, 2, \dots, pq)$ 定义为将 $a_j + b_k \, (1 \le j \le p, \ 1 \le k \le q)$ 按降序排列所得的数列，我们看到 Y 在 $\mathfrak{g}$ 中与 $(c_1, \dots, c_{pq})$ 共轭，且

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{1 \le i < j \le pq} (c_i - c_j). \tag{5.1}$$

用 $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_1 + b_2$, ..., $c_q = a_1 + b_q$, $c_{q+1} = a_2 + b_1$, $c_{q+2} = a_2 + b_2$, ... 计算方程（5.1）的右端，我们得到不等式

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) \ge q^2 \sum_{1 \le i < j \le p} (a_i - a_j) + p \sum_{1 \le i < j \le q} (b_i - b_j).$$

根据假设，当 $p > 2$ 时，$p, \ q > 1$, $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 成立。当 $p = 2$ 和 $a_1 = a_2 = 0$ 时，我们可以如下计算

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = p^2 \sum_{1 \le i < j \le q} (b_i - b_j).$$

于是我们有 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = (p^2 - 2) \sum (b_i - b_j) > 0$。

(2) 令 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}_{pq}, \mathfrak{so}_p \oplus \mathfrak{so}_q)$。令 $p' := \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$，且 $q' := \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$。我们可以假设 $p \ge q > 1$，于是 $p' \ge q'$。任取非零元素 $Y = (a_1, \dots, a_{p'}, \bar{b}_1, \dots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+$，则

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p'} (p-2i)a_i + \sum_{i=1}^{q'} (q-2i)b_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{q'}(p-2i)(a_i+b_i)+\sum_{i=q'+1}^{p'}(p-2i)a_i.$$

将实数 $c_i\,(1\leq i\leq pq)$ 定义为由 $\pm a_i\pm b_j$、$\pm a_i$（若 q 为奇数）、 $\pm b_j$（若 p 为奇数）（$1\leq i\leq p', 1\leq j\leq q'$）以及一个 0（若 p,q 均为奇数）按降序排列所得的序列，我们有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=\sum_{i=1}^{\frac{pq-1}{2}}(pq-2i)c_i.$$

由不等式 $c_i\geq a_i+b_i\,(1\leq i\leq q')$ 和 $c_i\geq a_i\,(q'+1\leq i\leq p')$，可得

$$\begin{aligned}&\rho_{\mathfrak{g}}(Y)-2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)\\&\geq\sum_{i=1}^{\frac{pq-1}{2}}(pq-2i)c_i-\sum_{i=1}^{q'}2(p-2i)(a_i+b_i)-\sum_{i=q'+1}^{p'}2(p-2i)a_i\\&\geq\sum_{i=1}^{q'}\{p(q-2)+2i\}(a_i+b_i)+\sum_{i=q'+1}^{p'}\{p(q-2)+2i\}a_i>0.\end{aligned}$$

(3) 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{so}_{4pq},\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{sp}_q)$。不妨设 $q\geq p$。任取非零元素$Y=(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q)\in\mathfrak{a}_+$，则有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y)&=\sum_{i=1}^{p}2(p-i+1)a_i+\sum_{i=1}^{q}2(q-i+1)b_i\\&\leq\sum_{i=1}^{p}2(q-i+1)(a_i+b_i)+\sum_{i=p+1}^{q}2(q-i+1)b_i.\end{aligned}$$

将 $\pm a_i\,\pm b_j\,(1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q)$按降序排列，并将序列定义为实数 $c_i(i=1,2,\ldots,4pq)$，则有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=\sum_{i=1}^{2pq}2(2pq-i)c_i$$

and

$$\begin{aligned}&\rho_{\mathfrak{g}}(Y)-2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)\\&\geq\sum_{i=1}^{p}2\{2q(p-1)+i-2\}(a_i+b_i)+\sum_{i=p+1}^{q}2\{2q(p-1)+i-2\}b_i.\end{aligned}$$

若 $p>1$，则 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)<\rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 成立。设 $p=1$、 $Y=(a$、 b_1、.....、 $b_q)$。当$a\geq b_1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y)-2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)&\geq\sum_{i=1}^{q}2(2q-i)(a+b_i)-4a-\sum_{i=1}^{q}4(q-i+1)b_i\\&>4(q-2)b_1\\&\geq 0.\end{aligned}$$

现在假设 $a < b_1$，则

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \geq \sum_{i=1}^{q} 2(2q-i)(a+b_i) + 2(q-1)(b_1-a) - 4a - \sum_{i=1}^{q} 4(q-i+1)b_i$$
$$= 2(q-2)b_1 + \sum_{i=2}^{q} 2(i-2)b_i + \{3q(q-1)-2\}a.$$

由于 a 或 b_1 为正，因此当 $q \geq 3$时， $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$成立。若 $q = 2$ 且 $a > 0$, 则有 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \geq 4a > 0$。当 $q = 2$ 且 $a = 0$时，经过直接重新计算可得

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = (10b_1 + 2b_2) - 2(4b_1 + 2b_2) = 2(b_1 - b_2).$$

因此我们可以看出， $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$成立仅当 $p = 1$、 $q = 2$、 $a = 0$ 且 $b_1 = b_2$。

(4) 设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_{pq}, \mathfrak{sp}_p \oplus \mathfrak{so}_q)$。设 $q' := \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$。任取非零元素 $Y = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+$，并定义实数 $c_i (i = 1, 2, \ldots, pq)$ 为将 $\pm a_i \pm b_j (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q')$ 与一个 0（若 q 为奇数）按降序排列后得到的序列。当 $q' \leq p$ 时，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p} 2(p-i+1)a_i + \sum_{i=1}^{q'} (q-2i)b_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^{q'} 2(p-i+1)(a_i+b_i) + \sum_{i=q'+1}^{p} 2(p-i+1)a_i.$$

因此可得

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \geq \sum_{i=1}^{q'} 2\{p(q-2)+i-1\}(a_i+b_i) + \sum_{i=q'+1}^{p} 2\{p(q-2)+i-1\}a_i.$$

当 $q > 2$时，我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。当 $q = 2$时，我们有 $c_{2i-1} = c_{2i} = a_i (1 \leq i \leq p)$，并且

$$\rho_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^{p} 2(p-i+1)a_i,$$
$$\rho_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{p} 2(2p-i+1)c_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p} 4(p-i+1)a_i + \sum_{i=1}^{p} 2(2p-2i+1)a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p} 2(4p-4i+3)a_i.$$

Then

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p} 2(2p-2i+1)a_i > 0.$$

当 $q' > p$ 时，

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \leq \sum_{i=1}^{p}(q-2i)(a_i+b_i) + \sum_{i=p+1}^{q'}(q-2i)b_i$$

然后

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \geq \sum_{i=1}^{p} 2\{q(p-1)+i+1\}(a_i+b_i) + \sum_{i=p+1}^{q'} 2\{q(p-1)+i+1\}b_i > 0.$$

□

5.5. **命题 4.6 的证明**。 固定一个复单李代数 $\mathfrak{h}$，并取 $\mathfrak{h}$ 中的极大分裂阿贝尔子空间 $\mathfrak{a}$，如第 5.1 节所述。复化 $\mathfrak{j} := \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$of $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的卡当子代数。我们将根系的魏尔群记为 W，该根系按第 5.1 节中的方式定义。设 π 是V上的一个 n维不可约表示。由于 $\mathfrak{h}$ 是单李代数，像 $\pi(\mathfrak{h})$ 包含于 $\mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$ 中。此外，如果 V 上存在一个使 $\pi(\mathfrak{h})$ 不变的非退化对称（分别为斜对称）双线性型，那么 $\pi(\mathfrak{h})$ 包含于 $\mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$（分别为 $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^n)$）中。所有满足 $\mathfrak{g}$ 为经典型的复单李代数对 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 都以这种方式出现。

我们取单根 $\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{j}) = \{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$。令 $(\cdot,\cdot)$ 为由 $\Delta(\mathfrak{h},\mathfrak{j})$ 张成的欧几里得空间上的内积，并令 $\varpi_1,\dots,\varpi_l$ 基本权满足 $(\varpi_i,\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$。定义 $L := \{\varpi_1,\dots,\varpi_l\}_{\mathbb{Z}}$，称其为权格。若一个权 $\lambda \in L$ 满足 $(\lambda,\alpha_i^\vee) \geq 0$ $(1 \leq i \leq l)$，则称其为支配权。我们用 L_+ 表示支配权的集合。在实际计算中，我们取这些数据如 [8,第 3]章所示。

为证明命题 4.6，对于每个 $\lambda \in L_+$，我们检查不可约表示 V 是否满足 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$，其中 λ 为其最高权。令 $V(\lambda)$ 表示 $\mathfrak{h}$ 的不可约表示，其最高权为 $\lambda \in L_+$，并用 $\Lambda(\lambda)(\subset \mathfrak{a}^*)$ 表示 $V(\lambda)$ 的权集。

设 $Y \in \mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{j}$ 和 $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ 是不可约表示$V(\lambda)$中的互异权，其重数分别为 $\lambda_1(Y) \geq \cdots \geq \lambda_r(Y)$。若 $m_1,\dots,m_r$，则

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{1\leq i<j\leq r} m_i m_j(\lambda_i-\lambda_j)(Y).$$

若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2m+1}(n=2m+1)$，则权 $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ 可改写为 $\lambda_1,\dots,\lambda_{r'},0,-\lambda_{r'},\dots,-\lambda_1$，并且有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{1\leq i<j\leq r'} m_i m_j(\lambda_i-\lambda_j)(Y) + \sum_{1\leq i<j\leq r'} m_i m_j(\lambda_i+\lambda_j)(Y) + \sum_{i=1}^{r'} m_i\lambda_i(Y).$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2m}$ 和 $\mathfrak{sp}_m$ $(n=2m)$ 的情形也可以用相同的方法计算。我们有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{1\leq i<j\leq r'} m_i m_j(\lambda_i-\lambda_j)(Y) + \sum_{1\leq i<j\leq r'} m_i m_j(\lambda_i+\lambda_j)(Y),$$

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{1\leq i<j\leq r'} m_i m_j(\lambda_i-\lambda_j)(Y) + \sum_{1\leq i<j\leq r'} m_i m_j(\lambda_i+\lambda_j)(Y) + 2\sum_{i=1}^{r'} m_i\lambda_i(Y)$$

分别地。在所有情形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{so}_{2m+1}$, $\mathfrak{so}_{2m}$ 和 $\mathfrak{sp}_m$ 中，将 $m_1, \dots, m_l$ 替换为 1，可得以下不等式：

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) \geq \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ \lambda_i + \lambda_j \neq 0}} (\lambda_i - \lambda_j)(Y). \tag{5.2}$$

不等式 (5.2) 的右侧仅取决于最高权 λ 和 $Y \in \mathfrak{a}_+$。我们将其记为 $f(\lambda; Y)$。我们经常在计算 $\rho_{\mathfrak{g}}$ 时使用这个不等式。

设 λ, μ 为支配权。若 $\mu \prec \lambda$，即 $\lambda - \mu \in \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$，则权集 $\Lambda(\mu)$ 包含于 $\Lambda(\lambda)$ 的权集中。事实上，$\Lambda(\lambda)$ 是饱和的，并且对于任意 $\sigma \in W$，都有 $\mu, \sigma\mu \prec \lambda$，参见 [8, 21.3]。因此，对于任意 $Y \in \mathfrak{a}_+$，$f(\mu; Y) \leq f(\lambda; Y)$ 成立。我们通过不可约表示 $(\pi_\mu, V(\mu))$ 和 $(\pi_\lambda, V(\lambda))$，分别将 $\mathfrak{h}$ 视为经典型单李代数 $\mathfrak{g}_\mu$ 和 $\mathfrak{g}_\lambda$ 的李子代数。当 $2\rho_{\mathfrak{h}} < f(\mu; \cdot)$ 在 $\mathfrak{a}_+$ 上成立时，$2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}_\lambda}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上也成立。因此，一旦验证不等式 $2\rho_{\mathfrak{h}} < f(\mu; \cdot)$ 在 $\mathfrak{a}_+$ 上对某个支配权 μ 成立，就可推出不等式 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}_\lambda}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上对任意满足 $\lambda \succ \mu$ 的支配权 λ 也成立。

我们根据 $\mathfrak{h}$ 所对应的单李代数分情况证明命题 4.6。

命题 *4.6* 的证明。设 $\mathfrak{g}$ 为经典型复单李代数，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 为复单李子代数。根据 [3], 中的命题 3.5，满足 $\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{q}}$ 的唯一几对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 是 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_n)$，$(\mathfrak{so}_7, \mathfrak{g}_2)$ 和 $(\mathfrak{so}_8, \mathfrak{so}_7)$。我们证明，除这三种情形外，对于所有的成对对象，$\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}}$ 在 $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ 上成立。

对于每个单李代数 $\mathfrak{h}$，我们描述支配权上的偏序，并列出不可约表示 π_λ 的 $\rho_{\mathfrak{h}}$ 和 $f(\lambda; \cdot)$ 的计算结果。

注意，当最高权为 $\lambda = 0$ 时，$V(\lambda)$ 是 $\mathfrak{h}$ 的平凡表示，因此无需考虑这种情形。

首先，考虑 $\mathfrak{h}$ 属于经典型的情形。我们将 $\sum_{i=1}^{k} c_i\varepsilon_i$ 写作 $(c_1, \dots, c_k)$。

(i) $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n$。我们先考虑 $n = 2$ 的情形。关于偏序 $\prec$，有两个极小支配权：0、ϖ_1。

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ (4,0) = 4\varpi_1 & & \\ \quad +\alpha_1 \,\big|\, & & \vdots \\ (2,0) = 2\varpi_1 & & 3\varpi_1 = (3,0) \\ \quad +\alpha_1 \,\big|\, & & \,\big|\, +\alpha_1 \\ 0 & & \varpi_1 = (1,0) \end{array}$$

下面列出每个最高权 λ 对应的计算。对于 $Y = (a, -a) \in \mathfrak{a}_+$，有 $\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = 2a$。

对于 $\lambda = \varpi_1$，无需考虑这种情形，因为 $\mathfrak{h} \simeq \pi_{\varpi_1}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$。

对于 $\lambda = 2\varpi_1$，无需考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$ 这种情形，因为 $\mathfrak{h} \simeq \pi_{2\varpi_1}(\mathfrak{h}) \simeq \mathfrak{so}_3$。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ 时，有 $\rho_{\mathfrak{sl}_3}(\pi_{2\varpi_1}(Y)) = 8a > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

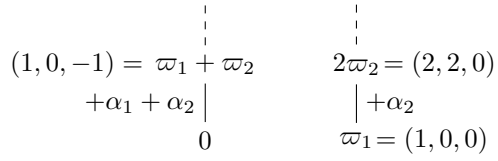
对于 $\lambda = 3\varpi_1$，我们有

$$\Lambda(3\varpi_1) = \{\pm 3\varepsilon_1, \pm\varepsilon_1\},$$

$$f(3\varpi_1;Y)=6\varepsilon_1(Y)=6a>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=4\varpi_1$，我们有 $f(4\varpi_1;Y)=14a>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

在 $n=3$的情况下，关于偏序 $\prec$，存在 3 个极小支配权 0、ϖ_1、ϖ_2。



对于 $Y\in\mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{1\leq i<j\leq 3}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)=2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(Y).$$

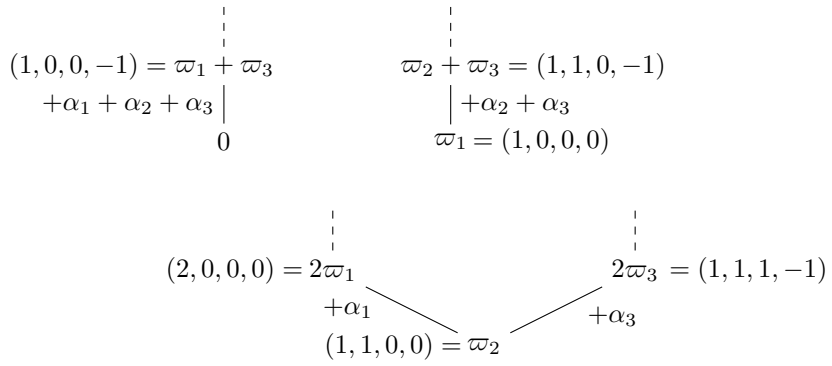
对于 $\lambda=\varpi_1$，我们有 $\mathfrak{h}\simeq\pi_{\varpi_1}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}$。
对于 $\lambda=\varpi_2$，我们有 $\mathfrak{h}\simeq\pi_{\varpi_2}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}$。
对于 $\lambda=\varpi_1+\varpi_2$（伴随表示（ad $\mathfrak{h}$）），我们有

$$\Lambda(\varpi_1+\varpi_2)=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\ (i\neq j),0\},$$
$$f(\varpi_1+\varpi_2;Y)>2\sum_{1\leq i<j\leq 3}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)=2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=2\varpi_2$，我们有

$$\Lambda(2\varpi_2)=\{\varepsilon_i+\varepsilon_j-\varepsilon_k\ (\{i,j,k\}=\{1,2,3\}),\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\},$$
$$f(2\varpi_2;Y)>2\sum_{1\leq i<j\leq 3}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)=2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

在情形 $n=4$中，关于偏序 $\prec$，存在 4 个极小支配权：0、ϖ_1、ϖ_2、ϖ_3。



对于 $Y\in\mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{1\leq i<j\leq 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)=(3\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-3\varepsilon_4)(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1$，我们有 $\mathfrak{h}\simeq\pi_{\varpi_1}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}$。
对于 $\lambda=\varpi_2$，我们有 $\mathfrak{h}\simeq\pi_{\varpi_2}(\mathfrak{h})\simeq\mathfrak{so}_6=\mathfrak{g}$。

对于 $\lambda=\varpi_1+\varpi_3$（伴随表示（ad $\mathfrak{h}$））, 我们有

$$\Lambda(\varpi_1+\varpi_3)=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\ (i\neq j),0\},$$
$$f(\varpi_1+\varpi_3;Y)\geq 3\sum_{1\leq i<j\leq 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_2+\varpi_3$, 我们有

$$\Lambda(\varpi_2+\varpi_3)=\{\varepsilon_i+\varepsilon_j-\varepsilon_k\ (1\leq i,j,k\leq 4,\ i,j,k\ \text{distinct}),\varepsilon_i\ (1\leq i\leq 4)\}.$$

对于 $i,\ j(1\leq i<j\leq 4)$, $f(\varpi_2+\varpi_3;\ Y)$包含以下形式的项: $\varepsilon_i-\varepsilon_j$

$$(\varepsilon_i+\varepsilon_k-\varepsilon_l)-(\varepsilon_j+\varepsilon_k-\varepsilon_l),\quad(\varepsilon_k+\varepsilon_l-\varepsilon_j)-(\varepsilon_k+\varepsilon_l-\varepsilon_i),$$
$$(\varepsilon_i+\varepsilon_k-\varepsilon_j)-\varepsilon_k,\quad\varepsilon_k-(\varepsilon_j+\varepsilon_k-\varepsilon_i),\quad\varepsilon_i-\varepsilon_j.$$

此外, $f(\varpi_2+\varpi_3;\ Y)$包含以下形式的项: $2(\varepsilon_i-\varepsilon_j)$

$$(\varepsilon_i+\varepsilon_k-\varepsilon_j)-(\varepsilon_j+\varepsilon_k-\varepsilon_i).$$

于是我们有

$$f(\varpi_2+\varpi_3;Y)\geq 6\sum_{1\leq i<j\leq 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=2\varpi_1$, 我们有

$$\Lambda(2\varpi_1)=\{2\varepsilon_i\ (1\leq i\leq 4),\varepsilon_i+\varepsilon_j\ (1\leq i<j\leq 4)\}.$$

对于 $i,\ j(1\leq i<j\leq 4)$, $f(2\varpi_1;\ Y)$包含以下形式的项: $\varepsilon_i-\varepsilon_j$

$$(\varepsilon_i+\varepsilon_k)-(\varepsilon_j+\varepsilon_k),\quad 2\varepsilon_i-(\varepsilon_i+\varepsilon_j),\quad(\varepsilon_i+\varepsilon_j)-2\varepsilon_j.$$

此外, $f(2\varpi_1;\ Y)$包含以下形式的项 $2(\varepsilon_i-\varepsilon_j)$:

$$2\varepsilon_i-2\varepsilon_j.$$

于是我们有

$$f(2\varpi_1;Y)\geq 3\sum_{1\leq i<j\leq 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

在情形 $n\geq 5$ 下, 关于偏序 $\prec$, 存在 n 个极小支配权 $0,\ \varpi_1$、.....、 ϖ_{n-1}。根据 $\mathfrak{sl}_n$ 的 Dynkin 图的对称性, 对于$m(1\leq m\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$, 以 ϖ_{n-m} 为最小支配权的图中的支配权的计算, 与以 ϖ_m 为最小支配权的图中的支配权的计算类似。

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
(1,0,\dots,0,-1)=\varpi_1+\varpi_{n-1} & & \varpi_2+\varpi_{n-1}=(1,1,0,\dots,0,-1) \\
+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}\ \big| & & \big|\ +\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1} \\
0 & & \varpi_1=(1,0,\dots,0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\varpi_k \\
(2\leq k\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)
\end{array}$$

对于 $Y \in \mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{1\le i<j\le n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) = \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1)\varepsilon_i(Y).$$

对于 $\lambda = \varpi_1$，我们有 $\mathfrak{h} \simeq \pi_{\varpi_1}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$。
对于 $\lambda = \varpi_m (2 \le m \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$，我们有

$$\Lambda(\varpi_m) = \{\varepsilon_{i_1} + \cdots + \varepsilon_{i_m} \ (1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n)\}.$$

对于 $i,\ j (1 \le i < j \le 4)$，$f(\varpi_m; Y)$包含如下形式的项：$\varepsilon_i - \varepsilon_j$

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_{i_1} + \cdots + \varepsilon_{i_{m-1}}) - (\varepsilon_j + \varepsilon_{i_1} + \cdots + \varepsilon_{i_{m-1}})$$

其中 i_1，……，i_{m-1}与 $i,\ j$不同。由于对于 $i,\ j$，存在 $\binom{n-2}{m-1}$ 个这种形式的项以及其他正项，因此我们有

$$f(\varpi_m; Y) > \frac{1}{2}\binom{n-2}{m-1} \sum_{1\le i<j\le n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y).$$

当 $n \ge 6$和 $2 \le m \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$时，我们有 $\binom{n-2}{m-1} \ge 4$，且 $f(\varpi_m; Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

当 $n = 5$ 且 $m = 2$时，我们进行更为详细的计算。对于$i,\ j,\ k,\ l (1 \le i,\ j,\ k,\ l \le 5)$，以下形式的项出现在 $f(\varpi_2; Y)$ 中；

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_k) - (\varepsilon_j + \varepsilon_l)$$

如果它在 Y 处非负。那么我们有

$$f(\varpi_2; Y) \ge 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_5)(Y) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda = \varpi_1 + \varpi_{n-1}$，我们有

$$\Lambda(\varpi_1 + \varpi_{n-1}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \ (1 \le i < j \le n), 0\}.$$

对于 $i,\ j (1 \le i < j \le n)$，$f(\varpi_1 + \varpi_{n-1}; Y)$ 包含以下形式的项 $\varepsilon_i - \varepsilon_j$

$$(\varepsilon_i - \varepsilon_k) - (\varepsilon_j - \varepsilon_k), \quad (\varepsilon_k - \varepsilon_j) - (\varepsilon_k - \varepsilon_i),$$
$$(\varepsilon_i - \varepsilon_j) - 0, \quad 0 - (\varepsilon_j - \varepsilon_i).$$

于是我们有

$$f(\varpi_1 + \varpi_{n-1}; Y) > (n-1) \sum_{1\le i<j\le n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda = \varpi_2 + \varpi_{n-1}$，我们有

$$\Lambda(\varpi_2 + \varpi_{n-1}) = \{\varepsilon_i + \varepsilon_j - \varepsilon_k \ (i,j,k \text{ distinct}), \varepsilon_i \ (1 \le i \le n)\}.$$

对于 $i,\ j (1 \le i < j \le n)$，$f(\varpi_2 + \varpi_{n-1}; Y)$ 包含以下形式的项 $\varepsilon_i - \varepsilon_j$

$$(\varepsilon_i + \varepsilon_k - \varepsilon_l) - (\varepsilon_j + \varepsilon_k - \varepsilon_l).$$

于是我们有

$$f(\varpi_2 + \varpi_{n-1}; Y) > \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \sum_{1\le i<j\le n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

(ii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{2n+1} (n \geq 3)$。关于偏序 $\prec$，存在 2 个极小支配权 0、 ϖ_n。

$$\begin{array}{l} \vdots \\ (1,1,0,\dots,0) = \varpi_2 \\ \quad +\alpha_2 + \cdots + \alpha_n \,\big| \\ (1,0,\dots,0) = \varpi_1 \\ \quad +\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \,\big| \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \varpi_1 + \varpi_n = \frac{1}{2}(3,1,\dots,1) \\ \big| + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ \varpi_n = \frac{1}{2}(1,\dots,1) \end{array}$$

对于 $Y \in \mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i + \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i(Y).$$

对于 $\lambda = \varpi_1$，无需考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ 的情形。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n+1}$ 时，由命题 4.3 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}^\circ}$。

对于 $\lambda = \varpi_2$，我们有

$$\Lambda(\varpi_2) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leq i < j \leq n), \pm\varepsilon_i \ (1 \leq i \leq n), 0\}.$$

对于 i, $j (1 \leq i < j \leq n)$, $f(\varpi_2; Y)$ 包含以下形式的项 $\varepsilon_i - \varepsilon_j$

$$(\varepsilon_i \pm \varepsilon_k) - (\varepsilon_j \pm \varepsilon_k), \quad (-\varepsilon_j \pm \varepsilon_k) - (-\varepsilon_i \pm \varepsilon_k),$$

对于项 $\varepsilon_i + \varepsilon_j$，类似的结论也成立。此外， $f(\varpi_2; Y)$ 包含 th e 项 ε_i 具有以下形式

$$(\varepsilon_i \pm \varepsilon_k) - (\pm\varepsilon_k), \quad (\pm\varepsilon_k) - (-\varepsilon_i \pm \varepsilon_k).$$

于是我们有

$$\begin{aligned} f(\varpi_2; Y) &\geq 2(n-2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) \\ &\quad + 2(n-2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i + \varepsilon_j)(Y) + 2(n-1) \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i(Y) \\ &> 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y). \end{aligned}$$

对于 $\lambda = \varpi_n$，我们有

$$\Lambda(\varpi_n) = \left\{ \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \cdots \pm \varepsilon_n) \right\},$$

$$\begin{aligned} f(\varpi_n; Y) &> 2^{n-3} \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\varepsilon_i + \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i(Y) \right\} \\ &\geq 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y). \end{aligned}$$

当 $n \geq 4$ 时，我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}^\circ}$。当 $n = 3$ 时，可得 $2\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{g}^\circ}$。接下来我们考虑下一个支配权。

对于 $\lambda = \varpi_1 + \varpi_3$，我们有

$$\Lambda(\varpi_1 + \varpi_3) = \left\{ \pm\frac{3}{2}\varepsilon_i \pm \frac{1}{2}\varepsilon_j \pm \frac{1}{2}\varepsilon_k \ (\{i,j,k\} = \{1,2,3\}), \pm\frac{1}{2}\varepsilon_1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon_2 \pm \frac{1}{2}\varepsilon_3 \right\}.$$

对于 $i,\ j(1\le i<j\le 3)$，$f(\varpi_1+\varpi_3;\ Y)$ 包含以下形式的项 $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ 和 $2(\varepsilon_i-\varepsilon_j)$

$$\left(\frac{3}{2}\varepsilon_i+\frac{1}{2}\varepsilon_j\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\right)-\left(\frac{1}{2}\varepsilon_i+\frac{3}{2}\varepsilon_j\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\right),$$
$$\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_i-\frac{3}{2}\varepsilon_j\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\right)-\left(-\frac{3}{2}\varepsilon_i-\frac{1}{2}\varepsilon_j\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\right),$$
$$\left(\frac{3}{2}\varepsilon_i-\frac{1}{2}\varepsilon_j\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\right)-\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_i+\frac{3}{2}\varepsilon_j\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\right),$$

对于项 $\varepsilon_i+\varepsilon_j$、$2(\varepsilon_i+\varepsilon_j)$，类似的陈述也成立。此外，$f(\varpi_2;\ Y)$ 包含以下形式的项 $3\varepsilon_i$

$$\left(\frac{3}{2}\varepsilon_i\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\pm\frac{1}{2}\varepsilon_l\right)-\left(-\frac{3}{2}\varepsilon_i\pm\frac{1}{2}\varepsilon_k\pm\frac{1}{2}\varepsilon_l\right).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}f(\varpi_1+\varpi_3;Y)&\ge 4\sum_{1\le i<j\le n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+4\sum_{1\le i<j\le n}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)+6\sum_{1\le i\le n}\varepsilon_i(Y)\\&>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).\end{aligned}$$

(iii) $\mathfrak{h}=\mathfrak{sp}_n(n\ge 2)$。当 $n=2$ 时，关于偏序 $\prec$，存在 2 个极小支配权 0、ϖ_1。

$$\begin{array}{ccc}\vdots & & \\ (2,0)=2\varpi_1 & & \\ +\alpha_1\,\big|\, & & \vdots \\ (1,1)=\varpi_2 & & \varpi_1+\varpi_2=(2,1) \\ +\alpha_1+\alpha_2\,\big|\, & & \big|\,+\alpha_1+\alpha_2 \\ 0 & & \varpi_1=(1,0)\end{array}$$

对于 $Y\in\mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(Y)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(Y)+2\varepsilon_1(Y)+2\varepsilon_2(Y)=(4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1$，无需考虑 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_2$ 的情形。当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_4$ 时，由命题 4.3 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}\not\prec\rho_{\mathfrak{g}}$。

对于 $\lambda=\varpi_2$，我们有 $\mathfrak{h}\simeq\pi_{\varpi_2}(\mathfrak{h})=\mathfrak{so}_5$。无需考虑 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_5$ 的情形。当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_5$时，由命题 4.3 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

对于 $\lambda=2\varpi_1$（伴随表示（ad $\mathfrak{h}$）），我们有

$$\Lambda(2\varpi_1)=\{\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2,\pm 2\varepsilon_1,\pm 2\varepsilon_2,0\},$$
$$f(2\varpi_1;Y)\ge\frac{5}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(Y)+\frac{5}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(Y)+4\varepsilon_1(Y)+4\varepsilon_2(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1+\varpi_2$，我们有

$$\Lambda(\varpi_1+\varpi_2)=\{\pm 2\varepsilon_1\pm\varepsilon_2,\pm\varepsilon_1\pm 2\varepsilon_2,\pm\varepsilon_1,\pm\varepsilon_2\},$$
$$f(\varpi_1+\varpi_2;\ Y)\ge 4(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(Y)+4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(Y)+4\varepsilon_1(Y)+4\varepsilon_2(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)。$$

在 $n \geq 3$ 的情况下，关于偏序 $\prec$，存在 2 个极小支配权 0, ϖ_1。

$$\begin{array}{rr} (1,1,0,\dots,0) = \varpi_2 & \varpi_3 = (1,1,1,0,\dots,0) \\ +\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n \,\big| & \big| + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n \\ 0 & \varpi_1 = (1,0,\dots,0) \end{array}$$

对于 $Y \in \mathfrak{a}_+$，我们有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \sum_{1\leq i<j\leq n} (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1\leq i<j\leq n} (\varepsilon_i + \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1\leq i\leq n} 2\varepsilon_i(Y) \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} 2(n-i+1)\varepsilon_i(Y). \end{aligned}$$

对于 $\lambda = \varpi_1$，无需考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n$ 的情形。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ 时，由命题 4.3 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}} \not\prec \rho_{\mathfrak{g}}$。

对于 $\lambda = \varpi_2$，我们有

$$\begin{aligned} &\Lambda(\varpi_2) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leq i < j \leq n), 0\}, \\ &f(\varpi_2; Y) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} 3(\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1\leq i<j\leq n} 3(\varepsilon_i + \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1\leq i\leq n} 2(n-1)\varepsilon_i(Y) \\ &\qquad > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y). \end{aligned}$$

对于 $\lambda = \varpi_3$，我们有

$$\begin{aligned} &\Lambda(\varpi_3) = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \pm \varepsilon_k \ (1 \leq i,j,k \leq n, \ i,j,k \text{ distinct}), \pm\varepsilon_i \ (1 \leq i \leq n)\}, \\ &f(\varpi_3; Y) > \sum_{1\leq i<j\leq n} 2(n-2)(\varepsilon_i - \varepsilon_j)(Y) + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2(n-2)(\varepsilon_i + \varepsilon_j)(Y) \\ &\qquad\qquad + \sum_{1\leq i\leq n} 2(n-1)(n-2)\varepsilon_i(Y) \\ &\qquad \geq 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y). \end{aligned}$$

(iv) $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{2n} (n \geq 4)$. 在 $n = 4$ 的情况下，相对于偏序 $\prec$，存在 4 个极小支配权 0、ϖ_1、ϖ_{n-1}、ϖ_n。

$$\begin{array}{rr} (1,1,0,0) = \varpi_2 & \varpi_3 + \varpi_4 = (1,1,1,0) \\ +\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \,\big| & \big| + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 & \varpi_1 = (1,0,0,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \frac{1}{2}(3,1,1,-1) = \varpi_1 + \varpi_4 & \varpi_1 + \varpi_3 = \frac{1}{2}(3,1,1,1) \\ +\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \,\big| & \big| + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \\ \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \varpi_3 & \varpi_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1) \end{array}$$

对于 $Y\in\mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)=\sum_{1\le i\le 4}2(4-i)\varepsilon_i(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1$，无需考虑 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_8$ 的情形。当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_8$ 时，由命题 4.3 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}^{\circ}}$

对于 $\lambda=\varpi_2$，我们有

$$\Lambda(\varpi_2)=\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\ (1\le i<j\le 4),0\},$$

$$f(\varpi_2;Y)\ge 4\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+4\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_3$，ϖ_4，由命题 4.3 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{g}^{\circ}}$

对于 $\lambda=\varpi_3+\varpi_4$，我们有

$$\Lambda(\varpi_3+\varpi_4)\supset\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\pm\varepsilon_k\ (1\le i<j<k\le 4),\pm\varepsilon_i\ (1\le i\le 4)\},$$

$$f(\varpi_3+\varpi_4;Y)\ge 4\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+4\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1+\varpi_4$，我们有

$$\Lambda(\varpi_1+\varpi_4)\supset\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(-1)^{\nu_i}3}{2}\varepsilon_i+\dfrac{(-1)^{\nu_j}}{2}\varepsilon_j+\dfrac{(-1)^{\nu_k}}{2}\varepsilon_k+\dfrac{(-1)^{\nu_l}}{2}\varepsilon_l,\\ \{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\},\nu_i+\nu_j+\nu_k+\nu_l=1\mod 2\end{array}\right\},$$

$$f(\varpi_1+\varpi_4;Y)\ge 3\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+3\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1+\varpi_3$，通过与 $\lambda=\varpi_1+\varpi_4$ 情形相同的计算，我们有

$$f(\varpi_1+\varpi_3;Y)\ge 3\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+3\sum_{1\le i<j\le 4}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

在 $n\ge 5$ 的情形下，关于偏序 $\prec$，存在 4 个极小支配权 0、ϖ_1、ϖ_{n-1}、ϖ_n。

$$\begin{array}{ccc}&\vdots&\vdots\\ (1,1,0,\dots,0)=\varpi_2 & & \varpi_3=(1,1,1,0,\dots,0)\\ +\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n & & +\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+2\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n\\ 0 & & \varpi_1=(1,0,\dots,0)\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}\frac{1}{2}(1,\dots,1,1)=\ \varpi_{n-1}\ \vdots & & \vdots\ \varpi_n=\frac{1}{2}(1,\dots,1,-1)\end{array}$$

对于 $Y\in\mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=\sum_{1\le i<j\le n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+\sum_{1\le i<j\le n}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)=\sum_{1\le i\le n}2(n-i)\varepsilon_i(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1$，无需考虑 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n}$ 的情形。当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{2n}$ 时，由命题 4.3 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}^{\circ}}$

对于 $\lambda=\varpi_2$，我们有

$$\Lambda(\varpi_2)=\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\ (1\le i<j\le n),0\},$$

$$f(\varpi_2;Y) \geq (n-2)\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+(n-2)\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)$$
$$> 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_3$，我们有

$$\Lambda(\varpi_3)=\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\pm\varepsilon_k\ (1\leq i<j<k\leq n),\pm\varepsilon_i\ (1\leq i\leq n)\},$$
$$f(\varpi_3;Y) \geq (n-2)(n-3)\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)$$
$$+(n-2)(n-3)\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)$$
$$> 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_{n-1}$，我们有

$$\Lambda(\varpi_{n-1})\supset\left\{\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i\ \middle|\ \sum_{i=1}^n\nu_i\equiv 0 \mod 2\right\}.$$

对于 i，$j(1\leq i<j\leq n)$，$f(\varpi_{n-1};Y)$ 含有以下形式的项 $\varepsilon_i-\varepsilon_j$

$$\frac{1}{2}(\cdots+\varepsilon_i\cdots-\varepsilon_j\cdots)-\frac{1}{2}(\cdots-\varepsilon_i\cdots+\varepsilon_j\cdots),$$

对于项 $\varepsilon_i+\varepsilon_j$，也有类似的结论。因此我们有

$$f(\varpi_{n-1};Y)>2^{n-4}\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+2^{n-4}\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)\geq 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_n$，通过与 $\lambda=\varpi_{n-1}$ 情形相同的计算，我们有

$$f(\varpi_n;Y)>2^{n-4}\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(Y)+2^{n-4}\sum_{1\leq i<j\leq n}(\varepsilon_i+\varepsilon_j)(Y)\geq 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).$$

接下来，我们考虑 $\mathfrak{h}$ 属于例外型的情形。与经典情形不同，我们将 $\sum_{i=1}^k c_i\alpha_i$ 写作 $(c_1,\ldots,c_k)$。

(v) $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_2$。关于偏序 $\prec$，最小支配权只有 0。

$$\begin{array}{l}\vdots\\ \varpi_2=(3,2)\\ \quad\big|+\alpha_1+\alpha_2\\ \varpi_1=(2,1)\\ \quad\big|+2\alpha_1+\alpha_2\\ 0\end{array}$$

对于 $Y\in\mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=(10\alpha_1+6\alpha_2)(Y).$$

对于 $\lambda=\varpi_1$，当 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_7$ 时，我们有

$$\Lambda(\varpi_1)=\{\pm(2\alpha_1+\alpha_2),\pm(\alpha_1+\alpha_2),\pm\alpha_1,0\},$$
$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=(14\alpha_1+8\alpha_2)(Y).$$

因此可得 $2\rho_{\mathfrak{h}} \not\leq \rho_{\mathfrak{g}}$。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_7$ 时，我们有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = (36\alpha_1 + 20\alpha_2)(Y)$$

于是 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。

对于 $\lambda = \varpi_2$，这个不可约表示与 $\mathfrak{h}$ 的伴随表示重合，并且

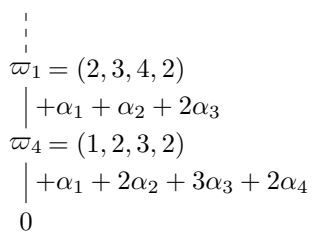
$$\begin{aligned}\Lambda(\varpi_2) &= \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) \cup \{0\} \\ &= \{\pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2), \pm(3\alpha_1 + \alpha_2), \pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, 0\}.\end{aligned}$$

假设 $\alpha_1(Y) \geq \alpha_2(Y)$。令 $\lambda_1 = -\lambda_{13} = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, $\lambda_2 = -\lambda_{12} = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$, $\lambda_3 = -\lambda_{11} = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda_4 = -\lambda_{10} = \alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda_5 = -\lambda_9 = \alpha_1$, $\lambda_6 = -\lambda_8 = \alpha_2$,$\lambda_7 = 0$。于是我们有

$$\begin{aligned}f(\varpi_2; Y) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 13 \\ \lambda_i + \lambda_j \neq 0}} (\lambda_i - \lambda_j)(Y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 13} (\lambda_i - \lambda_j)(Y) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 6} 2\lambda_i(Y) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 6} (14 - 2i)\lambda_i(Y) - \sum_{1 \leq i \leq 6} \lambda_i(Y) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 6} (13 - 2i)\lambda_i(Y) \\ &= \{11(3\alpha_1 + 2\alpha_2) + 9(3\alpha_1 + \alpha_2) + 7(2\alpha_1 + \alpha_2) + 5(\alpha_1 + \alpha_2) + 3\alpha_1 + \alpha_2\}(Y) \\ &= (82\alpha_1 + 44\alpha_2)(Y) \\ &> 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y).\end{aligned}$$

情形 $\alpha_1(Y) < \alpha_2(Y)$ 可以用同样的方法处理，从而得到 $f(\varpi_2; Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

(vi) $\mathfrak{h} = \mathfrak{f}_4$。关于偏序 $\prec$，最小支配权只有 0。



对于 $Y \in \mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = (16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4)(Y).$$

对于 $\lambda = \varpi_4$，我们有

$$\Lambda(\varpi_4) = \left\{ \begin{array}{c} \pm(1,2,3,2),\ \pm(1,2,3,1),\ \pm(1,2,2,1),\ \pm(1,1,2,1), \\ \pm(1,1,1,1),\ \pm(0,1,2,1),\ \pm(1,1,1,0),\ \pm(0,1,1,1), \\ \pm(0,1,1,0),\ \pm(0,0,1,1),\ \pm(0,0,1,0),\ \pm(0,0,0,1),\ 0 \end{array} \right\}.$$

通过直接计算可以看出，$f(\varpi_4; Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

(vii) $\mathfrak{h}=\mathfrak{e}_6$。关于偏序 $\prec$，存在 3 个极小支配权 0、 ϖ_1、 ϖ_6。由于 $\mathfrak{e}_6$ 的 Dynkin 图具有对称性，以 ϖ_6 为最小支配权的图中各支配权的计算，与以 ϖ_1 为最小支配权的图中各支配权的计算类似。

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ (1,2,2,3,2,1)= & \varpi_2 \\ +\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6 & | \\ & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vdots \\ \varpi_5=\frac{1}{3}(4,6,8,12,10,5) \\ \quad |+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6 \\ \varpi_1=\frac{1}{3}(4,3,5,6,4,2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \varpi_3=\frac{1}{3}(5,6,10,12,8,4) \\ \quad |+\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5 \\ \varpi_6=\frac{1}{3}(2,3,4,6,5,4) \end{array}$$

按照第 5.1 节的记号，我们可以如下计算。

$$\begin{aligned} &2\varepsilon_1=\alpha_2-\alpha_3,\quad 2\varepsilon_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad 2\varepsilon_3=\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\\ &2\varepsilon_4=\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5,\quad 2\varepsilon_5=\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+2\alpha_6,\\ &2(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6)=4\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3+6\alpha_4+4\alpha_5+2\alpha_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a})&=\{\varepsilon_j\pm\varepsilon_i\ (1\le i<j\le 5)\}\\ &\quad\cup\{\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6+\textstyle\sum_{i=1}^5(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i)\mid \sum_{i=1}^5\nu_i=0 \mod 2\}. \end{aligned}$$

对于 $Y\in\mathfrak{a}_+$，有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{h}}(Y)&=\left(\sum_{j=1}^5 2(j-1)\varepsilon_j+8(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6)\right)(Y)\\ &=(2\varepsilon_2+4\varepsilon_3+6\varepsilon_4+8\varepsilon_5+8(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6))(Y)\\ &=(16\alpha_1+22\alpha_2+30\alpha_3+42\alpha_4+30\alpha_5+16\alpha_6)(Y). \end{aligned}$$

对于 $\lambda=\varpi_1$， $\Lambda(\varpi_1)$ 包含以下权

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{3}(4,3,5,6,4,2),\ \tfrac{1}{3}(1,3,5,6,4,2),\ \tfrac{1}{3}(1,3,2,6,4,2),\ \tfrac{1}{3}(1,3,2,3,4,2),\\ &\tfrac{1}{3}(1,0,2,3,4,2),\ \tfrac{1}{3}(1,3,2,3,1,2),\ \tfrac{1}{3}(1,0,2,3,1,2),\ \tfrac{1}{3}(1,0,2,0,1,2),\\ &\tfrac{1}{3}(1,0,2,0,1,-1),\ \tfrac{1}{3}(1,0,-1,0,1,2),\ -\tfrac{1}{3}(2,0,1,0,-1,1),\ -\tfrac{1}{3}(-1,0,1,0,2,1),\\ &-\tfrac{1}{3}(2,0,1,0,2,1),\ -\tfrac{1}{3}(2,0,1,3,2,1),\ -\tfrac{1}{3}(2,3,1,3,2,1),\ -\tfrac{1}{3}(2,0,4,3,2,1),\\ &-\tfrac{1}{3}(2,3,4,3,2,1),\ -\tfrac{1}{3}(2,3,4,6,2,1),\ -\tfrac{1}{3}(2,3,4,6,5,1),\ -\tfrac{1}{3}(2,3,4,6,5,4). \end{aligned}$$

将这些权的差相加，可得 $f(\varpi_1;Y)>2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

对于 $\lambda=\varpi_2$，这个不可约表示与 $\mathfrak{h}$ 的伴随表示一致，并且

$$\Lambda(\varpi_2)=\Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a})\cup\{0\}.$$

通过对权之差求和，我们可以看到 $f(\varpi_2;\, Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

(viii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_7$。关于偏序 $\prec$，存在 2 个极小支配权 0、 ϖ_7 。

$$\begin{array}{r} \vdots \\ (2,2,3,4,3,2,1) = \varpi_1 \\ +2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7 \,\big|\, \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \varpi_2 = \frac{1}{2}(4,7,8,12,9,6,3) \\ \quad\big|\, +\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6 \\ \varpi_7 = \frac{1}{2}(2,3,4,6,5,4,3) \end{array}$$

沿用第 5.1 节的记号，我们可以如下计算。

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon_1 = \alpha_2-\alpha_3, \quad 2\varepsilon_2 = \alpha_2+\alpha_3, \quad 2\varepsilon_3 = \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\\
&2\varepsilon_4 = \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5, \quad 2\varepsilon_5 = \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+2\alpha_6,\\
&2\varepsilon_6 = \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+2\alpha_6+2\alpha_7,\\
&2(\varepsilon_8-\varepsilon_7) = 4\alpha_1+4\alpha_2+6\alpha_3+8\alpha_4+6\alpha_5+4\alpha_6+2\alpha_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^+(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) &= \{\varepsilon_j \pm \varepsilon_i \ (1 \le i < j \le 6)\} \cup \{\varepsilon_8-\varepsilon_7\}\\
&\quad \cup \{\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7+\textstyle\sum_{i=1}^6(-1)^{\nu_i}\varepsilon_i) \mid \sum_{i=1}^6 \nu_i = 1 \mod 2\}.
\end{aligned}$$

对于 $Y \in \mathfrak{a}_+$，我们有

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \left(\sum_{j=1}^6 2(j-1)\varepsilon_j + 17(\varepsilon_8-\varepsilon_7)\right)(Y)\\
&= (2\varepsilon_2+4\varepsilon_3+6\varepsilon_4+8\varepsilon_5+10\varepsilon_6+17(\varepsilon_8-\varepsilon_7))(Y)\\
&= (34\alpha_1+49\alpha_2+66\alpha_3+96\alpha_4+75\alpha_5+52\alpha_6+27\alpha_7)(Y).
\end{aligned}$$

对于 $\lambda = \varpi_1$，这个不可约表示与 $\mathfrak{h}$ 的伴随表示一致，并且

$$\Lambda(\varpi_1) = \Phi(\mathfrak{h},\mathfrak{a}) \cup \{0\}.$$

对各权之差求和，可知 $f(\varpi_1;\, Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。对于 $\lambda = \varpi_7$， $\Lambda(\varpi_7)$ 包含以下权

$$\begin{aligned}
&\pm\frac{1}{2}(2,3,4,6,5,4,3),\ \pm\frac{1}{2}(2,3,4,6,5,4,1),\ \pm\frac{1}{2}(2,3,4,6,5,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(2,3,4,6,3,2,1),\\
&\pm\frac{1}{2}(2,3,4,4,3,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(2,1,4,4,3,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(2,1,2,4,3,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(2,1,2,2,3,2,1),\\
&\pm\frac{1}{2}(2,1,2,2,1,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(2,1,2,2,1,0,1),\ \pm\frac{1}{2}(0,3,2,4,3,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(0,1,2,4,3,2,1),\\
&\pm\frac{1}{2}(0,1,2,2,3,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(0,1,2,2,1,2,1),\ \pm\frac{1}{2}(0,1,2,2,1,0,1),\ \pm\frac{1}{2}(0,1,0,2,1,0,1),\\
&\pm\frac{1}{2}(0,1,0,0,1,0,1).
\end{aligned}$$

对各权之差求和，可知 $f(\varpi_7;\, Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。

(viii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_8$。关于偏序 $\prec$，最小支配权只有 0。

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \varpi_8 = (2,3,4,6,5,4,3,2) \\ \quad \Big| +2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 \\ 0 \end{array}$$

对于 $\lambda = \varpi_8$，这个不可约表示与 $\mathfrak{h}$ 的伴随表示一致，并且

$$\Lambda(\varpi_8) = \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}) \cup \{0\}.$$

通过对各权之差求和，我们可以看到 $f(\varpi_8;\, Y) > 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)$。□

5.6. **命题 4.7 的证明**。

命题 *4.7* 的证明。直接蕴含，即 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 蕴含关于 n_i 的条件，是通过对 $\mathfrak{a}_+$ 中的一些元素进行显式计算得出的。反向蕴含的证明则通过对 r 进行归纳法完成。

(1) 设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}_{n_r})$。若成立 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$，考虑元素 $Y_1 = (1,0,\ldots,0,-1) \in \mathfrak{sl}_{n_1}$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_1) = 2(n_1 - 1), \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_1) = 2(n-1).$$

于是 $2n_1 \le n$ 成立。

当 $r \ge 2$ 时，考虑元素 $Y_2 = (1,0,\ldots,0,-1,\underbrace{1,0,\ldots,0,-1}_{n_1})\underbrace{\in}_{n_2}$ $\mathfrak{sl}_{n_1} \oplus \mathfrak{sl}_{n_2}$,

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_2) = 2(n_1 + n_2 - 2), \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_2) = 4(n-2).$$

于是我们有 $n_1 + n_2 \le n - 1$。因此，直接蕴含得证。

现在证明反向蕴含

$$(2n_1 \le n \text{ and } n_1 + n_2 \le n-1) \Rightarrow \rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}} \tag{5.3}$$

对 r进行归纳。

我们将 $\lambda_i\,(1 \le i \le n)$定义为将 $n_k - 2j_k + 1\,(1 \le j_k \le n_k, 1 \le k \le r)$和$n - \sum_{k=1}^{r} n_k$个零按降序排列所得的序列，并且 $\mu_i := n - 2i + 1\,(1 \le i \le n)$。类似地，对于一个元素 $Y = (a_{k,j})_{1 \le k \le r, 1 \le j_k \le n_k} \in \mathfrak{a}_+$，我们将实数 $c_i\,(1 \le i \le n)$定义为将$a_{k,j}$ 按降序排列所得的序列。

假设 $2n_1 \le n$ 和 $n_1 + n_2 \le n - 1$。

当 $r = 1$时，由假设 $2n_1 \le n$可知，

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{n_1} (n_1 - 2i + 1) a_{1,i} \le \sum_{i=1}^{n_1} |n_1 - 2i + 1||a_{1,i}| < \sum_{i=1}^{n_1} (n - n_1)|a_{1,i}| = \rho_{\mathfrak{q}}(Y)$$

当 $r = 2$ 时，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{n_1} (n_1 - 2i + 1) a_{1,i} + \sum_{j=1}^{n_2} (n_2 - 2j + 1) a_{2,j} \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i,$$

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{n} (n - 2i + 1) c_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i.$$

根据假设 $2n_1 \leq n$ 和 $n_1+n_2 \leq n-1$，以及 λ_i、μ_i 的定义，以下不等式成立

$$0 < 2\lambda_1 < \mu_1, \quad 0 \leq 2\lambda_i \leq \mu_i \ (2 \leq i \leq n')$$

其中，$n' := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 是小于或等于 $\frac{n}{2}$ 的最大整数。由于 $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$和 $\mu_i = -\mu_{n-i+1}$，因此我们有

$$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \leq \sum_{i=1}^{n'} 2\lambda_i(c_i - c_{n-i+1}) < \sum_{i=1}^{n'} \mu_i(c_i - c_{n-i+1}) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y).$$

当 $r=3$时，我们证明

$$\begin{aligned} &\text{there exists } i \ (1 \leq i \leq n') \text{ such that } 0 \leq \mu_i < 2\lambda_i \\ &\text{if and only if } n = n_1+n_2+n_3 \text{ and } n_1, n_2, n_3 \text{ are even.} \end{aligned} \tag{5.4}$$

如果 $n = n_1+n_2+n_3$ 和 n_1、n_2、n_3 都是偶数，我们可以看出 $n' = n/2$ 且 $2\lambda_{n/2} = 2 > 1 = \mu_{n/2}$。此外，对于 i （$1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1$），我们有 $0 \leq 2\lambda_i \leq \mu_i$。要证明（5.4）中“仅当”的部分，只需考虑 $n = n_1+n_2+n_3$ 且n_1、n_2、n_3中至少一个为奇数的情形。当 n_1、n_2、n_3 中恰有一个为奇数时，$\lambda_{n'-2} = 2$、$\lambda_{n'-1} = \lambda_{n'} = 1$且 $\mu_{n'-2} = 6$、$\mu_{n'-1} = 4$、$\mu_{n'} = 2$。当 n_1、n_2、n_3中恰有两个为奇数时，$\lambda_{n'-2} = 2$、$\lambda_{n'-1} = 1$、$\lambda_{n'} = 0$且 $\mu_{n'-2} = 5$、$\mu_{n'-1} = 3$、$\mu_{n'} = 1$。当n_1、n_2、n_3全为奇数时，$\lambda_{n'-2} = \lambda_{n'-1} = 2$、$\lambda_{n'} = 0$且 $\mu_{n'-2} = 6$、$\mu_{n'-1} = 4$、$\mu_{n'} = 2$。因此，$0 \leq 2\lambda_i \leq \mu_i$ （$i = n'-2$、$n'-1$、n'）在所有情形下都成立。我们取满足 $\lambda_{n'-3l} \leq n_3 - 1 \leq \lambda_{n'-3l-2}$的整数$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。由于

$$\lambda_{n'-3i-c} = \lambda_{n'-c} + 2i, \quad \mu_{n'-3i-c} = \mu_{n'-c} + 6i$$

对于 $c = 0,1,2$，我们有

$$0 \leq 2\lambda_k \leq \mu_k \ (0 \leq k \leq l).$$

对于剩余的 $\lambda_i \ (1 \leq i \leq n'-3l-3)$，我们可以将其写为 $\lambda_i = n_1 - 2j + 1$ or $n_2 - 2k + 1$，其中某个 $j (1 \leq j \leq \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor)$ 或 $k (1 \leq k \leq \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor)$。根据 (5.3) 的假设，并沿用 $r=2$ 情形下的相同论证，我们有

$$0 < 2\lambda_1 < \mu_1, \quad 0 \leq 2\lambda_i \leq \mu_i \ (2 \leq i \leq n'-3l-3).$$

这证明了等价关系 (5.4)。

除非 $n = n_1+n_2+n_3$ 和 n_1, n_2, n_3 都是偶数，否则我们有

$$\begin{aligned} 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &\leq 2\lambda_1(c_1 - c_n) + \sum_{i=2}^{n'} 2\lambda_i(c_i - c_{n-i+1}) \\ &< \mu_1(c_1 - c_n) + \sum_{i=2}^{n'} \mu_i(c_i - c_{n-i+1}) \\ &= \rho_{\mathfrak{g}}(Y). \end{aligned}$$

当 $n = n_1+n_2+n_3$ 和 n_1，n_2，n_3 均为偶数时，我们有 $2\lambda_{n'-1} = 2\lambda_{n'} = 2$、$\mu_{n'-1} = 3$、$\mu_{n'} = 1$，于是

$$\begin{aligned} &2\lambda_{n'-1}(c_{n'-1} - c_{n'+2}) + 2\lambda_{n'}(c_{n'} - c_{n'+1}) \\ &\leq \mu_{n'-1}(c_{n'-1} - c_{n'+2}) + \mu_{n'}(c_{n'} - c_{n'+1}). \end{aligned}$$

由于 $n' \geq 3$，因此

$$\begin{aligned}2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &\leq 2\lambda_1(c_1 - c_n) + \sum_{i=2}^{n'-2} 2\lambda_i(c_i - c_{n-i+1}) \\ &\quad + 2\lambda_{n'-1}(c_{n'-1} - c_{n'+2}) + 2\lambda_{n'}(c_{n'} - c_{n'+1}) \\ &< \mu_1(c_1 - c_n) + \sum_{i=2}^{n'-2} \mu_i(c_i - c_{n-i+1}) \\ &\quad + \mu_{n'-1}(c_{n'-1} - c_{n'+2}) + \mu_{n'}(c_{n'} - c_{n'+1}) \\ &= \rho_{\mathfrak{g}}(Y).\end{aligned}$$

对于 $r \geq 4$，我们证明命题 (5.3) 可归约为情形 $r-1$。~假设蕴含关系 (5.3) 对 $r-1$ 成立。我们设 $\mathfrak{h} := \mathfrak{sl}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sl}_{n_{r-2}} \oplus \mathfrak{sl}_{n_{r-1}+n_r} \subset \mathfrak{sl}_n$。

当 $n_1 \geq n_{r-1} + n_r$ 时，根据归纳假设，$2\rho_{\tilde{\mathfrak{h}}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，于是$2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。

设 $n_1 < n_{r-1} + n_r$。那么不等式 $2(n_{r-1} + n_r) \leq n$ 和 $n_1 + (n_{r-1} + n_r) \leq n-1$ 总是成立。因此，我们得到如上所述的 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。由此，我们证明了对任意 $r \geq 1$，蕴含关系 (5.3) 均成立。

接下来，我们确定所有见证向量。在 $r = 1$ 的情形下，当 $2n_1 = n+1$ 时，由 (5.3) 的证明可知，$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{q}}(Y)$ 成立当且仅当 $a_2 = \cdots = a_{n_1-1} = 0$。

当 $r \geq 2$ 时，我们将存在见证向量的情形分为以下三种情况：(i) $r = 2$, $2n_1 = n+1$ 和 $2n_2 = n-1$，(ii) $r = 2$ 和 $2n_1 = 2n_2 = n$，(iii) $r \geq 2$, $2n_1 = n+1$ 和 $2n_2 < n-1$。

由于 $n = n_1 + n_2$，情况 (i) 和 (ii) 已在命题 4.2 中讨论过。对于 (iii)，我们有 $2\lambda_1 = 2(n_1 - 1) = n - 1 = \mu_1$。根据上述相同的论证可知，$Y$ 是见证向量当且仅当 $Y = (a_1, 0, \ldots\ldots, 0, -a_1) \in \mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{sl}_{n_1}$。

(2) 令 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}_{n_r})$。若 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，考虑元素 $Y_1 = (1, 0, 0, \ldots\ldots, 0) \in \mathfrak{so}_{n_1}$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_1) = n_1 - 2, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_1) = n - 2.$$

于是 $2n_1 \leq n+1$ 成立。

现在我们证明反向蕴含

$$2n_1 \leq n+1 \Rightarrow \rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}} \tag{5.5}$$

对 r 进行归纳法证明。

令 $n' := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，且对 $k (1 \leq k \leq r)$ 有 $n_k' = \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor$。我们将 $n_k - 2j_k \, (1 \leq j_k \leq n_k')$, $1 \leq k \leq r$) 和 $n' - \sum_{k=1}^{r} n_k'$ 个零按降序排列，并将所得序列定义为实数 $\lambda_i \, (1 \leq i \leq n')$；同时，令 $\mu_i := n - 2i \, (1 \leq i \leq n')$。类似地，对于元素 $Y = (a_{k,j})_{1 \leq k \leq r,\ 1 \leq j \leq n_k'} \in \mathfrak{a}_+$，我们将 $a_{k,j}$ 和 $n' - \sum_{k=1}^{r} n_k'$ 个零按降序排列，并将所得序列定义为实数 $c_i \, (1 \leq i \leq n')$。

假设 $2n_1 \leq n+1$。

当 $r = 1$ 时，由假设 $2n_1 \leq n+1$，我们有

$$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{n_1'} 2(n_1 - 2i)a_i < \sum_{i=1}^{n_1'} (n - 2i)a_i = \rho_{\mathfrak{g}}(Y).$$

当 $r=2$ 时，由假设 $2n_1 \le n+1$ 可得 $2\lambda_1 < \mu_1, 2\lambda_i \le \mu_i$ $(2 \le i \le n')$。因此我们有

$$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \le 2\lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n'} 2\lambda_i c_i < \mu_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n'} \mu_i c_i = \rho_{\mathfrak{g}}(Y).$$

当 $r=3$ 时，根据假设 $2n_1 \le n+1$，我们有 $2\lambda_1 < \mu_1$。我们证明 $2\lambda_i \le \mu_i$ $(2 \le i \le n')$。首先注意到 $\mu_{n'} \ge 4$、$\mu_{n'-1} \ge 2$ 和 $\mu_{n'} \ge 0$。当所有 n_1，n_2，n_3 都是偶数时，$\lambda_{n'-2} = \lambda_{n'-1} = \lambda_{n'} = 0$。当 n_1，n_2，n_3 中恰有一个是奇数时，$\lambda_{n'-2} \le 1$，$\lambda_{n'-1} = \lambda_{n'} = 0$。当 n_1，n_2，n_3 中恰有两个是奇数时，$\lambda_{n'-2}$，$\lambda_{n'-1} \le 1$，$\lambda_{n'} = 0$。当所有 n_1，n_2，n_3 都是奇数时，$n' \ge {n_1}' + {n_2}' + {n_3}' + 1$ 因为

$$n \ge n_1 + n_2 + n_3 = 2({n_1}' + {n_2}' + {n_3}' + 1) + 1.$$

因此，可以看出 $\lambda_{n'-2}$，$\lambda_{n'-1} \le 1$，$\lambda_{n'} = 0$。无论如何，我们都有

$$0 \le 2\lambda_i \le \mu_i \ (i = n'-2, n'-1, n').$$

因此，按照 (1) 中的论证可知，$2\lambda_i \le \mu_i$ $(2 \le i \le n')$。于是我们有

$$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \le 2\lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n'} 2\lambda_i c_i < \mu_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n'} \mu_i c_i = \rho_{\mathfrak{g}}(Y).$$

对于 $r \ge 4$，我们证明命题 (5.5) 可归约到 $r-1$ 的情形。~假设蕴含关系 (5.5) 对 $r-1$ 成立。令 $\mathfrak{h} := \mathfrak{so}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}_{n_{r-2}} \oplus \mathfrak{so}_{n_{r-1}+n_r} \subset \mathfrak{so}_n$。

当根据归纳假设有 $n_1 \ge n_{r-1} + n_r$，$2\rho_{\tilde{\mathfrak{h}}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立时，那么$2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 也成立。

假设 $n_1 < n_{r-1} + n_r$。那么不等式 $2(n_{r-1} + n_r) \le n+1$ 总是成立。因此，我们有如上所述的 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。由此，我们证明了对于任意 $r \ge 1$，蕴含关系 (5.5) 均成立。

我们确定所有见证向量。在 $r=1$ 的情形下，当 $2n_1 = n+2$ 时，我们有 $2\lambda_1 = \mu_1$ and $2\lambda_i < \mu_i$ $(i \ge 2)$。于是，每个见证向量都具有 $(a_1, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{a}_+$ 的形式。这可由证明看出；对于任意 $r \ge 2$，同样的结论（$a_1 > 0$，其余均为 0）也成立。

(3) 设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sp}_2 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1)$。对于元素 $Y = (a_1, a_2, b, c) \in \mathfrak{a}_+$，我们假设 $a_2 \ge b \ge c$。于是有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = 4a_1 + 2a_2 + 2b + 2c, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y) = 8a_1 + 6a_2 + 4b + 2c.$$

因此，$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 成立当且仅当 $a_2 = b = c$。其他情形类似。

设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_3, \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1)$。对于元素 $Y = (a, b, c) \in \mathfrak{a}_+$，我们假设 $a \ge b \ge c$。于是有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = 2a + 2b + 2c, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y) = 6a + 4b + 2c.$$

因此，$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 成立，当且仅当 $a = b = c$。其他情况类似。

下文中，我们考虑除 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sp}_2 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{ap}_1), (\mathfrak{sp}_3, \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1)$ 以外的情况。

若 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，考虑元素 $Y_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{sp}_{n_1}$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_1) = 2n_1, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_1) = 2n.$$

于是 $2n_1 \le n-1$ 成立。

现在我们证明反向蕴含

$$2n_1 \leq n-1 \Rightarrow \rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{q}} \tag{5.6}$$

对 r使用归纳法。

我们将实数 λ_i $(1 \leq i \leq n)$定义为：将 $2(n_k - j_k + 1)$ $(1 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq r)$ 和 $n - \sum_{k=1}^{r} n_k$ 个零按降序排列所得的序列，并定义$\mu_i := 2(n-i+1)$ $(1 \leq i \leq n)$。类似地，对于元素 $Y = (a_{k,\ldots,j})_{1 \leq k \leq r, 1 \leq j \leq n_k} \in \mathfrak{a}_+$，我们将实数 c_i $(1 \leq i \leq n)$定义为：将$a_{k,j}$ 和$n - \sum_{k=1}^{r} n_k$ 个零按降序排列所得的序列。

设 $2n_1 \leq n-1$。

当 $r = 1$时，对于非零元素 $Y = (a_1, \ldots, a_{n_1}) \in \mathfrak{a}_+$，有

$$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{n_1} 2(n_1 - i + 1)a_i, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{n_1} 2(n-i+1)a_i$$

根据假设 $2n_1 \leq n-1$，则 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$成立。

当 $r = 2$ 时，由假设 $2n_1 \leq n-1$ 可得 $2\lambda_1 < \mu_1$，$2\lambda_i \leq \mu_i$ $(2 \leq i \leq n)$。因此我们有

$$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \leq 2\lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n} 2\lambda_i c_i < \mu_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i c_i = \rho_{\mathfrak{g}}(Y).$$

当 $r = 3$ 时，由假设 $2n_1 \leq n-1$，我们有 $2\lambda_1 < \mu_1$。令 $l_1 := n_1 - n_2$ 和 $l_2 := n_2 - n_3$，则

$$\lambda_i = \begin{cases} 2(n_1 - i + 1) & (1 \leq i \leq l_1), \\ 2(n_1 - l_1 - k + 1) & (i = l_1 + 2k - 1 \quad \text{for } 1 \leq k \leq l_2), \\ 2(n_2 - k + 1) & (i = l_1 + 2k \quad \text{for } 1 \leq k \leq l_2), \\ 2(n_1 - l_1 - l_2 - k + 1) & (i = l_1 + 2l_2 + 3k - 2 \quad \text{for } 1 \leq k \leq n_3), \\ 2(n_2 - l_2 - k + 1) & (i = l_1 + 2l_2 + 3k - 1 \quad \text{for } 1 \leq k \leq n_3), \\ 2(n_3 - k + 1) & (i = l_1 + 2l_2 + 3k \quad \text{for } 1 \leq k \leq n_3). \end{cases}$$

令 $m := n_1 + n_2 + n_3 = l_1 + 2l_2 + 3n_3$。注意到

$$\mu_m - 2\lambda_m = 2(n-m+1) - 4 = 2(n-m-1) \geq -2.$$

若 $2\lambda_m = \mu_m$，则我们有 $2\lambda_i \leq \mu_i$ $(2 \leq i \leq n)$，且

$$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \leq 2\lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n} 2\lambda_i c_i < \mu_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i c_i = \rho_{\mathfrak{g}}(Y).$$

若 $\mu_m - 2\lambda_m = -2$，则 $n = m = n_1 + n_2 + n_3$，从而可得

$$\mu_{m-1} - 2\lambda_{m-1} = 0, \quad \mu_{m-2} - 2\lambda_{m-2} = 2.$$

在这种情况下，当 $n \geq 4$ 时，我们有

$$\begin{aligned} 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &\leq 2\lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n-3} 2\lambda_i c_i + (2\lambda_{n-2}c_{n-2} + 2\lambda_{n-1}c_{n-1} + 2\lambda_n c_n) \\ &< \mu_1 c_1 + \sum_{i=2}^{n-3} \mu_i c_i + (\mu_{n-2}c_{n-2} + \mu_{n-1}c_{n-1} + \mu_n c_n) \\ &= \rho_{\mathfrak{g}}(Y). \end{aligned}$$

这里，我们在第二个不等式中使用了 $n \geq 4$。当 $n = 3$ 时，我们有 $n = m = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$，这不符合要求。

当 $r \geq 4$ 时，我们假设蕴含式 (5.6) 对 $r - 1$ 成立。我们令 $\mathfrak{h}' := \mathfrak{sp}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{sp}_{n_{r-2}} \oplus \mathfrak{sp}_{n_{r-1}+n_r} \subset \mathfrak{sp}_n$。

当 $n_1 \geq n_{r-1} + n_r$ 时，根据归纳假设，$2\rho_{\mathfrak{h}'} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，于是 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。

假设 $n_1 < n_{r-1} + n_r$。不等式 $2(n_{r-1} + n_r) \leq n - 1$ 不成立，当且仅当 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_{4p}, \mathfrak{sp}_p{}^{\oplus 4})$。若 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \neq (\mathfrak{sp}_{4p}, \mathfrak{sp}_p{}^{\oplus 4})$，则根据归纳假设有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。当 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_{4p}, \mathfrak{sp}_p{}^{\oplus 4})$ 时，像情形 $r = 3$ 中那样计算 $\mu_i - 2\lambda_i$，可以看出 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。

我们确定所有见证向量。在 $r = 1$ 的情形下，当 $2n_1 = n$ 时，由 (5.3) 的证明可知，$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{q}}(Y)$ 成立当且仅当 $a_2 = \cdots = a_{n_1} = 0$。这可由证明看出；对于 $r \geq 2$ 的情形，同样的结论（$a_1 > 0$，其余均为 0）也成立，但 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_4, \mathfrak{sp}_2 \oplus \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_1)$ 除外。□

5.7. **命题 4.9 的证明**。

命题 *4.9* 的证明。(1) 令 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}_{2p+q}, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{so}_q)$。设 $q > 1$。对于元素 $Y_0 = (1, 0, \ldots, 0, -1) \in \mathfrak{sl}_q$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_0) = 2(q-1), \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_0) = 2(2p+q-1).$$

若 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，则 $q \leq 2p$。如下面所述，在 $q = 1$的情况下，可得 $2\rho_{\mathfrak{h}} \equiv \rho_{\mathfrak{g}}$。

假设 $1 \leq q \leq 2p$。反向蕴含的证明 $1 < q \leq 2p \Rightarrow 2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 可分为两种情况：q 为奇数或偶数。对于元素 $Y = (a, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathfrak{a}_+$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p} 2(p-i+1)a_i + \sum_{i=1}^{q} (q-2i+1)b_i.$$

定义 $Y' = (c_1, \ldots, c_{2p+q})$，其中实数 $c_i (1 \leq i \leq 2p+q)$ 是将 $\pm a_j (1 \leq j \leq p)$ 和 $b_k (1 \leq k \leq q)$ 按降序排列后得到的，则

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{2p+q} (2p+q-2i+1)c_i.$$

我们定义函数 $\phi(X) = \phi(x_1, \ldots, x_{2p+q})$，其在 $\mathbb{R}^{2p+q}$ 上的定义如下

$$\phi(X) := \sum_{i=1}^{2p+q} (2p+q-2i+1)x_i.$$

对称群 $\mathfrak{S}_{2p+q}$ 通过置换各项作用于 $\mathbb{R}^{2p+q}$。我们注意到，对于任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p+q}$，$\phi(\sigma(Y)) \leq \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$，并且若 $\sigma(Y) = Y'$，则 $\phi(\sigma(Y)) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y$。(

i) Case $q = 2q' + 1$ o dd: 我们令 x_i 为 follows;

$$x_i = \begin{cases} b_i & (1 \leq i \leq q'), \\ a_{i-q'} & (q'+1 \leq i \leq p+q'), \\ b_{q'+1} & (i = p+q'+1), \\ -a_{2p+q'+2-i} & (p+q'+2 \leq i \leq 2p+q'+1), \\ b_{i-2p} & (2p+q'+2 \leq i \leq 2p+q). \end{cases}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y) \geq \phi(X) &= \sum_{i=1}^{p} 2(2p+q-2(q'+i)+1)a_i + \sum_{i=1}^{q'}(2p+q-2i+1)b_i \\ &\qquad + \sum_{i=q'+2}^{q}(2p+q-2(2p+i)+1)b_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} 4(p-i+1)a_i + \sum_{i=1}^{q'}(2p+q-2i+1)b_i \\ &\qquad + \sum_{i=q'+2}^{q}(-2p+q-2i+1)b_i.\end{aligned}$$

根据假设 $q \leq 2p$,

(5.7)

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &\geq \sum_{i=1}^{q'}\{(2p+q-2i+1)-2(q-2i+1)\}b_i \\ &\qquad + \sum_{i=q'+2}^{q}\{(-2p+q-2i+1)-2(q-2i+1)\}b_i \\ &= \sum_{i=1}^{q'}(2p-q+2i-1)(b_i - b_{q-i+1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{q'}(2i-1)(b_i - b_{q-i+1}).\end{aligned}$$

若 $b_1 - b_q > 0$, 则有 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。当 $b_1 = \cdots = b_q = 0$ 时, 令$x_i = a_i$, $x_{2p+q-i+1} = -a_i$ $(1 \leq i \leq p)$, 则有 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \phi(X)$, 并且

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \phi(X) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \\ &= \sum_{i=1}^{p} 2(2p+q-2i+1)a_i - \sum_{i=1}^{p} 4(p-i+1)a_i \\ &= 2(q-1)\sum_{i=1}^{p} a_i.\end{aligned}$$

因此, 若 $q \geq 2$, 则 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$; 若 $q = 1$, 则 $2\rho_{\mathfrak{h}} \equiv \rho_{\mathfrak{g}}$。

(ii) $q = 2q'$ 为偶数的情形: 不等式 $\rho_{\mathfrak{g}} < 2\rho_{\mathfrak{h}}$ 可用同样的方法证明。

设 $q = 2p+1$。我们证明, 元素 $Y = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_{2p+1}) \in \mathfrak{a}_+$ 是见证向量, 当且仅当 $b_1 = -b_{2p+1} > 0$ 且 $a_1 = \cdots = a_p = b_2 = \cdots = b_{2p} = 0$。根据不等式 (5.7), 我们有 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p}(2i-1)(b_i - b_{2p-i+2})$。如果 $b_2 - b_{2p} > 0$, 则 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。当 $b_2 - b_{2p} = b_3 - b_{2p-1} = \cdots =$

$b_p - b_{p+2} = 0$（即 $b_2 = \cdots = b_{2p}$），通过设定

$$x_i = \begin{cases} b_i & (i = 1), \\ a_{i-1} & (2 \le i \le p+1), \\ b_{i-p} & (p+2 \le i \le 3p), \\ -a_{4p+1-i} & (3p+1 \le i \le 4p), \\ b_{2p+1} & (i = 4p+1), \end{cases}$$

我们有如下不等式

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) \ge \phi(X) = 4p(b_1 - b_{2p+1}) + \sum_{i=1}^{p} 4(2p-i)a_i.$$

Thus

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \ge 4(p-1)\sum_{i=1}^{p} a_i.$$

若 $p \ge 2$ 且 $a_1 > 0$，则 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。剩下的情况是$b_2 = \cdots = b_{2p}$与（$p = 1$或 $a_1 = 0$）同时成立，这可分为两种情况：(A) $b_2 = \cdots = b_{2p}$、 $p > 1$且 $a_1 = 0$；(B) $b_2 = \cdots = b_{2p}$且 $p = 1$。

(A) 当 $b_2 = \cdots = b_{2p} \ge 0$时，令 $x_i = b_i\,(1 \le i \le 2p)$、 $x_i = 0\,(2p+1 \le i \le 4p)$且 $c_{4p+1} = b_{2p+1}$，我们有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \phi(X) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \\ &= \sum_{i=1}^{2p} 2(2p-i+1)b_i - 4pb_{2p+1} - \sum_{i=1}^{2p+1} 4(p-i+1)b_i \\ &= \sum_{i=1}^{2p} 2(i-1)b_i. \end{aligned}$$

因此，若 $b_2 = \cdots = b_{2p} > 0$，则 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。若 $b_2 = \cdots = b_{2p} = 0$，则$Y$是一个见证向量。

当 $b_2 = \cdots = b_{2p} < 0$时，通过设定 $x_1 = b_1$, $x_i = 0\,(2 \le i \le 2p+1)$和 $x_i = b_{i-2p}\,(2p+2 \le i \le 4p+1)$，我们得到

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= 4pb_1 + \sum_{i=2}^{2p+1} 2(1-i)b_i - \sum_{i=1}^{q} 4(p-i+1)b_i \\ &= \sum_{i=2}^{2p+1} 2(i-2p-1)b_i > 0. \end{aligned}$$

(B) 在此情况下，$(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}_5,\ \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sl}_3)$。此对包含在命题 4.2 (1) 中，其中 $p = q + 1$。

(2) 对于元素 $Y_0 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathfrak{so}_q$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_0) = q - 2, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_0) = 2p + q - 2.$$

若 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，则 $q \le 2p+1$。在 $q = 1$的情况下，如下文所述，可得 $2\rho_{\mathfrak{h}} \not< \rho_{\mathfrak{g}}$。

假设 $1 \le q \le 2p+1$。蕴含关系 $1 < q \le 2p+1 \Rightarrow 2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 的证明可以分为两种情况；(i) $q = 2q' + 1$ 为奇数，(ii) $q = 2q'$ 为偶数。

(i) $q = 2q' + 1 \geq 3$ 为奇数的情况：注意，根据假设，$q' \leq p$。对于元素 $Y = (a_1, \ldots\ldots, a_p, b_1, \ldots\ldots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+$，我们将 $\widetilde{a_i}$ 定义为对 $|a_1|, \ldots\ldots, |a_p|$ 按降序排列后得到的实数序列。于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \sum_{i=1}^{p}(p-2i+1)a_i + \sum_{i=1}^{q'}(q-2i)b_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}(p-2i+1)(\widetilde{a_{2i-1}} + \widetilde{a_{2i}}) + \sum_{i=1}^{q'}(q-2i)b_i.\end{aligned}$$

我们还将实数 c_i $(1 \leq i \leq 2p+q)$ 定义为由 $\pm a_j$ $(1 \leq j \leq p)$、$\pm b_k$ $(1 \leq k \leq q')$ 和 0 按降序排列所得的序列，然后

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{p+q'}(2p+q-2i)c_i.$$

与 (1) 的证明中一样，我们将 $\phi(X) = \phi(x_1, \ldots, x_{p+q'})$ 定义为 $\mathbb{R}^{p+q'}$ 上的函数，其定义为

$$\phi(X) := \sum_{i=1}^{p+q'}(2p+q-2i)x_i.$$

令 $x_{2i-1} = b_i$，$x_{2i} = \widetilde{a_i}$ $(1 \leq i \leq q')$ 和 $x_i = \widetilde{a_{i-q'}}$ $(q \leq i \leq p+q')$，

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y) &= \sum_{i=1}^{q'}\{2p+q-2(2i-1)\}c_{2i-1} + \sum_{i=1}^{q'}(2p+q-4i)c_{2i} \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{p-q'}\{2p+q-2(2q'+i)\}c_{2q'+i} \\ &\geq \phi(X) \\ &= \sum_{i=1}^{q'}(2p+q-4i+2)b_i + \sum_{i=1}^{q'}(2p+q-4i)\widetilde{a_i} + \sum_{i=q'+1}^{p}(2p-2i+1)\widetilde{a_i},\end{aligned}$$

并且我们有

$$\begin{aligned}&\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \\ &\quad \geq \sum_{i=1}^{q'}(2p+2-q)b_i + \sum_{2i-1 \leq q'}(q-4i+1)\widetilde{a_{2i-1}} + \sum_{2i \leq q'}(q-4i-1)\widetilde{a_{2i}} \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}\widetilde{a_{2i-1}} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}\widetilde{a_{2i}}.\end{aligned}$$

若 $b_1 > 0$，则有 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。当 $b_1 = 0$ 时，令 $x_i = \widetilde{a_i}$ $(1 \leq i \leq p)$ 和 $x_i = 0$ $(p+1 \leq i \leq p+q')$，

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \phi(X) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \\ &\geq \sum_{i=1}^{p}(2p+q-2i)\widetilde{a_i} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}2(p-2i+1)(\widetilde{a_{2i-1}} + \widetilde{a_{2i}})\end{aligned}$$

$$= \sum_{1\le 2i-1\le p} q\widetilde{a_{2i-1}} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor}(q-2)\widetilde{a_{2i}}$$

根据假设 $q \geq 3$，我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。

当 $q = 1$时，对于 $Y = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathfrak{sl}_p$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \geq \sum_{1\le 2i-1\le p} \widetilde{a_{2i-1}} - \sum_{1\le 2i\le p} \widetilde{a_{2i}}.$$

这表明，Y是见证向量，当且仅当 $\widetilde{a_{2i-1}} = \widetilde{a_{2i}}$ 且对于任意$(1 \leq i \leq \frac{p}{2})$都有 $a_i - a_{p-i+1} = \widetilde{a_{2i-1}} + \widetilde{a_{2i}}$，也就是说，对于任意$(1 \leq i \leq \frac{p}{2})$都有 $a_i = -a_{p-i+1}$。

(ii) $q = 2q'$ 为偶数的情形：不等式 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 可用相同的方法证明。

接下来，我们假设 $q = 2p + 2$。令 $x_{2i-1} = b_i$，$x_{2i} = \widetilde{a_i}$ $(1 \leq i \leq p)$和 $x_{2p+1} = b_{p+1}$，可得以下不等式；

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) \geq \phi(X) = \sum_{i=1}^{p+1} 4(p-i+1)b_i + \sum_{i=1}^{p} 2(2p-2i+1)\widetilde{a_i},$$

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \geq \sum_{2i-1\le p} 2(p-2i+2)\widetilde{a_{2i-1}} + \sum_{2i\le p} 2(p-2i)\widetilde{a_{2i}}.$$

由于 $\widetilde{a_1} > 0$，因此 $2(p-2i+2) \geq 2$, $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 成立。若 $a_1 = \cdots = a_p = 0$，则

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{p} 2(2p-i+1)b_i + 2p|b_{p+1}|,$$

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p} 2(i-1)b_i + 2p|b_{p+1}|.$$

这表明，Y 是见证向量，当且仅当 $b_1 > 0$ 和 $b_2 = \cdots = b_{p+1} = 0$。

(3) 对于元素 $Y_0 = (1,0,\ldots,0) \in \mathfrak{sp}_q$，我们有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_0) = 2q, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_0) = 2(p+q).$$

若 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，则 $q \leq p-1$。

我们假设 $q \leq p-1$。对于元素 $Y = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathfrak{a}_+$，我们按照 (2) 定义 $\widetilde{a_i}$ $(1 \leq i \leq p)$。于是

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{p}(p-2i+1)a_i + \sum_{j=1}^{p} 2(q-i+1)b_j$$

$$\leq \sum_{1\le i\le \lfloor \frac{p}{2}\rfloor} (p-2i+1)(\widetilde{a_{2i-1}} + \widetilde{a_{2i}}) + \sum_{i=1}^{q} 2(q-i+1)b_i.$$

我们还将实数 c_i $(1 \leq i \leq p+q)$ 定义为通过 $\mathfrak{b}$ 得到的序列 $\mathfrak{y}$ 将 $\widetilde{a_j}$ $(1 \leq j \leq p)$、b_k $(1 \leq k \leq q)$ 按降序排列，然后

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{p+q} 2(p+q-i+1)c_i.$$

与 (i) 或 (ii) 的证明一样，我们在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上定义函数 $\phi(X) = \phi(x_1, \ldots\ldots, x_{p+q})$，定义如下:

$$\phi(X) := \sum_{i=1}^{p+q} 2(p+q-i+1)x_i.$$

令 $x_{2i-1} = b_i, x_{2i} = \widetilde{a_i}\ (1 \le i \le q)$ 和 $x_i = \widetilde{a_{i-q}}\ (2q+1 \le i \le p+q)$，我们得到以下不等式

(5.8)

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\ge \phi(X)\\ &= \sum_{i=1}^{q} 2(p+q-2i+2)b_i + \sum_{i=1}^{q} 2(p+q-2i+1)\widetilde{a_i} + \sum_{i=q+1}^{p} 2(p-i+1)\widetilde{a_i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) \ge \sum_{i=1}^{q} 2(p-q)b_i + \sum_{2i-1\le q} 2(q-2i+2)\widetilde{a_{2i-1}}\\ + \sum_{2i\le q} 2(q-2i)\widetilde{a_{2i}} + \sum_{q+1\le 2i-1} 2\widetilde{a_{2i-1}}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

这意味着 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

在 $p = q$ 的情况下，由不等式 (5.8) 可知，如果 $a_1 > 0$，则 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) < \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。当 $a_1 = \ldots a_p = 0$ 时，我们可以看到

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \sum_{i=1}^{q} 2(i-1)b_i$$

根据 $c_i = b_i\ (1 \le i \le q)$。这意味着 Y 是见证向量，当且仅当 $b_1 > 0$ 和 $a_1 = \cdots = a_p = b_2 = \cdots = b_q = 0$。

(4) 元素 $Y_0 = (1,1,0,\ldots,0) \in \mathfrak{sp}_p$ 在 $\mathfrak{so}_{4p}$ 的一个内自同构下与 $(1,1,1,1,0,\ldots,0) \in \mathfrak{so}_{4p}$ 共轭，并且

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y_0) = 4p-2, \quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y_0) = 16p-20.$$

若 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，则 $p \ge 3$。假设 $p \ge 3$，并取一个元素 $Y = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathfrak{a}_+$。我们可以看出

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \sum_{i=1}^{p} 2(p-i+1)a_i,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &= \sum_{i=1}^{p} 2(2p-2i+1)a_i + \sum_{i=1}^{p} 2(2p-2i)a_i\\ &= \sum_{i=1}^{p} 2(4p-4i+1)a_i,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= \sum_{i=1}^{p} 2(2p-2i-1)a_i.\end{aligned}$$

那么，当 $p \ge 3$ 时，不等式 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。当 $p = 2$ 时，根据前一个等式，我们有 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y) - 2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = 2(a_1 - a_2)$。这意味着，$Y$ 是见证向量当且仅当 $a_1 = a_2$。□

5.8. **命题 4.10 的证明**。证明通过对每个 q 进行显式计算来完成。更确切地说，我们使用按照 §5.7 中定义的函数 ϕ，给出 $\rho_{\mathfrak{g}}$ 的下界估计。令 $q' := \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$

命题 4.10 的证明。(1) 设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}_{7+q}, \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{so}_q)$。设 $Y = (Y_1, Y_2) = (a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+$，也就是说，$Y_1 = (a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{g}_2$ 且 $Y_2 = (b_1, \ldots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{so}_q$。设 $\pi : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{so}_7$ 是 $\mathfrak{g}_2$ 的唯一 7维不可约表示。该表示中出现的权集 Λ 为 $\mathfrak{g}_2$

$$\Lambda = \{\pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm\alpha_1\} \cup \{0\}.$$

设 $\pm\widetilde{a_i}\ (1 \le i \le 3)$ 为 Y_1 相对于各权的取值，即

$$\widetilde{a_1} := (2\alpha_1 + \alpha_2)(Y_1), \quad \widetilde{a_2} := (\alpha_1 + \alpha_2)(Y_2), \quad \widetilde{a_3} := \alpha_1(Y_1).$$

令 $s = \lfloor \frac{q+7}{2} \rfloor$ 表示小于或等于 $\frac{q+7}{2}$ 的最大整数，并将实数 $c_i\ (1 \le i \le s)$ 定义为按降序排列 $\widetilde{a_j}\ (1 \le j \le 3)$、$b_k\ (1 \le k \le q')$（若 q 为奇数则还包括 0）所得的序列，则有

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + \sum_{i=1}^{q'} (q - 2i) b_i,$$

$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y) = \sum_{i=1}^{s} (q + 7 - 2i) c_i.$$

我们还在 $\mathbb{R}^s$ 上定义函数 $\phi(X) = \phi(x_1, \ldots, x_s)$，其定义为

$$\phi(X) := \sum_{i=1}^{s} (q + 7 - 2i) x_i.$$

再次注意，对于任意 $\sigma \in \mathfrak{S}_s$，都有 $\phi(\sigma(Y)) \le \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。

下面列出每个 $2 \le q \le 9$ 对应的 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 的下界估计。

当 $q = 2$ 时，我们令 $(x_1, \ldots, x_4) = (\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3}, 0)$。于是有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1), \\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\ge \phi(X) \\ &= 7\widetilde{a_1} + 5\widetilde{a_2} + 3\widetilde{a_3} \\ &= (22\alpha_1 + 12\alpha_2)(Y_1). \end{aligned}$$

我们可以看出，当且仅当 $\alpha_1(Y_1) = 0$，即 $a_1 = a_2$ 时，$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。

当 $q = 3$ 时，我们令 $(x_1, \ldots, x_5) = (\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, b_1, \widetilde{a_3}, 0)$。于是有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + b_1, \\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\ge \phi(X) \\ &= 8\widetilde{a_1} + 6\widetilde{a_2} + 2\widetilde{a_3} + 4b_1 \\ &= (24\alpha_1 + 14\alpha_2)(Y_1) + 4b_1. \end{aligned}$$

于是我们得到 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 4$ 时，我们令 $(x_1, \ldots, x_5) = (\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, b_1, \widetilde{a_3}, |b_2|)$。于是我们有

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + 2b_1, \\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\ge \phi(X) \\ &= 9\widetilde{a_1} + 7\widetilde{a_2} + 3\widetilde{a_3} + 5b_1 + |b_2| \\ &= (28\alpha_1 + 16\alpha_2)(Y_1) + 5b_1 + |b_2|. \end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 5$ 时，我们令 $(x_1, \dots, x_6) = (\widetilde{a_1}, b_1, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3}, b_2, 0)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + 3b_1 + b_2,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 10\widetilde{a_1} + 6\widetilde{a_2} + 4\widetilde{a_3} + 8b_1 + 2b_2\\ &= (30\alpha_1 + 16\alpha_2)(Y_1) + 8b_1 + 2b_2.\end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 6$ 时，我们令 $(x_1, \dots, x_6) = (\widetilde{a_1}, b_1, \widetilde{a_2}, b_2, \widetilde{a_3}, |b_3|)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + 4b_1 + 2b_2,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 11\widetilde{a_1} + 7\widetilde{a_2} + 3\widetilde{a_3} + 9b_1 + 5b_2 + |b_3|\\ &= (32\alpha_1 + 18\alpha_2)(Y_1) + 9b_1 + 5b_2 + |b_3|.\end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 7$ 时，我们令 $(x_1, \dots, x_7) = (b_1, \widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, b_2, \widetilde{a_3}, b_3, 0)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + 5b_1 + 3b_2 + b_3,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 10\widetilde{a_1} + 7\widetilde{a_2} + 3\widetilde{a_3} + 12b_1 + 6b_2 + 2b_3\\ &= (32\alpha_1 + 18\alpha_2)(Y_1) + 12b_1 + 6b_2 + 2b_3.\end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 8$ 时，我们设 $(x_1, \dots, x_7) = (b_1, \widetilde{a_1}, b_2, \widetilde{a_2}, b_3, \widetilde{a_3}, |b_4|)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + 6b_1 + 4b_2 + 2b_3,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 11\widetilde{a_1} + 7\widetilde{a_2} + 3\widetilde{a_3} + 13b_1 + 9b_2 + 5b_3 + |b_4|\\ &= (32\alpha_1 + 18\alpha_2)(Y_1) + 13b_1 + 9b_2 + 5b_3 + |b_4|.\end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 9$ 时，我们设 $(x_1, \dots, x_8) = (b_1, \widetilde{a_1}, b_2, \widetilde{a_2}, b_3, \widetilde{a_3}, 0)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= (10\alpha_1 + 6\alpha_2)(Y_1) + 7b_1 + 5b_2 + 3b_3 + b_4,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 12\widetilde{a_1} + 8\widetilde{a_2} + 4\widetilde{a_3} + 14b_1 + 10b_2 + 6b_3 + 2b_4\\ &= (36\alpha_1 + 20\alpha_2)(Y_1) + 14b_1 + 10b_2 + 6b_3 + 2b_4.\end{aligned}$$

我们可以看到，$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 当且仅当 $Y_1 = 0$，即 $a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$。

(2) 令 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}_{8+q}, \mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{so}_q)$。令 $Y = (Y_1, Y_2) = (a_1, a_2, a_3, b_1, \dots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+$，即 $Y_1 = (a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{so}_7$ 以及 $Y_2 = (b_1, \dots, b_{q'}) \in \mathfrak{a}_+ \cap \mathfrak{so}_{q'}$。令 $\pi\colon \mathfrak{so}_7 \to \mathfrak{so}_8$ 为 $\mathfrak{so}_7$的旋量表示。该表示中出现的权集为

$$\Lambda = \left\{ \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3) \right\}.$$

令 $\pm\widetilde{a_i}\,(1\le i\le 4)$ 表示 Y_1 相对于权的取值，即

$$\widetilde{a_1}:=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3),\qquad \widetilde{a_2}:=\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_3),$$
$$\widetilde{a_3}:=\frac{1}{2}(a_1-a_2+a_3),\qquad \widetilde{a_4}:=\frac{1}{2}(-a_1+a_2+a_3).$$

我们将实数 $c_i\,(1\le i\le q+8)$ 定义为将 $\pm\widetilde{a_j}\,(1\le j\le 4)$、$\pm b_k\,(1\le k\le q')$ 按降序排列后得到的序列，然后

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=5a_1+3a_2+a_3+\sum_{i=1}^{q'}(q-2i)b_i,$$
$$\rho_{\mathfrak{g}}(Y)=\sum_{i=1}^{q'+4}(q+8-2i)c_i.$$

我们还定义函数 $\phi(X)=\phi(x_1,\ldots,x_{q'+4})$，其定义在 $\mathbb{R}^{q'+4}$ 上:

$$\phi(X):=\sum_{i=1}^{q'+4}(q+8-2i)x_i.$$

下面列出每个 $3\le q\le 10$ 对应的 $\rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 的下界估计。

当 $q=3$ 时，我们令 $(x_1,\ldots,x_5)=(\widetilde{a_1},\widetilde{a_2},\widetilde{a_3},b_1,\widetilde{a_4})$。于是有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y)&=5a_1+3a_2+a_3+b_1,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y)&\ge\phi(X)\\ &=9\widetilde{a_1}+7\widetilde{a_2}+5\widetilde{a_3}+3b_1+\widetilde{a_4}\\ &=10a_1+6a_2+4a_3+3b_1.\end{aligned}$$

当 $a_3>0$ 或 $b_1>0$ 时，有 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)<\rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。当 $a_3=b_1=0$ 时，

$$\rho_{\mathfrak{h}}(Y)=5a_1+3a_2,\quad \rho_{\mathfrak{g}}(Y)=12a_1+4a_2.$$

因此，当 $a_1>a_2$ 时，我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)<\rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。见证向量由形如（$a_1$，$a_1$，0，0）的元素穷尽。

当 $q=4$ 时，我们令（$x_1,\ldots,x_6$）$=(\widetilde{a_1},\widetilde{a_2},b_1,\widetilde{a_3},\widetilde{a_4},b_2)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y)&=5a_1+3a_2+a_3+2b_1,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y)&\ge\phi(X)\\ &=10\widetilde{a_1}+8\widetilde{a_2}+4\widetilde{a_3}+2\widetilde{a_4}+6b_1\\ &=10a_1+8a_2+4a_3+6b_1.\end{aligned}$$

当 $a_2>0$ 或 $b_1>0$ 时，则 $2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)<\rho_{\mathfrak{g}}(Y)$。当 $a_2=a_3=b_1=b_2=0$ 且 $a_1>0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{g}}(Y)&=10\widetilde{a_1}+8\widetilde{a_2}+6\widetilde{a_3}+4|\widetilde{a_4}|=14a_1,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y)-2\rho_{\mathfrak{h}}(Y)&=4a_1>0.\end{aligned}$$

当 $q=5$ 时，我们令 $(x_1,\ldots,x_6)=(\widetilde{a_1},\widetilde{a_2},b_1,\widetilde{a_3},b_2,\widetilde{a_4})$. 于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y)&=5a_1+3a_2+a_3+3b_1+b_2,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y)&\ge\phi(X)\\ &=11\widetilde{a_1}+9\widetilde{a_2}+5\widetilde{a_3}+\widetilde{a_4}+7b_1+3b_2\\ &=12a_1+8a_2+4a_3+7b_1+3b_2.\end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 6$ 时，我们设 $(x_1, \dots, x_7) = (\widetilde{a_1}, b_1, \widetilde{a_2}, \widetilde{a_3}, b_2, \widetilde{a_4}, b_3)$. 于是有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= 5a_1 + 3a_2 + a_3 + 4b_1 + 2b_2,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 12\widetilde{a_1} + 8\widetilde{a_2} + 6\widetilde{a_3} + 2\widetilde{a_4} + 10b_1 + 4b_2\\ &= 12a_1 + 8a_2 + 6a_3 + 10b_1 + 4b_2.\end{aligned}$$

于是有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 7$ 时，我们设 $(x_1, \dots, x_7) = (\widetilde{a_1}, b_1, \widetilde{a_2}, b_2, \widetilde{a_3}, b_3, \widetilde{a_4})$. 于是有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= 5a_1 + 3a_2 + a_3 + 5b_1 + 3b_2 + b_3,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 13\widetilde{a_1} + 9\widetilde{a_2} + 5\widetilde{a_3} + \widetilde{a_4} + 11b_1 + 7b_2 + 3b_3\\ &= 13a_1 + 9a_2 + 5a_3 + 11b_1 + 7b_2 + 3b_3.\end{aligned}$$

于是有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 8$ 时，我们设 $(x_1, \dots, x_8) = (b_1, \widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, b_2, \widetilde{a_3}, b_3, \widetilde{a_4}, b_4)$. 于是有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= 5a_1 + 3a_2 + a_3 + 6b_1 + 4b_2 + 2b_3,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 12\widetilde{a_1} + 10\widetilde{a_2} + 6\widetilde{a_3} + 2\widetilde{a_4} + 14b_1 + 8b_2 + 4b_3\\ &= 13a_1 + 9a_2 + 5a_3 + 14b_1 + 8b_2 + 4b_3.\end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 9$ 时，我们设 $(x_1, \dots, x_8) = (b_1, \widetilde{a_1}, b_2, \widetilde{a_2}, b_3, \widetilde{a_3}, b_4, \widetilde{a_4})$。 于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= 5a_1 + 3a_2 + a_3 + 7b_1 + 5b_2 + 3b_3 + b_4,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 13\widetilde{a_1} + 9\widetilde{a_2} + 5\widetilde{a_3} + \widetilde{a_4} + 15b_1 + 11b_2 + 7b_3 + 3b_4\\ &= 13a_1 + 9a_2 + 5a_3 + 15b_1 + 11b_2 + 7b_3 + 3b_4.\end{aligned}$$

于是我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $q = 10$ 时，我们设 $(x_1, \dots, x_9) = (b_1, b_2, \widetilde{a_1}, b_3, \widetilde{a_2}, b_4, \widetilde{a_3}, \widetilde{a_4}, b_5)$。 于是我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\mathfrak{h}}(Y) &= 5a_1 + 3a_2 + a_3 + 8b_1 + 6b_2 + 4b_3 + 2b_4,\\ \rho_{\mathfrak{g}}(Y) &\geq \phi(X)\\ &= 12\widetilde{a_1} + 8\widetilde{a_2} + 4\widetilde{a_3} + 2\widetilde{a_4} + 16b_1 + 14b_2 + 10b_3 + 6b_4\\ &= 11a_1 + 9a_2 + 5a_3 + 16b_1 + 14b_2 + 10b_3 + 6b_4.\end{aligned}$$

我们可以看出，$2\rho_{\mathfrak{h}}(Y) = \rho_{\mathfrak{g}}(Y)$ 当且仅当 $b_1 > 0$ 且 $a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$。 □

5.9. **命题 4.11 的证明**。

证明。 (1) 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{p+q} \supset \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_q \supset \mathfrak{h}$。我们证明，在断言 (b) 所述的三种情形下，$2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 均不成立。当 $p = q + 1$ 且 $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{sl}_p$ 时，元素 $Y_0 = (1, 0, \dots, 0, -1) \in \mathfrak{sl}_p$ 是一个见证向量。对于另外两种情形，命题 4.2、4.9 已经证明 $2\rho_{\mathfrak{h}} < \rho_{\mathfrak{g}}$ 不成立。

假设不等式 $2\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。为了完成该命题的证明，我们证明

$$\left(\begin{array}{c}\text{neither } p=q+1 \text{ and } \mathfrak{h}\supset\mathfrak{sl}_p;\ \text{nor}\\ p=q \text{ and } \mathfrak{h}=\mathfrak{sl}_p\oplus\mathfrak{sl}_q;\ \text{nor}\\ p \text{ is even},\ q=1 \text{ and } \mathfrak{sp}_{p/2}.\end{array}\right)\Rightarrow \rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}.$$

从现在起，我们假设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 并非上述情形之一，且满足 $2\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}}$。

首先，考虑 $\mathfrak{h}$ 包含 $\mathfrak{sl}_p$的情形。在这种情况下，根据假设 $2\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}}$，我们只需考虑 $p \leq q+1$的情形。由于 $p=q+1$的情形已被排除，因此只剩下 $p=q$ 的情形。我们将 $\mathfrak{h}=\mathfrak{sl}_p\oplus\mathfrak{h}_2$ 写作 $\mathfrak{h}_2\subsetneq\mathfrak{sl}_p$。这可分为三种情形：(i) $\mathfrak{h}_2$ 是单李代数，并在 $\mathbb{C}^p$上不可约地作用；(ii) $\mathfrak{h}_2$ 是非单李代数，并在 $\mathbb{C}^p$上不可约地作用；(iii) $\mathfrak{h}_2$ 在 $\mathbb{C}^p$上可约地作用。

(i) 当 $p=q$ 为偶数且 $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{sp}_{p/2}$时，根据命题 4.9 可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。在其余情形下，根据命题 4.6 和引理 4.12，可知 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$成立。

(ii) 由定理 4.15 可将问题归结为命题 4.4，于是有 $2\rho_{\mathfrak{h}_2}<\rho_{\mathfrak{sl}_p}$。引理 4.12 蕴含 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。

(iii) 存在正整数 p_1,p_2，使得 $p=p_1+p_2$ 且 $\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{sl}_{p_1}\oplus\mathfrak{sl}_{p_2}$。令 $\tilde{\mathfrak{h}}:=\mathfrak{sl}_p\oplus\mathfrak{sl}_{p_1}\oplus\mathfrak{sl}_{p_2}$。由命题 4.7 可知 $\rho_{\tilde{\mathfrak{h}}}<\rho_{\mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{h}}}$ 成立，因此有$2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

接下来，我们考虑 $\mathfrak{h}$ 不包含 $\mathfrak{sl}_p$ 的情形。当 $\mathfrak{h}\simeq\Delta\mathfrak{sl}_p$ 时，直接计算可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。当 $\mathfrak{h}\not\simeq\Delta\mathfrak{sl}_p$ 时，令 $\mathfrak{h}':=\mathfrak{h}+\mathfrak{sl}_q=\mathfrak{h}_1'\oplus\mathfrak{sl}_q$。根据假设，$\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}^p$上不可约地作用，因此 $\mathfrak{h}_1'$ 在 $\mathbb{C}^p$ 上也不可约地作用。根据 $\mathfrak{h}_1'$ 是单还是非单，我们重复上述论证，得到 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

(2) 设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{p+q}\supset\mathfrak{so}_p\oplus\mathfrak{so}_q\supset\mathfrak{h}$。我们在断言 (b) 中所述的三种情形下证明 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 不成立。当 $p=q+2$ 和 $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}_p\oplus\mathfrak{h}_2$ 时，元素 $Y=(1,0,\ldots,0)\in\mathfrak{so}_p$ 是一个见证向量。对于另外两种情形，命题 4.10 中已经证明了这一点：当 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{so}_9,\mathfrak{g}_2)$ 或 $(\mathfrak{so}_{11},\mathfrak{so}_7\oplus\mathfrak{so}_3)$ 时。特别地，当 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{so}_{11},\mathfrak{so}_7\oplus\mathfrak{h}_2)$ 且 $\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{so}_3$ 时，我们可以在 $\mathfrak{so}_7$ 中取一个见证向量。

假设不等式 $2\rho_{\mathfrak{h}} \leq \rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。为了完成该命题的证明，我们证明

$$\left(\begin{array}{c}\text{neither } p=q+2 \text{ and } \mathfrak{h}\supset\mathfrak{so}_p;\ \text{nor}\\ p=7,q=2 \text{ and } \mathfrak{h}=\mathfrak{g}_2;\ \text{nor}\\ p=8,q=3 \text{ and } \mathfrak{h}\supset\mathfrak{so}_7.\end{array}\right)\Rightarrow \rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}.$$

从现在起，我们假设 $(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ 不属于这些情况，并考虑 $2\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立的情形。

首先，我们考虑 $\mathfrak{h}$ 包含 $\mathfrak{so}_p$的情形。在这种情况下，根据假设 $2\rho_{\mathfrak{h}}\leq\rho_{\mathfrak{g}}$，我们只需考虑情形 $p\leq q+2$。由于情形 $p=q+2$已被排除，只剩下情形 $p\leq q+1$。对于包含 $\mathfrak{h}$的李代数 $\mathfrak{h}:=\mathfrak{so}_p\oplus\mathfrak{so}_q$，根据命题 4.2，我们有 $\rho_{\tilde{\mathfrak{h}}}<\rho_{\tilde{\mathfrak{q}}}$。因此，$\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}$ 成立。

接下来，我们考虑 $\mathfrak{h}$ 不包含 $\mathfrak{so}_p$的情形。当 $\mathfrak{h}\simeq\Delta\mathfrak{so}_p$时，通过直接计算可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。当 $\mathfrak{h}\not\simeq\Delta\mathfrak{so}_p$时，我们设 $\mathfrak{h}':=\mathfrak{h}+\mathfrak{so}_q=\mathfrak{h}_1'\oplus\mathfrak{so}_q$。这可分为两种情形：(i) $\mathfrak{h}_1'$ 是单的，并且在$\mathbb{C}^p$上不可约地作用；(ii) $\mathfrak{h}_1'$ 是非单的，并且在 $\mathbb{C}^p$上不可约地作用。

(i) 当 $p=7$ 和 $\mathfrak{h}_1'=\mathfrak{g}_2$时，命题 4.10 已证明， $2\rho_{\mathfrak{h}'}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 当且仅当 $3\le q\le 8$。若 $3\le q\,(\le p=7)$，则 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。情形 $q=2$ 已被排除。

当 $p=8$ 和 $\mathfrak{h}_1'=\mathfrak{so}_7$ 时，命题 4.10 表明，$2\rho_{\mathfrak{h}'}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 当且仅当 $4\le q\le 9$。若 $4\le q$ （$\le p=8$），则 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。情形 $q\le 2$ 已由假设 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 排除。

在剩余情形下，根据命题 4.6 和引理 4.12，我们有 $2\rho_{\mathfrak{h}'}<\rho_{\mathfrak{g}}$，进而有 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

（ii）定理 4.15 和命题 4.4 蕴含，当 $\mathfrak{h}_1'\not\simeq\mathfrak{sp}_2\oplus\mathfrak{sp}_1$ 时，$2\rho_{\mathfrak{h}'}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。当 $\mathfrak{h}_1'=\mathfrak{sp}_2\oplus\mathfrak{sp}_1$ 时，由下面的引理可知 $2\rho_{\mathfrak{h}'}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立，特别地， $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。

引理 5.1。令 $q\le 8$ 和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{8+q}\supset\mathfrak{so}_8\oplus\mathfrak{so}_q\supset\mathfrak{k}:=\mathfrak{sp}_2\oplus\mathfrak{sp}_1\oplus\mathfrak{so}_q$。则$2\rho_{\mathfrak{k}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

(3) 令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{p+q}\supset\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{sp}_q\supset\mathfrak{h}$。当 $\mathfrak{h}$ 包含 $\mathfrak{sp}_p$时，根据假设 $2\rho_{\mathfrak{h}}\le\rho_{\mathfrak{g}}$，我们必须考虑 $p=q$ 的情形。在此情形下，可以看出元素$Y_0=(a_1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)\in\mathfrak{sp}_p$是见证向量，因此有 $2\rho_{\mathfrak{h}}\not<\rho_{\mathfrak{g}}$。

为了完成该陈述的证明，我们证明

$$\mathfrak{h}\not\supset\mathfrak{sp}_p\Rightarrow\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{q}}.$$

从现在起，我们假设 $\mathfrak{h}$ 不包含$\mathfrak{sp}_p$。

当 $p\ge q+1$时，我们设 $\mathfrak{h}':=\mathfrak{h}+\mathfrak{sp}_q=\mathfrak{h}_1'\oplus\mathfrak{sp}_q$。如果 $\mathfrak{h}_1'$ 是一个除$\mathfrak{sp}_p$ 之外、在 $\mathbb{C}^{2p}$上不可约地作用的单李代数，则由命题 4.6可知$2\rho_{\mathfrak{h}_1'}<\rho_{\mathfrak{g}}$。根据引理 4.12，有 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。如果$\mathfrak{h}_1'$ 是一个在 $\mathbb{C}^{2p}$上不可约地作用的非单李代数，则由命题 4.4和引理 4.12可知$2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

因此，我们考虑 $p=q$ 的情形。

当 $\mathfrak{h}\simeq\Delta\mathfrak{sp}_p$ 时，通过直接计算可得 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

当 $\mathfrak{h}\not\simeq\Delta\mathfrak{sp}_p$ 时，令 π_1 （分别为 π_2）： $\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{sp}_p\to\mathfrak{sp}_p$ 为第一（分别为第二）投影，并定义 $\mathfrak{h}_i:=\pi_i(\mathfrak{h})$，使得 $\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2\supset\mathfrak{h}$。根据假设， $\mathfrak{h}$在 $\mathbb{C}^{2p}$ 上不可约地作用，因此 $\mathfrak{h}_1$ 在 $\mathbb{C}^{2p}$ 上也不可约地作用。如果 $\mathfrak{h}_2$ 在$\mathbb{C}^{2p}$ 上不可约地作用，则由命题 4.6 可知，对于 $i=1,\ 2$，$2\rho_{\mathfrak{h}_i}<\rho_{\mathfrak{sp}_p}$，于是我们有

$$2\rho_{\mathfrak{h}}\le 2\rho_{\mathfrak{h}_1}+2\rho_{\mathfrak{h}_2}<\rho_{\mathfrak{sp}_p}+\rho_{\mathfrak{sp}_p}\le\rho_{\mathfrak{g}}.$$

因此， $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$ 成立。

在 $\mathfrak{h}_2$ 在 $\mathbb{C}^{2p}$ 上可约地作用的情形下，我们有 $\mathfrak{h}_2\subset\bigoplus_i\mathfrak{sp}_{n_i}\oplus\bigoplus_j\mathfrak{sl}_{m_j}$。如果 $\mathfrak{h}_2\subset\bigoplus_j\mathfrak{sl}_{m_j}$，那么 $\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{sl}_p$，由命题 4.3 可知 $2\rho_{\mathfrak{h}_2}<\rho_{\mathfrak{sp}_p}$。因此我们可以看出 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。

如果至少有一个 $n_i\ge 1$，它可以改写为 $\mathfrak{h}_2\subset\mathfrak{sp}_{n_1}\oplus\mathfrak{sp}_{n_2}(n_1+n_2=p,\ \ n_1\ge n_2\ \ge\ 1)$。我们将 $\mathfrak{sp}_{2p}$ 的李子代数 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}'$ 定义为 $\mathfrak{k}=\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{sp}_{n_1}\oplus\mathfrak{sp}_{n_2}$,$\mathfrak{h}':=\mathfrak{h}+(\mathfrak{sp}_{n_1}\oplus\mathfrak{sp}_{n_2})$ $=\mathfrak{h}_1'\oplus\mathfrak{sp}_{n_1}\oplus\mathfrak{sp}_{n_2}$。由于 $2\rho_{\mathfrak{h}_1'}<\rho_{\mathfrak{sp}_p}$ 和 $\rho_{\mathfrak{sp}_{n_1}\oplus\mathfrak{sp}_{n_2}}<\rho_{\mathfrak{sp}_{2p}/(\mathfrak{sp}_p\oplus\mathfrak{sp}_{n_1}\oplus\mathfrak{sp}_{n_2})}$，我们可以应用引理 4.12 得出 $2\rho_{\mathfrak{h}}<\rho_{\mathfrak{g}}$。□

References

[1] Y. Benoist 和 T. Kobayashi， *Tempered reductive homogeneous spaces*。《欧洲数学学会杂志》(JEMS) **17** (2015)，第12期，3015–3036页。[2] Y. Benoist 和 T. Kobayashi，
Tempered homogeneous spaces II。《动力系统、几何、数论——Margulis 对现代数学的影响》，213–245页。芝加哥大学出版社，美国伊利诺伊州芝加哥， [2022]。

[3] Y. Benoist 和 T. Kobayashi, *Tempered homogeneous spaces III*。《J. Lie Theory》**31** (2021)，第3期，833–869页。[4] Y. Benoist 和 T. Kobayashi, *Tempered homogeneous spaces IV*。《J. Inst. Math. Jussieu》**22** (2023)，第6期，2879–2906页。[5] P. Delorme, *Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs*。《Ann. of Math.》(2) **147** (1998)，第2期，417–452页。[6] E. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*。《Mat. Sbornik》**30**(1952)，349–462页；以及《Transl. AMS》**6** (1957)，111–244页。[7] E. Dynkin, *Maximal subgroups of the classical groups*。《Trudy Moskov. Mat. Obˇsˇc.》**1** (1952)，39–166页；以及《Transl. AMS》**6** (1957)，245–378页。[8] J. E. Humphreys。 *Introduction to Lie algebras and representation theory. Graduate Texts in* 。第 卷。 *Mathematics* **9** 1972 Springer-Verlag，纽约–柏林。[9] K. Maeda 和 Y. Oshima, *Square integrability of regular representations on reductive homogeneous spaces* 2601 02188 。arXiv：。。[10] E. vanden Ban 和 H. Schlichtkrull, *The Plancherel decomposition for a reductive symmetric space. II representation theory* **161** 2005 3, 567 628 。《Invent. Math.》( )，第 – 期。

（K.Maeda） Graduate School of Mathematical Sciences、 The University of Tokyo、3-8-1 Komaba、 Meguro、 153-8914 Tokyo、 Japan*Email address*： kmaeda@ms.u-tokyo.ac.jp